



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Larissa Santos Chagas

O Teorema de Gauss-Bonnet e Aplicações

São Luís - MA
2023

Larissa Santos Chagas 

O Teorema de Gauss-Bonnet e Aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciada em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes

São Luís - MA

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Chagas, Larissa Santos.

O teorema de Gauss-Bonnet e aplicações / Larissa Santos
Chagas. - 2023.
62 f.

Orientador(a): Ivaldo Paz Nunes.

Curso de Matemática, Universidade Federal do Maranhão,
São Luís-MA, 2023.

1. Curvatura gaussiana. 2. Superfícies regulares. 3.
Teorema de Gauss-Bonnet. I. Nunes, Ivaldo Paz. II.
Título.

Larissa Santos Chagas

O Teorema de Gauss-Bonnet e Aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciada em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 17/07/2023

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof.^a Dr.^a Valdiane Sales Araujo
DEMAT/UFMA
Primeira Examinadora

Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo
DEMAT/UFMA
Segundo Examinador

Ao Criador do Universo e à todos que tornaram esse trabalho possível!

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida.

À minha mentora, professora Valdiane Sales Araujo, por sempre me motivar a estudar e aprender matemática, ao meu orientador e professor Ivaldo Paz Nunes, pelos seus ensinamentos, competência, paciência e colaboração na realização deste trabalho, e por apresentar as Geometrias não-euclidianas a partir do livro "A Janela de Euclides".

Aos professores Cleber Araujo Cavalcanti e Elivaldo Rodregues Macedo por todo apoio e ao meu querido amigo Gabriel Araujo pela dedicação e paciência em resolver os questionamentos e dúvidas acerca do tema. Agradeço em especial aos meus amigos Gustavo Henrique, Fábio Almeida e Carlos Eduardo que contribuíram na edição deste trabalho.

Agradeço a todos os meus amigos nas figuras de Amanda Vitória, Sarah Richely, Jardeane Alves e Felipe Cardoso pelo companheirismo e pela torcida. A todos os professores que contribuíram na minha formação.

Por fim, agradeço a minha família. Aos meus irmãos: Alonso Filho, Daniel, Josué, Ana Clara, Paulo Vitor e Isac. Ao meu pai e professor de Matemática Alonso de Jesus Chagas, que me ensinou a amar esse ramo do conhecimento, à minha mãe Conceição de Maria Santos Chagas pelo cuidado comigo e, em especial, à minha querida avó Maria Emília Chagas Silveira pelo carinho e afeto e por todas as lições de vida transmitidas.

“A geometria existe por toda parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”

Johannes Kepler (1571 – 1630)

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar o Teorema de Gauss-Bonnet, considerado um dos resultados mais importantes da Geometria Diferencial, e algumas de suas aplicações. Com esse propósito, abordaremos alguns resultados preliminares relativo às curvas e superfícies regulares da Geometria Diferencial, assim como fatos topológicos necessários para a compreensão do teorema de Gauss-Bonnet.

Palavras-chave: curvatura gaussiana; superfícies regulares; teorema de Gauss-Bonnet.

Abstract

This work aims to present the Gauss-Bonnet Theorem, considered one of the most important results of Differential Geometry, and some of its applications. With this purpose, we will address some preliminary results regarding the curves and regular surfaces of Differential Geometry, as well as topological facts necessary for the understanding of the Gauss-Bonnet theorem.

Keywords: gaussian curvature; regular surfaces; Gauss-Bonnet theorem.

Sumário

	INTRODUÇÃO	10
1	PRELIMINARES	13
1.1	Curvas Regulares	13
1.2	Superfícies regulares	18
2	O TEOREMA DE GAUSS-BONNET E APLICAÇÕES	48
2.1	O Teorema de Gauss-Bonnet	48
2.2	Aplicações	59
2.3	Considerações finais	61
	REFERÊNCIAS	63

Introdução

A obra *Os Elementos*, escrita por Euclides por volta de 300 a.C., é uma das mais influentes da Geometria. Sua abordagem sistematizou o pensamento geométrico da época em definições e axiomas e, como afirma Leonard Mlodinow em seu livro “A Janela de Euclides”, a partir disso, deduziu consequências lógicas, teoremas que usam tais axiomas em sua demonstração.

