



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966- São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura Plena

VALDERLINO ARAUJO NINA

O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS APLICAÇÕES

SÃO LUÍS - MA

2024

VALDERLINO ARAUJO NINA 

O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS APLICAÇÕES

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura Plena
Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo

SÃO LUÍS - MA
2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Araujo Nina, Valderlino.

O teorema de Pitágoras e suas aplicações / Valderlino Araujo
Nina. - 2025.

33 f.

Orientador(a): Marcos Antônio Ferreira de Araújo. Monografia
(Graduação) - Curso de Matemática,
Universidade Federal do Maranhão, São Luís - Ma, 2025.

1. Pitágoras. 2. História. 3. Compreensão. 4.
Aplicações. I. Ferreira de Araújo, Marcos Antônio. II.
Título.

VALDERLINO ARAUJO NINA

O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS APLICAÇÕES

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho **aprovado**. São Luís - MA, 25/02/2025

Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof. Dr. Luís Fernando Coelho Amaral
DEMAT/UFMA
Primeiro Examinador

Prof. Me. Gabriel Araujo dos Santos
DDE/IFMA
Segundo Examinador

Aos meus familiares e amigos

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela conclusão deste trabalho, aos meus familiares que nos momentos mais difíceis estiveram ao meu lado me apoiando, aos meus filhos Natanael, Mateus e Emanuel que permeiam minha vida e me encorajam nessa jornada chamada vida, agradeço muito também a minha esposa Adriele que verdadeiramente é uma companheira que me sustenta com seu carinho, apoio e altruísmo, aos meus pais, que Deus os tenham, que me educaram no mais alto padrão de cidadania e respeito, à quem devo toda a minha educação e formação, agradeço ainda aos meus professores que contribuíram ao longo dessa caminhada, ao meu orientador o qual tenho muito respeito e ao professor Cléber que muito contribuiu para o término dessa graduação com seu incentivo e ânimo.

RESUMO

Este trabalho visa abordar o ensino da matemática voltado para o teorema de Pitágoras objetivando demonstrar as aplicações do teorema e fazendo com que o educador conheça algumas de suas propriedades para uma intervenção em sala de aula com praticidade e objetivismo para sua prática. Busca uma interação, conhecimento, didática, contextualização e prática do discente na sua realidade acadêmica na aplicação do teorema de Pitágoras primeiramente mostrando a história de Pitágoras com sua biografia e suas contribuições na escola Pitagórica, onde se faz necessário um estudo epistemológico, para uma melhor compreensão do tema a ser abordado. Na prática, as aplicações do teorema de Pitágoras foram abordadas de forma a dar mais compreensão empírica, mesclar a teoria com prática para proporcionar ao discente a absorção do conteúdo com sentido para sua vida, tornando o aprendizado prazeroso e não algo maçante. Foram aplicadas atividades em sala de forma a desenvolver as propriedades do teorema de Pitágoras em questões práticas e lúdicas.

Palavras-chaves:. Pitágoras, história, compreensão, aplicações.

ABSTRACT

This work aims to address the teaching of mathematics focused on the Pythagorean theorem, aiming to demonstrate the applications of the theorem and making the educator aware of some of its properties for an intervention in the classroom with practicality and objectivism for its practice. It seeks interaction, knowledge, didactics, contextualization and practice of the student in their academic reality in the application of the Pythagorean theorem, firstly showing the history of Pythagoras with his biography and his contributions in the Pythagorean school, where an epistemological study is necessary, for a better understanding of the topic to be addressed. In practice, the applications of the Pythagorean theorem were approached in order to provide more empirical understanding, mixing theory with practice to provide students with the absorption of content with meaning for their lives, making learning enjoyable and not boring. Activities were applied in the classroom in order to develop the properties of the Pythagorean theorem in practical and playful questions.

Keywords: Pythagoras, history, understanding, applications.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	8
2 DADOS HISTÓRICOS SOBRE PITÁGORAS.....	9
2.1 DA VIDA DE PITÁGORAS.....	9
2.2 A SOCIEDADE SECRETA DE PITÁGORAS	10
3 DO TEOREMA	12
3.1 A DEMONSTRAÇÃO CLÁSSICA	14
3.2 A DEMONSTRAÇÃO QUE USA SEMELHANÇA	14
3.3 A DEMONSTRAÇÃO DE PERIGAL.....	15
4 A RECÍPROCA DO TEOREMA DE PITÁGORAS.....	16
4.1 TERNOS PITAGÓRICOS	17
4.2 UMA FÓRMULA QUE GERA TERNOS PITAGÓRICOS	18
5 GENERALIZANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS	18
6 O TEOREMA DE PITÁGORAS NA VIDA COTIDIANA.....	21
6.1 CALCULANDO O COMPRIMENTO DE ESCADAS	22
6.2 PROJETO DE COBERTURAS INCLINADAS	22
6.3 DETERMINAR A ALTURA DOS EDIFÍCIOS.....	22
6.4 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS NA NAVEGAÇÃO	23
6.5 TEOREMA DE PITÁGORAS DO DESIGN DE INTERIORES	23
6.6 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS NA JARDINAGEM	24
6.7 O TEOREMA DE PITÁGORAS NO ESPORTE	24
7 EXERCÍCIOS	25
8 APLICANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS NO QUADRADO	28
9 APLICANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS NO TRIÂNGULO EQUILÁTERO.....	29
10 CONCLUSÕES	31
BIBLIOGRAFIA	32

1 INTRODUÇÃO

O Teorema de Pitágoras sempre teve sua importância na história humana, usado em civilizações antigas, tem sua origem um pouco questionada, já que mesmo antes de seu suposto autor, ter sido utilizado pelos babilônicos, fato esse comprovado por tabletes encontrados nessa região, e que se encontram no museu da universidade de Yale e no museu Britânico, esses tabletes provam o uso desse teorema e que os babilônicos tinham conhecimento dos ternos pitagóricos. Sendo ou não criado por Pitágoras, o fato é que tal teorema foi difundido, e se popularizou pela escola pitagórica.

