



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Raabe Rodrigues Rosa

O Teorema do Valor Médio de Lagrange e Aplicações

São Luís - MA
2025

Raabe Rodrigues Rosa 

O Teorema do Valor Médio de Lagrange e Aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciada em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Universidade Federal do Maranhão

Orientadora: Prof. Dr^a. Valdiane Sales Araújo

São Luís - MA

2025

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Rodrigues Rosa, Raabe.

O Teorema do Valor Médio de Lagrange e Aplicações /
Raabe Rodrigues Rosa. - 2025.
45 p.

Orientador(a): Valdiane Sales Araújo.

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática,
Universidade Federal do Maranhão, São Luís - Ma, 2025.

1. Derivadas. 2. Rolle. 3. Valor Médio. 4.
Lagrange. 5. Aplicações. I. Sales Araújo, Valdiane. II.
Título.

Raabe Rodrigues Rosa 

O Teorema do Valor Médio de Lagrange e Aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciada em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA,

Prof. Dr^a. Valdiane Sales Araújo
DEMAT/UFMA
Orientadora

Prof. Dr^a. Vanessa Ribeiro Ramos
DEMAT/UFMA
Primeira Examinadora

Prof. Dr^a. Renata de Farias Limeira Carvalho
DEMAT/UFMA
Segunda Examinadora

A meus pais, por todo o amor, pelos ensinamentos e pelo incentivo.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, toda honra e glória sejam dadas a Deus. Sem Ele, nada disso seria possível. Foi Sua graça que me fortaleceu e sustentou, tanto espiritualmente quanto emocionalmente, permitindo-me chegar até aqui.

Agradeço aos meus amados pais, Antonio de Sousa Rosa e Janete Rodrigues Rosa, minha eterna gratidão. Mesmo com a distância de quase 300 km, seu amor e apoio nunca vacilaram. Pelo contrário, foram minha base, minha fortaleza, sempre me incentivando a seguir em frente e a transformar em realidade um sonho que cultivo desde o Ensino Fundamental. Às minhas queridas irmãs do meu coração, Jádna Rodrigues e Adna Rodrigues. O amor incondicional e o apoio constante de vocês foram essenciais em cada etapa dessa jornada. Saber que sempre posso contar com vocês torna tudo mais leve e especial, e sou profundamente grata por tê-las como irmãs, compartilhando cada momento dessa caminhada comigo. Com muito carinho, agradeço também a minha vizinha Carmelita de Sousa e a minha mãezinha Maria Beatriz (*in memoriam*).

A todos os amigos que tive a felicidade de conhecer ao longo da minha jornada neste curso de Matemática, minha sincera gratidão. Cada um, de alguma forma, contribuiu para o meu crescimento como estudante e como pessoa, tornando essa caminhada mais leve e significativa. Sou imensamente grata pelas amizades que construí nesse ambiente que a UFMA me proporcionou. Em especial, a minha amiga Ana Carolina. O que dizer dela? Faltam palavras para expressar minha gratidão por essa amizade tão especial que Deus me deu. Amizade cura, traz alegria, às vezes desafia, mas é um dos maiores presentes que podemos ter. Saber que posso contar com você, assim como você pode contar comigo, é algo que valorizo profundamente. Obrigada por estar comigo até aqui – e sei que essa amizade seguirá além dessa etapa.

Agradeço à minha orientadora, Valdiane Sales Araújo, a professora que, desde minha primeira disciplina no curso, a escolhi como minha futura orientadora deste trabalho. Seu jeito único de ensinar Matemática me cativou e reforçou ainda mais minha paixão pela Matemática. Ao longo do caminho, foi mais do que uma orientadora; foi um exemplo de dedicação e inspiração, alguém em quem me espelho e por quem tenho imensa gratidão. Seu apoio esteve presente nos momentos em que mais precisei, e saber que pude contar com sua orientação fez toda a diferença. Obrigada por tudo!

"Até aqui o Senhor Deus nos ajudou"

1 Samuel 7:12.

Resumo

O Teorema do Valor Médio (TVM) é um dos principais resultados do Cálculo Diferencial e Integral e tem grande importância na Análise Real. Formulado por Joseph Lagrange, ele fornece uma ferramenta essencial para o estudo de funções deriváveis, servindo como base para a demonstração de diversas propriedades e teoremas. Para compreendê-lo, é fundamental conhecer o Teorema de Rolle, do qual o TVM é uma generalização. Ambos desempenham um papel central na Análise, permitindo justificar resultados importantes e desenvolver novas abordagens matemáticas. Seu estudo aprofunda a compreensão do comportamento das funções, amplia suas aplicações dentro e fora do contexto teórico e abre caminho para aplicações que vão além da teoria matemática.

Este trabalho visa explorar a essência do TVM, apresentando os conceitos fundamentais para sua compreensão e destacando suas aplicações. Para isso, a metodologia adotada consistiu em uma pesquisa bibliográfica baseada em livros e materiais acadêmicos relevantes sobre o tema. Dessa forma, este estudo se mostra importante para aprofundar o entendimento de um dos teoremas mais relevantes do Cálculo Diferencial e Integral, demonstrando sua aplicabilidade e seu impacto no desenvolvimento da matemática.

Palavras-chave: Derivadas. Rolle. Valor Médio. Lagrange. Aplicações.

Abstract

The Mean Value Theorem (MVT) is one of the main results of Differential and Integral Calculus and is of great importance in Real Analysis. Formulated by Joseph Lagrange, it provides an essential tool for the study of derivable functions, serving as a basis for the demonstration of several properties and theorems. To understand it, it is essential to know Rolle's Theorem, of which the MVT is a generalization. Both play a central role in Analysis, allowing the justification of important results and the development of new mathematical approaches. Their study deepens the understanding of the behavior of functions, broadens their applications within and outside the theoretical context, and paves the way for applications that go beyond mathematical theory.

This work aims to explore the essence of the MVT, presenting the fundamental concepts for its understanding and highlighting its applications. To this end, the methodology adopted consisted of a bibliographical research based on books and relevant academic materials on the subject. Thus, this study proves important to deepen the understanding of one of the most relevant theorems of Differential and Integral Calculus, demonstrating its applicability and its impact on the development of mathematics.

Keywords: Derivatives. Rolle. Mean Value. Lagrange. Applications.

Sumário

	INTRODUÇÃO	9
1	CONTEXTO HISTÓRICO	11
1.0.1	O desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral	11
1.0.2	Newton e Leibniz	12
1.0.3	As raízes da Análise Real	14
2	NOÇÕES BÁSICAS	18
2.1	Sequência	18
2.1.1	Sequência limitada	18
2.2	Limite de uma sequência	20
2.2.1	Conjuntos abertos e fechados	21
2.2.2	Pontos de acumulação	22
2.2.3	Conjuntos compactos	22
2.3	Limites de Funções	23
2.3.1	Funções Contínuas	24
2.4	Derivadas	26
3	TEOREMA DO VALOR MÉDIO, DE LAGRANGE	32
4	APLICAÇÕES	38
4.0.1	Aplicação 1	38
4.0.2	Aplicação 2	39
4.0.3	Aplicação 3	40
4.0.4	Aplicação 4	42
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	44
	Bibliografia	45

Introdução

Um dos principais teoremas desenvolvido, primordial para o Cálculo Diferencial e Integral, o Teorema do Valor Médio (TVM), desenvolvido por Joseph Louis Lagrange, tem grande aplicabilidade em Cálculo e Análise e contribui significativamente para o avanço da Matemática. Assim como o teorema, é necessário citar alguns dos grandes nomes que contribuíram para a evolução da Matemática, entre eles Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Devido aos resultados obtidos por eles, podemos estudar e descobrir as magnitudes nessa área rica de conhecimento. Assim sendo, veremos nos próximos capítulos as contribuições desses matemáticos na história da matemática.

Para compreender o Teorema do Valor Médio, é primordial primeiro entender um caso particular: o Teorema de Rolle. Ambos fornecem resultados matemáticos fundamentais que podem ser utilizados para estudar o comportamento das funções reais além de ser uma ferramenta importante na solução de diversos problemas matemáticos. Além das aplicações usuais, esses teoremas possuem um alcance que vai além da matemática pura, sendo amplamente utilizados em áreas como a física e o Cálculo diferencial. Dada a vastidão de suas aplicações, torna-se relevante explorar seus impactos em diferentes contextos.

Este trabalho visa discorrer sobre o Teorema do Valor Médio, incluindo sua demonstração e aplicações na Matemática e outras áreas. Além disso, busca-se aprofundar sua compreensão, e mostrar como ele pode ser utilizado nas resoluções de problemas.

A metodologia a ser utilizada consiste em uma pesquisa de cunho bibliográfico. Desse modo, Sousa, Saramago e Alves (2021, p. 65) apontam que “a pesquisa bibliográfica está inserida principalmente no meio acadêmico e tem a finalidade de aprimoramento e atualização do conhecimento, através de uma investigação científica de obras já publicadas”. Nesse sentido, será realizado um levantamento e estudo de dissertações, teses, artigos científicos e livros que discorrem sobre o assunto a ser pesquisado, como os livros: Análise Real: Funções de uma Variável, Lima (2020), Curso de Análise, Lima (1976), Introdução à História Matemática, Eves (2011), Elementos de Análise Real, Bartle (1983), Cálculo: Volume 1, Thomas, Weir e Hass (2012) e Cálculo 1: Derivada e Integral em uma variável, Patrão(2011).

Além disso, para chegarmos à exposição e às aplicações do Teorema do Valor Médio de Lagrange, precisamos primeiro abordar alguns pré-requisitos fundamentais para a compreensão de sua demonstração. Começaremos com um panorama histórico, explorando o desenvolvimento do Cálculo e da Análise no primeiro capítulo. Em seguida, no segundo capítulo, apresentaremos as noções básicas necessárias para o entendimento do TVM. No terceiro capítulo, introduziremos sua demonstração, assim como algumas consequências

importantes. No quarto capítulo, abordaremos as aplicações do teorema e, por fim, as considerações finais.

