



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Curso de Matemática – Licenciatura

LANA RAYANA DA SILVA GOMES PEREIRA

GEOMETRIA EUCLIDIANA E NÃO EUCLIDIANA: uma análise comparativa de fundamentos e aplicações

São Luís- MA
2025

LANA RAYANA DA SILVA GOMES PEREIRA

**GEOMETRIA EUCLIDIANA E NÃO EUCLIDIANA: uma análise
comparativa de fundamentos e aplicações**

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciada em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura
Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando Coelho Amaral

São Luís - MA
2025

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Gomes Pereira, Lana Rayana da Silva.

GEOMETRIA EUCLIDIANA E NÃO EUCLIDIANA : uma análise comparativa de fundamentos e aplicações / Lana Rayana da Silva Gomes Pereira. - 2025.

39 p.

Orientador(a): Luis Fernando Coelho Amaral.

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís -ma, 2025.

1. Geometria euclidiana. 2. Geometria não euclidiana. Geometria Hiperbólica. 4. Geometria Elíptica. I. Coelho Amaral, Luis Fernando. II. Título.

LANA RAYANA DA SILVA GOMES PEREIRA

GEOMETRIA EUCLIDIANA E NÃO EUCLIDIANA: uma análise
comparativa de fundamentos e aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção do
grau de Licenciada em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 27/02/2025

Prof. Dr. Luis Fernando Coelho Amaral
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof. Dr. Cleber Araújo Cavalcanti
DEMAT/UFMA
Primeiro Examinador

Lailla Judith Fernandes Moura
DDE-ROS/IFMA
Segunda Examinadora

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ser a minha força e fortaleza em todas as situações, sem a sua graça e amor eu nada seria. Ao meu pai João e minha mãe Jackeline que sempre me incentivaram e investiram em minha educação, como sou grata. Ao meu marido, Bruno Anderson, que é o meu maior incentivador, obrigada por sempre estar ao meu lado segurando a minha mão. A minha filha, Ana Laura, meu maior presente, mesmo tão pequena me dá forças, cada sorriso banguela renova minhas energias. Ao meu Orientador, Dr. Luis Fernando Coelho Amaral, sou muito grata por toda sua ajuda.

RESUMO

A Geometria, seja Euclidiana ou Não Euclidiana, é essencial na Matemática e na educação. A Geometria Euclidiana, baseada nos postulados de Euclides, tem sido o modelo predominante. No entanto, a necessidade de representar espaços complexos levou ao desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas, como a Hiperbólica e a Elíptica, ampliando a compreensão espacial. Este estudo visa explorar e comparar os princípios da Geometria Euclidiana e Não Euclidiana, analisando diferenças conceituais e aplicações. Justifica-se pela necessidade de diversificar o ensino da Matemática, oferecendo aos alunos uma visão mais ampla. Embora a Geometria Euclidiana domine os currículos, a introdução das Geometrias Não Euclidianas pode enriquecer a aprendizagem, estimulando raciocínio dedutivo e criatividade. A metodologia baseia-se em revisão bibliográfica, aplicação de atividade em campo, análise de textos teóricos e históricos. Espera-se contribuir para a educação ao integrar conceitos Euclidianos e Não Euclidianos, promovendo um ensino mais contextualizado e enriquecedor na Educação Básica e Superior.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana, Geometria não Euclidiana, Geometria Hiperbólica e Geometria Elíptica.

ABSTRACT

Geometry, whether Euclidean or Non-Euclidean, is essential in Mathematics and education. Euclidean Geometry, based on Euclid's postulates, has been the predominant model. However, the need to represent complex spaces led to the development of Non-Euclidean Geometries, such as Hyperbolic and Elliptical, expanding spatial understanding. This study aims to explore and compare the principles of Euclidean and Non-Euclidean Geometry, analyzing conceptual differences and applications. The objectives include examining Euclid's postulates, discussing the foundations of Hyperbolic and Elliptic Geometry, comparing axiomatic systems and investigating their applicability in teaching. It is justified by the need to diversify Mathematics teaching, offering students a broader vision. Although Euclidean Geometry dominates curricula, the introduction of Non-Euclidean Geometries can enrich learning, stimulating deductive reasoning and creativity. The methodology is based on bibliographical review, application of field activity, analysis of theoretical and historical texts. It is expected to contribute to education by integrating Euclidean and Non-Euclidean concepts, promoting more contextualized and enriching teaching in Basic and Higher Education.

Keywords: Euclidean geometry, non-Euclidean geometry, hyperbolic geometry e elliptical geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1-Disco de Poicaré	16
Figura 2- Atividade com desenho das figuras geométricas	22
Figura 3- Atividade sobre figuras planas do material didático do 3º ano.....	22
Figura 4- Atividades aplicadas em sala sobre sólidos geométricos	24
Figura 5- Atividade com a montagem de cubo	25
Figura 6- Observação do objeto redondo (bola)	27
Figura 7- Produção das bolinhas de papel com uma esfera	28
Figura 8- Atividade "paisagem imaginária"	29
Figura 9- Conteúdo estudado	30
Figura 10- Formas geométricas produzidas pelos estudantes.....	31
Figura 11- Processo de produção	32
Figura 12- Imagens montadas com as formas geométricas	32
Figura 13- Processo de montagem das pirâmides pelos estudantes	34
Figura 14- Formas produzidas pelos estudantes	34

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	8
2 GEOMETRIA EUCLIDIANA: os 5 postulados de Euclides	9
2.1 Os 5 postulados de Euclides	11
3 GEOMETRIA NÃO – EUCLIDIANA E SEUS FUNDAMENTOS	14
4 APLICAÇÃO: geometria Euclidiana no cotidiano escolar.....	18
4.1 Conceitos da geometria aplicados no Ensino Fundamental I.....	20
4.2 Atividade aplicada no Ensino Fundamental II	30
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	36
REFERÊNCIAS	38

1 INTRODUÇÃO

Ao estudar a Geometria Euclidiana e Não Euclidiana, busca-se compreender e conhecer melhor essa área da Matemática, que desempenha um papel fundamental no contexto escolar. Os postulados de Euclides, sistematizados na era helenística, têm sido um modelo essencial para a descrição do espaço em que vivemos, servindo como base tanto nos aspectos teóricos quanto nas práticas dentro do processo de ensino-aprendizagem. No entanto, o avanço das investigações matemáticas, especialmente no contexto da representação de espaços complexos, como o universo elipsoidal ou estruturas naturais não planas, só se tornou possível como o surgimento de uma nova abordagem geométrica, conhecido como Não Euclidianas. Essas novas abordagens ampliaram a compreensão sobre o espaço e suas diversas aplicações.

Com seus cinco postulados fundamentais, a Geometria Euclidiana se localiza historicamente como a base do ensino de matemática nas escolas brasileiras, desde a educação jesuítica até os dias atuais. Embora sejam importantes, diversas características físicas e geográficas ultrapassaram as fronteiras dessa perspectiva, exigindo novas estruturas teóricas. Neste cenário, a Geometria Não Euclidiana, que engloba as Geometrias Hiperbólica e Elíptica, apresentou sistemas axiomáticos alternativos que questionam a universalidade do quinto postulado de Euclides. Isso abre caminhos para a interpretação e solução de questões em escalas globais e cosmologias.

A justificativa da pesquisa consiste na necessidade crescente de diversificar o ensino de Matemática, proporcionando aos alunos uma perspectiva mais abrangente e unificada das geometrias. Embora a Geometria Euclidiana predomine nos currículos, a inclusão das Geometrias Não Euclidianas é um progresso para investigar questões que vão além da geometria plana, estimulando a criatividade, o cálculo dedutivo e uma compreensão mais aprofundada dos espaços ao nosso redor.

O objetivo geral é explorar e comparar teoricamente os princípios da Geometria Euclidiana e das Geometrias Não Euclidianas, examinando suas divergências conceituais e consequências. Para tal, estabelece objetivos específicas como: Analisar os cinco postulados de Euclides e seu papel na estruturação da Geometria Euclidiana; Debater os princípios das Geometrias

Hiperbólica e Elíptica, explorando seus conceitos, definições e atributos; Realizar uma comparação entre os sistemas axiomáticos, enfatizando o efeito das alterações ao quinto postulado; Investigar usos práticos dessas geometrias no ensino, enfatizando a importância de ambas na compreensão espacial e na educação matemática dos alunos.