Sua importância e uso nas várias instâncias, desde as civilizações antigas às sociedades modernas é indiscutível, perpassando pelas várias engenharias humanas, fazendo com que vários matemáticos buscassem outras formas de demonstrar esse teorema, além das que foram utilizadas no passado por gregos e outros povos antigos, o que acaba por abrir mais ainda o leque para diversas áreas do conhecimento humano. Vamos perpassar por algumas dessas demonstrações, mostrando assim a relevância desse teorema para nossa sociedade e a importância vital, do contato e compreensão, que nossos discentes devem ter de tal teorema, para desenvolver sua criatividade na resolução de problemas e aprimorar suas acuidades intelectuais.

2 Dados históricos sobre Pitágoras

2.1 Da vida de Pitágoras

Pitágoras nasceu de ilha de Samos, era filho de Menesarco, um rico comerciante, e Partêmis. Em sua juventude, foi inicialmente discípulo do filósofo Ferecídio, que era discípulo de Tales. Sendo que depois, passou a ser discípulo do próprio Tales, em Mileto. Tales reconhecendo os progressos de Pitágoras aconselhou-o a ir estudar geometria no Egito, então Pitágoras ainda bem jovem viajou não só para o Egito, mas também para a Babilônia e para a Caldéia, sendo influenciado pela matemática desses lugares, mas incomodado pelos métodos e falta de criteriosidade de egípcios e babilônicos, que faziam cálculos complexos, queriam as respostas certas, entretanto como isso acontecia era irrelevante para eles. Pitágoras queria entender os números e não só usá-los. Foi para Creta com o intuito de receber ensinamentos do filósofo Epinêmidas e em 532 a.C. retornou para Samos, que na época era governada pelo tirano Polícrates. As condições políticas da ilha impediram Pitágoras de ensinar livremente sobre suas experiências, o que o fez condenar publicamente a tirania em Samos. A resposta de Polícrates foi um convite para fazer parte da corte, afim de silenciar Pitágoras, este por sua vez, recusou o convite e fugiu para uma caverna, onde estudava sem temer perseguições. Chegou a pagar um aluno, para que este assistisse suas aulas, mas o estudante gostou tanto das aulas que passou a segui-lo de graça.

Na segunda metade do século VI a.C. Pitágoras deixa a ilha de Samos e se exila em Crotona, no sul da Itália. Ali, funda uma associação religiosa e secreta, sendo perseguido por suas idéias, mas odiava ser contestado.

Foi no período de sua viagem ao Egito, que impressionado com as pirâmides, desenvolve o famoso teorema que leva o seu nome, onde é possível calcular o lado de um triângulo retângulo, conhecendo seus outros dois lados. Para isso ele demonstra que o quadrado construído sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual à soma dos quadrados construídos sobre os outros dois lados. Mas, há evidências de que esse conhecimento já era utilizado por Babilônicos 1600 anos antes dele formular esse teorema.

Alguns povos antigos, também usavam técnicas para conseguir um triângulo retângulo, onde tomavam uma corda, fazendo nós com distâncias iguais e com marcações de três, quatro e cinco nós, juntavam o primeiro ao último nó, fincavam estacas nas marcações dos nós em três, quatro e cinco e obtinham um triângulo retângulo e assim um ângulo reto para suas construções.

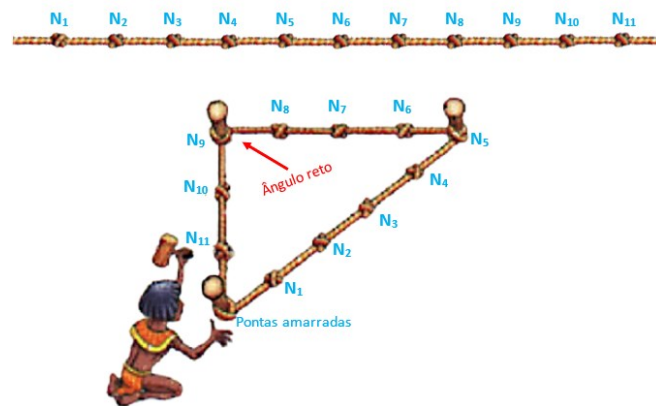


Figura 1:

Fonte: [Clubes.obmep.org.br/blog/problema-o-triângulo-3-4-5/](http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-o-triângulo-3-4-5/)

2.2 A Sociedade Secreta de Pitágoras

Ao retornar a Samos em 532 a.C. Pitágoras decide abrir uma escola para compartilhar os conhecimentos adquiridos durante suas viagens e exílio nas margens do rio Nilo e Eufrates, mas por conta do ditador Polícrates e de suas perseguições, foge para o sul da Itália, que na época era colônia da Grécia, mais precisamente em Crotona, e ali como fora bem recebido funda sua escola por volta de 530 a.C.



figura 2: *Pitágoras cunhado em moeda*

Fonte: <https://www.freemason.pt/pitagoras-e-a-maçonaria>

Com a ajuda de Milo, um homem de posses, cuja casa cedera à Pitágoras para fundar a irmandade pitagórica, consegue fundá-la com cerca de 600 membros. Pitágoras passa a ser reconhecido em Crotona, e as famílias mais abastadas da cidade lhe confiaram a educação de seus filhos.

Em sua escola Pitágoras ensinava sobre aritmética, geometria, música e

astronomia, esse conjunto de conhecimento era conhecido como *quadrivum*, que era a bagagem cultural necessária para uma pessoa bem educada da época. Também havia aulas de religião e moral. Pitagorismo foi o nome dado ao modo de vida e às doutrinas atribuídas à sua escola. O símbolo da escola era o pentágono estrelado.

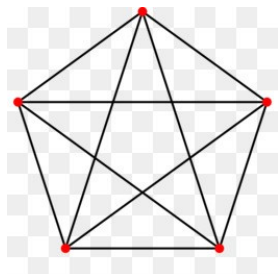


figura 3: *Pentágono Estrelado*

Fonte: <https://www.gratispng.com/png-tcan8q/>

A Escola Pitagórica foi considerada a “primeira universidade do mundo”, foi uma entidade parcialmente secreta, onde seus membros deviam obedecer às regras e manter segredo sobre o que era tratado em suas reuniões, que consistiam em trocar idéias sobre temas variados, além de apresentar novas perspectivas sobre esses temas.