1 Contexto histórico

1.0.1 O desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral

No final do século XVII surge o Cálculo Diferencial e Integral, uma das áreas fundamentais da matemática, principalmente através dos trabalhos independentes de Isaac Newton (1643–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Ambos desenvolveram os conceitos básicos do cálculo, mas de maneiras diferentes e com notações distintas. Engana-se quem pensa que o surgimento acompanha a ordem do nome, pelo contrário, primeiro desenvolveu-se o cálculo integral e muito depois o cálculo diferencial.

Curiosamente, segundo Aczel (2003) a integração já era praticada na Grécia antiga pelos matemáticos Arquimedes de Siracusa(287-212 a.C.) e Eudóxio de Cnido (408-355 a.C.), ambos usaram quantidades infinitamente pequenas para encontrar uma aproximação para a área ou volume desejado. Eudóxio de Cnido, era proveniente de família humilde, no entanto, com muitas ambições. Frequentou a academia de Platão e era seu discípulo mais destacado. Contribuiu em vários campos da ciência, inclusive na Matemática. Eudóxio usou da noção de limites para encontrar área e volumes de superfícies curvas, dividia a área ou o volume em inumeros e calculava a soma resultante. Assim ficou conhecido como método da exaustão. Esse processo capacitou os matemáticos a desenvolverem séculos depois a teoria do cálculo.

De acordo com Eves (2011), Arquimedes foi o único matemático da antiguidade que melhor aplicou o método da exaustão, se aproximando da definição que temos atualmente. Arquimedes de Siracusa é o mais famoso matemático da antiguidade. A ele são creditadas diversas descobertas, principalmente o trabalho sobre as catapultas. Além disso, na Matemática expandiu as ideias de Eudoxius, e empregou quantidades infinitesimais para encontrar as áreas e volumes. Da derivação desse método encontrou o volume de uma esfera e um cone. No entanto, apesar das promissoras ideias de Eudóxio e Arquimedes durante um longo período, a teoria da integração permaneceu estática. Só praticamente nos tempos modernos, com o advento dos trabalhos de Arquimedes na Europa Ocidental, que a teoria passou por outros desdobramentos.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), nasceu em Milão e foi aluno do também matemático Galileu Galilei(1564-1642). Deixou uma obra vasta, dentre ela a geometria indivisível. Neste trabalho ele apresenta os métodos indivisíveis. De acordo com Eves (2011), para Cavalieri uma porção plana era formada por uma infinidade de cordas paralelas e o sólido por uma infinidade de secções planas paralelas. Assim, as cordas eram o elemento indivisível assim como as secções. Os princípios de Cavalieri representam ferramentas indispensáveis para o cálculo de áreas e volumes, de tal modo que com a aceitação desses princípios

passou a resolver problemas de mensuração que normalmente requeriam técnicas muito avançadas.

Os primeiros passos da diferenciação advém de problemas relacionados ao traçado de retas tangentes a curvas e da determinação de máximos e mínimos. Conforme Eves (2011, p.429), o alemão Johannes Kepler (1571-1630) que "observou os incrementos de uma função tornam-se infinitesimais nas vizinhanças de um ponto de máximo ou de mínimo comum". Mas foi o matemático Pierre de Fermat (1601-1630) que estabeleceu o procedimento que determinava os pontos de máximo e mínimo. Em Eves, (2011, p. 429):

Se $f(x)$ tem um máximo ou mínimo comum em x e se e é muito pequeno, então o valor de $f(x - e)$ é quase igual ao de $f(x)$. Portanto, pode-se experimentar fazer $f(x - e) = f(x)$ e, para tornar essa igualdade correta, impor que e assuma o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de x para os quais $f(x)$ assume um máximo ou um mínimo.

De acordo com Eves (2011, p. 430), Fermat também foi responsável por descobrir

um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada. Sua ideia consistia em achar a subtangente relativa a esse ponto, isto é, o segmento de reta cujas extremidades são a projeção do ponto de tangência sobre o eixo x e a intersecção da tangente com esse eixo.

Nascido em Londres em 1630, Isaac Barrow, precursor de Isaac Newton, também contribuiu significativamente para a teoria do cálculo. Foi um homem de grande prestígio acadêmico. O seu trabalho mais importante é *Lectiones opticae et geometricae*, é nesse livro que se encontra uma abordagem muito próxima do processo moderno de diferenciação. Barrow é considerado o primeiro a perceber que a diferenciação e a integração são operações opostas. Essa descoberta trata-se do teorema fundamental do cálculo. Até o momento, o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral já estava bem encaminhado. Todavia, conforme Eves (2011, p. 435),

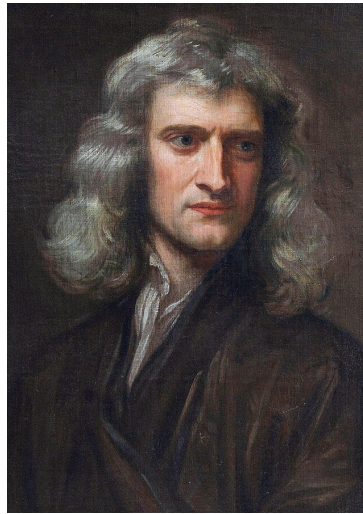
Faltava ainda a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria. Coube a Newton e Leibniz de forma independente contribuir para a criação de um cálculo manipulável e proveitoso.

1.0.2 Newton e Leibniz

Isaac Newton nasceu na aldeia de Woolsthorpe no dia 25 de dezembro de 1642. Quando jovem mostrou grande habilidade para invenções de miniaturas. Por conseguinte, se interessou pela Matemática após a leitura de obras famosas como os elementos de Euclides e não demorou para que passasse a criar sua própria Matemática.

Boyer (2012), afirma que Newton tenha desenvolvido o teorema do Binômio e em seguida o método dos fluxos, como ele chamava o Cálculo Diferencial durante o período

Figura 1.1 – Isaac Newton



Fonte: <https://images.app.goo.gl/pK3PtHu6EW1oPDJg8>

que permaneceu em casa devido às portas do Trinity College - colégio que ingressou - estarem fechadas devido à peste bubônica.

Em 1671, Newton redigiu sua visão do cálculo que somente seria publicada em 1687. O que levantaria a dúvida se Newton teria plagiado ou não o trabalho de Leibniz. Tal impasse perdurou por algum tempo, até que se concluiu que ambos desenvolveram a teoria de forma independente, embora Newton tenha elaborado sua obra 10 anos antes. E antes de publicá-la, ele utilizava uma notação própria para representar quantidades variáveis e suas taxas de variação. Ele chamou essas grandezas de fluentes, representadas por x e y , já suas taxas de variação, conhecidas como fluxos, eram indicadas por p e q . Com o tempo ele modificou essa notação. Essa abordagem foi primordial para o desenvolvimento de sua visão do cálculo. Dessa forma, é como afirma Boyer (2012, p. 275) sobre a primeira versão da teoria de Newton:

ele considerou x e y como quantidades que fluem, ou fluentes, de que as quantidades p e q (acima) eram os fluxos ou taxas de variação; quando redigiu essa visão do cálculo, por volta de 1671, ele substituiu p e q pelas “letras com pontos” $\dot{x}$ e $\dot{y}$. As quantidades ou fluentes, de que x e y são os fluxos, ele designou por x e y . Duplicando os pontos ou linhas, ele podia representar fluxos de fluxos ou fluentes de fluentes.

As descobertas de Newton contribuíram para consolidação de um algoritmo aplicável a todas as funções. Graças a todos os seus estudos, em seus últimos anos choeram honrarias em seu nome.

Gottfried Wilhelm Leibniz é considerado um dos grandes gênios do século XVII e, junto com Newton, foi um dos criadores da linguagem do cálculo. Nascido em Leipzig, em 1646, desde cedo demonstrou aptidão para os estudos. Ainda na infância, perdeu o pai, mas teve a oportunidade de aprender com ele as operações matemáticas básicas.

Aos 15 anos, Leibniz ingressou na Faculdade de Direito e se formou aos 17 anos, exercendo pelo resto da vida a carreira diplomática. Em 1672, em uma de suas viagens a

Figura 1.2 – Gottfried Leibniz



Fonte: <https://images.app.goo.gl/Hm1QSkbkKLsqmTeR9>

trabalho para Paris, Leibniz conheceu Huygens e o convenceu a dar-lhe aulas de Matemática. Conforme Eves (2011), antes de deixar Paris e se tornar bibliotecário e conselheiro, ele já havia descoberto o Teorema Fundamental do Cálculo, desenvolvido grande parte da notação e estabelecido muitas fórmulas da diferenciação. Além disso, foi Leibniz quem introduziu o símbolo $\int$ para representar a soma de áreas, derivado da primeira letra da palavra latina *summa*.

Após a publicação dos seus trabalhos a respeito da teoria do cálculo, Leibniz teve a infelicidade de ser acusado de plágio pelo resto da vida. Por fim, depois do enorme avanço nos estudos na área da integração e diferenciação, por algum tempo depois os fundamentos do cálculo permaneceram despercebidos, principalmente porque por volta de 1700 a teoria já havia sido praticamente desenvolvida.

1.0.3 As raízes da Análise Real

A grande aplicabilidade do cálculo atraiu um número expressivo de matemáticos a realizar seus estudos na área. No entanto, na época as bases da Matemática ainda eram inconsistentes mesmo assim os processos utilizados no cálculo funcionavam. Desse modo, surgiu a necessidade de rever sua fundamentação e dar-lhe bases teóricas rigorosas por meio da análise.