A abordagem utilizada será uma pesquisa bibliográfica, complementada por análises de textos teóricos e históricos, com o propósito de fundamentar o debate e sugerir reflexões pedagógicas. A razão para esta pesquisa reside na necessidade crescente de diversificar o ensino de Matemática, proporcionando aos alunos uma perspectiva mais abrangente e unificada das geometrias. Embora a Geometria Euclidiana predomine nos currículos, a inclusão das Geometrias Não Euclidianas é um progresso para investigar questões que vão além da geometria plana, estimulando a criatividade, o cálculo dedutivo e uma compreensão mais aprofundada dos espaços ao nosso redor.

Assim, este estudo visa contribuir para prática pedagógica ao sugerir a incorporação de conceitos Euclidianos e Não Euclidianos, não somente como instrumentos matemáticos, mas como ferramentas para entender o mundo em sua variedade espacial. Portanto, o objetivo é fornecer apoio teórico e metodológico que promova a adoção de um ensino de Geometria mais abrangente e contextual na Educação Básica e Superior.

2 GEOMETRIA EUCLIDIANA: os 5 postulados de Euclides

Geometria é um dos campos do conhecimento mais antigos do ser humano, e tem indícios da mesma sendo usada desde as primeiras civilizações. De acordo com Eves (1992), questões práticas, como o cálculo de terrenos e a construção de edifícios, levaram a ser cada vez mais organizado. Neste ponto, o pensamento humano começou a abstrair propriedades gerais, formando o que hoje chamamos de Geometria Euclidiana, a primeira a ser organizada como um sistema axiomático por Euclides cerca de dois milênios e meio atrás em 300 a.C. (BALDINI, 2008).

Como um componente indispensável da matemática, a geometria fomenta aprimoramento raciocínio lógico, intelecto espacial, e resolução de problemas. Geometria Euclidiana, sistematizada por Euclides há mais de dois mil anos, tem

sido o pilar da disciplina de matemática nas escolas do Brasil, desde a era da educação jesuítica até a da modernidade (CRUZ; SANTOS, 2015).

Enquanto seu papel histórico foi indispensável em termos militar, colonial e imperial, sua influência torna-se vital para a determinação de modernos currículos escolares como é o caso do Colégio D. João II. No entanto, no século XIX, três novas geometrias chegaram: as Geometrias Hiperbólica e Elíptica abriram a porta de conceber espaços que não se restringiam aos postulados da Geometria Euclidiana (BALDINI, 2008).

Ao escrever Os Elementos, Euclides sistematizou a Geometria, um marco no pensamento matemático. O tratado tornou-se o sistema de sabedoria geométrica desse tempo, expressa em definições, axiomas e postulados. Desta forma, as deduções tocam a verdade com muita precisão. Os cinco postulados de Euclides serviram de base para a Geometria, ambas plana e espacial, com o quinto postulado, o Teorema dos Paralelos, a parte mais atraente dele (CRUZ; SANTOS, 2015).

Ele declara que, “se uma linha reta cai sobre duas linhas retas, de tal forma que os ângulos interno formados por ela sejam menores do que dois ângulos retos, essas duas linhas, prolongadas indefinidamente, encontrar-se-ão sobre o lado onde estão os menores ângulos”. Mesmo quando o ponto é claro, ele não é simplesmente visto como óbvio. Portanto, tornou-se a causa das discussões dos séculos e, talvez, até das tentativas de dedução dos exemplos restantes.

Contudo, o rigor lógico-dedutivo da definição de Euclides teve impacto temporário, estabelecendo referência para outras áreas do conhecimento. Sua abordagem proporciona uma visão estruturada do espaço físico e é fundamental para a engenharia, arquitetura e navegação (CRUZ; SANTOS, 2015). A geometria euclidiana governou por quase dois mil anos e ainda hoje constitui a base da matemática.

A geometria, em especial a euclidiana, teve um papel crucial no desenvolvimento da lógica e do raciocínio dedutivo. Ela contribui para aprimorar o pensamento espacial, a criatividade e as habilidades para resolver problemas nas escolas (ROCHA, 2017). No entanto, como ressaltaram Lorenzato (1995) e outros acadêmicos, o ensino dessa disciplina frequentemente negligencia sua profundidade teórica, focando apenas em fórmulas e métodos automáticos. É

importante incluir abordagens alternativas, como a geometria não euclidiana, para enriquecer as oportunidades de aprendizado. Esses conceitos geométricos desafiam o quinto postulado de Euclides e possibilitam a exploração de ideias em superfícies, como esferas ou hiperbolóides, oferecendo aos alunos uma compreensão mais ampla e variada do espaço.

Desde o século XVIII até os dias atuais houve debates sobre o quinto postulado da matemática universal entre matemáticos renomados como Gauss e Lobachevsky que surgiram ao surgimento das Geometrias Não Euclidianas (ROCHA 2017).

A Geometria Hiperbólica foi criada por Lobachevsky e Bolyai como uma alternativa ao quinto postulado ao postular que múltiplas retas paralelas podem existir em relação a uma linha específica que passa por um ponto externo. Essencial para a identificação de espaços com curvas menos pronunciadas (ROCHA 2017).

A geometria elíptica foi introduzida por Riemann e argumenta que não existem linhas paralelas como as descobertas na superfície de um cone. Esse conceito é utilizado em estudos astronômicos e na Teoria da Relatividade Geral proposta por Einstein (ROCHA 2017).

Essas geometrias transformaram a Matemática, demonstrando que o quinto postulado não era obrigatório para a consistência lógica. Também evidenciaram que a Geometria Euclidiana é apenas um exemplo específico entre diversas opções, expandindo a compreensão sobre o espaço e a forma.

2.1 Os 5 postulados de Euclides

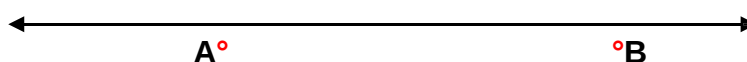
A Geometria Euclidiana se baseia em conceitos reconhecidos sem necessidade de prova, chamado axiomas ou postulados. Essas declarações reais são as fontes de teoremas para inferir todo sistema lógico. Um axioma é uma verdade incontestável, como "o todo maior que as partes", enquanto um postulado refere-se a suposições geométricas particulares admitidas sem testemunharão, tais quais ter existência de uma relação entre duos locais (PINA, 2014).

Os axiomas em geral se aplicam para uma grande variedade de situações, tais como "coisas iguais adicionadas por terceira". Os postulados são

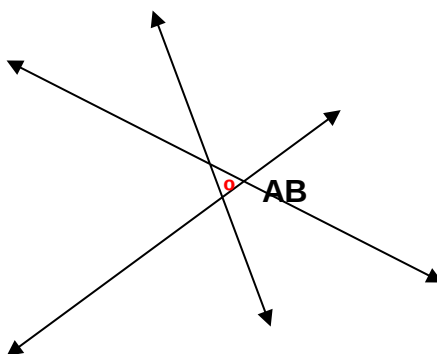
propriedades da geometria, definindo as relações entre ponto, planos e superfícies planas. Por exemplo, a noção de que há paralelas não pertence exclusivamente da geometria. Os cinco postulados de Euclides que constituem os *Elementos*, são (MELO, 2022):

Em termos gerais, os axiomas são aplicáveis a várias áreas, como "coisas iguais somadas a uma terceira são iguais". Os postulados são particulares da geometria, estabelecendo as conexões entre pontos, linhas e superfícies planas. Por exemplo, a premissa de que existem paralelas é exclusiva da geometria. Os cinco postulados de Euclides, que estruturam os *Elementos*, são os seguintes (MELO, 2022):

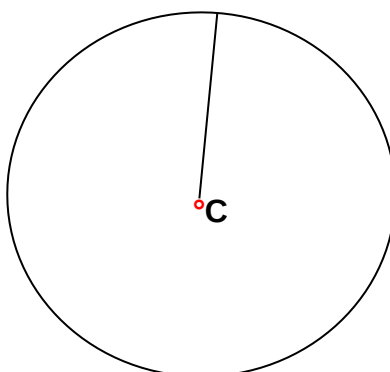
1. Conexão entre dois pontos: Todo par de diferentes pontos pode ser conectado por uma só reta. Por exemplo, quando teremos A e B somente há uma reta que passa por cada um dos 2 ponto.



