



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Bacharelado

Thaylon Daymison Silva

A Geometria como Linguagem do Espaço: Da Teoria Clássica às Tecnologias Atuais

São Luís - MA
2025

Thaylon Daymison Silva



A Geometria como Linguagem do Espaço: Da Teoria Clássica às Tecnologias Atuais

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Bacharel em Matemática.

Curso de Matemática – Bacharelado
Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo

São Luís - MA

2025

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Silva, Thaylon.

A Geometria como Linguagem do Espaço: Da Teoria
Clássica às Tecnologias Atuais / Thaylon Silva. - 2025.
39 p.

Orientador(a): Elivaldo Rodrigues Macedo.

Curso de Matemática - Bacharelado, Universidade Federal
do Maranhão, São Luís, 2025.

1. Geometria Euclidiana. 2. Geometria Diferencial. 3.
Aplicações da Matemática. 4. Cotidiano. I. Macedo,
Elivaldo Rodrigues. II. Título.



A Geometria como Linguagem do Espaço: Da Teoria Clássica às Tecnologias Atuais

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 06/08/2025

Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes
DEMAT/UFMA
Primeiro Examinador

Prof. Me. Cleber Araujo Cavalcanti
DEMAT/UFMA
Segundo Examinador

*À minha família base de tudo que
sou.*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus que me manteve sã durante essa jornada, agradeço ao meu orientador Elivaldo Rodrigues Macedo que com seu grande conhecimento, capacidade crítica e paciência, orientou-me com maestria, a minha mãe, pela educação que me deu e pelo incentivo dado até hoje, a minha namorada Mavilla Lima que sempre me pôs pra cima, me apoiou me fez rir e me fez conhecer o amor durante essa jornada, aos meus amigos que conquistei durante essa caminhada (ALUÍSIO, DANIEL, KAYLA, ALEXIS, DIEGO e GUSTAVO), ao professor e coordenador Cleber Araujo Cavalcanti que não terei palavras para agradecer por tudo que fez durante essa caminhada acadêmica, aos meus tios em especial ao tio (dé) que deram apoio nessa jornada de tantos obstáculos e conquistas.

“Não diga que o céu é o limite quando há pegadas na lua.”

Christopher Nolan (2014)

Resumo

Este trabalho propõe uma reflexão sobre a presença e relevância da Geometria no cotidiano, articulando sua evolução histórica com suas aplicações práticas na contemporaneidade. A partir de uma abordagem que vai da Geometria Euclidiana às geometrias não euclidianas e à Geometria Diferencial, explora-se o papel desta área da Matemática como ponte entre o formalismo teórico e os desafios concretos do mundo moderno. São discutidos conceitos fundamentais, como postulados, curvatura e superfícies, em conjunto com exemplos aplicados em áreas como arquitetura, computação gráfica, física e robótica. A monografia também enfatiza o papel do bacharel em Matemática como profissional capaz de traduzir a linguagem abstrata da Matemática em soluções reais. Ao final, reafirma-se a Geometria como ferramenta essencial para a análise e transformação da realidade contemporânea.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana. Geometria Diferencial. Aplicações da Matemática. Cotidiano.

Abstract

This work presents a reflection on the presence and relevance of Geometry in everyday life, linking its historical development with its practical applications in contemporary contexts. From Euclidean Geometry to non-Euclidean systems and Differential Geometry, the study explores how this branch of Mathematics acts as a bridge between theoretical formalism and the real-world challenges of modern society. Fundamental concepts such as postulates, curvature, and surfaces are discussed alongside examples applied in fields such as architecture, computer graphics, physics, and robotics. The research also highlights the role of the Mathematics graduate as a professional capable of transforming abstract mathematical language into practical solutions. Ultimately, Geometry is reaffirmed as an essential tool for the analysis and transformation of today's reality.

Keywords: Euclidean Geometry. Differential Geometry. Mathematical Applications.
Ever

Lista de Figuras

Figura 1– Representação de um ponto	15
Figura 2– Representação de uma reta passando por dois pontos	15
Figura 3– Representação de um plano com três pontos não colineares	16
Figura 4– Representação do espaço tridimensional	16
Figura 5– Representação do Postulado 1: reta entre dois pontos.....	18
Figura 6– Prolongamento de uma reta finita	18
Figura 7– Círculo com centro e raio definidos.....	19
Figura 8-Todos os ângulos retos são iguais entre si.....	19
Figura 9– Interpretação moderna do Postulado das Paralelas.	20
Figura 10- Ilustração do Axioma Hiperbólico	22
Figura 11-Representação de dois triângulos não semelhantes	23
Figura 12-Triângulo Esférico	24
Figura 13-Planta de uma casa.....	29
Figura 14-sofware de criação 3D.....	30
Figura 15-Obra Artística	30
Figura 16-Simetria na Natureza	31
Figura 17-Eclipse Solar	33
Figura 18-Exemplo de Superfícies de Bézier.....	34
Figura 19-NURBS: Non-Uniform Rational Basis Spline	34
Figura 20- Exemplo de representação de configuração	35

Sumário

Capítulo 1 – Introdução.....	10
Capítulo 2 – Geometria Euclidiana	13
2.1. Origens e Sistematização da Geometria.....	13
2.2. Ideias Primitivas da Geometria	15
2.3 As Noções Comuns (Axiomas) segundo Euclides.....	17
2.4 Postulados de Euclides.....	18
Capítulo 3 – Geometria Não Euclidiana	21
3.1 Geometria Hiperbólica	22
3.2 Geometria Esférica	23
Capítulo 4 – Geometria Diferencial	26
4.1 Curvas Regulares e Curvatura.....	26
4.2 Superfícies Regulares e Curvaturas.....	26
4.3 Variedades Diferenciáveis.....	27
Capítulo 5 - Geometria no cotidiano	29
5.1 De Modo Geral.....	29
5.2 Na Computação Gráfica.....	33
5.3 Robótica e Inteligência Artificial	35
Capítulo 6 - Considerações Finais.....	37
Referências Bibliográficas	38

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

A Matemática, por muito tempo, foi compreendida como uma ciência puramente abstrata, confinada aos limites dos livros didáticos, das lousas escolares e das salas de aula. Com seus símbolos rigorosos e sua linguagem altamente formal, essa ciência foi, em muitas ocasiões, percebida como inacessível ao senso comum, afastada das experiências cotidianas da maioria das pessoas. Contudo, essa visão limitada tem sido gradativamente superada, sobretudo quando se evidencia a presença constante da Matemática nas mais diversas manifestações do cotidiano, da construção civil à computação gráfica, da arte à física moderna. Dentre seus ramos mais antigos e, ao mesmo tempo, mais atuais, encontra-se a Geometria, cuja trajetória reflete, de maneira exemplar, essa dualidade entre o abstrato e o concreto.