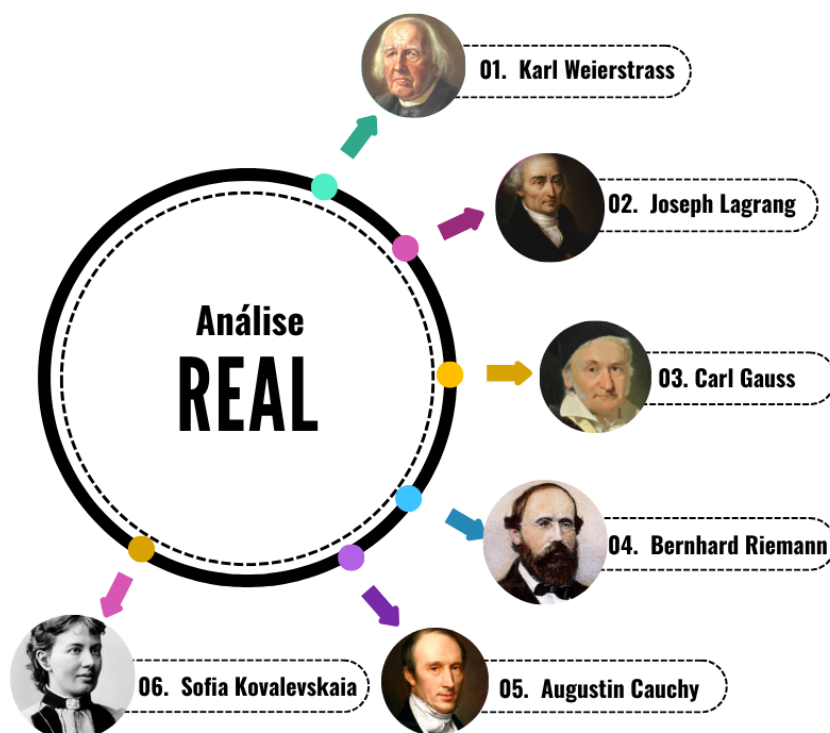
Como consequência dessa análise, afirma Eves (2011, p. 462) "verificou-se um trabalho semelhante e igualmente cuidadoso com os fundamentos de todos os outros ramos da Matemática, bem como o refinamento de muitos conceitos importantes".

A formalização do cálculo contou com a contribuição de ilustres matemáticos. Foi por meio de Joseph Louis Lagrange (1736-1813) que iniciou-se a tarefa de banir o intuicionismo para o formalismo da análise e dentre diversos trabalhos formular pela primeira vez, o Teorema do Valor Médio. No século seguinte esse movimento continuaria

com Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e posteriormente com o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) que definiu a continuidade, diferenciação e integração usando a teoria de limites. Bernhard Riemann (1826-1866) por meio dos seus estudos também contribuiu para a formulação da análise ao aprimorar o conceito de integral definindo como a soma infinita de integrais de funções escalonadas.

O campo da análise ainda se beneficiou com os trabalhos de Karl Weierstrass (1815- 1897) considerado o pai da análise moderna, construiu um trabalho minucioso com os números irracionais e as funções contínuas. Além disso, Weierstrass defendia que o sistema de números reais deveria ter suas bases ainda mais rigorosas para fundamentar a análise. O desenvolvimento da área ainda contou com os estudos de Sofia Kovalevskaya, que na época recebia aulas de Weierstrass, desse modo ela também merece o mérito pelo desenvolvimento da Análise.

Figura 1.3 – Fluxograma dos contribuintes da Análise Real



Fonte: Autoria própria

Dado toda a história, darei ênfase aos autores que considero mais importantes deste trabalho, Lagrange e Rolle.

Primeiramente, Michel Rolle (1652-1719), matemático francês, que foi membro da Academia Francesa, formulou um teorema fundamental para o desenvolvimento do Teorema do Valor Médio, o teorema de Rolle. Publicado em 1691, no livro *Méthode pour résoudre les Égalitéz*, esse resultado desempenha um papel significativo na análise matemática. Ele

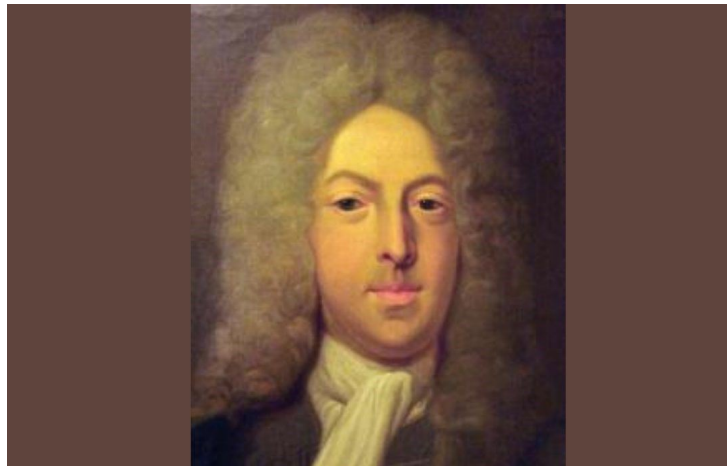
contribuiu também em geometria analítica, não somente em cálculo.

De acordo com Stewart (2011), Michel Rolle era um crítico dos métodos de cálculo de sua época, chegando a afirmar que se tratava de uma coleção de falácias engenhosas. No entanto, com o tempo, acabou se convencendo dos métodos, aprovando-os como verdadeiro depois.

Sobre Joseph Louis Lagrange (1736-1813), como já dito, foi o desenvolvedor do Teorema de Lagrange, na verdade, foi o primeiro a formulá-lo. Nasceu no país da Itália, e desde criança era talentoso. Ao crescer foi professor, aos seus 19 anos de idade, em Turin. Depois, com o seu imenso conhecimento, colaborou com seus estudos em várias áreas da matemática. Com participação na famosa teoria dos números, na teoria das equações, teoria das funções, nas mecânicas analítica e celeste. Não se pode deixar de citar o principal, a contribuição para o cálculo, segundo Fernandez e Tamaro (2004), Lagrange "escreveu vários artigos sobre o cálculo integral e as equações diferenciais gerais do movimento de três corpos submetidos a forças mútuas de atração, completando assim a formulação das leis de Newton".

Ademais, ele sucedeu Euler durante o período na Academia de Berlim, depois de um tempo se mudou para Paris e se tornou professor da *École Polytechnique*. Stewart afirma que Lagrange foi "um homem bondoso e quieto, que vivia somente para a Ciência" Stewart (2011, p. 259).

Figura 1.4 – Michel Rolle



Fonte: <https://images.app.goo.gl/yPE1BZAyT3hCiMnL8>

Figura 1.5 – Joseph Louis Lagrange



Fonte: <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/lagrange.htm>

2 Noções Básicas

Veremos a seguir noções de sequências, limites e funções contínuas que são essenciais para a compreensão do Teorema do Valor Médio de Lagrange. Os conceitos fornecem a base teórica, assim como suas proposições ajudam no desenvolvimento do teorema.

2.1 Sequência

Definição 2.1. A função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência de números reais, determinada no conjunto dos números naturais e tomando valores no conjunto dos números reais. Para indicar uma sequência podemos escrever $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou também (x_n) .

Exemplo 2.2. $(2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ é a sequência de números primos.

Exemplo 2.3. $(1, -1, 1, -1, \dots)$ é a sequência definida por $a_n = -(-1)^n$.

Exemplo 2.4. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots)$ é a sequência dada por $(\frac{n}{n+1})$.

Observação 2.5. Existe diferença na notação de sequência e de conjunto, ou seja, $(a_n) \neq \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Observe, as sequências $(1, 0, 1, \dots)$ e $(0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$ são diferentes, porém o conjunto é o mesmo, $\{0, 1\}$.

2.1.1 Sequência limitada

Uma sequência (a_n) é limitada quando existem números reais a, b tais que $a \leq a_n \leq b$, $n \in \mathbb{N}$, isso significa que os termos da sequência estão no intervalo $[a, b]$. Assim, é válido dizer que, para qualquer intervalo $[a, b]$ existe um número $c > 0$ tal que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[-c, c]$, então necessariamente temos $|a_n| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que (a_n) é **limitada superiormente** se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Do mesmo modo, (a_n) é **limitada inferiormente** quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.6. A sequência $(a_n) = (-5, 5, -5, 5, \dots)$ é limitada, visto que $|a_n| \leq 5 \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.7. A sequência $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente, pois a medida que tomamos números maiores para n , ocorre que $(\frac{1}{2^n})$ diminui. Significa que os termos da sequência não ultrapassam 1, serão sempre menores, logo, denotamos $\frac{1}{2^n} \leq 1$. A sequência também é limitada inferiormente, visto que existe um número real 0 que é menor ou igual a todos os termos de $(\frac{1}{2^n})$, isto é, $0 \leq \frac{1}{2^n}$. Portanto, fica evidente que a sequência é limitada se, e somente se, é limitada superiormente e inferiormente.

A restrição da função função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ao subconjunto infinito

$$\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots\}$$

define uma subsequência de (x_n) , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, de números reais. Podemos denotar uma subsequência como: $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_i}, \dots)$, $x = (x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ ou $x' = x \mid \mathbb{N}' \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 2.8. Dada a sequência

$$(a_n) = (2, 5, 0, 2, 5, 0, 2, 5, 0, \dots),$$

podemos formar a partir dos seus termos infinitas subsequências. Considere a seguinte específica, formada por índices pares:

$$a_2 = 5, a_4 = 2, a_6 = 0, a_8 = 5, a_{10} = 2, \dots$$

então, obtemos a subsequência $(5, 2, 0, 5, 2, \dots)$ que pode ser escrita como $(n_k)_k$, $(n_k = a_{2_k})$ com $k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Exemplo 2.9. Seja $(a_n) = \frac{1}{n}$, consideremos uma subsequência formada apenas pelos termos cujos índices são números ímpares. Assim, podemos defini-la como $(a_{n_k}) = \frac{1}{2k-1}$, com $k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, temos

$$a_{n_1} = 1, a_{n_2} = \frac{1}{3}, a_{n_3} = \frac{1}{5}, a_{n_4} = \frac{1}{7}, a_{n_5} = \frac{1}{9}, \dots$$

logo, $a_{n_k} = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots)$.

Observação 2.10. É importante observar que uma subsequência x_{n_i} é uma sequência, visto que o seu domínio é definido em $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, ou seja, não é todo o conjunto dos naturais, contudo, ainda devemos considerá-la como uma função de $\mathbb{N}$. Então, usando a própria notação de subsequência, teríamos, $x' = (x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ em que para cada índice i é associado ao termo x_{n_i} .

É importante destacar que as sequências podem apresentar diferentes comportamentos, sendo elas: crescentes, não-decrescentes, decrescentes, não-crescentes para todo $n \in \mathbb{N}$.

Será **crescente** quando para cada termo da sequência (x_n) , o termo x_{n+1} é maior, diz-se que $x_n < x_{n+1}$. Uma sequência é **não-decrescente**, quando cada termo for maior ou igual ao termo anterior, $x_n \leq x_{n+1}$.