Mlodinow destaca que a importância de *Os Elementos* para a Matemática “foi o seu método lógico inovador”, pois a veracidade de cada teorema é demonstrada usando as definições anteriores e postulados já explícitos, “de modo que não possam ser usados pressuposições não declaradas” (MLODINOW, 2004).

Em *Os Elementos*, são descritos cinco postulados, considerados os pilares da Geometria de Euclides. O quinto postulado ou postulado das paralelas, diferente dos outros quatro, não é tão intuitivo e possui um caráter peculiar próprio.

Em virtude dessa singularidade do postulado das paralelas, foi possível transpor os limites da geometria euclidiana e abrir espaço para outras geometrias (chamadas de não-euclidianas) distintas e encantadoras: geometria elíptica, geometria hiperbólica, geometria projetiva.

Grandes mentes em diversas épocas da história foram responsáveis por sistematizar essas novas geometrias, destacando entre elas a figura do matemático alemão Carl Friedrich Gauss.

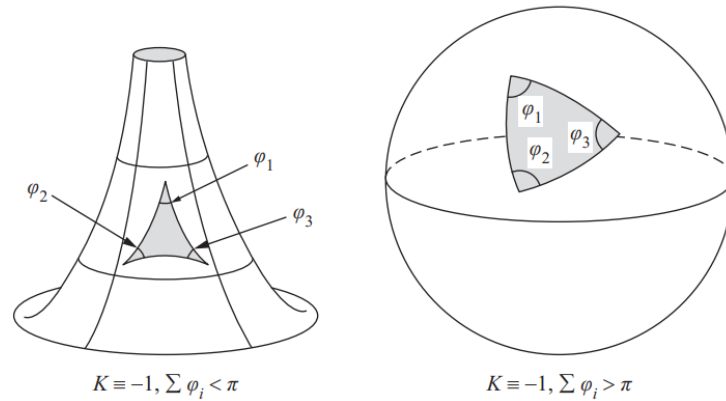
Dentro desse contexto, uma das importantes contribuições do Gauss, posteriormente generalizada pelo matemático francês Pierre Ossian Bonnet, foi o resultado atualmente conhecido como Teorema de Gauss-Bonnet, que relaciona a Geometria e a Topologia das superfícies.

O Teorema de Gauss-Bonnet é um dos teoremas mais importantes da Geometria Diferencial. Uma primeira versão deste teorema foi dada por Gauss em seu famoso artigo *Disquisitiones Generales Circa Superfícies Curvas* e trata de triângulos geodésicos (triângulos cujos lados são arcos geodésicos) em superfícies. Essa versão afirma que o excesso sobre π da soma dos ângulos internos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de um triângulo geodésico T é igual a integral da curvatura Gaussiana K sobre T (CARMO, 2012). Em linguagem matemática,

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \int_T K d\sigma.$$

Por exemplo, no plano Euclidiano, onde $K \equiv 0$, temos como consequência que $\sum_{i=1}^3 \varphi_i = \pi$; essa é uma extensão do Teorema de Tales para superfícies com curvatura nula. Na esfera unitária com $K \equiv 1$ obtemos que $\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \text{área de } T > 0$. Isso significa que, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo geodésico é maior que π . Por outro lado, na pseudoesfera, onde $K \equiv -1$, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo geodésico é menor que π (CARMO, 2012).