Pitágoras dirigiu pessoalmente a escola durante 25 anos aproximadamente. Os alunos formados na escola, saíam para cargos proeminentes da sociedade e do governo local, o que os tornavam na maioria das vezes arrogantes em relação às massas ignorantes, apoiando o partido aristocrático. Algumas lendas relatam que essas massas responderam com violência à arrogância dos pitagóricos, incendiaram a escola, prendendo e matando o professor e alguns de seus discípulos.

Não há certeza sobre a data de morte de Pitágoras, mas estima-se que deve ter ocorrido por volta de 497 a.C.

Mesmo após sua morte, a sociedade pitagórica continuou, tendo desaparecido quando ocorreu o famoso massacre de metaponto, a revolta das massas ignorantes.

Pitágoras, após sua morte, ganha proporções lendárias, tanto que após um século de sua morte, acredita-se que o filósofo Filolau, de Crotona, tenha escrito um livro sobre as doutrinas de Pitágoras, que eram secretas e reservadas apenas para seus discípulos. Segundo a lenda, Platão paga uma pequena fortuna pelos fragmentos desse livro, e que estes tiveram forte influência sobre ele.

3 Do teorema

Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

Se a é a medida da hipotenusa e se b e c são as medidas dos catetos.

O enunciado do Teorema de Pitágoras equivale a afirmar que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Vamos recordar algumas características do **triângulo retângulo**.

- É aquele que tem um ângulo reto.
- O lado oposto ao ângulo reto chama-se **hipotenusa**.
- Os lados que formam o ângulo reto chamam-se **catetos**.

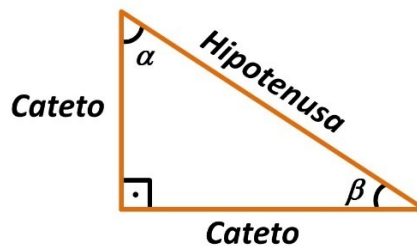
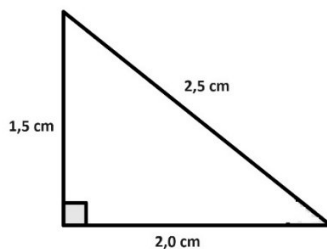


Figura 4 (triângulo retângulo com seus elementos)
Fonte: <http://www.bing.com/images/search?view>

Exemplo 1: Vamos considerar o triângulo retângulo da figura abaixo, em que a hipotenusa mede 2,5 cm, e os catetos medem 2,0 cm e 1,5 cm.



Construindo quadrados sobre os lados do triângulo retângulo dado, obtemos a figura.

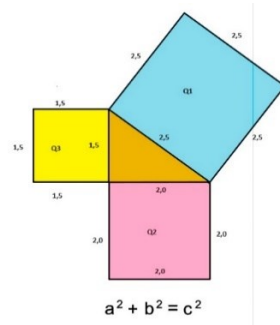


Figura 5:
Fonte: <https://papercraftetc.blogspot.com/2023/11/a-stem-project-proving-pythagorean.html>

Observando a figura responderemos às perguntas.

- Seja Q1 o quadrado construído sobre a hipotenusa e A1 a sua área, determine o valor de A1.

Sabendo que o lado do quadrado é igual à 2,5 , podemos calcular sua área através do produto de seus lados, assim:

$$L \cdot L = 2,5 \cdot 2,5 = 6,25 = A1$$

- Seja Q2 o quadrado construído sobre o cateto que mede 2,0 cm e A2 a sua área, determine o valor de A2.

De forma semelhante ao item anterior calcularemos a área de Q2 através do produto dos lados do quadrado.

$$L \cdot L = 2 \cdot 2 = 4 = A2$$

- Seja Q3 o quadrado construído sobre o cateto que mede 1,5 cm e A3 a sua área, determine o valor de A3.

Mais uma vez de forma análoga vamos calcular A3:

$$L \cdot L = 1,5 \cdot 1,5 = 2,25 = A3$$

- Escreva uma igualdade usando os valores encontrados para A1, A2 e A3.

Podemos verificar que se somarmos A2 com A3, tal soma será igual à A1, assim:

$$A1 = A2 + A3$$

De acordo com a resposta dada no item anterior, podemos dizer que:

“A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos”.

Essa descoberta estava inicialmente restrita a um triângulo retângulo particular: o triângulo retângulo isósceles. Porém, estudos realizados posteriormente mostraram que a relação métrica descoberta era válida para todos os triângulos retângulos. Tomando o exemplo 1 nos permite estabelecer uma relação entre as medidas dos lados desse triângulo retângulo escaleno:

$$2,5^2 = 1,5^2 + 2,0^2 \text{ ou } 6,25 = 2,25 + 4$$

Podemos então, enunciar o **teorema de Pitágoras**:

“Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos”.

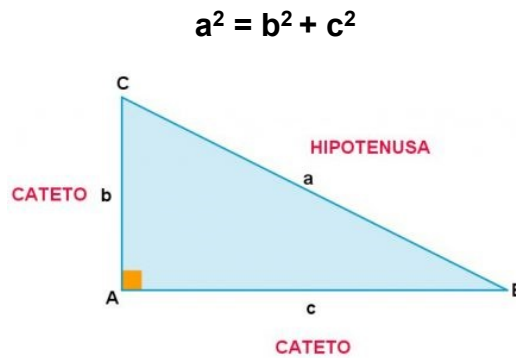
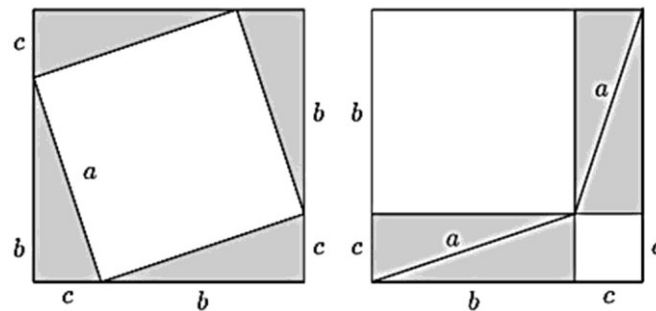


Figura 6:

Fonte: <https://www.institutoeducarte.org.br/post/trigonometria-matematica>

3.1 A demonstração clássica

Dado um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c , considere o quadrado cujo lado é $b + c$.