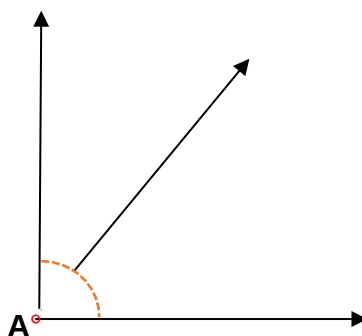
2. Prolongamento de retas: Uma reta finita pode ser prolongada indefinidamente em qualquer direção. Apenas imagine um segmento de reta, chamado AA ou BB; ele pode ser estendido em sua extensão por mais que a mesma.



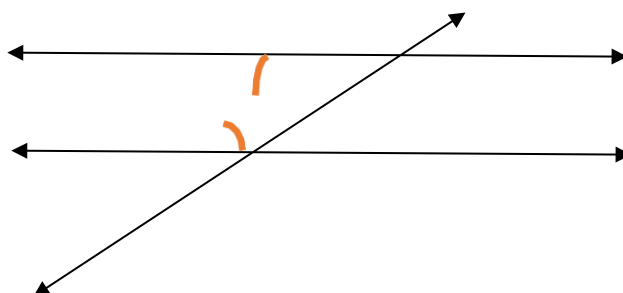
3. Traçado de círculos: Pode-se formar um círculo do qualquer ponto como centro, ou distância (raio).



4. Igualdade dos ângulos retos: Todos os ângulos retos são congruentes, ou seja, têm a mesma medida.



5. Paralelas e interseções: Se uma reta ao cortar duas outras formar ângulos internos, de um lado, cuja soma é menor que dois ângulos retos, essas duas retas se encontrarão no lado onde os ângulos são menores.

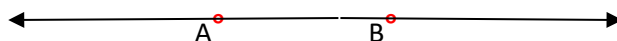


Além destes postulados, os conceitos de ponto, reta e plano estão em grande parte da base para a geometria euclidiana. Um ponto é um termo sem dimensão, uma reta tem comprimento infinito mas não largura de planos ou superfície bidimensional indefinida (PINA, 2014).

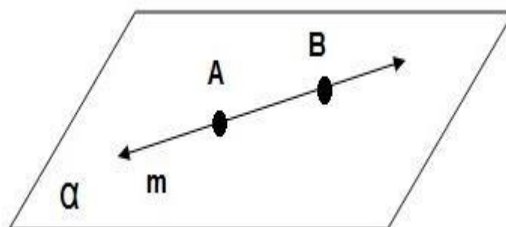
Uma reta é um conjunto de pontos que não faz curva. Em uma reta, existem infinitos pontos, o que também indica que a reta é infinita. A reta também pode ser considerada como espaço que possui apenas uma dimensão, ou seja, é na reta que se constroem figuras com uma dimensão ou menos (SILVA, 2025, p.04)

Assim, temos, por exemplo:

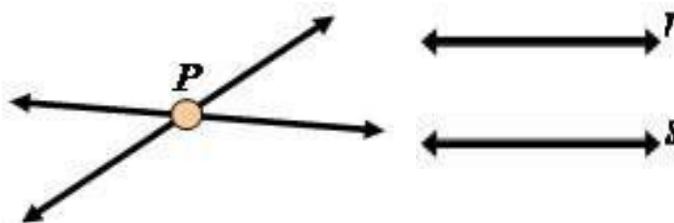
- Ponto e reta: Por dois pontos distintos passa uma única reta.



- Reta e plano: Se dois pontos de uma reta estão em um plano, toda a reta está no plano.



- Relações entre retas: Retas podem ser paralelas (nunca se cruzam) ou concorrentes (têm um ponto de interseção).



Embora os primeiros quatro postulados sejam intuitivos, o quinto postulado gerou debates por séculos. Sua complexidade impulsionou a descoberta de geometrias não euclidianas, que consideram variações desse princípio (MELO, 2022).

3 GEOMETRIA NÃO – EUCLIDIANA E SEUS FUNDAMENTOS

Abreu (2012) evidencia que, ao longo do tempo, o quinto postulado de Euclides despertou conclusões matemáticas, que talvez pudessem ser confirmadas pelos axiomas da geometria neutra. O próprio Euclides tinha dúvidas em seu quinto postulado sobre a veracidade de seu axioma, usando provas e evidências em sua 29ª afirmação (GUIMARÃES; RIBEIROA, 2020).

Durante aproximadamente 2.000 anos, renomados matemáticos buscaram comprovar o quinto postulado. Até que em 1829, aproximadamente, uma nova geometria foi descoberta, uma geometria não euclidiana, tão sólida quanto à geometria de Euclides. Os matemáticos que foram responsáveis pela descoberta da geometria hiperbólica, foram: “o matemático alemão Johann Carl Friedrich

Gauss (1777-1855), o também matemático húngaro János Bolyai (1802-1860) e Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), nascido na Rússia e formado em matemática” (GUIMARÃESA; RIBEIROA, 2020, p.27).

As Geometrias Não-Euclidianas emergiram diretamente da negação ou substituição do quinto postulado de Euclides. Este princípio, também chamado de postulado das paralelas, sustenta que, por um ponto fora de uma linha reta, existe apenas uma única linha paralela a ela. A sua inclusão possibilitou a criação de geometrias consistentes e alternativas à euclidiana, das quais as mais notórias são as Geometrias Hiperbólica e Elíptica (EDUARDO, 2013).

Os matemáticos Nikolai Lobachevsky e Janos Bolyai desenvolveram a Geometria Hiperbólica de maneira autônoma no começo do século XIX. Este novo modelo emerge da negação do quinto postulado de Euclides, que sustenta que, por um ponto fora de uma linha reta, existe apenas uma única linha paralela a ela. Por outro lado, na Geometria Hiperbólica, uma concentração de retas paralelas pode cruzar um ponto fora de uma linha específica (FREITAS; PEREIRA, 2020).

Esta alteração no conceito de paralelismo trouxe consequências singulares e atributos essenciais para a geometria. Destacando-se: a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre inferior a 180° , alteração na soma dos ângulos e ausência de retas paralelas (GUIMARÃESA; RIBEIROA, 2020).

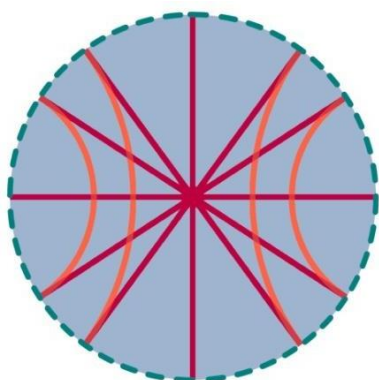
Assim, esta característica evidencia a curvatura negativa do espaço hiperbólico, contrapondo-se à geometria plana de Euclides, que determina que a soma dos ângulos de um triângulo é exatamente 180° , ao que se refere à soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre inferior a 180. Já a alteração na soma dos ângulos, se destaca a medida que os lados de um triângulo aumentam, a soma de seus ângulos diminui. Isso implica que triângulos hiperbólicos de grande dimensão podem apresentar ângulos internos próximos a zero, evidenciando como a geometria hiperbólica confronta a intuição euclidiana (FREITAS; PEREIRA, 2020).

Na Geometria Hiperbólica, o conceito de retas paralelas não é aplicado. As linhas paralelas em um ponto podem se desviar ou se cruzar infinitamente, dependendo de onde se encontram no espaço (FREITAS; PEREIRA, 2020).

Inicialmente, essas características foram ilustradas por meio de modelos como o disco de Poincaré e o modelo de Klein, que auxiliaram na visualização de

conceitos abstratos da geometria hiperbólica. Além disso, a Geometria Hiperbólica não apenas desafiou o postulado das paralelas, como também proporcionou uma nova compreensão do espaço, provando que sistemas geométricos alternativos à Geometria Euclidiana podem ser coerentes, logicamente e aplicáveis em vários cenários, como na física contemporânea e na relatividade geral (EDUARDO, 2013).