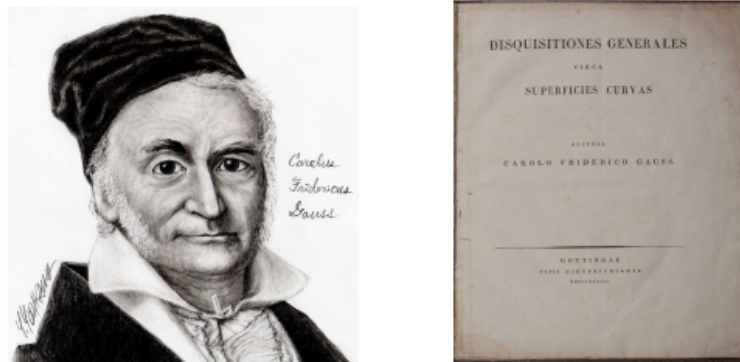
Figura 0.1 – A curvatura Gaussiana e a soma dos ângulos internos da pseudoesfera e da esfera.



Fonte: (CARMO, 2016)

A extensão desse resultado para uma região limitada por uma curva simples não-geodésica deve-se a Bonnet.

Figura 0.2 – Gauss e sua obra *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas*



Fonte: (LIMA, 2016)

Neste trabalho, abordaremos como ponto central o Teorema de Gauss-Bonnet. Além disso, apontaremos algumas aplicações importantes desse teorema. Antes de enunciá-lo, introduziremos alguns resultados preliminares da Geometria Diferencial.

No capítulo 1, apresentaremos, brevemente, alguns conceitos e resultados das curvas regulares e das superfícies regulares de $\mathbb{R}^3$.

No capítulo 2, enunciaremos o Teorema de Gauss-Bonnet e algumas de suas aplicações.

Como referências fundamentais na elaboração deste trabalho temos: *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, de Manfredo Perdigão do Carmo ([CARMO, 2012](#)), *Introdução à Geometria Diferencial* de Ronaldo Freire Lima ([LIMA, 2016](#)), *Geometria Diferencial I* de Jorge Delgado e Katia Frensel ([DELGADO; FRENSEL, 2017](#)) e *Introdução à Geometria Diferencial* de Ketí Tenenblat ([TENENBLAT, 2008](#)).

Além dessas obras, também usamos como referências as seguintes monografias: *O teorema de Gauss-Bonnet*, de Jaelson José de Araújo ([ARAÚJO, 2021](#)) e *Curvas e Superfícies Regulares: Um estudo sobre curvatura* de Laurienny Gondim Silva ([SILVA, 2022](#)).

1 Preliminares

Nesse capítulo, em um primeiro momento, apresentaremos as principais definições, exemplos e resultados relacionados ao estudo das curvas regulares. Em um segundo momento, apresentaremos o conceito de superfície regular e suas principais propriedades. Abordaremos também os conceitos relacionados com a geometria local de uma superfície regular.

1.1 Curvas Regulares

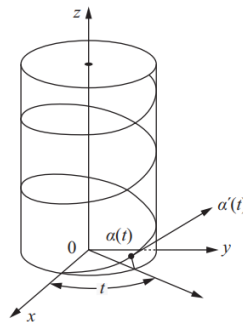
As curvas podem ser definidas como subconjuntos unidimensionais de $\mathbb{R}^3$, aos quais são aplicados os métodos do cálculo diferencial. Além disso, vale lembrar que uma função de uma variável real é diferenciável (ou suave) quando possui, em todos os pontos, derivadas de todas as ordens.

Definição 1.1. Uma **curva diferenciável parametrizada** é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de um intervalo $I = (a, b)$ da reta $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$.

Isso significa que α é uma correspondência que, a cada $t \in I$, associa um ponto $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$, onde $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são funções diferenciáveis. A variável t é chamada **parâmetro** da curva, $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ é o **traço** da curva e $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$ é o **vetor tangente** (ou vetor velocidade) da curva α em $t \in I$.

Exemplo 1.2. A curva diferenciável parametrizada dada por $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \neq 0$, é chamada de **hélice circular**. O traço dessa curva está contido no cilindro circular reto $x^2 + y^2 = a^2$ e o parâmetro t mede o ângulo que o eixo Ox faz com a reta que liga a origem O à projeção do ponto $\alpha(t)$ sobre o plano xy (Ver Figura 1.1).