É nesse contexto que se insere o papel do bacharel em Matemática: um profissional cuja formação não se restringe à teoria pura, mas que deve ser capaz de identificar, analisar e aplicar os conceitos matemáticos nas mais diversas esferas da vida prática. Ao longo de sua formação, esse profissional é continuamente desafiado a construir pontes entre o formalismo matemático e sua aplicabilidade concreta. Mostrar que a Matemática não está apenas nos livros, mas no mundo ao redor, é parte essencial de seu compromisso acadêmico e social. Nesse sentido, compreender a Geometria em suas múltiplas dimensões, histórica, conceitual, prática e tecnológica, torna-se um passo fundamental para ampliar o entendimento do espaço, da forma e da lógica que sustentam as estruturas do nosso cotidiano.

A Geometria Euclidiana, com sua base em postulados claros e raciocínio dedutivo, foi a primeira grande tentativa de organizar o conhecimento geométrico de forma sistemática. Desde os tempos de Euclides, sua influência perdura não apenas nos currículos escolares, mas também nas aplicações técnicas que envolvem medidas, formas e relações espaciais. Entretanto, ao longo da história, a limitação de seus postulados, sobretudo o das paralelas, impulsionou a criação de novas geometrias: as não euclidianas. Estas, por sua vez, permitiram a formulação de espaços curvos e a expansão do conceito tradicional de reta e plano, revelando a profundidade e a plasticidade da Matemática.

Mais recentemente, com o avanço das ciências aplicadas, surge a Geometria Diferencial como uma poderosa linguagem matemática voltada à compreensão de superfícies e espaços multidimensionais. É essa vertente que possibilita, por exemplo, a modelagem do espaço-tempo na Teoria da Relatividade Geral, a descrição matemática de objetos 3D em computação gráfica e a programação de movimentos suaves em sistemas robóticos complexos. Tais aplicações, cada vez mais presentes em tecnologias de ponta, demonstram que a Matemática, longe de estar apenas em salas de aula, está profundamente integrada aos desafios e inovações do mundo moderno.

O presente trabalho tem como objetivo principal explorar essa trajetória da Geometria, desde suas origens euclidianas até suas manifestações mais recentes e aplicadas, com ênfase em demonstrar como esse conhecimento matemático pode e deve ser compreendido em sua totalidade: não apenas como um corpo teórico rigoroso, mas também como um instrumento prático de análise, expressão e transformação da realidade. Ao percorrer os fundamentos da Geometria Euclidiana, apresentar os sistemas não euclidianos e destacar o papel da Geometria Diferencial nas aplicações contemporâneas, pretende-se contribuir para uma formação matemática mais crítica, conectada e interdisciplinar.

Por fim, destaca-se que este trabalho também busca afirmar a importância do papel do matemático bacharel como alguém capaz de enxergar a Matemática em sua amplitude, como ciência exata, mas também como ferramenta viva, que organiza, descreve e transforma o mundo em que vivemos. Trata-se de um convite à reflexão sobre a verdadeira natureza da Matemática: um saber que transcende os limites da sala de aula e encontra, no cotidiano, sua expressão mais concreta e necessária.

No capítulo 2, exploraremos os fundamentos da Geometria Clássica conforme sistematizada por Euclides em *Os Elementos*. São abordadas as ideias primitivas (ponto, reta, plano), as noções comuns (axiomas) e os cinco postulados euclidianos, com representações visuais e interpretações modernas. A importância da formalização lógico-dedutiva é destacada como base para o pensamento geométrico ocidental.

No capítulo 3, discutiremos a emergência de sistemas geométricos que rompem com o quinto postulado de Euclides (das paralelas). Analisa as principais geometrias não euclidianas: a hiperbólica (Lobachevski–Bolyai) e a esférica, com foco na negação ou reformulação do paralelismo. Destaca suas aplicações práticas e o impacto sobre a concepção do espaço.

No capítulo 4, apresentaremos a Geometria Diferencial como linguagem matemática avançada que permite o estudo de superfícies e variedades. Conceitos como curvatura, espaço tangente, formas fundamentais e geodésicas são introduzidos com precisão formal. O capítulo destaca o uso dessas ferramentas na Física, na Computação e em outras ciências.

No capítulo 5, demonstraremos como a Geometria ultrapassa os limites teóricos, sendo aplicada em contextos diversos:

- Na vida cotidiana: arquitetura, design, arte e natureza;
- Na computação gráfica: modelagem 3D e renderização com base em superfícies diferenciáveis;
- Na robótica e IA: mapeamento do espaço de configuração, aprendizado em variedades e visão computacional.

No capítulo 6, mostraremos a relevância da Geometria como ferramenta de descrição, análise e transformação da realidade. O capítulo reafirma o papel do matemático como agente que conecta a teoria ao mundo prático, evidenciando que a Matemática é uma linguagem viva e essencial no século XXI.

CAPÍTULO 2 – GEOMETRIA EUCLIDIANA

2.1. Origens e Sistematização da Geometria

A história da Matemática revela que a Geometria teve início de maneira intuitiva, emergindo em diversas situações práticas e experiências sociais. De acordo com Eves (1992, p. 3),

“[...] a mente humana tornou-se apta, a partir de um certo número de observações sobre formas, tamanhos e relações espaciais entre objetos físicos, a identificar propriedades e relações gerais que englobavam essas observações como casos particulares.”

Com base nessas observações, os indivíduos passaram a classificar os problemas geométricos, aplicando procedimentos semelhantes para solucioná-los, como se seguissem modelos previamente estabelecidos. Esse processo marcou o início da formulação de um conjunto de regras que permitiam alcançar resultados precisos ou aproximados.

Na Grécia Antiga, os estudiosos passaram a defender que a Geometria não deveria restringir-se apenas ao aspecto empírico, mas também assumir um caráter dedutivo. Tal concepção teria surgido com filósofos como Tales de Mileto (640 a.C. – 564 a.C.) e Pitágoras (586 a.C. – 564 a.C.), embora sua plena sistematização tenha ocorrido posteriormente, conferindo à Geometria o status de ciência.

Por volta de 300 a.C., Euclides, matemático grego, produziu diversas obras, dentre as quais se destaca *Os Elementos*, uma coletânea composta por 13 volumes. Essa obra se tornou uma das maiores referências da história da Matemática, reunindo teoremas desenvolvidos por ele e por outros estudiosos, todos apresentados com demonstrações e organizados de forma lógica e sistemática. Na época, constituía-se como um dos poucos materiais didáticos disponíveis para o ensino da Geometria (Garbi, 2006, p. 58).

Com *Os Elementos*, a Geometria tornou-se a primeira teoria matemática a ser formalmente axiomatizada, originando a chamada Geometria Euclidiana. Segundo Coutinho (2001), essa geometria se baseava inicialmente em aspectos empíricos, intuitivos e experimentais. Os axiomas propostos por Euclides partiam de noções acessíveis à intuição e compunham uma teoria sólida apoiada em princípios fundamentais. O componente empírico relacionava-se à repetição prática de experiências que evidenciavam padrões; o aspecto intuitivo ligava-se à capacidade de

antecipar conclusões com base em ideias iniciais. A veracidade das proposições era garantida por meio de raciocínio dedutivo e demonstrações lógicas.

Mendes e Bezerra (2005, p. 2) destacam a importância do trabalho de Euclides para a consolidação da ciência:

“Foi com o trabalho desenvolvido por Euclides que as práticas de medição e cálculo geométrico passaram a ser sistematizadas e simbolizadas através de um processo lógico-dedutivo, que visava formalizar práticas geométricas oriundas de tradições milenares, por meio de um sistema hipotético-dedutivo.”