Será **decrescente** quando para cada termo da sequência (x_n) , o termo x_{n+1} é menor, isto é, $x_n > x_{n+1}$. A sequência é chamada de **não-crescente** quando cada termo x_{n+1} for menor ou igual ao termo anterior, ou seja, $x_n \geq x_{n+1}$.

Ademais, todas essas sequências com comportamentos diferentes são conhecidas como sequências **monótonas**. E para que ela seja limitada, é preciso que haja uma subsequência limitada.

2.2 Limite de uma sequência

Definição 2.11. Diz-se que o número real a é limite da sequência (x_n) de números reais, quando para todo número real $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$, sempre que $n > n_0$. Podemos escrever $a = \lim x_n$ ou $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ quando a é limite de x_n .

Teorema 2.12. (Unicidade do limite) Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.

Demonstração: Suponha que a e b sejam limites de x_n , com $a \neq b$. Tomemos $\epsilon > 0$ de forma que os intervalos $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e $J = (b - \epsilon, b + \epsilon)$ sejam disjuntos. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$, isso significa que todos os termos de a_n estão em I a partir de um certo n_0 . Dessa forma, se $x_n \in I$, podemos afirmar que $x_n \notin J$, logo x_n não pode convergir para b . ■

Teorema 2.13. Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração: Seja a limite de uma sequência x_n . Tomando $\epsilon = 1$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - 1, a + 1)$. Agora considere o conjunto finito $C = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, a - 1, a + 1\}$. Sabemos que C possui um máximo e um mínimo, desse modo, seja $N = \min C$ e $M = \max C$, temos que $N \leq x_n \leq M$ para todo n natural. Observa-se que $N \leq a - 1 < x_n < a + 1 \leq M$ para todo $n > n_0$, olhando para os termos da sequência, temos $N < x_1, x_2, \dots, x_{n_0} \leq M$, isto é, $x_n \in [N, M]$, isso mostra que a sequência é limitada. ■

É importante ressaltar que não vale a volta, existem sequências limitadas que não convergem. Por exemplo:

$$x_n = (-1, 1, -1, \dots, -1, 1, \dots)$$

Vejamos outro teorema, sobre sequência monótona.

Teorema 2.14. Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração: Seja a sequência (x_n) não-decrescente, limitada. Podemos escrever o conjunto dos termos da sequência como $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Como a sequência é limitada, X possui um supremo, digamos $a = \sup X$. Dado $\epsilon > 0$, temos que $a - \epsilon < a$, então o número $a - \epsilon$ não é cota superior do conjunto X . Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim sendo, para $n > n_0$ isso implica que $a - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n < a < a + \epsilon$, logo, $\lim x_n = a$.

Se considerarmos (x_n) não-crescente, isto é, $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$, consequentemente teríamos o limite convergindo para o ínfimo da sequência. ■

Corolário 2.15. *Se uma sequência monótona (x_n) possui uma subsequência convergente, então (x_n) é convergente.*

Observamos que se temos uma subsequência monótona convergente, logo que ela é limitada, isso implica que a sequência monótona também vai ser limitada em decorrência disto.

Agora vamos enunciar um corolário muito importante que mostra que qualquer sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Corolário 2.16. (Teorema de Bolzano-Weierstrass)

Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Para provar este resultado, precisamos mostrar que a sequência (x_n) possui uma subsequência monótona. Consideremos a sequência limitada e um conjunto $D \subset \mathbb{N}$ definido como $D = \{n \in \mathbb{N} | x_n \geq x_p, p > n\}$. O conjunto D pode ser finito ou infinito, veremos os dois casos a seguir.

Se D é infinito então temos $D = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$, ou seja, para cada índice p maior que n , temos $x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq x_{n_3} \geq \dots \geq x_{n_k} \geq \dots$. Portanto, a subsequência $(x_n)_{n \in D}$ será monótona não-crescente.

Agora, caso D seja finito então para cada $p > n$ não ocorre $x_n \geq x_p$. Seja $n_1 \in \mathbb{N}$, um índice maior que todos os $n \in D$, ou seja, $n_1 \notin D$. Isso garante a existência de $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_1} < x_{n_2}$. Como $n_2 \notin D$, também existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_2} < x_{n_3}$. Dessa forma, obtemos uma sequência de índices $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ e, conseqüentemente, a subsequência $x_{n_1} < x_{n_2} < \dots < x_{n_k} < \dots$ que é crescente.

2.2.1 Conjuntos abertos e fechados

É necessário entendermos quando um conjunto é aberto e fechado, pois posteriormente vamos precisar destas noções topológicas.

Seja $X \subset \mathbb{R}$, dizemos que a é um ponto interior se existe $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ está contido em X . E o conjunto dos pontos interiores de X é representado por $\text{int}X$. Ademais, X será uma *vizinhança* do ponto a , se $a \in \text{int}X$.

Dizemos que $A \subset \mathbb{R}$, é um **conjunto aberto** se $A = \text{int}A$.

Para compreendermos quando conjunto é fechado precisamos saber o que é *ponto de aderência*, vejamos a seguir.

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ será denominado de *ponto de aderência* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se podemos encontrar uma sequência (a_n) de X , tal que os elementos de (a_n) se aproximam

cada vez mais de a . É válido dizer que todo ponto de $a \in X$ é aderente a X , basta tomarmos $x_n = a$.

Denomina-se *fecho* do conjunto X o conjunto dos pontos de aderência de X e denota-se por $\overline{X}$. Logo, dizemos que um **conjunto X é fechado** quando $X = \overline{X}$, ou seja, os pontos aderentes do conjunto de X têm que pertencer a X . É relevante destacar que o fecho de X contém X , $X \subset \overline{X}$.

2.2.2 Pontos de acumulação

Existe semelhança em relação a definição de conjunto fechado e pontos de acumulação, por isso devemos nos atentarmos aos detalhes descritos para não confundirmos.

Definição 2.17. Diz-se que a é ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda a vizinhança V de a contém algum ponto $x \in X$, sendo $x \neq a$. Isto significa que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $a \in X$ tal que $0 < |x - a| < \epsilon$.

Denotaremos por X' o conjunto dos pontos de acumulação de X .

Exemplo 2.18. Consideremos o conjunto $C = \left\{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. O número 1 é ponto de acumulação de C , uma vez que $(a_n) = (2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots)$ converge para 1 e $x_n \neq 1$ para todo n natural.

Teorema 2.19. Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ as seguintes informações são equivalentes:

1. $a \in X'$ (a é ponto de acumulação de X);
2. $a = \lim x_n$ onde (x_n) é uma sequência de elementos de X , dois a dois distintos;
3. todo intervalo aberto contendo a possui uma infinidade de elementos de X .

Demonstração: Provaremos que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$. Seja $a \in X'$, existe $x_1 \in X$ tal que $0 < |x_1 - a| < 1$. Agora tomando $\epsilon_2 = \min\left\{|x_1 - a|, \frac{1}{2}\right\}$, então existe um $x_2 \in X$ tal que $0 < |x_2 - a| < \epsilon_2$. De mesma forma, seja $\epsilon_3 = \min\left\{|x_2 - a|, \frac{1}{3}\right\}$, existe $x_3 \in X$ tal que $0 < |x_3 - a| < \epsilon_3$. Se continuarmos neste processo, conseguiremos a sequência (x_n) de X com elementos $|x_{n+1} - a| < |x_n - a|$ e $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. Portanto, de fato, os elementos x_n são dois a dois distintos e, também, $\lim x_n = a$. Dessa maneira, as demais implicações são evidentes. ■

2.2.3 Conjuntos compactos

Definição 2.20. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é chamado de **compacto** se é fechado e limitado.

Como já temos o entendimento do que é um conjunto limitado e fechado, devido à construção até aqui, conseguiremos compreender de forma tranquila quando um conjunto é compacto. Vejamos o teorema seguinte que é muito interessante e que nos fará recordar os assuntos anteriores já mencionados.

Teorema 2.21. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X .*

Para a demonstração deste teorema vamos usar o teorema de Bolzano-Weierstrass que prova que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente. Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto, logo toda sequência de pontos em X é limitada, já que o conjunto é limitado. Existe uma subsequência convergente e o limite é um ponto de X , visto que o conjunto é fechado. De maneira recíproca, seja a_n de $X \subset \mathbb{R}$ existe uma subsequência que converge para um ponto de X . É justificável afirmar que X é limitado, uma vez que se não fosse, então para cada n natural encontramos uma sequência de pontos de X com $|a_n| > n$. Em consequência disso, não obteríamos uma subsequência limitada de (a_n) e não teríamos uma subsequência convergente. Ademais, X é fechado, pois de modo contrário não existiria um ponto a de X , tal que $\lim a_n = a$, sendo que $a_n \in X$.

Além disso, é importante ressaltar que todo conjunto compacto apresenta um elemento máximo e um elemento mínimo. Não devemos confundir com o ínfimo e supremo, pois para que elementos de um conjunto sejam máximo e mínimo eles precisam estar inteiramente contidos no conjunto. Um exemplo, seja $i = \inf A$ e $s = \sup A$, pertencetes a A e por ser compacto, então existe x_0, x_1 de A que satisfazem $x_0 \leq x \leq x_1 \forall x \in A$. Outro exemplo para mostrar o que foi citado, tomemos $A = (1, 0)$, note que temos um ínfimo 1 e o supremo 0, todavia não temos um mínimo e nem o máximo porque não pertencem a A e este é um conjunto aberto.

2.3 Limites de Funções

Nesta seção falaremos um pouco sobre limites envolvendo funções reais.

Definição 2.22. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real, definida num conjunto de números reais $X \subset \mathbb{R}$. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X , $a \in X'$. Dizemos que o número real L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a , e é escrito como:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Isto significa que, para cada $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos obter $\delta > 0$ de modo que se tenha $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

É importante que a seja ponto de acumulação do domínio da função para que a definição tenha sentido, devemos lembrar da restrição de $x \neq a$. Caso $x \notin X'$, então

aconteceria, seguindo a mesma definição, que todo número real L seria limite de $f(x)$. Além disso, x pode ou não pertencer ao domínio de f , se pertencer temos que f está definida no ponto a , de maneira divergente ela não estaria definida.