Figura 1.1 – Hélice Circular



Fonte: (CARMO, 2016)

Definição 1.3. Uma curva diferenciável parametrizada $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada **regular** se $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

Quando $\alpha'(t) = 0$, diz-se que t é um **ponto singular**.

Doravante, o termo *curva parametrizada regular* significará curva parametrizada diferenciável regular, ou seja, omitiremos a expressão *diferenciável*.

Definição 1.4. Seja $\alpha: I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular.

1. A função $s: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$s(t) = \int_a^t |\alpha'(t)| dt, \quad a, t \in I,$$

é denominada **função comprimento de arco** de α a partir de a .

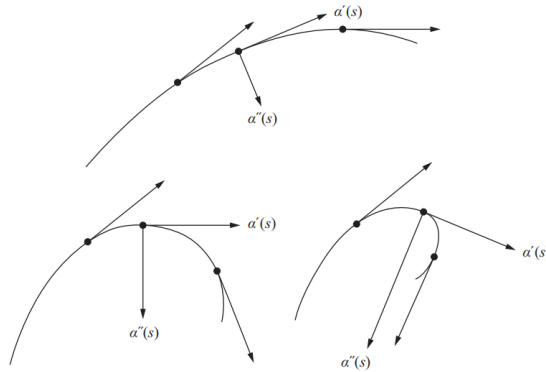
2. α é dita parametrizada pelo comprimento de arco se

$$\int_a^b |\alpha'(t)| dt = b - a, \quad a, b \in I, a \leq b,$$

Segue então que α está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$ (diz-se, nesse caso que, $\alpha'(t)$ é unitário para todo $t \in I$). Uma demonstração desse fato se encontra em (CARMO, 2012).

Seja $\alpha: I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s . Como o vetor tangente $\alpha'(s)$ é unitário, o módulo da derivada segunda $|\alpha''(s)|$ mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente em s (Ver Figura 1.2).

Figura 1.2 – Comportamento dos vetores $\alpha'(s)$ e $\alpha''(s)$



Fonte: (CARMO, 2016)

Definição 1.5. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Dado $s \in I$, o número

$$|\alpha''(s)| = k(s)$$

chama-se **curvatura** de α em s .

Como $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s , segue que $|\alpha'(s)| = 1$ para todo $s \in I$. Donde temos

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \|\alpha'(s)\|^2 = 1, \quad \text{para todo } s \in I.$$

Derivando a igualdade acima em $s \in I$, obtemos

$$0 = \frac{d}{ds} \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 2 \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle.$$

Isso significa que o vetor tangente $\alpha'(s)$ é ortogonal ao vetor $\alpha''(s)$. Assim, $\forall s \in I$ onde $k(s) \neq 0$, i.e., $\alpha''(s) \neq 0$, pode-se definir um vetor unitário na direção de $\alpha''(s)$.

Definição 1.6. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $k(s) > 0$. O vetor*

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$$

*é denominado **vetor normal** a α em s .*

Observa-se que, nos pontos onde $k(s) = |\alpha''(s)| = 0$, o vetor normal não está definido. Dessa maneira, estudaremos apenas as curvas parametrizadas pelo comprimento de arco em que $k(s) = |\alpha''(s)| \neq 0$.

Além disso, denotaremos por $t(s)$ o vetor tangente $\alpha'(s)$ e, conseqüentemente, $t'(s)$ o vetor $\alpha''(s)$. Assim, podemos escrever, $t'(s) = k(s)n(s)$.

Definição 1.7. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $k(s) > 0$ para todo $s \in I$. O vetor*

$$b(s) = t(s) \wedge n(s),$$

*é chamado **vetor binormal** a α em s .*

Como $t(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e $|t(s)| = |n(s)| = 1$, pode-se afirmar que $b(s)$ é um vetor unitário.