Ainda segundo Ávila (2001, p. 2), Os Elementos não se restringem apenas à Geometria, mas abrangem também conteúdos de aritmética e álgebra, embora organizados com uma forte ênfase geométrica. Isso refletia a tendência da época, motivada, entre outros fatores, pelos desafios impostos pelos números irracionais e pelo desejo de rigor matemático.

Garbi (2006, p. 59) ressalta que Euclides apresentou cerca de 465 a 470 proposições ao longo da obra, estruturadas com clareza e antecedidas por definições, postulados e noções comuns. Os postulados, ou axiomas como são atualmente denominados, são afirmações aceitas sem demonstração dentro de determinado sistema lógico. Enquanto o termo "postulado" implica uma aceitação específica dentro de um campo, as "noções comuns" possuem caráter mais geral, aplicando-se a diversas ciências.

Conforme Mendes e Bezerra (2005, p. 6):

“A axiomatização é o processo pelo qual os saberes informais são levados a uma sistematização formal, com base em princípios previamente estabelecidos. Assim, um axioma é uma proposição tida como evidente e aceita como ponto inicial de uma argumentação, especialmente na Matemática.”

Dessa forma, o trabalho de Euclides não apenas consolidou práticas geométricas anteriores, mas também lançou as bases da Geometria dedutiva como a conhecemos, sendo fundamental para a construção do pensamento matemático ocidental.

2.2. Ideias Primitivas da Geometria

Na construção da Geometria, parte-se de um conjunto de noções fundamentais que não são definidas formalmente, mas aceitas intuitivamente por serem evidentes. Essas noções são chamadas de ideias primitivas. Elas servem como base para as definições, axiomas e teoremas que compõem o corpo lógico da teoria geométrica. As principais ideias primitivas da Geometria Euclidiana são: ponto, reta, plano e espaço.

O ponto é concebido como a indicação de uma posição no espaço, não possuindo dimensão, isto é, não tem comprimento, largura ou profundidade. Embora seja representado graficamente como um pequeno sinal, no plano teórico o ponto é adimensional. Costuma-se representar um ponto por letras maiúsculas do alfabeto latino, como A, B ou C.

Figura 1– Representação de um ponto



Fonte: O autor (2025)

A reta é definida intuitivamente como uma sucessão infinita de pontos dispostos na mesma direção. Possui comprimento, mas não tem largura nem espessura. Em Geometria Euclidiana, as retas são consideradas infinitas nos dois sentidos. Representa-se uma reta por letras minúsculas (como r , s) ou por dois de seus pontos, como AB.

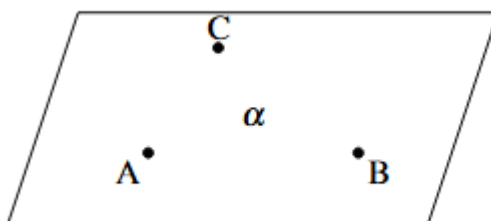
Figura 2– Representação de uma reta passando por dois pontos



Fonte: O autor (2025)

O plano é entendido como uma superfície infinita, sem espessura, que contém infinitas retas e pontos. Assim como a reta, o plano é ilimitado em extensão, mas possui apenas duas dimensões: comprimento e largura. Costuma-se representá-lo por letras gregas, como alfa ou por três pontos não colineares que pertencem a ele.

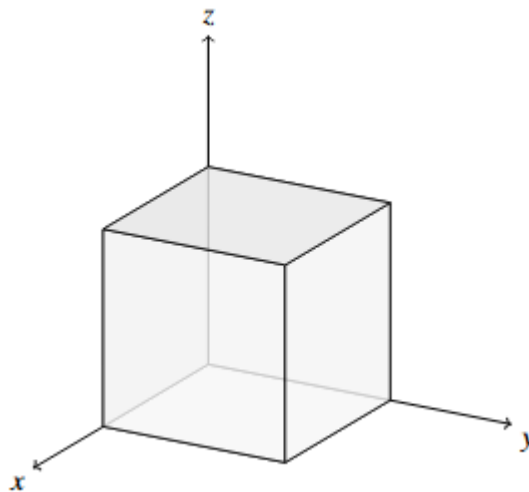
Figura 3– Representação de um plano com três pontos não colineares



Fonte: O autor (2025)

O espaço é o ambiente tridimensional onde estão contidos os pontos, retas e planos. Na Geometria Euclidiana, o espaço é formado por infinitos planos e é caracterizado pelas três dimensões: comprimento, largura e profundidade.

Figura 4– Representação do espaço tridimensional



Fonte: O autor (2025)

Essas ideias, embora não possam ser rigorosamente definidas, são aceitas como verdades intuitivas e são essenciais para o desenvolvimento da teoria geométrica. A

partir delas, são construídos os conceitos definidos, como segmentos de reta, ângulos, polígonos, circunferências, entre outros, além dos postulados que regem as relações entre esses elementos.

2.3 As Noções Comuns (Axiomas) segundo Euclides

Na obra “Os Elementos”, Euclides estabelece o alicerce lógico da geometria por meio de dois tipos principais de afirmações: postulados, que se referem às construções geométricas possíveis, e as chamadas noções comuns (ou axiomas), que são princípios lógicos gerais aplicáveis a toda matemática, não apenas à geometria. As noções comuns são afirmações autoevidentes que não exigem demonstração. Elas expressam leis básicas do raciocínio lógico e da igualdade, servindo como ferramentas universais no processo dedutivo. Embora sejam poucas, sua presença é essencial para garantir a coerência interna do sistema geométrico euclidiano

As Cinco Noções Comuns (Axiomas) de Euclides estão representadas no quadro a seguir:

Noção Comum	Enunciado	Interpretação Moderna	Aplicações
Noção Comum 1	“Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.”	Esse axioma afirma a transitividade da igualdade, um dos princípios mais fundamentais da lógica matemática.	Provas com segmentos e ângulos.
Noção Comum 2	“Se coisas iguais são adicionadas a coisas iguais, os resultados são iguais.”	Este axioma expressa a propriedade aditiva da igualdade.	Somas de lados ou ângulos.
Noção Comum 3	“Se coisas iguais são subtraídas de coisas iguais, os resultados são iguais.”	É o princípio da subtração da igualdade.	Comparação de segmentos em provas.

Noção Comum 4	“Coisas que coincidem entre si são iguais.”	Esse axioma define a identidade geométrica.	Crêterios de congruência geométrica.
Noção Comum 5	“O todo � maior do que a parte.”	Afirma a relação entre um conjunto e seus subconjuntos.	Desigualdade triangular e áreas.

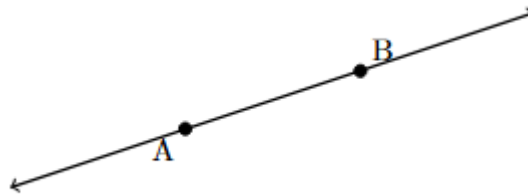
2.4 Postulados de Euclides

Postulado 1

  possível traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer outro ponto.