Exemplo 2.23. $f(x) = c$

Podemos considerar esta função notando que c é uma constante real, logo o limite da função ficaria

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

Dessa forma, por definição de funções contínuas, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta = 1$ para este caso, tal que temos

$$0 < |x - a| < 1, x \in X$$

logo $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$.

Exemplo 2.24. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ com $X = \mathbb{R} - \{1\}$.

É compreensível dizer que a função não está definida no ponto 1, mas mesmo que não esteja o importante é compreender o limite da função quando se aproxima exatamente desse ponto, isto é, perto de 1. Assim poderíamos tomar

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \epsilon > 0$, para qualquer x real tal que teríamos

$$0 < |x - 1| < \epsilon$$

isso implica que $|f(x) - 2| < \epsilon$, sabemos que $|f(x) - 2| < \epsilon$, daí temos $|\frac{x^2+1}{x-1} - 2| = |x+1-2|$, logo $|x - 1| < \epsilon$.

2.3.1 Funções Contínuas

Definição 2.25. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pudermos achar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Em símbolos, pode ser escrito:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

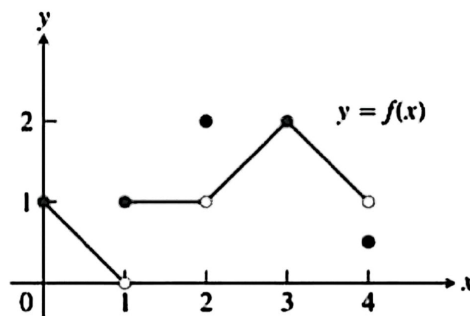
Uma observação importante é que diferente de limite de uma função, só faz sentido falar em função contínua num ponto a se o ponto a estiver no domínio da função. Ademais, existem funções não contínuas em um certo ponto. Seja a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, uma descontinuidade da função f é um ponto a de X tal que f não é contínua. Significa que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, pode-se encontrar $x_\delta \in X$ com $|x_\delta - a| < \delta$ mas $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \epsilon$.

Vamos entender um pouco sobre funções contínuas em intervalos.

A continuidade em um intervalo significa que a função f é contínua em todos os pontos desse intervalo. Dessa forma, o limite existirá em cada ponto do intervalo, e além disso teremos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Observa-se que acontece uma igualdade, quando x tende para o ponto a , pois $f(a)$ precisa ser igual a esse limite. Isso satisfaz a definição de continuidade em um intervalo fechado.

Para entendermos melhor, dizendo de forma geral uma função f é contínua em um ponto a real se $f(x)$ se aproxima de $f(a)$ quando x tende para a . E no caso da descontinuidade, dizemos que se f não é contínua em um a , então ela é descontínua, e a é um ponto de descontinuidade da função. Por meio do gráfico abaixo conseguiremos observar a continuidade e descontinuidade em um intervalo fechado.

Figura 2.1



Fonte: George B. Thomas(2012)

Veja que temos o intervalo $[0, 4]$ e a função é contínua neste intervalo com exceção quando $x = 1, x = 2, x = 4$. Quando aplicamos o limite nesses pontos teremos imagens diferentes do limite quando x tende a estes pontos. Ou seja, quando $x = 1$ o $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ não existe. Quando $x = 2$ o $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$, porém nota-se que $1 \neq f(2)$ e quando $x = 4$ temos que $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1$, contudo $f(4) \neq 1$. Agora para o caso de $a < 0$ e $a > 4$ esses pontos não fazem parte do domínio da função. Nos outros pontos do intervalo f é contínua.

Agora, enunciaremos um dos teoremas mais relevantes deste texto e fundamental para a compreensão do Teorema do Valor Médio de Lagrange, o teorema de *Weierstrass*. Contudo, antes de partirmos para sua demonstração, provemos primeiramente que a imagem $f(X)$ de um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$, é um compacto, quando f é uma função contínua. Para provar esta afirmação utilizaremos o teorema 2.21. Assim, mostremos que toda sequência de pontos $y_n \in f(X)$ possui uma subsequência que converge para algum ponto em $f(X)$.

Temos $y_n = f(x_n)$ para cada n natural, sendo que $x_n \in X$. Como X é compacto, (x_n) possui uma subsequência $(x_n)_n \in \mathbb{N}'$ que converge para um ponto a de X . Sendo f contínua no ponto a , de $\lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n = a$, portanto, pondo $b = f(a)$, temos $b \in f(X)$ ademais, $\lim_{n \in \mathbb{N}'} y_n = \lim_{n \in \mathbb{N}'} f(x_n) = f(a) = b$.

Teorema 2.26. (Weierstrass). Toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida num compacto X é limitada e atinge seus extremos (isto é, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$).

Demonstração: Este resultado é uma consequência direta da afirmação acima. Com efeito, $f(X)$, sendo compacto é limitado e fechado. Assim, $\sup f(X) \in f(X)$ e $\inf f(X) \in f(X)$. Em vista disso, existem x_1, x_2 que pertencem ao domínio tais que $\inf f(X) = f(x_1)$ e $\sup f(X) = f(x_2)$. ■

2.4 Derivadas

Esta seção é umas das mais importantes deste texto. Aqui, serão apresentados exemplos e alguns teoremas que vão servir de embasamento para a construção do Teorema do Valor Médio.

Definição 2.27. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. **A derivada** da função f no ponto a é o limite $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Isso vai acontecer somente quando o limite existir. Em relação a igualdade, fazemos a mudança de variável, podemos escrever $h = x - a$ ou $x = a + h$, então quando $x \rightarrow a$ teremos que $h \rightarrow 0$, desse modo chegamos aonde queríamos

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

É importante ressaltar que podemos definir a derivada da função f à direita e à esquerda. Para isso, é necessário que $a \in X \cap X'_+$ e $a \in X \cap X'_-$, nota-se que a é ponto de acumulação em ambos os lados e sempre estando no domínio. Dizemos também que se a função é derivável à esquerda e direita no ponto a , com $f'_+(a) = f'_-(a)$, então f é derivável no ponto a .

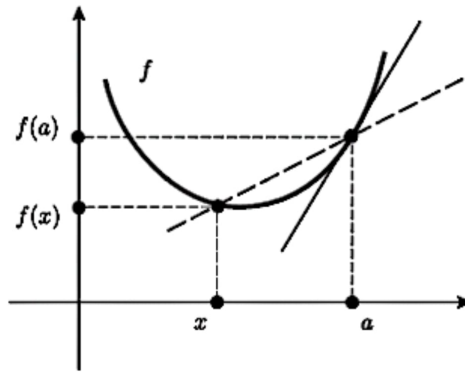
Interpretando a derivada de forma geométrica, vê-se que ela representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f que passa por $(a, f(a))$.

Se considerarmos, por exemplo, $a_n \rightarrow a$ com $a_n \neq a$, vamos obter várias inclinações de retas secantes, mas se observarmos bem, entendemos pelo gráfico da função que a inclinação da reta tangente é o limite das secantes, a medida que passam por $(a_n, f(a_n))$ veja na figura 2.3.

Vejamos alguns exemplos de derivadas:

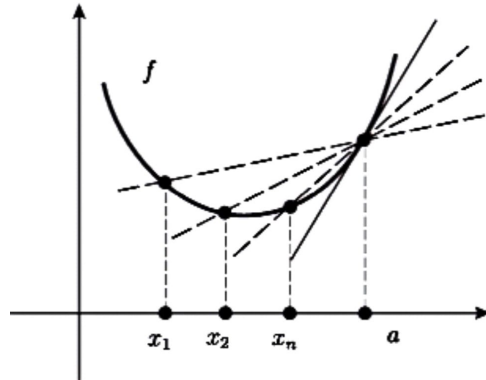
Exemplo 2.28. Seja uma função f real constante, tal que $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Figura 2.2



Fonte: Mauro Patrão (2011)

Figura 2.3



Fonte: Mauro Patrão (2011)

Calculando a derivada de f , temos

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{0}{x - a} = 0. \end{aligned}$$

portanto, $f'(a) = 0$.

Exemplo 2.29. *Seja uma função f real, tal que $f(x) = x$.*

Temos que

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

sabendo que $f(a+h) = a+h$ e $f(a) = a$, então

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h) - a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \end{aligned}$$

Logo, $f'(a) = 1$.

Exemplo 2.30. Seja $f(x) = x^2$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

calculando a derivada da função, temos então que $f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$ e $f(a) = a^2$, assim

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a. \end{aligned}$$

Portanto, $f'(a) = 2a$.

Teorema 2.31. A fim de que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $a+h \in X \Rightarrow f(a+h) = f(a) + ch + r(h)$, onde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. No caso afirmativo, tem-se $c = f'(a) = 0$.

Consideremos o conjunto $Y = \{h \in \mathbb{R}; a+h \in X\}$. Então $0 \in Y \cap Y'$. Primeiro supomos que $f'(a)$ exista e definimos a função $r : Y \rightarrow \mathbb{R}$, com

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$$

Dividindo esta expressão por h , obtemos

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

Assim, quando aplicamos $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, notamos de imediato que é a própria expressão da derivada, isto é, $f'(a)$ por definição, já que é derivável em a . Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = f'(a) - f'(a) = 0.$$

De maneira recíproca, se $f(a+h) = f(a) + ch + r(h)$, com $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, fazemos o

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ch - r(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = c. \end{aligned}$$

Logo, provamos o que queríamos demonstrar.

Teorema 2.32. Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$. As funções $f+g, f \cdot g, f/g$ caso $(g(a) \neq 0)$ são também deriváveis no ponto a com:

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);$

- $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a);$
- $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}.$

Fazendo a demonstração do primeiro ponto - $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$

Demonstração: Sabendo que $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ e $g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$, fazemos a aplicação da definição

$$(f + g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} \quad (2.1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x - a} \quad (2.2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \quad (2.3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \quad (2.4)$$

$$= f'(a) + g'(a). \quad (2.5)$$

■

As demais regras operacionais podem ser vistas nos livros de Cálculo I, assim como suas demonstrações, para mais detalhes é bom consultá-los. Ademais, veremos outro teorema bastante conhecido e trabalhado nas disciplinas de Cálculo, assim como a regra de L'Hôpital.