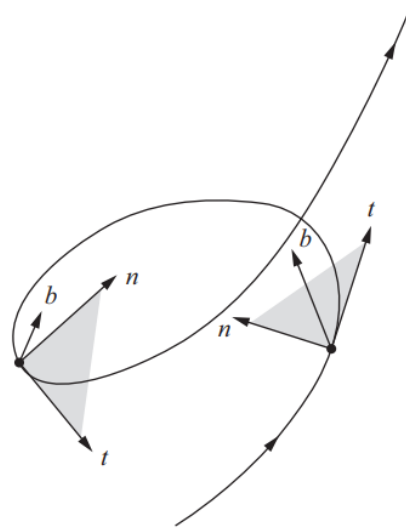
Dadas as definições acima, temos que, para cada $s \in I$, os vetores $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ formam uma base ortonormal positiva $\{t(s), n(s), b(s)\}$ de $\mathbb{R}^3$, denominada **triedro de Frenet-Serret** (Ver Figura 1.3).

Nota-se que, como o vetor $b(s)$ é unitário, ou seja, $|b(s)| = 1$ para todo $s \in I$, resulta que $\langle b(s), b(s) \rangle = 1$ para todo $s \in I$. Derivando essa última igualdade obtemos

$$2 \langle b(s), b'(s) \rangle = 0.$$

Logo, $b(s)$ é ortogonal a $b'(s)$.

Figura 1.3 – Triedro de Frenet-Serret



Fonte: (CARMO, 2016)

Por outro lado, considerando que $t'(s)$ é paralelo a $n(s)$ e derivando $b(s) = t(s) \wedge n(s)$, obtemos

$$b'(s) = t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) = t(s) \wedge n'(s).$$

Donde resulta que $b'(s)$ é ortogonal a $t(s)$.

Portanto, como $b'(s)$ é ortogonal aos vetores $t(s)$ e $b(s)$, podemos concluir que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$, em outros termos, $b'(s)$ é igual ao produto de $n(s)$ por um número real. Definiremos agora esse número real.

Definição 1.8. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s tal que $k(s) > 0$ para todo $s \in I$. O número $\tau(s)$ definido por*

$$\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle,$$

*é chamado **torção** de α em s .*

Dada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s , pelo fato do triedro $\{t(s), n(s), b(s)\}$ ser uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, podemos descrever os vetores $t'(s)$, $n'(s)$ e $b'(s)$ como combinação dos vetores desse triedro. De fato, vimos que

$$t'(s) = k(s)n(s)$$

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

Resta obter a expressão para $n'(s)$. Sabemos que

$$n(s) = b(s) \wedge t(s).$$

Derivando essa igualdade e usando as expressões obtidas para $t'(s)$ e $b'(s)$, temos

$$\begin{aligned}
 n'(s) &= b'(s) \wedge t(s) + b(s) \wedge t'(s) \\
 &= (\tau(s)n(s)) \wedge t(s) + b(s) \wedge (k(s)n(s)) \\
 &= \tau(s)(n(s) \wedge t(s)) + k(s)(b(s) \wedge n(s)) \\
 &= -\tau(s)b(s) - k(s)t(s)
 \end{aligned}$$

Logo, como resultado, obtemos as seguintes equações

$$\begin{aligned}
 t'(s) &= k(s)n(s) \\
 n'(s) &= -\tau(s)b(s) - k(s)t(s) \\
 b'(s) &= \tau(s)n(s),
 \end{aligned}$$

chamadas de **fórmulas de Frennet**.

Intuitivamente, pode-se pensar em uma curva em $\mathbb{R}^3$ como sendo obtida a partir de uma reta quando é entortada (curvatura) e/ou torcida (torção). Sob esse ponto de vista, pode-se afirmar que o comportamento local de uma curva pode ser descrito completamente por k e τ . Uma demonstração desse resultado é dada por (CARMO, 2012).