Esta afirmação garante que por dois pontos distintos passa uma única reta.

Figura 5– Representação do Postulado 1: reta entre dois pontos



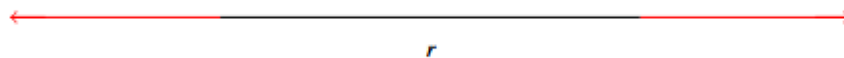
Fonte: O autor (2025)

Postulado 2

  possível prolongar continuamente uma reta finita em linha reta.

Este postulado assegura que uma reta pode ser estendida indefinidamente em ambas as direções.

Figura 6– Prolongamento de uma reta finita



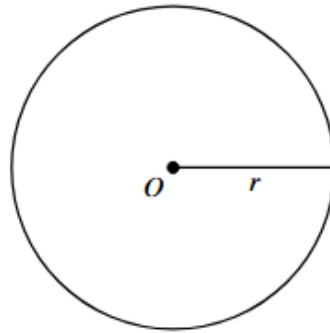
Fonte: O autor (2025)

Postulado 3

É possível traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

Dado um ponto e uma distância, sempre é possível traçar um círculo com essas propriedades.

Figura 7– Círculo com centro e raio definidos



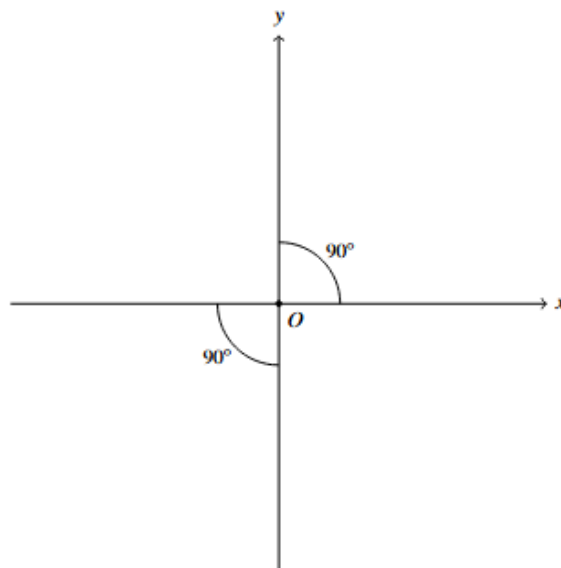
Fonte: O autor (2025)

Postulado 4

Todos os ângulos retos são iguais entre si.

Este postulado define que ângulos de 90 graus são sempre equivalentes, independentemente da forma como são construídos.

Figura 8-Todos os ângulos retos são iguais entre si

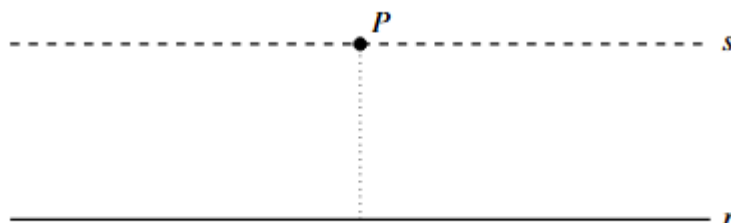


Fonte: O autor (2025)

Postulado 5

Se uma reta que cruza duas outras formar ângulos internos do mesmo lado menores que dois ângulos retos, então essas duas retas, se prolongadas indefinidamente, encontrar-se-ão desse lado. Atualmente esse axioma é nomeado como “Axioma de Playfair”, em homenagem a John Playfair (1748–1819), que o tornou popular nos tempos modernos ao reformulá-lo como: por um ponto fora de uma reta, é possível traçar uma única reta paralela àquela reta dada. Este postulado foi extensivamente debatido ao longo da história, dando origem a outras geometrias não-euclidianas.

Figura 9– Interpretação moderna do Postulado das Paralelas.



Fonte: O autor (2025)

CAPÍTULO 3 – GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA

A crença consolidada de que o sistema euclidiano seria a única forma possível de descrever geometricamente o espaço físico, aliada à dificuldade humana em integrar novos saberes ao conhecimento historicamente acumulado, fez com que levassem cerca de dois milênios para que novas teorias geométricas fossem formalizadas e, sobretudo, aceitas pela comunidade científica.

Garbi (2006, p. 49) observa que, ainda hoje, a Geometria presente nos livros didáticos utilizados na Educação Básica é composta majoritariamente por extratos dos Elementos, sendo que as demonstrações dos teoremas seguem, em sua maioria, o modelo elaborado por Euclides. Contudo, ao longo da história, diversos matemáticos demonstraram a existência de conceitos relevantes não contemplados por Euclides, os quais emergem nas chamadas Geometrias Não Euclidianas.

O termo “geometria não euclidiana” refere-se a sistemas geométricos construídos sem o uso da hipótese euclidiana das paralelas, adotando, em seu lugar, uma suposição alternativa que se mostra incompatível com a de Euclides (EVES, 1992, p. 45).

Frente às inúmeras tentativas de provar, sem sucesso, o quinto postulado de Euclides, destacam-se alguns matemáticos que lançaram fundamentos tão consistentes quanto os do próprio Euclides. Entre eles estão: o padre jesuíta Girolamo Giovanni Saccheri (1667–1723), Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), János Bolyai (1802–1860), Nicolai Ivanovich Lobachevski (1792–1856) e Bernhard Riemann (1826–1866). Cabariti (2004, p. 32) ressalta que, para fundamentar o estudo das Geometrias Não Euclidianas, esses autores propuseram duas formas principais de negação do postulado das paralelas:

- Supor que, por um ponto exterior a uma reta dada, passam pelo menos duas paralelas;
- Supor que, nessas condições, não existe nenhuma paralela.

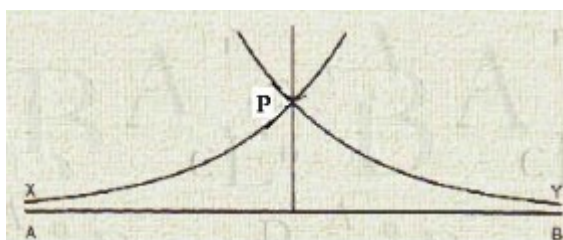
Com base nessas premissas, novas Geometrias foram sendo sistematizadas teoricamente, distinguindo-se entre si e originando, ao longo do tempo, diferentes sistemas geométricos. Algumas delas são, Geometria Hiperbólica (Lobachevski-Bolyai), Geometria Elíptica, Geometria Esférica, Geometria Projetiva, Geometria de Riemann (Riemanniana), Geometria de Minkowski, Geometria de Finsler, Geometria de Cartan, Geometrias de Klein (Programas de Erlangen) e Geometrias Generalizadas

/ Não-Comutativas. Uma das mais utilizadas atualmente são: Geometria Hiperbólica, Geometria Esférica (caso especial da Elíptica), Elíptica).