Figuras 7:

Fonte: www.obmep.org.br/docs/apostila3

Na figura da esquerda, retiramos do quadrado de lado $b + c$, quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado a . Na figura da direita, retiramos também do quadrado de lado $b + c$ os quatro triângulos iguais ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado b e um quadrado de lado c . Logo, a área do quadrado de lado a é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados medem b e c . Esta simples e engenhosa demonstração pode ter sido a que os pitagóricos imaginaram.

3.2 A demonstração que usa semelhança

Esta talvez, seja a demonstração mais frequente. A partir de um triângulo ABC , retângulo em A , traçamos a altura AH e verificamos que os triângulos AHB e AHC são semelhantes ao triângulo ABC .

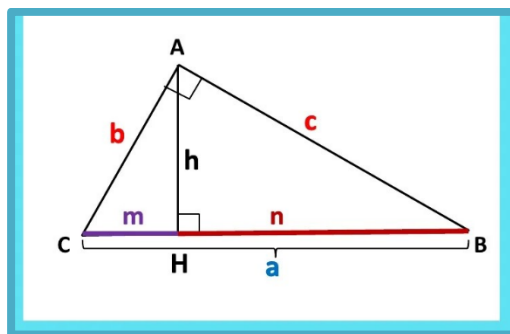


Figura 8:

Fonte: [Triângulo Retângulo - Toda Matéria](#)

Da semelhança dos triângulos AHC e ABC temos $b^2 = am$ e, da semelhança dos triângulos AHB e ABC, temos $c^2 = an$. Somando essas duas relações membro a membro, encontramos:

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m + n) = a \cdot a = a^2.$$

Esta demonstração é a mais frequente hoje nas escolas porque permite, com um único e pequeno esforço, não só demonstrar o Teorema de Pitágoras de forma bastante simples, como também encontrar as relações importantes do triângulo retângulo. Além das duas relações, que deram origem à demonstração do teorema, obtemos a relação $bc = ah$, que também se interpreta com o conceito de área, e $h^2 = mn$, que revela o importante fato de que a altura é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

3.3 A demonstração de Perigal

Henry Perigal, um livreiro em Londres, publicou em 1873 a demonstração que se pode apreciar na figura a seguir. Trata-se da forma mais evidente de mostrar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenchem o quadrado construído sobre a “principal” hipotenusa.

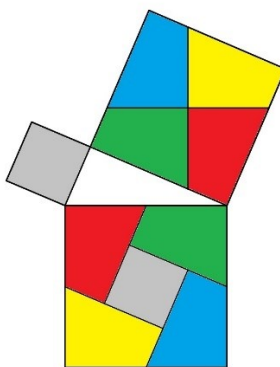


Figura 9

Fonte: [Teorema de Pitágoras de H. Perigal – GeoGebra](#)

Perigal corta o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo seu centro, uma paralela à hipotenusa do triângulo e outra perpendicular, dividindo esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes e mais o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.

4 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

A pergunta agora é: se a , b e c são reais positivos com $a^2 = b^2 + c^2$ será o triângulo de lados a , b , e c retângulo? Intuitivamente, pensamos que sim. Mas, devemos demonstrar isto.

Consideremos então um triângulo ABC com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$.

1º caso: $A < 90^\circ$

Imaginemos que $b \leq c$. Assim, o ponto D, projeção de C sobre AB, cai no interior do lado AB. Sejam $AD = x$ e $CD = h$.

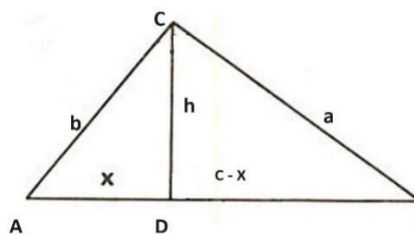


Figura 10

Fonte: [Academia Pythagórica: A Recíproca do Teorema de Pitágoras](#)

Como o triângulo ADC é retângulo, temos $b^2 = h^2 + x^2$. Como o triângulo BDC é retângulo, temos:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$, que contradiz a condição inicial.

2º caso: $A > 90^\circ$

Agora, o ponto D cai fora do lado AB.

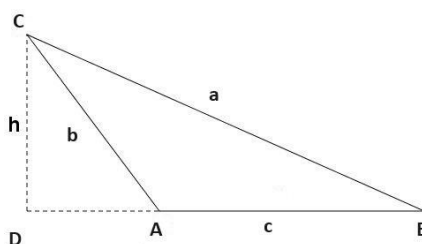


Figura 11

Fonte: www.obmep.org.br/docs/apostila3

Os mesmos cálculos que fizemos no caso anterior nos levam a

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$$

ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, novamente contradizendo a condição inicial.

Demonstramos então que em um triângulo ABC, de lados a, b e c,

$$A < 90^\circ \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$A > 90^\circ \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

Dessa forma para que a condição $a^2 = b^2 + c^2$ seja satisfeita, implica necessariamente que $A = 90^\circ$.

4.1 Ternos Pitagóricos

O triângulo de lados 1, 3 e $\sqrt{10}$ é retângulo?

$$\text{Sim, pois } (\sqrt{10})^2 = 1^2 + 3^2.$$

Durante toda a história antiga e mesmo até hoje, temos curiosidade em encontrar triângulos retângulos cujos lados são medidos por números inteiros. Todos nós sabemos que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo, mas você sabia que o triângulo de lados 372, 925 e 997 é retângulo? Este é inclusive o triângulo retângulo de maior perímetro que tem lados menores que 1 000. Nossa curiosidade nos leva a seguinte pergunta:

“Como encontrar triângulos retângulos cujos lados tenham medidas inteiras?”