Teorema 2.33. (Regra da Cadeia) Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$, $f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Se f é derivável no ponto a e g é derivável no ponto b então $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a , com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.32, se $a + h \in X$ tem-se

$$f(a + h) - f(a) = f'(a) \cdot h + r(h),$$

onde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Pondo $k = f(a + h) - f(a)$, tem-se ainda

$$g(f(a + h)) - g(f(a)) = g'(f(a)) \cdot (f(a + h) - f(a)) + s(k),$$

com $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{s(k)}{k} = 0$. A continuidade de f no ponto a assegura que $h \rightarrow 0 \Rightarrow k \rightarrow 0$. (Observa-se que k é função de h .) Assim,

$$g(f(a + h)) - g(f(a)) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot h + g'(f(a)) \cdot r(h) + s(k) \quad (2.6)$$

$$= g'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot h + \sigma, \quad (2.7)$$

onde $\sigma = g'(f(a)) \cdot r(h) + s(k)$. Vemos que $\sigma = \sigma(h)$ é função de h . Pelo Teorema 2.32, concluiremos que $g \circ f$ é derivável no ponto a , com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$, se mostrarmos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Ora,

$$\frac{\sigma(h)}{h} = g'(f(a)) \cdot \frac{r(h)}{h} + \frac{s(k)}{h}.$$

Mas

$$\frac{s(k)}{h} = \frac{s(k)}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{s(k)}{k} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Portanto, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(k)}{h} = 0$. ■

(A Regra de L'Hôpital.)

Esta regra constitui uma das mais populares aplicações da derivada. Em sua forma mais simples, ela se refere ao cálculo de um limite da forma $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no caso em que f e g são deriváveis no ponto a e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0 = g(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Então, pela derivada, $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)}$ e $g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)}$. Supondo $g'(a) \neq 0$, a Regra de L'Hôpital diz que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$. Segue a prova

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{(x-a)}}{\frac{g(x)}{(x-a)}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Para o próximo teorema precisamos relembrar de limites laterais, especificamente, da definição de limite à direita. Então consideremos uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'_+$, dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é limite à direita de $f(x)$ quando x tende para a , pode ser representada como,

$$L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

isso acontece quando para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, podemos obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$. A partir disso, iremos compreender o teorema seguinte.

Teorema 2.34. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$, com $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta$ implicam $f(a) < f(x)$.*

Demonstração: Temos $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{[f(x) - f(a)]}{x - a} = f'_+(a) > 0$. E pela definição acima, de limite à direita, tomamos $\epsilon = f'_+(a)$, então obtemos $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta \Rightarrow \frac{[f(x) - f(a)]}{x - a} > 0 \Rightarrow f(a) < f(x)$. ■

Este teorema nos dá consequências importantes, vejamos elas:

Corolário 2.35. *Seja $a \in X$ um ponto de acumulação à direita e à esquerda. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ possui, no ponto a , uma derivada $f'(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, e $a - \delta < x < a < y < a + \delta$ implicam $f(x) < f(a) < f(y)$.*

Corolário 2.36. *Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$ e tem aí um máximo local, então $f'_+(a) \leq 0$.*

Demonstração: Com efeito, se fosse $f'_+(a) > 0$ então, pelo teorema 2.34, teríamos $f(a) < f(x)$ para todo $x \in X$ à direita e suficientemente próximo de a , logo f não teria máximo local no ponto a . ■

Corolário 2.37. *Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a e possui aí um máximo ou mínimo local então segue-se que $f'(a) = 0$.*

Demonstração: Com efeito, pelo corolário 2.36 temos $f'_+(a) \leq 0$ e $f'_-(a) \geq 0$. Como $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$, segue que $f'(a) = 0$. ■

Finalmente chegamos ao teorema de Michel Rolle. Dado os corolários acima, vamos compreendê-lo, pois, de fato, precisaremos de seus resultados para complementar o teorema do Valor Médio de Lagrange.

Teorema 2.38. (*Rolle*). *Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe um ponto $c \in (a, b)$ onde $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Observamos que a função é contínua em um intervalo fechado. Assim, pelo teorema de Weierstrass, f atinge seu valor máximo M e o seu valor mínimo em $[a, b]$. Se esses pontos forem atingidos nas extremidades do intervalo, então, pela hipótese $f(a) = f(b)$, teríamos $m = M$ o que implica que f será constante. Daí, podemos afirmar que a derivada de qualquer constante é nula, ou seja, $f'(x) = 0$ para qualquer que seja $x \in (a, b)$. Dessa forma, qualquer c dentro do intervalo (a, b) satisfaz $f'(c) = 0$. Por outro lado, se a função não for constante, então o máximo e o mínimo absoluto ocorrem no interior do intervalo. Como f é derivável, segue do corolário 2.37 que, se f possui extremo local em c , então $f'(c) = 0$. Logo, concluímos que em ambas as situações existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. ■

3 Teorema do Valor Médio, de Lagrange

Neste capítulo, será apresentado a demonstração do teorema do Valor Médio. Este teorema é um resultado fundamental do cálculo diferencial que estabelece uma relação entre a taxa de variação média de uma função e sua taxa de variação instantânea (derivada) em um intervalo. A interpretação geométrica e conceitual desse teorema é bastante intuitiva e útil para compreender o comportamento das funções reais.

De acordo com Bartle (1983), o teorema do Valor Médio é muito importante, pois apresenta inúmeras considerações teóricas e, ainda, ajuda em várias questões práticas por meio de suas aplicações. Assim sendo, veremos também algumas consequências do teorema e o Teorema do Valor Médio de Cauchy.

Teorema 3.1. (*Teorema do Valor Médio, de Lagrange*). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Para provar este teorema utilizaremos o *teorema de Rolle* que possui uma definição bastante parecida em relação a do Valor Médio, porém totalmente distintos em seus fins. Também faremos a consideração de que $a \in X$ é um ponto de acumulação bilateral. Sendo $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ derivável no ponto a , com $f'(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $a - \delta < x < a < y < a + \delta$ implicam $f(x) < f(a) < f(y)$.

Demonstração: Seja $g(x)$ o polinômio de grau 1, consideremos

$$g(x) = \frac{[f(b) - f(a)]}{(b - a)}(x - a) + f(a).$$

tal que $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(b)$. No gráfico esta função é a reta que passa em entre A e B tal que $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$. Calculando a derivada de $g(x)$ temos:

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{[f(b) - f(a)]}{(b - a)}(x - a) + f(a) \right] = \frac{[f(b) - f(a)]}{(b - a)}$$

para todo $x \in [a, b]$. Agora, seja $\phi(x) = f(x) - g(x)$, podemos concluir a partir das funções $f(x)$ e $g(x)$ que $\phi(x)$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Ademais, calculando no ponto a , por $g(x)$ temos:

$$\phi(a) = f(a) - g(a) \tag{3.1}$$

$$= f(a) - f(a) \tag{3.2}$$

$$= 0 \tag{3.3}$$

De mesma forma,

$$\phi(b) = f(b) - g(b) \quad (3.4)$$

$$= f(b) - f(b) \quad (3.5)$$

$$= 0 \quad (3.6)$$

Isso implica que $\phi(a) = \phi(b)$.

Assim sendo, esta função satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, isto é, existe $c \in (a, b)$ tal que $\phi'(c) = 0$. Se derivarmos $\phi(x)$, $\phi'(x) = f'(x) - g'(x)$ obtemos

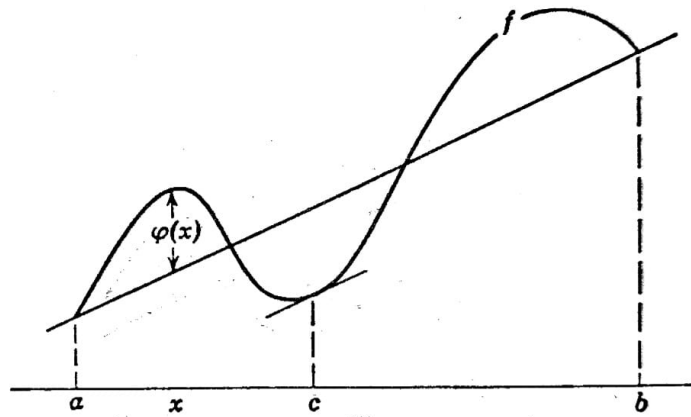
$$0 = \phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \quad (3.7)$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (3.8)$$

■

Na figura 3.1, o gráfico de f apresenta um ponto cuja reta tangente no ponto $(c, f(c))$ é paralela a reta secante que passa pelos extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. O teorema

Figura 3.1



Fonte: Robert G. Bartle (1983)

afirma que, em algum ponto c dentro do intervalo (a, b) , a inclinação da reta tangente ao gráfico de f é igual à inclinação da reta secante que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Em outras palavras existe um ponto onde a taxa de variação instantânea da função coincide com a taxa de variação média no intervalo.

Para uma interpretação física, basta imaginarmos $f(t)$ como a posição de um objeto em função do tempo t , então: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ é a velocidade média do objeto no intervalo de tempo $[a, b]$. $f'(c)$ é a velocidade instantânea do objeto no instante c . O teorema garante

que, em algum momento c dentro do intervalo, a velocidade instantânea do objeto é igual à sua velocidade média.

Agora vamos para uma versão mais geral do Teorema do Valor Médio, fazendo o uso de duas funções. Este resultado é uma generalização do Teorema do Valor Médio de Lagrange e é importante no cálculo diferencial, especialmente no contexto de funções de várias variáveis e na demonstração de outros teoremas.