3.1 Geometria Hiperbólica

A Geometria Hiperbólica é um dos principais sistemas geométricos não euclidianos e se caracteriza pela negação do quinto postulado de Euclides, também conhecido como postulado das paralelas. Nesse contexto, enquanto a geometria euclidiana afirma que por um ponto exterior a uma reta é possível traçar uma única paralela, a geometria hiperbólica estabelece que infinitas paralelas podem ser traçadas por esse ponto, sem que nenhuma delas intercepte a reta original. Nessa Geometria o postulado das paralelas é substituído pelo postulado de Lobachevsky, que diz: "por um ponto P fora de uma reta r passa mais de uma reta paralela à reta r". (COUTINHO, 2001, p.40).

Figura 10- Ilustração do Axioma Hiperbólico



Fonte: LORENI APARECIDA (2008)

Historicamente, a construção lógica da geometria hiperbólica surgiu a partir dos esforços de diversos matemáticos que buscavam uma demonstração do quinto postulado com base nos demais. A impossibilidade dessa demonstração levou à formulação de um sistema geométrico coerente, no qual o postulado das paralelas fosse substituído por uma hipótese alternativa. Os principais nomes associados a essa fundamentação são Nicolai Lobachevski (1792–1856) e János Bolyai (1802–1860), embora Carl Friedrich Gauss também tenha desenvolvido estudos importantes sobre o tema, ainda que não os tenha publicado em vida.

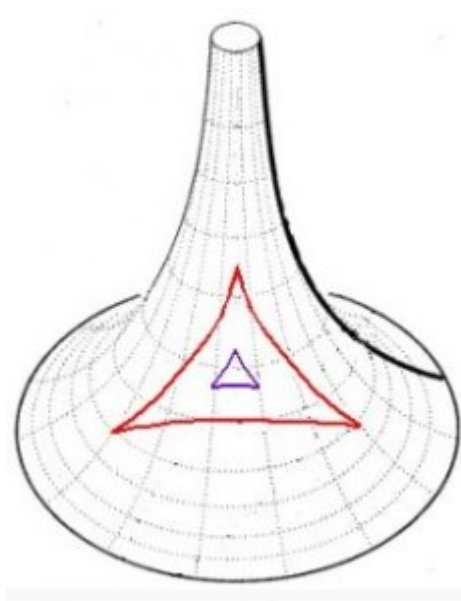
A estrutura da geometria hiperbólica ocorre em um espaço de curvatura negativa constante, sendo representada de forma exemplar por modelos como o modelo de Poincaré (tanto o disco quanto o semiplano) e o modelo hiperbólico de Klein. Nestes modelos, as linhas retas são geodésicas do espaço e apresentam comportamentos visivelmente distintos daqueles observados no plano euclidiano. Um dos resultados mais

notáveis é que, em qualquer triângulo hiperbólico, a soma dos ângulos internos é sempre menor que 180° , e essa diferença é proporcional à área do triângulo.

Do ponto de vista matemático, a geometria hiperbólica possui uma estrutura rigorosa e é completamente coerente com os axiomas formais da geometria. Além de sua relevância teórica, destaca-se por suas aplicações contemporâneas em áreas como teoria dos grupos, criptografia, visualização de dados em larga escala, dinâmica hiperbólica, e até mesmo em cosmologia, onde modelos hiperbólicos do espaço têm sido considerados como alternativas possíveis para a descrição da estrutura global do universo.

Neste modelo de Geometria Não-Euclidiana, mesmo aceitando os quatro primeiros postulados de Euclides, muitos conceitos são completamente diferentes da Geometria Euclidiana. A figura a seguir representa dois triângulos que não são semelhantes.

Figura 11-Representação de dois triângulos não semelhantes



Fonte: <https://seara.ufc.br/pt/producoes>

Portanto, a geometria hiperbólica não apenas rompeu com um paradigma milenar consolidado pela tradição euclidiana, como também contribuiu significativamente para o desenvolvimento da matemática moderna, ao evidenciar que múltiplas geometrias podem coexistir de forma lógica e válida dentro de sistemas axiomáticos distintos.

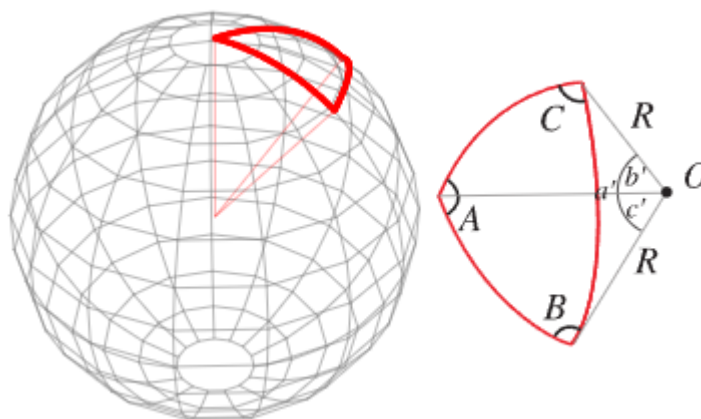
3.2 Geometria Esférica

É um ramo da geometria não euclidiana que estuda propriedades e relações geométricas sobre a superfície de uma esfera. Diferentemente da geometria euclidiana plana, a geometria esférica ocorre em um espaço de curvatura positiva constante, o que implica que conceitos clássicos, como linhas retas, ângulos e paralelismo, são reinterpretados.

Na geometria esférica, as “linhas retas” correspondem aos grandes círculos da esfera ou seja, círculos máximos obtidos pela interseção da esfera com planos que passam pelo seu centro. Exemplos comuns de grandes círculos são o Equador e os meridianos terrestres. Esses grandes círculos são os análogos das retas no plano euclidiano, pois representam o caminho mais curto entre dois pontos sobre a superfície esférica, também conhecidos como geodésicas.

Uma das propriedades mais significativas da geometria esférica é que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior que 180° , diferentemente do triângulo euclidiano, cuja soma é exatamente 180° . Essa soma pode chegar a até 540° no caso extremo de triângulos que cobrem metade da esfera. Além disso, na geometria esférica não existem paralelas, pois quaisquer dois grandes círculos sempre se encontram em dois pontos antipodais.

Figura 12-Triângulo Esférico



Fonte: <https://mathworld.wolfram.com>

A geometria esférica possui ampla aplicação prática, especialmente na navegação marítima e aérea, na cartografia e na astronomia. Por exemplo, o cálculo de rotas mais curtas entre pontos na Terra (rotas ortodrômicas) é baseado em trajetórias ao longo dos grandes círculos, aproveitando as propriedades da geometria esférica para minimizar distâncias e economizar tempo e combustível.

Historicamente, a geometria esférica foi desenvolvida em contextos práticos já na antiguidade, com contribuições importantes de matemáticos gregos e árabes, e posteriormente formalizada no âmbito da geometria diferencial e não euclidiana. Em suma, a geometria esférica é fundamental para a compreensão dos espaços curvos e para a aplicação de conceitos geométricos em superfícies não planas, ampliando a visão tradicional limitada à geometria euclidiana e abrindo caminho para o estudo moderno das variedades e da geometria diferencial.