Definição. Sendo a, b e c inteiros positivos com $b < c < a$ dizemos que (b, c, a) é um terno pitagórico se $a^2 = b^2 + c^2$.

Assim, (3, 4, 5) e (5, 12, 13) são exemplos de ternos pitagóricos.

Um terno pitagórico (b, c, a) é chamado primitivo, quando b e c são primos entre si, ou seja, quando $\text{mdc}(b, c) = 1$. Assim, (3, 4, 5) é um terno pitagórico primitivo. Naturalmente, qualquer terno da forma (3k, 4k, 5k) com k inteiro e maior que 1 é também pitagórico, mas não primitivo.

4.2 Uma fórmula que gera ternos pitagóricos

Sendo m e n inteiros positivos com $m > n$ considere:

$$b = m^2 - n^2, c = 2mn, a = m^2 + n^2.$$

Veja que (b, c, a) é um terno pitagórico pois:

$$b^2 + c^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 =$$

$$m^4 + n^4 + 2m^2n^2 =$$

$$(m^2 + n^2)^2 = a^2.$$

Assim, para qualquer escolha de números inteiros m e n, o terno (b, c, a) é pitagórico. Por exemplo, para $m = 7$ e $n = 4$ encontramos o terno pitagórico (33, 56, 65). Observe que, se nesta fórmula você atribuir para m e n valores ambos pares ou ambos ímpares, você encontrará um terno pitagórico não primitivo, pois todos os termos do terno serão pares. Se a sua escolha de m e n conduzir a valores de b e c que sejam primos entre si, você encontrará um terno pitagórico primitivo. Esta fórmula é atribuída a Platão (séc.4 a.C.), mas existem outras.

5 Generalizando o Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras afirma que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Agora, imaginemos figuras semelhantes quaisquer, construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.

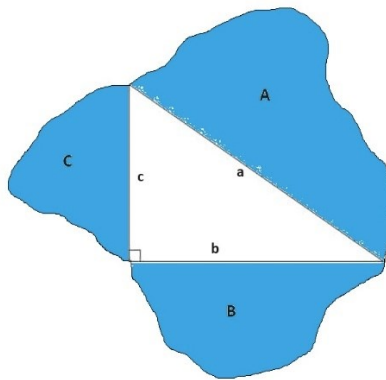


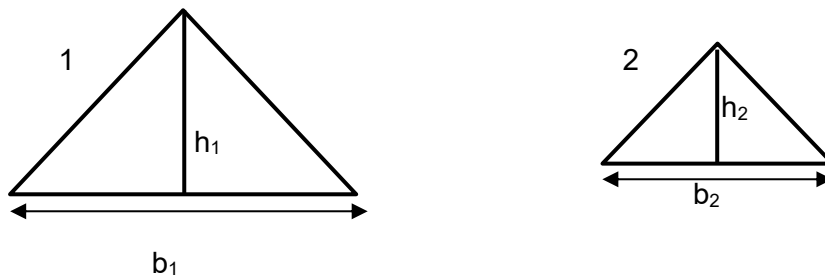
Figura 12

Fonte: <C:/Documents and Settings/famf/Desktop/Material/Material pronto/Apostilas/3 Teorema de Pitagoras/principal.dvi>

Sejam então A, B e C as áreas de figuras semelhantes, construídas sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c de um triângulo retângulo, como mostra a figura acima.

Vamos utilizar o teorema de razão entre áreas de figuras semelhantes, que diz seguinte: *“a razão entre as áreas de duas superfícies semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança”*.

Tomemos então dois triângulos semelhantes 1 e 2:



Por semelhança podemos obter a igualdade da razão entre seus lados correspondentes, assim:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2} = k$$

Tomando agora a razão entre as áreas dos triângulos 1 e 2, temos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{b_1 \cdot h_1}{2}}{\frac{b_2 \cdot h_2}{2}} = \frac{b_1 \cdot h_1}{b_2 \cdot h_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k \cdot k = k^2$$

$$\text{logo: } \frac{A_1}{A_2} = k^2$$

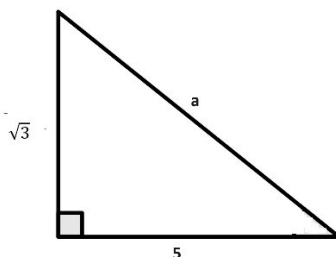
Sabemos agora que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

$$\text{Então, } \frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \text{ ou } \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} \text{ e } \frac{A}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \text{ ou } \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}, \text{ daí } \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Pela propriedade das proporções, como $a^2 = b^2 + c^2$, concluímos que $A = B + C$.

Isto quer dizer que, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos. Esta é uma generalização do teorema de Pitágoras.

Analisemos as situações a seguir que envolvem triângulos retângulos. Qual o valor da medida “a” no triângulo retângulo da figura?



Como o triângulo é retângulo, vamos utilizar o teorema de Pitágoras para encontrar o valor da medida “a”.

$$a^2 = 5^2 + (\sqrt{3})^2 \quad a^2 = 25 + 3 \quad a = \sqrt{28} \quad a = 2\sqrt{7}$$

Logo, “a” mede $2\sqrt{7}$ m.

Em um triângulo retângulo ABC, a hipotenusa mede $a = 13$ cm e um dos catetos mede $b = 12$ cm. Quanto mede o outro cateto?

De acordo com o teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$ Como são dados $a = 13$ e $b = 12$, podemos escrever:

$$13^2 = 12^2 + c^2$$

$$169 = 144 + c^2$$

$$c^2 = 169 - 144$$

$$c^2 = 25$$

$$c = \sqrt{25}$$

$$c = 5$$

Então , o outro cateto mede 5 cm.

Os lados de triângulo medem 16 cm, 30 cm e 34 cm. Vamos verificar se esse triângulo é retângulo.