1.2 Superfícies regulares

Definição 1.9. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\mathbf{X} : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que (Ver Figura 1.4)

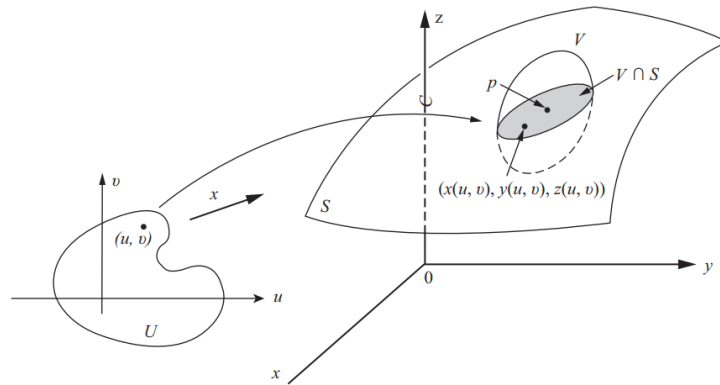
1. $\mathbf{X}$ é diferenciável, ou seja, se escrevemos

$$\mathbf{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

então as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordem em U .

2. $\mathbf{X}$ é um homeomorfismo. Como $\mathbf{X}$ é contínua pela condição 1 isto significa que $\mathbf{X}$ tem inversa $\mathbf{X}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que é contínua.
3. $\forall p \in U$, a diferencial $d\mathbf{X}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Figura 1.4 – Superfície regular



Fonte: (CARMO, 2016)

Dizemos que a aplicação $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **parametrização local** de S . A vizinhança $X(U) = V \cap S$ de p é chamada uma **vizinhança parametrizada**.

Exemplo 1.10. A esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular.

Primeiro verificaremos que a aplicação

$$\mathbf{X}_1 = (x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \quad (x, y) \in U,$$

onde $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ e $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$, é uma parametrização de S^2 . Observe que $\mathbf{X}_1(U)$ é a parte (aberta) de S^2 acima do plano xy .

Como $x^2 + y^2 < 1$, a função $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ tem derivadas contínuas de todas as ordens. Logo, $\mathbf{X}_1$ é diferenciável e a condição 1 é satisfeita.

Para verificar a condição 2, observamos que $\mathbf{X}_1$ é bijetiva e que $\mathbf{X}_1^{-1}$ é a restrição da projeção (contínua) $\pi(x, y, z) = (x, y)$ ao conjunto $\mathbf{X}_1(U)$. Portanto, $\mathbf{X}_1^{-1}$ é contínua em $\mathbf{X}_1(U)$.

A condição 3 pode ser satisfeita de forma equivalente exigindo-se que um dos determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)},$$

seja diferente de zero em $q \in U$. No caso da parametrização $\mathbf{X}_1$, essa condição é verificada uma vez que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} \equiv 1.$$

Agora, cobriremos a esfera inteira utilizando parametrizações similares. Procederemos da seguinte maneira. Definimos $\mathbf{X}_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\mathbf{X}_2 = (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), \quad (x, y) \in U,$$

analogamente, verifica-se que $\mathbf{X}_2$ é uma parametrização, e observamos que $\mathbf{X}_1(U) \cup \mathbf{X}_2(U)$ cobre a esfera menos o equador

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

Utilizando então os planos xz e zy , definimos as seguintes parametrizações

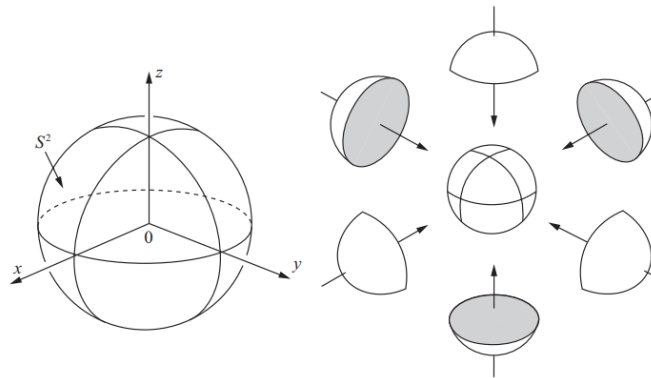
$$\begin{aligned} \mathbf{X}_3(x, z) &= \left(x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z \right), \\ \mathbf{X}_4(x, z) &= \left(x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z \right), \\ \mathbf{X}_5(y, z) &= \left(+\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z \right), \\ \mathbf{X}_6(y, z) &= \left(-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z \right), \end{aligned}$$

que, juntamente com $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$, cobrem inteiramente S^2 (Ver Figura 1.5). Mostrando assim que S^2 é uma superfície regular.