Figura 1-Disco de Poincaré



Fonte: Google imagens, 2025.

Bernhard Riemann desenvolveu a Geometria Elíptica, fundamentada nos fundamentos da geometria da superfície esférica, com uma estrutura totalmente distinta da Geometria Euclidiana. Ela espelha um espaço de curvatura positiva, semelhante à superfície de um cone, e desafia o quinto postulado de Euclides, além de outras noções essenciais (LOVIS; FRANCO, 2015). Assim, no campo da Geometria Elíptica, temos: a ausência de linhas paralelas, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre superior a 180° e Definição de "retas".

Ao contrário da Geometria Euclidiana, não há linhas paralelas. Eventualmente, todas as "retas" (grandes círculos na esfera, como os meridianos ou o equador da Terra) se cruzam. Por exemplo, nos polos norte e sul de um globo terrestre, dois meridianos se encontram, mesmo que aparecem divergentes em certas regiões. Na superfície esférica, quanto maior o triângulo, maior será a soma dos seus ângulos. Por exemplo, um triângulo composto por três meridianos que se origina de um polo pode apresentar ângulos de 90° em cada um, somando um total de 270° . E na definição de "retas" no âmbito da Geometria Elíptica, as "retas" são simbolizadas pelos círculos amplos de uma esfera. Estes círculos têm a maior extensão possível na esfera e são vistos como as menores distâncias entre dois pontos na esfera (LOVIS; FRANCO, 2015).

Adicionalmente, na Geometria Elíptica, o segundo postulado de Euclides, que sugere que uma linha pode ser infinitamente contínua, não é aplicável. As retas, devido ao seu comprimento limitado (como os grandes círculos fechados), não podem ser intercaladas indefinidamente, o que se distingue fundamentalmente do espaço plano da Geometria Euclidiana (FREITAS; PEREIRA, 2020).

Essa perspectiva geométrica foi crucial para ampliar o entendimento sobre o espaço e suas características, sendo especialmente relevante em campos como a relatividade geral, onde o espaço-tempo pode ser representado por geometrias não-euclidianas. A Geometria Elíptica evidencia que, apesar de serem valiosas, as concepções de Euclides não são as únicas maneiras de interpretar e descrever o espaço (GUIMARÃES; RIBEIROA, 2020).

As Geometrias Não-Euclidianas, especialmente as geometrias Hiperbólica e Elíptica, desafiam o sistema geométrico tradicional ao reexaminar o quinto postulado de Euclides e explorar novos horizontes espaciais. Ambas apresentam diferenças significativas na maneira como abordam conceitos como o paralelismo e as características dos triângulos, como apresentados no quadro a seguir (FREITAS; PEREIRA, 2020).

Quadro 1- Diferenças fundamentais entre Geometria Hiperbólica e Geometria Elíptica

Geometria	Hiperbólica	Elíptica
Paralelismo	Por um ponto externo a uma reta, passam infinitas retas paralelas a ela.	Não existem retas paralelas, pois todas as "retas" acabam se encontrando.
Soma dos ângulos internos de triângulos	A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor que 180° , diminuindo conforme os lados do triângulo aumentam.	Essa soma é maior que 180° , crescendo proporcionalmente ao tamanho do triângulo.

Curvatura do espaço	Aplica-se a espaços de curvatura negativa, como a superfície de uma sela.	Associa-se a espaços de curvatura positiva, como a superfície de uma esfera.
----------------------------	---	--

Fonte: Freitas; Pereira, 2020.

A evolução das Geometrias Não-Euclidianas representou um avanço significativo, mostrando que o espaço não precisa se conformar exclusivamente com as normas euclidianas. Esta visão inovadora revelou que os sistemas geométricos podem possuir consistência interna e validade lógica, mesmo que sejam diferentes das concepções convencionais (EDUARDO, 2023).

A relevância prática dessas geometrias foi particularmente notável na física contemporânea. A Teoria da Relatividade Geral, formulada por Albert Einstein, emprega noções de curvatura espacial e temporal fundamentadas em geometrias não-euclidianas para explicar a gravidade e o cosmos em escalas cósmicas. Exemplo: Uma geometria de curvatura positiva ou negativa pode ser aplicada para interpretar o espaço-tempo em torno de grandes massas, como estrelas ou buracos negros (EDUARDO, 2023).

Essas descobertas, que surgiram de questionamentos sobre o quinto postulado de Euclides, não apenas ampliaram as fronteiras do raciocínio matemático, mas também estabeleceram novos horizontes na interpretação do universo, demonstrando que a matemática ultrapassa a intuição euclidiana.

4 APLICAÇÃO: geometria Euclidiana no cotidiano escolar

O início da história da Matemática está relacionado diretamente às necessidades práticas das sociedades antigas. A primeira observação desta ciência ocorreu com a contagem de objetos e a medição de superfícies e volumes, respondendo às necessidades de organização e planejamento na agricultura, construção e comércio. Documentos históricos, como o Papiro de Rhind (1600 aC), comprovaram o avanço inicial da matemática entre egípcios e mesopotâmios, que

empregaram métodos básicos de aritmética e geometria para soluções de questões do dia a dia (SEBIÃO, 2019). Assim,

Os textos eram feitos em escrita cuneiforme e datados desde mais ou menos 3000 a.C e encontrados na Mesopotâmia. Antes da criação da escrita, já conheciam —os dias e anos, além de saber os sistemas de subtração, adição, multiplicação e divisão. Na China, é inventado o ábaco, primeiro instrumento mecânico para calcular. São criadas as tabuadas e o cálculo de área é desenvolvido (ANDRÉ, 2001, p. 03).

Ao longo do tempo, a Geometria, inicialmente empregada de maneira empírica, evoluiu para uma aplicação mais sofisticada e sistemática na civilização grega. Tales de Mileto (640 aC - 564 aC), reconhecido como um dos precursores da matemática, implementou o raciocínio dedutivo, um ponto crucial no progresso da geometria. Tales empregou as características de triângulos semelhantes para determinar a altura das pirâmides do Egito, provando que os princípios geométricos podem ser aplicados tanto na prática quanto na teoria (PIASESKI, 2010).

Pitágoras (570 aC - 500 aC) é outro personagem crucial na história da geometria, cujas descobertas superaram o saber egípcio e babilônico. Ele desenvolveu pesquisas sobre a conexão entre os lados de um retângulo, resultando no famoso Teorema de Pitágoras. As suas concepções tiveram um impacto significativo no pensamento matemático grego, que começou a procurar leis universais por meio de raciocínios lógicos (SEBIÃO, 2019).

Euclides (300 aC) foi o responsável pela sistematização do saber geométrico, reunindo as descobertas previstas em seu trabalho "Os Elementos". Esta série de 13 livros é distribuída como um marco na história da matemática, enfatizando a geometria como uma ciência axiomática e dedutiva. "Os Elementos" localizaram conceitos essenciais como retas paralelas e figuras geométricas, além de formular postulados que fundamentaram séculos de pesquisa matemática (PIASESKI, 2010).

Além de Euclides (428 aC - 348 aC), Platão (428 aC - 348 aC) teve um papel relevante ao vincular a geometria a conceitos filosóficos. Ele defendeu a ideia de que os sólidos regulares, denominados poliedros de Platão, simbolizavam os componentes fundamentais do cosmos, integrando matemática, filosofia e ciência natural. Essa visão integrada moldou-se à maneira como a geometria foi tratada e apreciada na antiguidade (KUENZER, 2005)

Com a chegada da Idade Moderna, surgiram novos progressos geométricos. No século XVII, Descartes criou a geometria analítica, combinando álgebra e geometria com a introdução do plano cartesiano. Esta inovação possibilitou a representação de figuras geométricas através de equações, expandindo as oportunidades de uso da geometria em campos como a física e a engenharia. O surgimento da geometria projetiva foi impulsionado por matemáticas como Poncelet e Cayley, enquanto Felix Klein unificou várias áreas geométricas no século XIX (PIASESKI, 2010).