CAPÍTULO 4 – GEOMETRIA DIFERENCIAL

A Geometria Diferencial constitui um campo fundamental da Matemática que se dedica à investigação de curvas, superfícies e, de forma mais geral, variedades diferenciáveis, utilizando ferramentas do Cálculo Diferencial, Integral e da Álgebra Linear. Tal abordagem permite analisar propriedades geométricas locais e globais de objetos suaves, ou seja, diferenciáveis, com o objetivo de compreender a estrutura do espaço em múltiplas dimensões.

4.1 Curvas Regulares e Curvatura

Uma curva regular no espaço euclidiano tridimensional é definida como uma função diferenciável

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

Com $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. A curvatura de uma curva expressa o desvio da mesma em relação a uma linha reta. No caso de curvas no plano ou no espaço, a curvatura é definida como:

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Por exemplo, a circunferência unitária dada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ possui curvatura constante igual a 1, refletindo sua simetria perfeita.

4.2 Superfícies Regulares e Curvaturas

Uma superfície regular é definida por uma função diferenciável

$$X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

onde os vetores parciais X_u, X_v são linearmente independentes e definem o plano tangente. A partir disso, introduzem-se a curvatura de Gauss K e a curvatura média H , respectivamente dadas por:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

Essas curvaturas permitem classificar a geometria local de uma superfície. Dentre os exemplos clássicos, destacam-se:

- Plano: $K=0=H$;
- Esfera: $K>0$ constante;

- Cilindro: $K=0$, $H \neq 0$
- Paraboloide hiperbólico: $K < 0$

4.3 Variedades Diferenciáveis

O conceito de variedade diferenciável surge como uma generalização natural de curvas e superfícies regulares, permitindo estender o uso do cálculo diferencial a espaços mais complexos. Trata-se de um espaço no qual, localmente, é possível aplicar as ferramentas do cálculo, pois cada região suficientemente pequena do espaço se comporta como um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Formalmente, uma variedade diferenciável de dimensão n é um espaço topológico M onde cada ponto possui uma vizinhança aberta que pode ser mapeada suavemente (isto é, por meio de funções diferenciáveis) em $\mathbb{R}^n$. Cada um desses mapeamentos locais é chamado de carta, e o conjunto compatível dessas cartas forma um atlas (LEE, 2013). Esse tipo de estrutura é o que permite aplicar cálculo diferencial mesmo em espaços não planos. Exemplos de Variedades

Diversos objetos geométricos que conhecemos são exemplos clássicos de variedades diferenciáveis:

- Curvas no espaço, como a hélice $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, são exemplos de variedades de dimensão 1.
- A esfera S^2 , definida como o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, é uma variedade de dimensão 2, embora não possa ser mapeada globalmente em $\mathbb{R}^2$ de forma suave — apenas localmente.
- O torus (rosquinha), definido como o produto $S^1 \times S^1$, também é uma variedade de dimensão 2, porém com uma estrutura topológica diferente da esfera.
- O espaço projetivo real $\mathbb{RP}^n$, formado por todas as retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^{n+1}$, é uma variedade diferenciável compacta e não orientável (no caso de n ímpar).

4.4 Espaço Tangente e Cálculo em Variedades

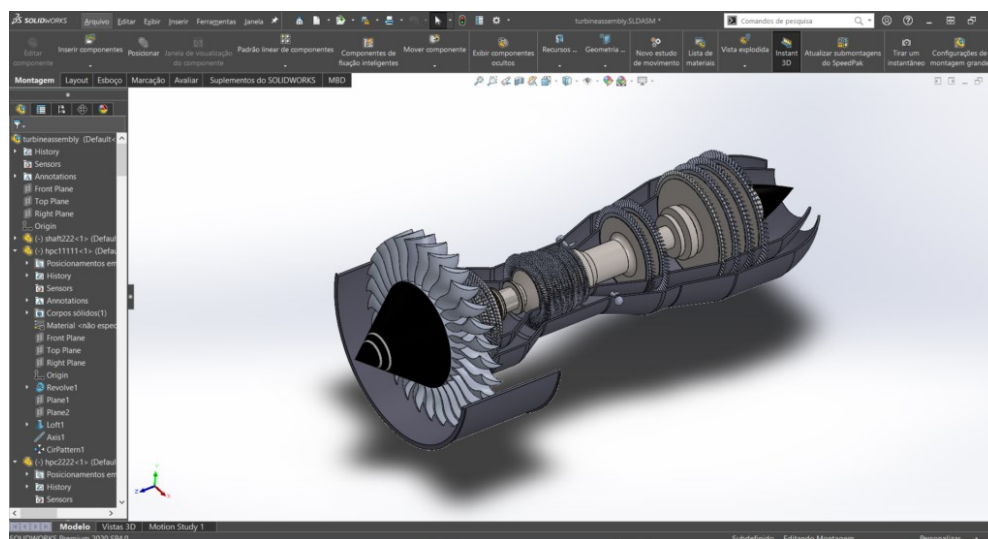
Uma das ideias mais importantes na geometria diferencial é a de espaço tangente. Para cada ponto p de uma variedade M , é possível definir um espaço vetorial chamado espaço tangente $T_p M$, que abriga todos os vetores que “tocam” a variedade naquele ponto. Esse conceito é crucial para permitir operações como derivadas direcionais, campos vetoriais e formas diferenciais, possibilitando o uso do cálculo diferencial em contextos abstratos.

Um exemplo intuitivo está na esfera: em qualquer ponto de sua superfície, o espaço tangente é o plano que toca a esfera exatamente naquele ponto, sendo perpendicular ao vetor posição.

A Geometria Diferencial estuda também curvas geodésicas, as quais representam os caminhos de menor comprimento sobre uma superfície, generalizando o conceito de retas em espaços curvos.

Essa aplicação contribui para o desenvolvimento de itens mais ergonômicos, funcionais e visualmente atraentes

Figura 14-sofwares de criação 3D



Fonte: <https://aerojr.com/>

A geometria também está presente na arte e na natureza. Obras artísticas utilizam proporções, simetrias e perspectivas para criar equilíbrio e transmitir sensações estéticas. Na natureza, padrões geométricos como simetria, fractais e formas poligonais podem ser observados em estruturas como folhas, cristais e colmeias, mostrando como a geometria está integrada à organização natural do mundo

Figura 15-Obra Artística



Fonte: Simetria, Lucas Pennacchi

Figura 16-Simetria na Natureza



Fonte: <https://www.jardimdesign.eco.br/>

Para o bacharel em Matemática, enxergar a Geometria como uma ciência viva significa reconhecer que ela não é um corpo estático de conhecimentos, mas sim um campo que evolui, que dialoga com outras áreas e que encontra novas formas de expressão a partir de contextos diversos.

Ao longo da história, a Geometria demonstrou ser extremamente adaptável. Desde a Geometria Euclidiana, com seu ideal de espaço plano e regras intuitivas, até o desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas, que desafiaram os fundamentos clássicos e expandiram o horizonte da compreensão espacial. Hoje, essa vitalidade é percebida, por exemplo, A Geometria Diferencial, por exemplo, tornou-se essencial para o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, ao fornecer as ferramentas matemáticas necessárias para descrever o espaço-tempo curvo e as trajetórias de corpos sob influência da gravitação. Por meio do uso de variedades diferenciais, tensores e curvatura gaussiana, a geometria se conecta diretamente à Física teórica moderna.