Teorema 3.2. (*Teorema do Valor Médio de Cauchy*) *Sejam f, g contínuas em $J = [a, b]$ e deriváveis em (a, b) . Então existe um ponto c em (a, b) tal que*

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

Demonstração: Quando $g(b) = g(a)$, o resultado é imediato, desde que tomemos c tal que $g'(c) = 0$. Agora se considerarmos $g(b) \neq g(a)$, definimos uma função ϕ em J

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

Temos o intervalo $J = [a, b]$, vamos observar o que acontece nos extremos, isto é, para $x = a$ e $x = b$, assim

$$\phi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(a) - g(a)], \text{ o que resulta em } \phi = 0.$$

$$\phi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(b) - g(a)] \Rightarrow \phi(b) = f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0.$$

Portanto, $\phi(a) = \phi(b)$. Dessa forma, podemos fazer a aplicação do Teorema de Rolle. Efetuando a derivada de $\phi(x)$, temos

$$\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x),$$

então por Rolle, sabemos que $\phi'(c) = 0$, logo

$$0 = \phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c)$$

isto é, existe um ponto c tal que

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

acontece. ■

Teorema 3.3. *Suponhamos que f seja contínua em $J = [a, b]$ e que sua derivada exista em (a, b) .*

1. *Se $f'(x) = 0$ para $a < x < b$, então f é constante em J .*

Demonstração: Seja $x, y \in J$ com $x < y$, consideramos f contínua no intervalo fechado e que sua derivada exista em (a, b) . Pelo Teorema do Valor Médio sabemos que existe um $c \in (x, y)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Como estamos assumindo que $f'(c) = 0$, logo

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0,$$

então $f(y) - f(x) = 0 \Rightarrow f(y) = f(x)$, logo f é constante. ■

2. Se $f'(x) = g'(x)$ para $a < x < b$, então f, g diferem em J por uma constante.

Demonstração: Aplicaremos a consequência anterior na função auxiliar $h(x) = f(x) - g(x)$, derivando $h(x)$, resulta em

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \Rightarrow h'(x) = 0,$$

uma vez que $f'(x) = g'(x)$, isso significa que $h(x)$ é constante, isto é,

$$h(x) = c \Rightarrow f(x) = g(x) + c$$

observa-se que f e g diferem em $[a, b]$ por uma constante. ■

3. Se $f'(x) \geq 0$ para $a < x < b$ e se $x_1 \leq x_2$ pertencem a J , então $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Demonstração: Novamente utilizaremos o Teorema do Valor Médio, ciente de que $x, y \in J, x < y$, e de que existe um $c \in (x, y)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Utilizando a hipótese, temos $f'(c) \geq 0$ então

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \Rightarrow f(y) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Logo, quando $f'(x) \geq 0$, então $f(x_1) \leq f(x_2)$. ■

4. Se $f'(x) \leq M$ para $a < x < b$, então f satisfaz a condição de Lipschitz:

$$|f'(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

para x_1, x_2 em J .

Demonstração: Dados $x, y \in J$, considerando as suposições do teorema, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x, y)$ tal que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$$

segue que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Considerando a hipótese $f'(x) \leq M$, portanto, temos $|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| \leq M|y - x|$, isso mostra que f satisfaz a condição de Lipschitz. ■

Ademais, a continuidade no intervalo fechado e a diferenciabilidade no intervalo aberto são condições essenciais para o Teorema do Valor Médio. Quando alguma dessas hipóteses falha, a conclusão do teorema pode não se verificar. A seguir, veremos dois exemplos que mostram o que acontece nessas situações.

Exemplo 3.4. Seja $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$ Vamos verificar as condições do TVM nesta função.

Para isso a função precisa ser contínua, para todo $x \in [0, 1]$. Note que no ponto $x = 1$, a função não é contínua, veja abaixo a verificação:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1.$$

Contudo, temos que $f(1) = 2$, ou seja, há um salto na altura da função em $x = 1$, então

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1).$$

Logo, $f(x)$ não é contínua. Agora veremos a questão da diferenciabilidade no intervalo aberto $(0, 1)$. Para $0 \leq x < 1$, temos $f(x) = x$ e sabemos que sua derivada é 1, $f'(x) = 1$, isso para todo x de $(0, 1)$, logo é diferenciável. Observe que $f(x)$ é diferenciável, mas não é contínua, vamos analisar como ficaria a aplicação do teorema do Valor Médio.

O teorema diz que se for contínua em $[0, 1]$ e derivável em $(0, 1)$, então existirá um ponto c dentro deste intervalo aberto, tal que:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Rightarrow f'(c) = \frac{2 - 0}{1} \Rightarrow f'(c) = 2.$$

Porém, sabemos que $f'(x) = 1$, em consequência disso, não existe um ponto c em $(0, 1)$ tal que acontece $f'(c) = 2$.

Exemplo 3.5. Seja $f(x) = \begin{cases} (x - 2)^2, & x \leq 2, \\ 3(x - 2), & x > 2. \end{cases}$ Definida em $[1, 3]$.

De mesma forma veremos se satisfaz as condições do TVM. Calculando os limites laterais da função e o valor quando $x = 2$, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2 - 2)^2 = 0, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3(2 - 2) = 0$$

e

$$f(2) = 0.$$

Portanto, $f(x)$ é contínua em $[1, 3]$ já que os limites laterais coincidem. Vamos para a diferenciabilidade no intervalo $(1, 3)$. Faremos a derivação, segue que

Quando $x < 2$: $f'(x) = \frac{d}{dx}(x - 2)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x - 2)$, avaliando o limite quando $x = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 2(2 - 2) = 0$.

Quando $x > 2$: $f'(x) = \frac{d}{dx}[3(x - 2)] \Rightarrow f'(x) = 3$, verificando o limite quando $x = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = 3$.

Assim, vemos que $0 \neq 3$, os limites laterais da derivada são diferentes, o que implica que f não é derivável em $x = 2$. Observamos, ao longo deste exemplo, que a função é contínua em $[1, 3]$, mas não é derivável em $x = 2$. O que acaba falhando em uma das condições do teorema, logo não podemos garantir a existência de um ponto c no intervalo $(1, 3)$ tal que $f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$, vejamos

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3 - 1}{2} \Rightarrow f'(c) = 1.$$

Caso o Teorema do Valor Médio fosse aplicável, existiria algum $c \in (1, 3)$ tal que $f'(c) = 1$. Mas ao analisar as derivadas nos intervalos $x < 2$ e $x > 2$ percebemos que elas nunca assumem o valor 1. Isso porque para $x < 2$, a derivada varia de -2 até 0 e para $x > 2$, a derivada é constantemente 3 . Assim sendo, não há um ponto c em que $f'(c) = 1$, isso mostra que a conclusão do TVM não se mantém.

4 Aplicações

4.0.1 Aplicação 1

Utilizaremos nesta primeira aplicação o teorema do Valor Médio para calcular valores aproximados e para obter estimativas de erros. Assim sendo, vamos resolver a $\sqrt{105}$. Fazendo a aplicação com $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 100$, $b = 105$. Calculando a derivada de $f(x)$, teríamos $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, então pelo teorema do Valor Médio

$$f'(c) = \frac{\sqrt{105} - \sqrt{100}}{105 - 100} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{105} - \sqrt{100}}{5} \quad (4.1)$$

se multiplicarmos ambos os lados por 5, teremos

$$\sqrt{105} - \sqrt{100} = \frac{5}{2\sqrt{c}},$$

para algum número c tal que $100 < c < 105$. Nota-se que $\sqrt{100} = 10$, então $\sqrt{c} > 10$, a $\sqrt{121} > \sqrt{105} > \sqrt{c}$, isto é, $10 < \sqrt{c} < 11$, logo

$$\frac{5}{2(11)} < \frac{5}{2\sqrt{c}} < \frac{5}{2(10)}$$

isso implica que

$$\frac{5}{22} < \frac{5}{2\sqrt{c}} < \frac{5}{20} \Rightarrow 0,227 < \sqrt{105} - 10 < 0,25$$

Acrescentando 10 nas desigualdades, obtemos

$$10,22 < \sqrt{105} < 10,25.$$

Observa-se que esta estimativa não tem uma precisão que queremos, mais precisa, mas pode ser refinada. Vamos melhorar a estimativa $\sqrt{c} < \sqrt{105} < \sqrt{121}$, sabendo que $\sqrt{105} < 10,25$. Desse modo, $\sqrt{c} < 10,25$, determina-se que

$$\frac{5}{2(10,25)} < \frac{5}{2\sqrt{c}} \Rightarrow \frac{5}{2(10,25)} < \sqrt{105} - 10$$

Efetuamos o cálculo da primeira fração

$$\frac{5}{2(10,25)} = \frac{5}{20,5} \approx 0,243$$

Assim, temos

$$0,243 < \sqrt{105} - 10.$$

Ademais, temos que

$$\frac{5}{2(10)} > \frac{5}{2\sqrt{c}}$$

calculamos o resultado da fração

$$\frac{5}{20} \approx 0,25$$

isto é,

$$\sqrt{105} - 10 < 0,25$$

portanto, chegaremos na estimativa melhorada, vejamos o processo:

$$0,243 < \sqrt{105} - 10 < 0,25$$

aqui somamos 10 novamente nas desigualdades e aproximamos para três casas decimais, logo

$$10,243 < \sqrt{105} < 10,250.$$

É válido dizer que podemos alcançar uma estimativa mais precisa ainda seguindo todo o procedimento já feito.

4.0.2 Aplicação 2

Nesta aplicação, trabalharemos com desigualdades, uma vez que o Teorema do Valor Médio estabelece e estende a valores reais desigualdades válidas para valores inteiros ou racionais. Vejamos a seguir o exemplo.

A desigualdade de Bernoulli, afirma que se $1 + x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, então $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Vamos mostrar que esta desigualdade vale para qualquer expoente $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 1$. Considerando a função $f(x) = (1+x)^r$, calculando sua derivada, teremos $f'(x) = r(1+x)^{r-1}$. Assim teremos dois casos, primeiro se $-1 < x < 0$ e segundo se $x > 0$, lembrando que queremos mostrar

$$(1 + x)^r \geq 1 + rx$$

com $r \geq 1$ e $x > -1$.