Para verificar se o triângulo é ou não retângulo, aplicamos a recíproca do teorema de Pitágoras, ou seja, sendo $a = 34$ cm, $b = 30$ cm e $c = 16$ cm, temos:

$$a^2 = 34^2 = 1156$$

$$b^2 = 30^2 = 900$$

$$c^2 = 16^2 = 256$$

$$\text{como } 1156 = 900 + 256, \text{ temos } a^2 = b^2 + c^2$$

Como as medidas dos lados satisfazem o teorema de Pitágoras, então podemos dizer que o triângulo é retângulo.

6 O Teorema de Pitágoras na vida cotidiana

Um dos princípios matemáticos mais conhecidos e úteis que aprendemos na escola é o teorema de Pitágoras. Sendo que esse princípio tem muitas aplicações práticas no dia a dia. Da construção à navegação, o teorema de Pitágoras é usado em diversas situações para resolver problemas e tomar decisões importantes.

Fórmula e exemplo do teorema

O teorema estabelece uma relação fundamental na geometria entre os lados de um triângulo retângulo.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

onde “a” é a hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto) e “b” e “c” são os outros dois lados do triângulo (catetos).

O teorema de Pitágoras é usado para determinar o comprimento de um lado de um triângulo retângulo quando os comprimentos dos outros dois lados são conhecidos. É especialmente útil em várias áreas da matemática, física, engenharia e outras ciências aplicadas. Sendo também usado na vida cotidiana, como:

Determinar distâncias: na vida real, como o comprimento de uma escada, necessário para atingir uma certa altura.

Problemas de navegação e geografia: para encontrar a menor distância entre dois pontos.

Aplicações em física: calcular o deslocamento e trajetórias.

Exemplo

Suponha que temos um triângulo retângulo onde, $c = 3$ e $b = 4$. Queremos encontrar a hipotenusa (a).

Aplicando o teorema de Pitágoras temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 4^2 + 3^2$$

$$a^2 = 16 + 9$$

assim a hipotenusa (a) mede 5 unidades.

$$a^2 = 25$$

$$a = \sqrt{25}$$

$$a = 5$$

6.1 Calculando o comprimento de escadas

Quando se trata de construir escadas o teorema de Pitágoras tem enorme utilidade. Para determinar o comprimento necessário de uma escada, os construtores medem a altura vertical que ela deve atingir e a distância horizontal da base da escada até a parede. A partir daqui usa-se o teorema para calcular o comprimento da escada, garantindo que ela seja longa o suficiente para atingir com segurança a altura desejada.

6.2 Projeto de coberturas inclinadas

O projeto de telhados inclinados também requer o uso do teorema de Pitágoras, os construtores devem calcular o comprimento das vigas (as que sustentam o telhado) com base na inclinação e na largura do telhado. Assim, usando o teorema de Pitágoras, pode-se determinar o comprimento das vigas necessárias para criar um telhado sólido e estável, sem margem para erros.

6.3 Determinar a altura dos edifícios

Uma das técnicas que os topógrafos utilizam para calcular a altura dos edifícios, envolve o teorema de Pitágoras. De forma análoga ao cálculo da escada , mede-se a distância de um ponto no solo até a base do edifício e o ângulo até o

topo do edifício, os topógrafos podem criar um triângulo retângulo. A partir daí usa-se o teorema de Pitágoras para calcular a altura do edifício.

6.4 Aplicações do teorema de Pitágoras na navegação

Calculando distâncias no mar

A navegação marítima nunca é feita em linha reta por conta de correntes oceânicas e ventos, fatores que influenciam diretamente na navegação. Assim, para calcular a distância real percorrida, os navegadores usam o teorema de Pitágoras, considerando as distâncias norte-sul e Leste-Oeste percorridas como sendo os catetos de um triângulo retângulo.

Determinando a altura de um farol

Mesmo com a modernidade tecnológica, algumas estruturas ainda são de extrema importância para a navegação, como os faróis, que garantem a segurança na navegação, assim sua altura deve ser calculada com precisão. Na construção de um novo farol, os engenheiros calculam sua altura com base na distância em que ele deve ser visível aos navios, garantindo que o farol seja alto o suficiente para cumprir sua função de orientação. Logo, o princípio do teorema de Pitágoras é usado em tal empreita.

Navegação aérea

O teorema de Pitágoras também é aplicado na navegação aérea. Os pilotos usam o teorema para calcular a distância percorrida durante o voo, observando a distância percorrida no solo e a altitude da aeronave. Isso pode determinar o tempo de voo e a quantidade de combustível necessário no percurso.

6.5 Teorema de Pitágoras do design de interiores

Calculando a diagonal de uma sala

O designer ao projetar o interior de um cômodo deve saber o comprimento da diagonal desse cômodo, pois isso é útil para determinar o posicionamento de móveis e decorações. Nesse momento, o uso do teorema de Pitágoras facilita a vida dos designers, que podem calcular facilmente a diagonal medindo o comprimento e a largura do cômodo.

Design de móveis

Na fabricação de móveis o princípio também pode ser utilizado para criar peças estáveis e bem proporcionadas. Um exemplo é na fabricação de uma mesa retangular, para se garantir que as pernas sejam colocadas no ângulo certo dando suporte ideal, usa-se o teorema de Pitágoras .

Colocando fotos e decorações

Até mesmo ao fazer decorações de formas simétricas, o teorema de Pitágoras é de grande valia, ao medir a distância horizontal e vertical de um ponto de referência, usa-se o teorema para calcular a distância diagonal garantindo um posicionamento uniforme.

6.6 Aplicações do teorema de Pitágoras na jardinagem

Nesse tipo de projeto o teorema de Pitágoras pode ser usado na criação de formas e padrões interessantes. Os jardineiros podem usá-lo para calcular as dimensões de triângulos retângulos e criar designs geométricos atraentes em espaços verdes.

Calculando o comprimento de mangueiras

Por incrível que pareça, até mesmo para calcular o comprimento de uma mangueira para regar um jardim alcançando todas as suas áreas, o teorema é útil. Para isso, basta calcular a distância horizontal e vertical da torneira até o ponto mais distante do jardim.