Do ponto de vista matemático, o espaço-tempo é modelado como uma variedade M , dotada de uma métrica g , que é um tensor simétrico de segunda ordem:

$$g: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

Onde $T_p M$ representa o espaço tangente à variedade no ponto $p \in M$. Esse tensor métrico define não apenas distâncias e ângulos, mas também determina a estrutura causal do espaço-tempo.

A equação fundamental da Teoria da Relatividade Geral é dada pelas equações de campo de Einstein, que relacionam a curvatura do espaço-tempo com o conteúdo energético e material presente:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

onde:

- $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, que mede a curvatura da variedade;
- R é o escalar de Ricci, obtido pela contração do tensor de Ricci;
- $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo;
- $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento, que representa a densidade de energia e fluxo de momento;
- G é a constante gravitacional universal;
- c é a velocidade da luz no vácuo.

Essas equações mostram que a distribuição de massa e energia determina como o espaço-tempo se curva, e, por consequência, como os corpos se movem nele, não mais em trajetórias retilíneas como na mecânica clássica, mas em geodésicas, que são as curvas de menor distância ou “caminhos naturais” na variedade curva. A geodésica $\gamma(t)$ em uma variedade com métrica g é descrita pela seguinte equação diferencial:

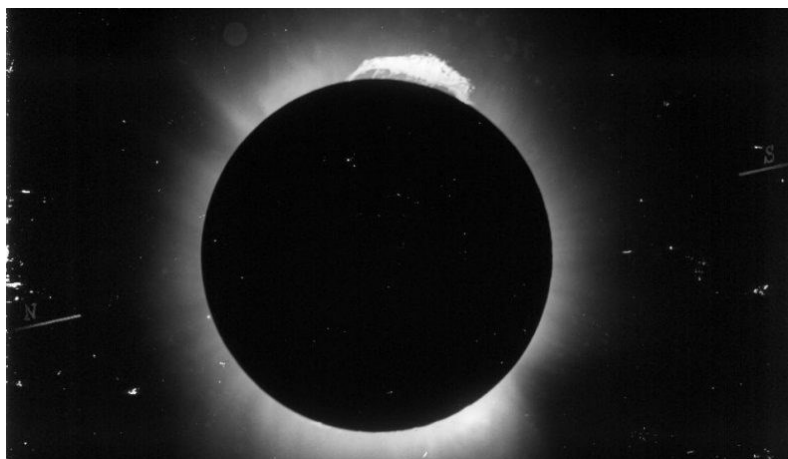
$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} = 0$$

$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ são os símbolos de Christoffel, que dependem da métrica e de suas derivadas parciais, sendo definidos por:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} \right)$$

Um exemplo clássico de aplicação é a curvatura gravitacional da luz. Em presença de um campo gravitacional intenso, como o de uma estrela ou buraco negro, os raios de luz seguem trajetórias curvas, fenômeno que não pode ser explicado por Geometria Euclidiana, mas que é previsto com precisão pela Relatividade Geral e confirmado por observações, como o experimento do eclipse solar de 1919.

Figura 17-Eclipse Solar



Fonte: <https://agencia.ufc.br/>

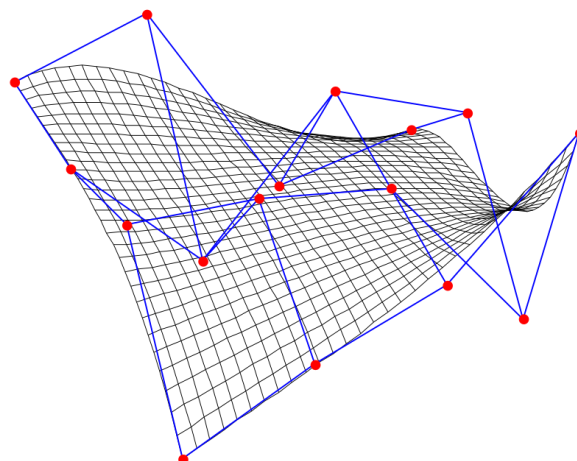
5.2 Na Computação Gráfica

A computação gráfica é uma área interdisciplinar que envolve a criação, manipulação e representação de imagens geradas por computador. Um dos fundamentos teóricos essenciais para a modelagem realista de superfícies e objetos tridimensionais é a geometria diferencial.

A geometria diferencial fornece as ferramentas matemáticas para descrever e analisar as propriedades locais e globais de curvas e superfícies, que são cruciais para diversas tarefas na computação gráfica, tais como a modelagem de superfícies suaves, simulação de iluminação e sombreamento, animação e visualização científica.

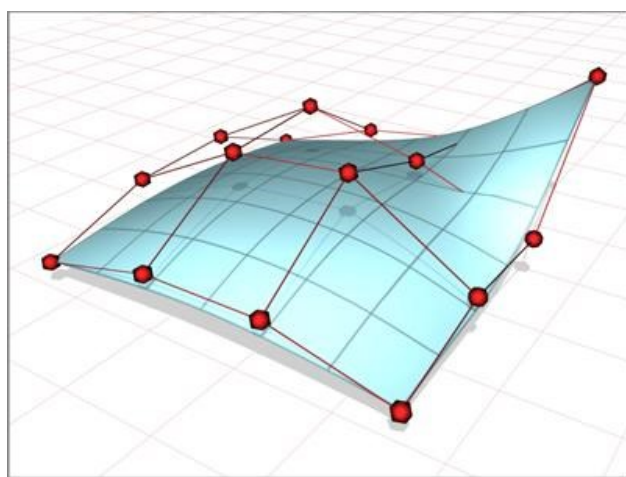
Modelagem de superfícies, a representação de superfícies em computação gráfica muitas vezes utiliza superfícies paramétricas diferenciáveis, como as superfícies de Bézier e as superfícies NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines). Essas superfícies são definidas por funções diferenciáveis que garantem continuidade e suavidade, fundamentais para a criação de modelos visuais de alta qualidade.

Figura 18-Exemplo de Superfícies de Bézier



Fonte: Wojciech mula (2008)

Figura 19-NURBS: Non-Uniform Rational Basis Spline



Fonte: Reader Man Blog (2016)

Por exemplo, uma superfície paramétrica($X(u,v)$) com (u,v) em um domínio no plano, permite calcular:

- O vetor tangente em cada direção:

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u}, \quad X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$$

- O vetor normal unitário:

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

Esses vetores são essenciais para o cálculo de iluminação, pois determinam como a luz interage com a superfície.

Curvatura e detalhamento visual a curvatura da superfície, medida pela curvatura média H e pela curvatura de Gauss K , influencia efeitos visuais como reflexão e refração. A curvatura pode ser obtida a partir da segunda forma fundamental da superfície, que envolve as derivadas segundas X_{uu} , X_{uv} , X_{vv} .