Com o passar dos anos, a geometria passou de um instrumento útil para uma ciência abstrata e essencial. A sua utilização estende - se a diversas áreas, como astronomia, engenharia, tecnologia e arte. Embora seja importante, o ensino de geometria enfrenta obstáculos. Desde o século XX, a inclusão de seus programas de estudo foi diminuída, afetando a formação conceitual dos estudantes e restringindo seu progresso em habilidades espaciais e lógicas (SEBIÃO, 2019).

A preocupação em resgatar o ensino da geometria como uma das áreas fundamentais da matemática tem levado muitos professores e pesquisadores a se dedicarem à reflexão e à elaboração, implementação e avaliação de alternativas, que busquem superar as dificuldades não raro encontradas na abordagem desse tema, na escola básica ou em níveis superiores de ensino (PIASESKI, 2010, p. 14).

Contudo, os esforços estão sendo realizados para reavivar a relevância da geometria no âmbito educacional. Atividades que combinam conceitos geométricos com cenários práticos e interdisciplinares demonstraram eficiência no engajamento dos estudantes e na valorização desta área do conhecimento . Portanto, a geometria permanece como um aprendizado fundamental da matemática, auxiliando no progresso intelectual, cultural e tecnológico da humanidade.

4.1 Conceitos da geometria aplicados no Ensino Fundamental I

A Geometria tem um papel crucial na educação, proporcionando uma base robusta para entender o mundo físico e abstrato. Tanto a Geometria Euclidiana quanto a Não-Euclidiana possuem relevância prática e teórica no ensino, especialmente quando são investigadas suas conexões com a vida cotidiana e suas utilizações em variados cenários.

A Geometria Euclidiana, com suas noções fundamentais de ponto, linha e plano, é crucial para introduzir os estudantes à organização do raciocínio matemático. A primeira análise desta geometria fornece uma compreensão das formas regulares e irregulares, além de permitir ligações com a arte, arquitetura e a natureza (SEBIÃO, 2019).

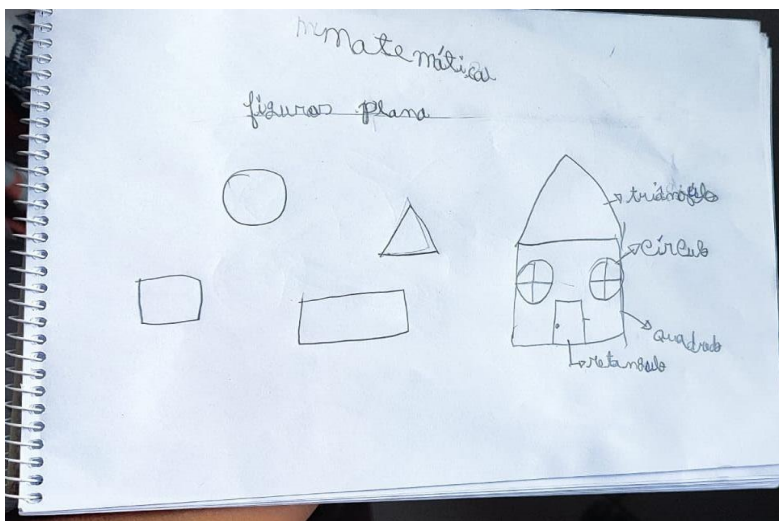
Um caso ilustrativo disso é a avaliação de construções contemporâneas, como Brasília, cujo arranjo geométrico se reflete tanto na complexidade quanto na elegância das formas arquitetônicas (KUENZER, 2005). Propostas de ensino que empreguem recursos audiovisuais, visitas a edificações e atividades práticas, como dobraduras e manipulação de figuras geométricas, tornam o processo de aprendizagem mais interativo e motivador (SEBIÃO, 2019).

Com exemplo, podemos descrever sobre a atividade aplicada em uma turma do 3º ano, turma B, do Ensino Fundamental I, da Unidade de Ensino Básica Aberto Pinheiro, escola pública da rede município da prefeitura de São Luís, Maranhão. A proposta pedagógica tinha como objetivo trabalhar o conceito de formas geométricas planas no contexto matemático. O tema foi desenvolvido ao longo de um mês, começando com a apresentação das formas geométricas mais conhecidas, como o quadrado, o triângulo, o retângulo e o círculo. Essa introdução foi realizada utilizando desenhos no quadro, permitindo aos alunos observarem as características de cada figura.

As crianças foram questionadas sobre quais objetos do cotidiano elas associavam a essas figuras geométricas, promovendo a relação entre teoria e prática. Os alunos, ao observarem a própria sala de aula e a escola, identificaram a presença de formas geométricas em diferentes elementos, como as paredes, as janelas e as portas, bem como no formato geral da construção do prédio. Em uma das atividades propostas na disciplina de Artes, que teve caráter interdisciplinar, a professora solicitou que os alunos criassem desenhos utilizando formas geométricas.

Durante a atividade, uma aluna destacou-se ao desenhar uma casa e apontar, de forma detalhada, as formas geométricas utilizadas na composição de sua obra. Essa abordagem permitiu aos alunos compreenderem, de maneira prática e criativa, como as figuras geométricas estão presentes no cotidiano e nas construções ao seu redor (Figura 2).

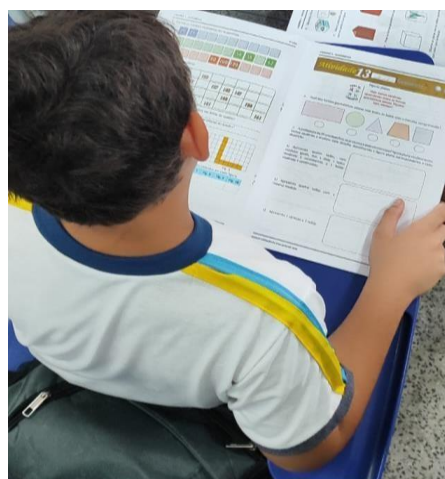
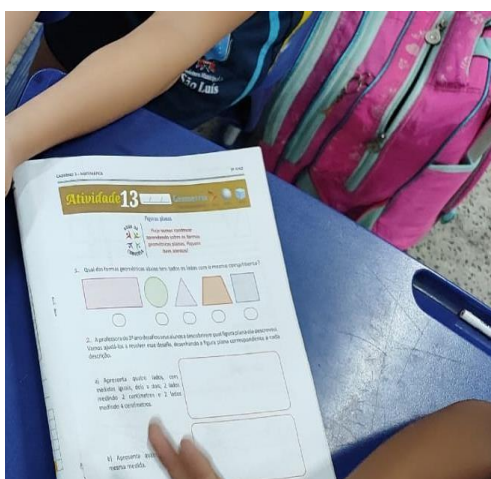
Figura 2- Atividade com desenho das figuras geométricas



Fonte: Gomes, 2024

Durante as aulas subsequentes, foram aplicadas atividades em livros didáticos e apostilas, auxiliando na fixação e no entendimento dos conceitos apresentados. Esse processo contínuo de observação, questionamento e prática contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos, com o objetivo de reconhecer face geométrica plana existente em objetos no mundo físico de acordo com suas semelhanças e diferenças.

Figura 3- Atividade sobre figuras planas do material didático do 3º ano



Fonte: Gomes, 2024

A atividade desenvolvida trabalhou habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), como a “EF03MA15, que envolve o reconhecimento de figuras planas e algumas de suas propriedades (círculo, quadrado, retângulo, triângulo, trapézio, paralelogramo, lados, vértices, eixos de simetria e congruência)” (BRASIL, 2020, p. 76). Além disso, também abordou a habilidade “EF01MA14, que trata de identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em diferentes disposições ou nos contornos das faces de sólidos geométricos” (BRASIL, 2020, p. 53). Essas habilidades são essenciais para o desenvolvimento e aprendizado dos alunos, contribuindo para a construção de uma base sólida em raciocínio geométrico e ampliando a capacidade de reconhecer e aplicar conceitos matemáticos em situações práticas do cotidiano.

Por outro lado, a Geometria Não-Euclidiana, apesar de ser menos abordada nos programas básicos, representa uma chance de ampliar o entendimento sobre conceitos mais abstratos e multidimensionais. Esta estratégia é particularmente pertinente em situações que envolvem a avaliação de formas espaciais mais complexas, fundamentais para campos como a física e o design, que frequentemente exigem cálculos que ultrapassam as limitações do espaço euclidiano. Iniciar esses conceitos através de atividades que estimulam a criação e manipulação de modelos tridimensionais ou virtuais pode ser de grande valor (SEBIÃO, 2019).