6.7 O teorema de Pitágoras no esporte

Calculando distâncias no golfe

No jogo de golfe usar o taco certo e dar uma tacada precisa, vem muito de você ter noção da distância do buraco. Os golfistas podem usar o teorema de Pitágoras para calcular essa distância levando em consideração a diferença de altura entre a bola e o buraco, bem como a distância horizontal.

Projeto de pista de atletismo

O projeto de pistas de atletismo também requer o uso do teorema de Pitágoras. Para que a pista tenha o comprimento correto, são calculadas as

dimensões de curvas e retas através desse princípio e assim, os atletas podem competir em condições ideais.

7 EXERCÍCIOS

1) Os lados de um triângulo ABC medem 26 cm, 24 cm e 10 cm. Mostre que esse triângulo é retângulo.

Resposta: como o triângulo é retângulo, temos que o maior lado é a hipotenusa, e os outros dois os catetos, assim pelo teorema de Pitágoras, vale a igualdade:

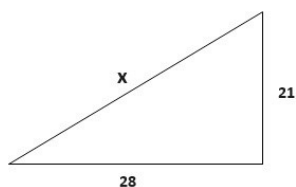
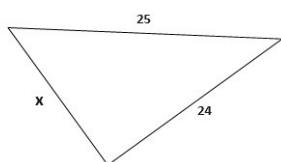
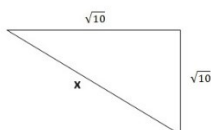
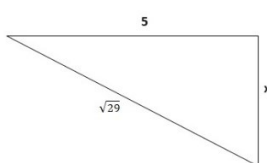
$$26^2 = 24^2 + 10^2$$

$$676 = 576 + 100$$

$$676 = 676$$

Como a igualdade é verdadeira, o triângulo é retângulo.

2) Calcule a medida x em cada um dos triângulos retângulos a seguir.



Usaremos o teorema de Pitágoras em cada triângulo;

$$(\sqrt{29})^2 = 5^2 + x^2$$

$$29 = 25 + x^2$$

$$x^2 = 29 - 25$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{4}$$

$$x = 2$$

$$x^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2$$

$$x^2 = 100 + 100$$

$$x = \sqrt{200}$$

$$x = 10\sqrt{2}$$

$$25^2 = x^2 + 24^2$$

$$625 = x^2 + 576$$

$$x^2 = 625 - 576$$

$$x = \sqrt{49}$$

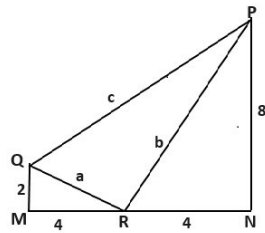
$$x=7$$

$$x^2 = 28^2 + 21^2$$

$$x^2 = 784 + 441$$

$$x = 1225$$

3) Considerando a figura a seguir, determine:



a) a medida a ;

Tomando o triângulo QMR e nele aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = 2^2 + 4^2$$

$$a^2 = 4 + 16$$

$$a^2 = 20$$

$$a = \sqrt{20}$$

$$a = 2\sqrt{5}$$

b) a medida b ;

Olhando agora para o triângulo PNR e aplicando o teorema de Pitágoras, encontramos:

$$b^2 = 4^2 + 8^2$$

$$b^2 = 16 + 64$$

$$b^2 = 80$$

$$b = \sqrt{80}$$

$$b = 4\sqrt{5}$$

c) a medida c ;

No triângulo PQR temos:

$c^2 = a^2 + b^2$, substituindo a e b encontrados nos itens anteriores ;

$$c^2 = (2\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2$$

$$c^2 = 4 \cdot 5 + 16 \cdot 5$$

$$c^2 = 20 + 80$$

$$c^2 = 100$$

$$c = \sqrt{100}$$

$$c = 10$$

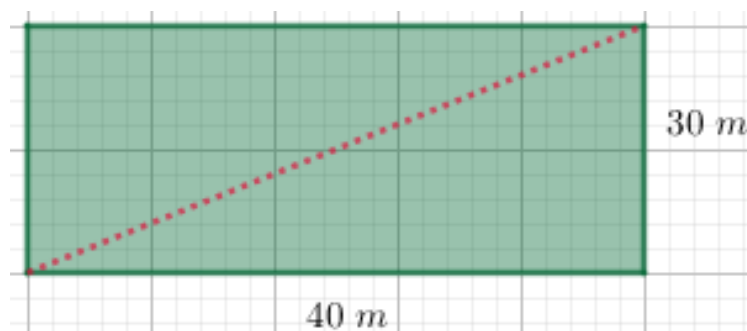
d) o perímetro do trapézio MNPQ.

$$P(MNPQ) = 10 + 8 + 4 + 4 + 2 = 28$$

Problemas de Aplicação

Problema 1: Medindo a Diagonal de um Terreno

Imagine que você tem um terreno retangular e precisa descobrir a medida da sua diagonal. Se os lados do terreno medem 30 metros e 40 metros, qual será a medida da diagonal?

**Resolução:**

Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$d^2 = 30^2 + 40^2 \quad (d = \text{diagonal})$$

$$d^2 = 900 + 1600$$

$$d^2 = 2500$$

$$d = \sqrt{2500} = 50$$

Portanto, a diagonal do terreno mede 50 metros.

Problema 2: Altura de uma Escada Encostada na Parede

Uma escada de 13 metros está encostada em uma parede. Se a base da escada está a 5 metros de distância da parede, qual é a altura que a escada atinge na parede?

Resolução:

Neste caso, a escada é a hipotenusa, a distância da base à parede é um dos catetos, e a altura que a escada atinge é o outro cateto.

Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$13^2 = 5^2 + h^2 \quad (h = \text{altura})$$

$$169 = 25 + h^2$$

$$h^2 = 169 - 25$$

$$h^2 = 144$$

$$h = \sqrt{144} = 12$$

Assim, a escada atinge uma altura de 12 metros na parede.