Primeiro caso ($-1 < x < 0$): ciente que $x + 1$ está entre 0 e 1, com $r \geq 1$. Se elevarmos um número menor que 1 sendo que o expoente é maior que zero, resultaria em diminuir cada vez mais, assim $(1 + x)^{r-1} < 1$, logo

$$(1 + x)^{r-1} < 1 \Rightarrow r(1 + x)^{r-1} < r \Rightarrow f'(x) = r(1 + x)^{r-1} < r \Rightarrow f'(x) < r.$$

Segundo caso ($x > 0$): dessa maneira temos que $x + 1 > 1$, com $r \geq 1$, então $(1 + x)^{r-1} > 1$, $r \geq 1$, temos

$$(1 + x)^{r-1} > 1 \Rightarrow r(1 + x)^{r-1} > r \Rightarrow f'(x) = r(1 + x)^{r-1} > r \Rightarrow f'(x) > r.$$

Agora, aplicaremos o Teorema do Valor Médio em ambos os casos, assim sendo, existe um c que está entre 0 e x . Fazendo $a = 0$ e $b = x$, por definição, temos

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

dado $f(x) = (1+x)^r \Rightarrow f(0) = (1+0)^r \Rightarrow f(0) = 1^r$, substituindo resulta em

$$f'(c) = \frac{(1+x)^r - 1}{x} \Rightarrow r(1+c)^{r-1} = \frac{(1+x)^r - 1}{x}.$$

Para o caso de $-1 < x < 0$ e $f'(x) < r$, sabendo que

$$(1+c)^r < 1 \Rightarrow (1+c)^{r-1} < 1$$

Dessa forma,

$$\frac{(1+x)^r - 1}{x} \leq r \Rightarrow (1+x)^r \geq 1+rx.$$

Para o caso de $x > 0$ e $f'(x) > r$ acontece o mesmo processo, o que nos dá o resultado

$$(1+x)^r \geq 1+rx.$$

Portanto, mostramos que vale para qualquer expoente real $r \geq 1$ e $1+x > 0$. Ademais, se $r > 1$, então a desigualdade se verifica se e somente se $x = 0$.

4.0.3 Aplicação 3

A temperatura da água em um tanque industrial é modelada por uma função $f(t)$, onde $f(t)$ representa a temperatura da água em graus no instante t , em minutos. A variação da temperatura ao longo do tempo é descrita pela equação:

$$f(t) = -2t^3 + 9t^2 + 12t + 5.$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio para determinar um instante específico no intervalo de tempo dado em que a taxa de variação da temperatura da água seja igual à taxa média de variação da temperatura nesse intervalo.

Agora iremos resolver o problema. Note que $f(t)$ é um polinômio, então podemos afirmar a função é contínua e diferenciável em todo o conjunto dos números reais. Portanto, as condições do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas para qualquer intervalo $[a, b]$.

Se escolhermos o intervalo $[1, 4]$, então iremos descobrir $f(1)$ e $f(4)$

$$f(1) = -2 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 5 \quad (4.2)$$

$$= -2 + 9 + 12 + 5 \quad (4.3)$$

$$= 24 \quad (4.4)$$

$$f(4) = -2 \cdot 4^3 + 9 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 + 5 \quad (4.5)$$

$$= -2 \cdot 64 + 9 \cdot 16 + 48 + 5 \quad (4.6)$$

$$= -128 + 144 + 53 \quad (4.7)$$

$$= 69 \quad (4.8)$$

Vamos calcular $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$, assim

$$\frac{69 - 24}{4 - 1} = \frac{45}{3} = 15$$

essa é a taxa de variação média no intervalo $[1, 4]$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (1, 4)$ tal que $f'(c) = 15$, precisamos agora calcular a derivada da função $f(t) = -2t^3 + 9t^2 + 12t + 5$, segue que

$$f'(t) = \frac{d}{dt}(-2t^3 + 9t^2 + 12t + 5) \quad (4.9)$$

$$= -6t^2 + 18t + 12. \quad (4.10)$$

Fazemos a igualdade

$$-6c^2 + 18c + 12 = 15$$

$$-6c^2 + 18c + 12 - 15 = 0$$

$$-6c^2 + 18c - 3 = 0$$

dividindo a equação por -3 , obtemos

$$2c^2 - 6c + 1 = 0.$$

Usaremos a fórmula de Bhaskara, com o fito de verificar as soluções no intervalo, aplicando temos

$$c = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} \quad (4.11)$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{28}}{4} \quad (4.12)$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{4} \quad (4.13)$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}. \quad (4.14)$$

Verificaremos o que acontece em c' e c'' . Para isso, primeiramente, precisamos do valor de $\sqrt{7}$. Como $\sqrt{7} \approx 2,64575$, prosseguimos com os cálculos

$$c' = \frac{3 + 2,64575}{2} = \frac{5,64575}{2} \approx 2,822875$$

$$c'' = \frac{3 - 2,64575}{2} = \frac{0,35425}{2} \approx 0,177125$$

Desconsideramos c'' , visto que ele não está no intervalo. Portanto, segundo o Teorema do Valor Médio, existe um instante $c' \approx 2,82$ minutos, dentro do intervalo de 1 a 4 minutos, onde a taxa de variação da temperatura são exatamente 15°C por minuto.

4.0.4 Aplicação 4

Utilizaremos nesta aplicação o Teorema do Valor Médio de Cauchy e precisaremos das noções sobre *A Regra de L'Hôpital*.

Suponha que f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis no intervalo aberto, com $f(a) = g(a) = 0$, e que $g(x) \neq 0$ para $x \neq a$. Pelo teorema do Valor Médio de Cauchy, existe um ponto c , $a < c < b$, tal que

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Prosseguindo, se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então obtemos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Caso as funções se tornam infinitas em $x = a$, ou se estivermos analisando um limite no infinito, ou se ainda encontramos alguma indeterminação, podemos tomar logaritmos, ou exponenciais, ou recorrer a outra manipulação análoga.

Como exemplo, suponhamos que $a = 0$ e queremos calcular o limite de $h(x) = x \log x$ quando $x \rightarrow 0$. Escrevemos então $h(x)$ na forma $\frac{f(x)}{g(x)}$, onde $f(x) = \log x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Calculando as derivadas das funções, temos

$$f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

assim,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{-1} \right) = -\frac{x^2}{x} = -x$$

tomando o limite quando $x \rightarrow 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$$

logo pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$$

Seja $\epsilon > 0$. Escolhemos um número fixo $0 < x_1 < 1$ tal que $0 < x < x_1$, temos $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| < \epsilon$. Aplicando o Teorema do Valor Médio de Cauchy, sabemos que existe um ponto x_2 em (x, x_1) tal que

$$\left| \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \right| = \left| \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)} \right| < \epsilon.$$

Agora, como $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ para $0 < x < x_1$, podemos reescrever a expressão da seguinte forma:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \left\{ \frac{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}} \right\}.$$

Fazendo $x \rightarrow 0$, observa-se que a parte entre chaves converge para 1. Para x suficientemente pequeno, essa quantidade excede $\frac{1}{2}$, o que nos leva a concluir que

$$|h(x)| = \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < 2\epsilon$$

para x suficientemente próximo de 0. Dessa forma, o limite de h em $x = 0$ é 0.

5 Considerações Finais

Vimos, por fim, a demonstração do Teorema do Valor Médio, bem como suas aplicações em diferentes contextos teóricos. De fato, este estudo se mostra relevante, pois não apenas permite a resolução de problemas, como também permite associar situações concretas a conceitos matemáticos, em particular, o T.V.M., apesar de aplicarmos um teorema mais geral ainda, o de Cauchy. E é notável que o teorema alcança outras áreas do conhecimento, se aprofundarmos mais, com certeza, descobriremos, depende apenas do nosso desejo em buscar o conhecimento.

Compreender a importância de cada requisito para alcançar o objetivo torna-se essencial para conseguirmos evoluir. Por isso, faz-se necessário assimilar as considerações iniciais, uma vez que foram fundamentais para chegarmos à demonstração. Sem esses pré-requisitos, ou sem uma noção clara deles, a compreensão do teorema seria significativamente comprometida. Então precisamos valorizar cada progresso, pois faz a diferença e facilita o entendimento. Com base nisso, pode-se afirmar que cada seção deste trabalho desempenhou um papel essencial na compreensão do Teorema do Valor Médio, destacando-se as Derivadas, o Teorema de Rolle, que contribuíram profundamente para o entendimento.

Já constatamos que sua demonstração e implicações mostram o quanto o Teorema do Valor Médio de Lagrange é importante para a Análise Matemática. Assim como o Teorema de Rolle, ele é fundamental para o cálculo e tem aplicações em várias áreas do conhecimento. As aplicações apresentadas neste trabalho é a prova dessa afirmação.

Bibliografia

ACZEL, Amir D. **O mistério do Alef: a matemática, a cabala e a procura pelo infinito. Tradução: Ricardo Gouveia.** [S.l.]: São Paulo: Globo, 2003. Citado na p. 11.

BARTLE, Robert Gardner. **Elementos de análise real.** [S.l.]: Campus, 1983. Citado nas pp. 9, 32, 33.

BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. **História da matemática. Tradução: Helena Castro.** [S.l.]: 3 ed. São Paulo, Editora Blucher, 2012. Citado nas pp. 12, 13.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática. Tradução: Hygino H. Domingues.** [S.l.]: 5 ed. Campinas, Unicamp, 2011. Citado nas pp. 9, 11, 12, 14.

FERNÁNDEZ, Tomás; ELENA, Tamaro. **Editorial Biografías y Vidas.** [S.l.]: Barcelona, España, 2004. Disponível em:

<<https://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/lagrange.htm>>. Citado na p. 16.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real: Funções de uma Variável, Vol.1.** [S.l.]: 13 ed Rio de Janeiro, IMPA, 2020. Citado na p. 9.

_____. **Curso de Análise, Volume 1.** [S.l.]: Rio de Janeiro, IMPA, 1976. Citado na p. 9.

PATRÃO, Mauro. **Cálculo 1: Derivada e Integral em uma variável.** [S.l.]: Brasília, 2011. Citado na p. 9.

SOUSA, Angélica Silva de; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de; ALVES, Laís Hilário. A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos. **Cadernos da FUCAMP**, v. 20, n. 43, 2021. Disponível em:

<<https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/cadernos/article/view/2336>>. Citado na p. 9.

STEWART, James. **Cálculo.** [S.l.]: 7 ed. Cengage Learning, 2011. Citado na p. 16.

THOMAS, George B; D., Weir Maurice; HASS, Joel. **Cálculo, Volume 1. Tradução: Kléber Pedroso e Regina Simille de Macedo.** [S.l.]: 12 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. Citado na p. 9.