A atividade, desenvolvida no 3º ano do Ensino Fundamental I da U.E.B. Alberto Pinheiro, utilizou modelos tridimensionais e visuais durante uma aula de matemática para explorar o conceito de sólidos geométricos com a turma. Sólidos geométricos “são figuras tridimensionais caracterizadas por terem largura, altura e profundidade, além de apresentarem superfícies que podem ser planas ou curvas” (ANDRÉ, 2001, p.10). Exemplos incluem cubos, paralelepípedos, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.

O conteúdo foi trabalhado ao longo de três semanas, período em que os alunos participaram de atividades variadas para construir e aprofundar o entendimento. O processo incluiu explicações teóricas no quadro, exercícios em cadernos, consulta a livros e atividades práticas, como colagem (Figura 4). Nessa última, os alunos trouxeram embalagens vazias de casa para analisar seus

ângulos, lados e faces, o que ajudou significativamente no reconhecimento dos sólidos geométricos.

Figura 4- Atividades aplicadas em sala sobre sólidos geométricos



Fonte: Gomes, 2024

Em uma das atividades, os alunos pintaram, recortaram e montaram um cubo. O cubo “é um sólido geométrico composto por seis faces quadradas congruentes, 12 arestas e oito vértices” (ANDRÉ, 2001, p.07). Essa experiência prática permitiu que os alunos manuseassem o modelo, comparassem os lados e entendessem noções de medida, como a metragem em centímetros, desenvolvendo uma compreensão mais concreta e significativa sobre as características dos sólidos geométricos.

Figura 5- Atividade com a montagem de cubo



Fonte: Gomes, 2024

As atividades desenvolvidas tiveram como objetivo principal destacar as habilidades previstas na BNCC, especialmente a EF03MA13, que consiste em associar figuras geométricas espaciais, como cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera, a objetos do mundo físico, além de nomear essas figuras (BRASIL, 2020). Outra habilidade trabalhada foi a EF03MA14, que propõe descrever as características de figuras geométricas espaciais, como prismas retos, pirâmides, cilindros e cones, estabelecendo relações com suas planificações (BRASIL, 2020).

Essas habilidades são fundamentais para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, pois promovem a associação entre teoria e prática, permitindo-lhes compreender como as formas geométricas estão presentes em seu cotidiano. Essa compreensão amplia a capacidade de abstração e o raciocínio espacial, que são

competências essenciais não apenas para a Matemática, mas também para outras áreas do conhecimento e atividades práticas do dia a dia (LOVIS; FRANCO, 2015).

Além disso, ao relacionar as figuras tridimensionais com objetos do mundo real, os alunos desenvolvem habilidades de observação e análise crítica, importantes para resolver problemas concretos. O estudo das planificações, por exemplo, contribui para o entendimento de como objetos tridimensionais podem ser representados em superfícies planas, um conhecimento essencial para áreas como arquitetura, design e engenharia (ANDRÉ, 2001).

As atividades também fomentam a criatividade, pois permitem aos alunos explorarem formas, construírem modelos e entenderem a geometria de maneira interativa e significativa. Dessa forma, o trabalho com as habilidades EF03MA13 e EF03MA14 reforça o papel da geometria como um instrumento essencial para o desenvolvimento do raciocínio lógico e para a formação integral dos estudantes ((BRASIL, 2020).

No âmbito educacional, a incorporação dessas metodologias geométricas às situações práticas do dia a dia, como a solução de problemas práticos em casa ou no trabalho, é crucial para motivar os estudantes e expandir seu entendimento sobre a relevância da geometria. A Geometria não é apenas um instrumento americano, mas também uma competência prática que possibilita entender e solucionar questões do cotidiano, seja na construção de objetos, na avaliação de espaços ou até mesmo em jogos estratégicos que empregam conceitos como o plano cartesiano (SEBIÃO, 2019).

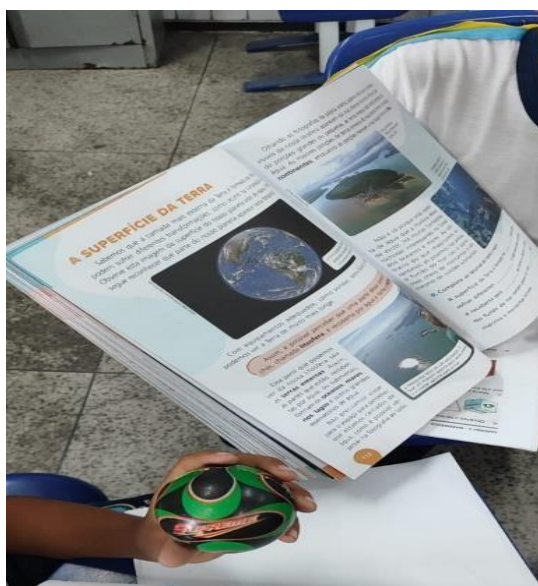
Portanto, a tarefa realizada na matéria de Ciências empregou princípios da geometria euclidiana e não-euclidiana como técnicas para executar uma atividade ligada ao tópico "O planeta Terra e sua superfície", planejada no quarto período do terceiro ano do Ensino Fundamental I.

O assunto foi abordado durante duas semanas, iniciando com perguntas que tinham como objetivo explorar os conhecimentos das crianças sobre o planeta Terra. Quando questionados sobre onde já tinham visto alguma representação da terra e nesse contexto, muitos estudantes responderam afirmativamente, citando fontes como livros, desenhos, televisão e brinquedos. Ao serem questionadas sobre a forma do planeta, várias crianças o caracterizaram como "redondo como uma bola de futebol", conforme relatado por uma das estudantes.

Essa visão está alinhada com o conceito principal da geometria não euclidiana, que retrata superfícies curvas, como a de uma esfera, em oposição às figuras planas da geometria euclidiana. Diferentemente da geometria euclidiana, a geometria não euclidiana não se restringe a superfícies planas. Conceitos como linhas paralelas ou angulares podem se comportar de forma distinta, sendo mais adequados para representar formas tridimensionais, como o formato esférico da Terra (GUIMARÃES; RIBEIROA, 2020).

Dando continuidade à atividade, os alunos foram divididos em pequenos grupos. Cada grupo recebeu uma bola para observar e identificar seu formato (redondo e tridimensional) (Figura 6)

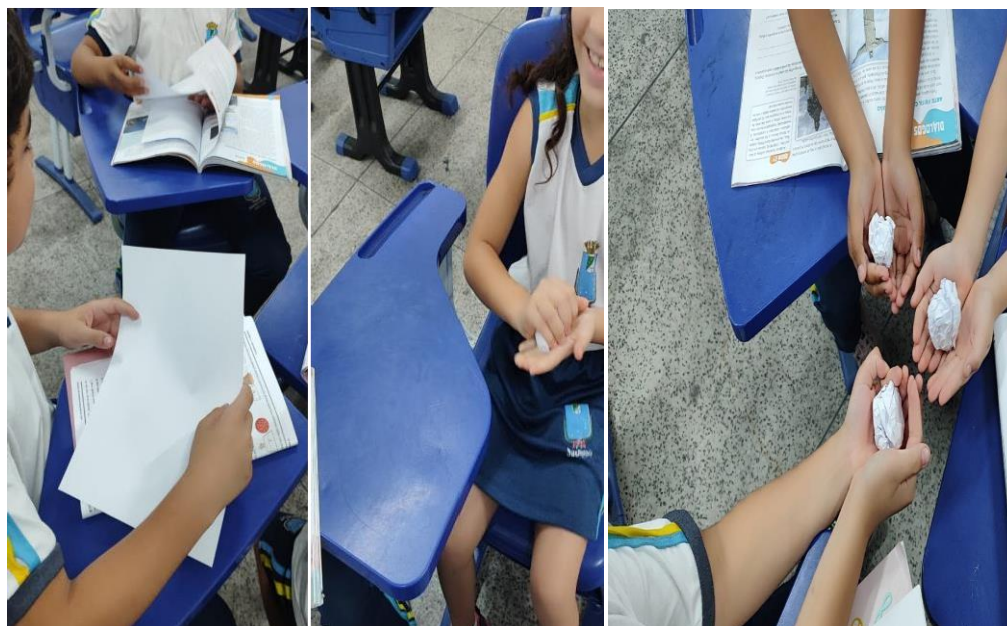
Figura 6- Observação do objeto redondo (bola)



Fonte: Gomes, 2024

Em seguida, cada grupo recebeu uma folha de papel, com a orientação de tentar transformá-la em uma esfera. Logo, as crianças entenderam que essa mudança não poderia ser feita sem dobrar ou cortar o papel (Figura 7). Essa vivência solidificou concretamente a ideia de que a concepção de uma Terra plana não corresponde à sua forma tridimensional esférica, assim como uma folha amassada se assemelha mais a uma esfera do que antes.