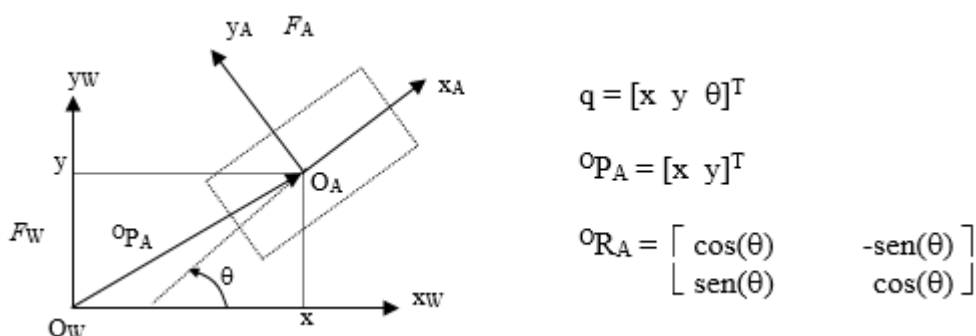
O conhecimento da curvatura permite técnicas avançadas, como:

- Sombras suaves (soft shadows) que dependem da geometria local.
- Mapeamento de textura adaptativo, onde a densidade do mapeamento varia conforme a curvatura para evitar distorções.
- Simulação de superfícies flexíveis e deformações realistas, usando modelos baseados em tensores de curvatura.

5.3 Robótica e Inteligência Artificial

No contexto da Robótica, a Geometria Diferencial é aplicada diretamente na modelagem do chamado espaço de configuração do robô — isto é, o conjunto de todas as posições e orientações possíveis que o robô pode assumir. Esse espaço, frequentemente representado como uma variedade diferenciável, permite que algoritmos calculem rotas, movimentos e transições suaves entre estados. Por exemplo, ao programar um braço robótico com várias juntas (graus de liberdade), o caminho ideal entre dois pontos pode ser descrito por uma geodésica, ou seja, uma curva que minimiza a distância dentro daquela geometria.

Figura 20- Exemplo de representação de configuração



Fonte: <https://www.dca.ufm.br/~pablo/FTP/caminho.doc>

Um exemplo prático é encontrado nos robôs cirúrgicos, como o sistema *da Vinci*, que operam em ambientes extremamente restritos e complexos, exigindo movimentos suaves, seguros e otimizados. A geometria do ambiente, somada à geometria do próprio robô, é considerada nos cálculos para evitar colisões com órgãos e tecidos.

Já na Inteligência Artificial, a Geometria Diferencial contribui com a análise de dados de alta dimensão por meio de técnicas de aprendizado em variedades (*manifold learning*). A ideia central é que, embora os dados possam parecer estar em um espaço com muitas dimensões, eles frequentemente se organizam ao longo de uma subestrutura geométrica de menor dimensão, uma variedade imersa no espaço original. Técnicas como Isomap, LLE (Locally Linear Embedding) e t-SNE são amplamente utilizadas para representar esses dados de forma reduzida, mas preservando sua estrutura essencial.

Essa abordagem é especialmente útil em tarefas como reconhecimento de imagens, voz e padrões complexos, onde os dados possuem estruturas não-lineares difíceis de serem tratadas por métodos tradicionais. Em carros autônomos, por exemplo, algoritmos de visão computacional baseados em aprendizado de máquina utilizam essa geometria para interpretar o ambiente tridimensional ao seu redor e tomar decisões em tempo real.

Dessa forma, a Geometria Diferencial se mostra não apenas como um campo abstrato e teórico da Matemática, mas como uma linguagem fundamental para descrever e resolver problemas altamente práticos em tecnologias emergentes.

CAPÍTULO 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para quem escolhe o bacharelado em Matemática, perceber a conexão entre o abstrato e o concreto, entre o rigor teórico e as aplicações práticas, é um passo fundamental na consolidação da própria formação. Ao longo do curso, o estudante se depara com conceitos muitas vezes extremamente formais, como espaços vetoriais, transformações lineares, variedades diferenciáveis e estruturas topológicas. No entanto, com o amadurecimento acadêmico, torna-se evidente que esses mesmos conceitos são ferramentas poderosas para compreender e modelar problemas reais.

Por exemplo. A Geometria Diferencial, fornece a base matemática para a criação de superfícies suaves em computação gráfica, além de ter papel importante em áreas da física, como a relatividade geral.

Reconhecer essa relação entre teoria e prática permite ao estudante enxergar a Matemática como uma linguagem que não apenas descreve o mundo, mas também oferece meios de transformá-lo. Essa consciência dá sentido mais amplo à jornada acadêmica, mostrando que o rigor aprendido nas disciplinas teóricas é, na verdade, uma preparação para enfrentar desafios concretos tanto na pesquisa quanto no mercado de trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Spivak, M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Volume 1
- ÁVILA, Geraldo. Elementos de geometria euclidiana e não euclidiana. São Paulo: Atual, 2001.
- CABARITI, Flávio. Geometria não euclidiana: fundamentos e aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- COUTINHO, Orlando. Introdução à geometria não-euclidiana. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001.
- EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. 6. ed. São Paulo: Makron Books, 1992.
- EUCLIDES. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- FARIN, Gerald. Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. 5. ed. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2002.
- GARBI, Gilson. Geometria: da arte ao conhecimento. São Paulo: FTD, 2006.
- LEE, John M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer, 2013.
- LORENI, Aparecida da Silva. Geometria não euclidiana e suas implicações didáticas. 2008. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2008.
- MARSCHNER, Steve; HANRAHAN, Pat. An Introduction to Physically-Based Modeling: Geometric, Material, and Optical Properties. ACM SIGGRAPH Courses, 2000.
- MENDES, Iran Abreu; BEZERRA, José Maria. Geometria Euclidiana: fundamentos e aplicações. Natal: EDUFRN, 2005.
- O'NEIL, Barrett. Elementary Differential Geometry. 2. ed. San Diego: Academic Press, 2006.
- PENNACCHI, Lucas. Simetria. [Obra de arte]. Disponível em: <https://aerojr.com/>. Acesso em: 25 jul. 2025.

READER MAN BLOG. NURBS. Disponível em: <https://readerman1.wordpress.com/>. Acesso em: 25 jul. 2025.

SEARA DA CIÊNCIA – Universidade Federal do Ceará. Disponível em: <https://seara.ufc.br/>. Acesso em: 25 jul. 2025.

UFRJ. Fluxo Consultoria – Planta de uma casa. Disponível em: <https://fluxoconsultoria.poli.ufrj.br/>. Acesso em: 25 jul. 2025.

UFRN. Departamento de Computação e Automação. Caminho em robótica. Disponível em: <https://www.dca.ufrn.br/~pablo/FTP/caminho.doc>. Acesso em: 25 jul. 2025.

WOLFRAM, Eric. MathWorld – Triângulo Esférico. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/>. Acesso em: 25 jul. 2025.

WIKIPEDIA. Superfícies de Bézier. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/pl>User:Wojciech_mula. Acesso em: 25 jul. 2025.

JARDIM DESIGN. Simetria na Natureza. Disponível em: <https://www.jardimdesign.eco.br/>. Acesso em: 25 jul. 2025.

AGÊNCIA UFC. Imagem do Eclipse Solar de 1919. Disponível em: <https://agencia.ufc.br/>. Acesso em: 25 jul. 2025.