8 APLICANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS NO QUADRADO

Aplicando o teorema de Pitágoras no quadrado, podemos estabelecer uma importante relação entre a medida da diagonal e a medida do lado do quadrado. No quadrado ABCD, ℓ é a medida do lado, e d , a medida da diagonal. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, podemos escrever:

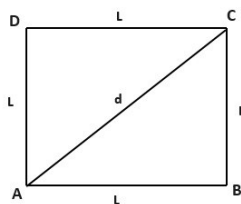


Figura 13

Fonte: <https://www.google.com/search/about-this-image?img=>

$$d^2 = L^2 + L^2$$

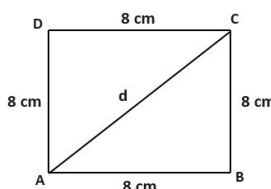
$$d^2 = 2L^2 \quad (L > 0)$$

$$d = \sqrt{2L^2}$$

$$d = L\sqrt{2}$$

Acompanhe a situação a seguir.

Quanto mede a diagonal do quadrado abaixo?



Pela expressão vista anteriormente, temos $d = L\sqrt{2}$, substituindo L por 8, temos

$d = 8\sqrt{2}$. Logo a medida da diagonal desse quadrado é $8\sqrt{2}$ cm.

A diagonal de um quadrado mede 10 cm. Quanto mede o lado L desse quadrado? Pela situação, temos $d = 10$ cm.

Substituindo na expressão $d = L\sqrt{2}$, temos:

$$10 = L\sqrt{2}$$

$$L\sqrt{2} = 10$$

$$L = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$L = \frac{10\sqrt{2}}{2}$$

$$L = 5\sqrt{2}$$

Logo, o lado desse quadrado mede $5\sqrt{2}$ cm.

9 APLICANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS NO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo equilátero, podemos estabelecer uma relação importante entre a medida h da altura e a medida L do lado do triângulo.

A figura abaixo é um triângulo equilátero, em que L é a medida do lado, e h é a medida da altura.

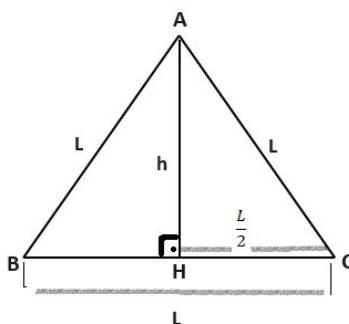


Figura 14

Fonte: [Aplicando o Teorema de Pitágoras, é possível estabelecer uma relação importante entre a medida h da - Brainly.com.br](https://brainly.com.br)

No triângulo equilátero, a altura e a mediana coincidem; logo, o ponto H é o ponto médio do lado BC . Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AHC (H é reto), temos

$$\begin{aligned} L^2 &= h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ h^2 &= L^2 - \frac{L^2}{4} \\ h^2 &= \frac{3L^2}{4} \\ h &= \sqrt{\frac{3L^2}{4}} \quad (L > 0) \\ h &= \frac{L\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Acompanhe a seguir as situações.

Vamos determinar a medida h da altura de um triângulo equilátero de lado 20 cm. Substituindo L por 20 na expressão $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$, podemos escrever:

$$h = \frac{20\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = 10\sqrt{3}$$

Logo, a altura desse triângulo equilátero mede $10\sqrt{3}$ cm.

A altura de um triângulo equilátero mede 9 cm. Qual é a medida L do lado desse triângulo?

Substituindo h por 9 em $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$9 = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

$$L\sqrt{3} = 18$$

$$L = \frac{18}{\sqrt{3}}$$

$$L = \frac{18\sqrt{3}}{3}$$

$$L = 6\sqrt{3}$$

Logo, a medida do lado desse triângulo é $6\sqrt{3}$ cm.

10 Conclusões

O Teorema de Pitágoras tem mostrado sua importância para a humanidade ao longo do tempo, com sua inserção em várias engenharias, não é apenas um simples teorema, mas um pilar para novas descobertas, e com sua singeleza e beleza de raciocínio, tem levado pessoas a apreciar a matemática com novas perspectivas, descobrindo outros teoremas que fascinam e corroboram para o progresso da humanidade, provando assim que a matemática não são apenas cálculos, mas uma visão diferente de mundo e universo. Que nossos docentes tenham a perspicácia de propagar a beleza desse teorema aos discentes, despertando-os para o mundo das ciências matemáticas. O teorema de Pitágoras pode e deve ser visto, como uma ferramenta altamente lúdica, para que nossos alunos agucem seus sentidos para o silogismo matemático.

Bibliografia

OLIVEIRA, Ana Maria Libório, NASCIMENTO, Edinaldo da Silva. **“A trajetória de vida de Pitágoras e suas principais contribuições à Matemática”**, ITINERARIUS REFLECTIONS, revista eletrônica de graduação e pós-graduação em educação, V.16/Nº2/2020.

ANDRADE, Alessandra Oliveira. **“Pitágoras”**. Instituição: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, 2014.

PORFÍRIO, Francisco. **“Pitágoras”**; *Brasil Escola*. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/filosofia/pitagoras-1.htm>. Acesso em 01 de fevereiro de 2024.

BONUMÁ, T. VAINDINER, R. **Pitágoras não criou o Teorema de Pitágoras**. Disponível em: <https://aventurasnahistoria.uol.com.br/noticias/almanaque/pitagoras-nao-criou-o-teorema-de-pitagoras.phtml>>. Acesso em 20 de janeiro de 2024.

QUILHAIS, Kleber. **Relações métricas no triângulo retângulo**. Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2015/04/relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo.html>>. Acesso em 20 de janeiro de 2024.

WAGNAER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas**, Rio de Janeiro, IMPA, 2015.
DOLCE, Osvaldo, NICOLAU POMPEO, José – Fundamentos de Matemática elementar vol 9. São Paulo: Editora Atual, 7ª edição, 1998.

EVES, Howard - Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. Editora Unicamp, São Paulo, 2ª Edição, 1997.

Giovanni Júnior, José Ruy. **A conquista da matemática**: 9º ano: ensino fundamental: anos finais / José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. — 4. ed. — São Paulo: FTD, 2018.