Figura 7- Produção das bolinhas de papel com uma esfera



Fonte: Gomes, 2024

O objetivo da atividade era estimular os estudantes a observar e entender a forma esférica da Terra. Para tal, empregaram-se princípios fundamentais da geometria euclidiana, tais como formas planas e sólidas, juntamente com conceitos de geometria não euclidiana, que possibilitam a descrição de superfícies curvas e tridimensionais. Esta estratégia interdisciplinar não só se tornou mais fácil de entender o formato da Terra, como também auxiliou no aprimoramento do cálculo geométrico e científico dos alunos.

Em uma terceira atividade, os alunos observaram mapas representados em superfícies planas, com o objetivo de compreender que esses mapas são representações da superfície esférica da Terra. Foi explicado que, apesar de serem úteis no dia a dia, os mapas que utilizamos não mostram a curvatura real do planeta.

Como parte da atividade, o professor desenhou no quadro um círculo, explicando que ele representava uma visão "de lado" da Terra. A proposta foi que as crianças desenhassem a Terra como uma esfera e criassem uma "paisagem imaginária", incluindo continentes, oceanos, casas ou animais, conforme sua criatividade (Figura 8). Para auxiliar nesse processo, as bolas utilizadas em

atividades anteriores foram apresentadas como modelos para observar e compreender a curvatura da superfície terrestre.

Figura 8- Atividade "paisagem imaginária"



Fonte: Gomes, 2024

Nas atividades foi enfatizando que a terra tem uma forma circular, semelhante a uma esfera, e que essa característica foi comprovada ao longo da história através de observações científicas e da aplicação da matemática, particularmente da geometria euclidiana. Esta matéria possibilita a análise tanto de formas planas, como as ilustradas nos mapas, quanto de formas tridimensionais, como o formato autêntico da terra.

No processo ensino aprendido, a utilização de questões abertas e tarefas investigativas, que incentivam a criatividade e a imaginação, é um método eficiente

para estimular o interesse dos estudantes. Ao vincular o aprendizado teórico às aplicações práticas, os docentes podem auxiliar na preparação de pessoas mais aptas para lidar com os desafios do mercado de trabalho, onde competências específicas são frequentemente essenciais.

Assim percebesse que, a Geometria, independentemente de ser Euclidiana ou Não-Euclidiana, vai além do simples cálculo ou abstração, tornando-se um instrumento para ligar os estudantes à realidade que os rodeia. Este procedimento é crucial não apenas para o aprimoramento de habilidades matemáticas, mas também para a criação de cidadãos aptos a interagir e modificar o ambiente onde residem.

4.2 Atividade aplicada no Ensino Fundamental II

As atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental foram realizadas em uma escola particular localizada no bairro dos Vinhais, em São Luís, Maranhão. A turma escolhida foi a do 7.º ano, e o tema abordou conceitos de geometria euclidiana, com foco em triângulos e quadriláteros (Figura 9). Foram trabalhados os conceitos teóricos e aplicados atividades práticas sobre o conteúdo explorado como o conceito de figuras planas (AMARANTE; CURY, 2023). Como atividade concreta para fortalecer os conceitos, promover a fixação do conteúdo e estimular a criatividade o livro apresentou como sugestão de atividade a produção de um tangram.

Figura 9- Conteúdo estudado



Fonte: Gomes, 2024

O tangram é um quebra-cabeça de origem chinesa composta por sete peças geométricas, que possibilita a construção de figuras a partir da montagem dessas peças (. Essa atividade é lúdica e contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da criatividade e do reconhecimento de formas geométricas (Figura 10).

Figura 10- Formas geométricas produzidas pelos estudantes



Fonte: Gomes, 2024

Os estudantes foram divididos em duplas e receberam folhas brancas e coloridas para desenhar, recortar e produzir as sete formas geométricas que compõem o tangram, entre elas triângulos, quadrado e paralelogramo (Figura 11). Apesar de o objetivo principal não ser o estudo aprofundado da Geometria Euclidiana, a atividade permitiu explorar e compreender conceitos fundamentais dessa área, que estão presentes na base da tarefa e em conteúdos já estudados pelos alunos.

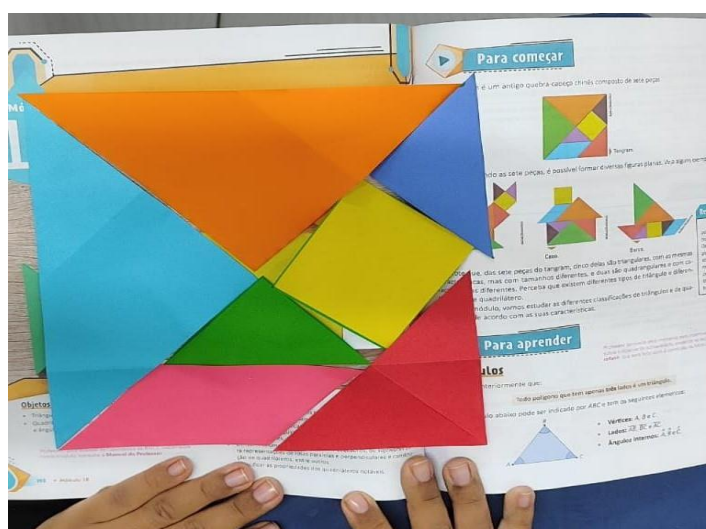
Figura 11- Processo de produção

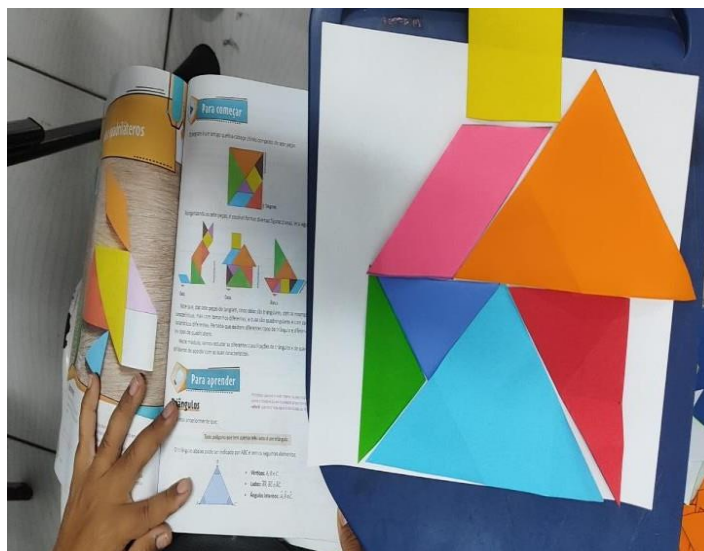


Fonte: Gomes, 2024

Os conceitos presentes na atividade, relacionados à Geometria Euclidiana, são uma maneira concreta de compreender os axiomas e teoremas de Euclides, que consistem em princípios fundamentais sobre pontos, linhas, planos e figuras geométricas. Assim, "Uma linha reta pode ser traçada entre quaisquer dois pontos", e na atividade as arestas das figuras são retas com base nesse princípio (Figura 11). Os alunos conseguiram compreender e realizar a atividade solicitada e montaram uma casa e um quadrado com as formas recordadas (Figura 12).

Figura 12- Imagens montadas com as formas geométricas





Fonte: Gomes, 2024

As habilidades exploradas no processo da atividade contemplam a construção e o reconhecimento de triângulos, suas medidas e ângulos, além da resolução de problemas relacionados às áreas de figuras geométricas.

EF07MA24: Construir triângulos com régua e compasso. Reconhecer se um triângulo existe de acordo com a medida dos seus lados. Verificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° ; EF07MA31: Estabelecer expressões para calcular a área de triângulos e quadriláteros. Resolver problemas de cálculo de área de figuras planas que podem ser decompostas em triângulos, retângulos ou quadrados; EF07MA28: Descrever um algoritmo para construir um polígono regular, como um triângulo equilátero ou um quadrado, a partir da medida do seu lado (BRASIL, 2020, p. 34).

Enquanto a Geometria Euclidiana faz referência à geometria plana, a Geometria Não Euclidiana descreve o espaço físico sem as regras da geometria euclidiana, “surgindo quando o espaço não é plano, mas sim curvo (como a superfície de uma esfera ou de um selo)”. (EDUARDO, 2013). De acordo com Krause (1986),

[...] para uma apreciação mais ampla da geometria de Euclides, é necessário conhecer uma geometria não euclidiana, que segundo ele deve possuir três características, “estar muito próxima da geometria euclidiana em sua estrutura axiomática, ter aplicações significativas e ser compreensível para quem já fez um curso inicial de Geometria euclidiana (AMARANTE; CURY, 2023, p.19).

A atividade proposta foi aplicada também na turma do 7.º ano e, com base nesse princípio, ângulos e profundidades foram calculados para a produção de pirâmides tridimensionais (Figura 13).

Figura 13- Processo de montagem das pirâmides pelos estudantes



Fonte: Gomes, 2024

A proposta da atividade foi desafiar os alunos a calcular, desenhar, cortar e montar pequenas pirâmides, transformando formas planas em tridimensionais. Os alunos utilizaram réguas, tesouras e papel para a elaboração da atividade (Figura 14). No primeiro momento, enfrentaram dificuldades, mas, ao compreenderem quais medidas eram necessárias, conseguiram executar a tarefa com sucesso.

Figura 14- Formas produzidas pelos estudantes





Fonte: Gomes, 2024

As atividades realizadas utilizaram como método ideias e conceitos desenvolvidos na Geometria Euclidiana e Não Euclidiana. Assim, podemos compreender que a geometria desempenha um papel fundamental na construção do conhecimento. Com informação e embasamento teórico, os professores podem elaborar atividades relacionadas ao dia a dia, que contribuem significativamente para o processo de ensino-aprendizagem em matemática e em outras áreas do conhecimento.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo da Geometria Euclidiana e Não Euclidiana evidencia a importância de compreender essas estruturas matemáticas tanto sob uma perspectiva histórica quanto em seu papel no ensino contemporâneo. Enquanto a Geometria Euclidiana permanece fundamental na educação básica, a introdução das Geometrias Não Euclidianas expande a compreensão do espaço e suas múltiplas possibilidades. A superação do quinto postulado de Euclides impulsionou o desenvolvimento de novas abordagens matemáticas, favorecendo aplicações em diversas áreas do conhecimento, como a astronomia e a física. Dessa forma, incorporar esses conceitos ao ensino da Matemática não apenas aprimora o raciocínio lógico dos alunos, mas também os incentiva a explorar diferentes formas de interpretar o mundo ao seu redor.

As Geometrias Não Euclidianas surgiram a partir da contestação do quinto postulado de Euclides, demonstrando que o espaço pode ser descrito por meio de modelos alternativos igualmente coerentes. A Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica trouxeram novas perspectivas sobre conceitos como paralelismo e soma dos ângulos internos dos triângulos, transformando a maneira como o espaço é concebido. Além de impactarem profundamente a matemática, essas teorias tiveram um papel crucial na física, especialmente na formulação da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, que utiliza a curvatura do espaço-tempo para explicar a gravidade. Assim, o avanço da geometria mostrou que os modelos tradicionais não são absolutos, permitindo novas interpretações sobre a estrutura do universo.

Ao longo da história, a Geometria evoluiu de uma ferramenta prática para um campo de estudo essencial, influenciando diversas áreas do conhecimento e da vida cotidiana. Desde os primeiros registros matemáticos na Mesopotâmia e no Egito até as contribuições de pensadores como Tales, Pitágoras e Euclides, essa disciplina se consolidou como alicerce do raciocínio lógico e científico.

No âmbito educacional, seu papel é fundamental no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, promovendo habilidades de pensamento espacial e resolução de problemas. No entanto, desafios persistem, como a redução de sua presença nos currículos escolares, o que demanda esforços contínuos para torná-la mais acessível e envolvente. Estratégias interdisciplinares e metodologias

inovadoras demonstram seu potencial para engajar os alunos, reafirmando a importância da Geometria como ferramenta para compreender e transformar o mundo ao nosso redor.

REFERÊNCIAS

- AMARANTE, Janilson Ananias de; CURY, Fernando Guedes. **A Matemática dos Trajetos Urbanos: atividades com uma geometria não euclidiana**. Revista Matemática, Ensino e Cultura. 2023.
- ANDRÉ, P. **Resumo da História da matemática**. 2001. Disponível em: <http://www.resumoescolar.com.br/matematica/resumo-da-historia-da-matematica/> Acessado em 24 de dez. de 2024.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. MEC. 2020. Disponível em: <https://www.gov.br>. Acesso: 02 de jan. de 2025.
- CRUZ, Donizete Gonçalves da; SANTOS, Carlos Henrique dos. **Algumas diferenças entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias Não Euclidianas – Hiperbólica e Elíptica a serem abordados nas séries do Ensino Médio**. Universidade Federal do Paraná. PR, 2015.
- BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira. **GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS: uma introdução**. Universidade Estadual de Londrina. Secretaria de Estado da Educação Programa de Desenvolvimento Educacional. Londrina. PR. 2008.
- EDUARDO, Eligio Carlos. **Geometrias Não-Euclidianas e a Geometria da Relatividade**. São Paulo: IFSP, 2013.
- EVES, Howard. **História da Geometria**. trad. Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1992.
- FREITAS, Araone Koaerece de; PEREIRA, Kenia Cristina. **Geometrias Não-Euclidianas**. UNICAMP. SP. 2020.
- GUIMARÃES, Túlio; RIBEIRO, Adriano. **HISTÓRIA DA GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA**. Faculdade Patos de Minas, Patos de Minas, Minas Gerais, Brasil. Scientia Generalis 2675-2999 v. 1, n. 2, p. 23-38. 2020.
- KUENZER, Acácia. **Ensino Médio: Construindo uma proposta para os que vivem do trabalho**, 4º ed, São Paulo: Cortez, 2005.
- LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** Educação Matemática em Revista, Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM – p. 4 – 13, Ano III, nº 4 – 1º sem. 1995.
- LOVIS, Karla Aparecida; FRANCO, Valdeni Soliani. **As Concepções de Geometrias não Euclidianas de um Grupo de Professores de Matemática da Educação Básica**. UNESP - Universidade Estadual Paulista. SciELO - Scientific Electronic Library Online. 2015. Disponível em: <https://www.scielo.br>. Acesso: 23 de dez. de 2024.

MELO, Severino Toscano do Rego. **GEOMETRIA E DESENHO GEOMETRICO**. 2º Semestre- IME – USP. 2022.

PIASESKI, Claudete Maria. **A GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL**. Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões Campus de Erechim – URI. ERECHIM, RS. 2010.

PINA, Romildo da Silva. **O V postulado de Euclides**. IME – UFG. Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás. 2014.

ROCHA, Rogério Batista da. **Geometrias Não-Euclidianas: Proposta de Abordagem Aplicável ao Ensino Básico**. UFBA. BA. 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/handle/ri/22932>. Acesso: 15 de nov. de 2024.

SEBIÃO, Rosilene Martins. **A história da matemática e a importância da geometria**. Revista Científica Multidisciplinar. 2019. Disponível em: <https://www.nucleodoconhecimento.com.br>. Acesso: 03 de jan. de 2025.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Ponto de interseção entre duas retas**; Brasil Escola. 2025. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/ponto-intersecao-entre-duas-retas.htm>. Acesso em 05 de janeiro de 2025.