Proposição 1.11. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$, então o gráfico de f , isto é, o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado pelos pontos $(x, y, f(x, y))$, onde $(x, y) \in U$, é uma superfície regular.

Demonstração: (CARMO, 2012). ■

Figura 1.5 – Esfera e parametrizações



Fonte: (CARMO, 2016)

Em muitos casos, saber se um dado subconjunto de $\mathbb{R}^3$ é uma superfície regular, a partir da definição, é um tanto cansativo. A proposição seguinte mostra que tal subconjunto, sendo a imagem inversa de um valor regular de uma função diferenciável definida num aberto de $\mathbb{R}^3$, quando não vazia, é uma superfície regular. Para tanto, definiremos valor regular de uma aplicação diferenciável.

Definição 1.12. Dada uma aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, dizemos que $p \in U$ é um ponto crítico de F se a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem $F(p) \in \mathbb{R}^m$ de um ponto crítico é chamado um valor crítico de F . Um ponto de $\mathbb{R}^m$ que não é valor crítico é chamado um **valor regular** de F .

No caso em que $n = 3$ e $m = 1$, note que $a \in f(U)$ é um valor regular de $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se, e somente se, as derivadas parciais f_x, f_y e f_z não se anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U : f(x, y, z) = a\}.$$

Proposição 1.13. Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.

Demonstração: (CARMO, 2012). ■

O conceito de diferenciabilidade de aplicações entre espaços euclidianos desempenha um papel fundamental no estudo das superfícies regulares. Assim sendo, definiremos agora, explicitamente, uma função diferenciável em uma superfície regular e a diferencial de uma aplicação diferenciável.

Definição 1.14. Seja $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um subconjunto aberto V de uma superfície regular S . Então f é **diferenciável** em $p \in V$, se existe alguma

parametrização local $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, com $p \in \mathbf{X}(U) \subset V$, tal que a composição $f \circ \mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbf{X}^{-1}(p)$. A função f é diferenciável em V se é diferenciável em todos os pontos de V .

Essa definição de diferenciabilidade pode ser estendida a aplicações entre superfícies.

Diz-se que uma aplicação contínua $\varphi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$, de um conjunto aberto V_1 de uma superfície regular S_1 em uma superfície S_2 , é **diferenciável** em $p \in V_1$ se existem parametrizações

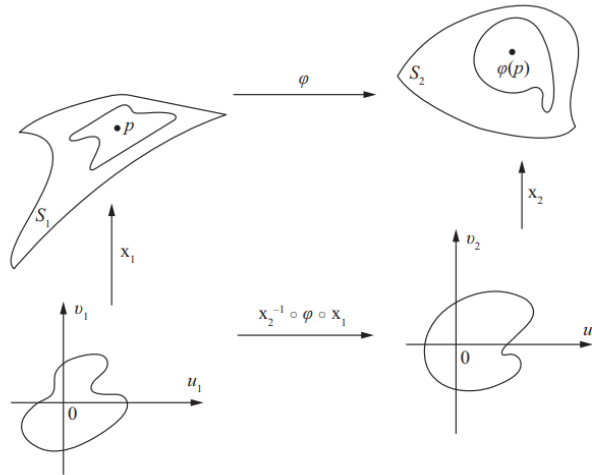
$$\mathbf{X}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad \mathbf{X}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2,$$

com $p \in \mathbf{X}_1(U_1)$ e $\varphi(\mathbf{X}_1(U_1)) \subset \mathbf{X}_2(U_2)$, de modo que a aplicação

$$\mathbf{X}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{X}_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

é a diferenciável em $q = \mathbf{X}_1^{-1}(p)$.

Figura 1.6 – Diferenciabilidade entre superfícies



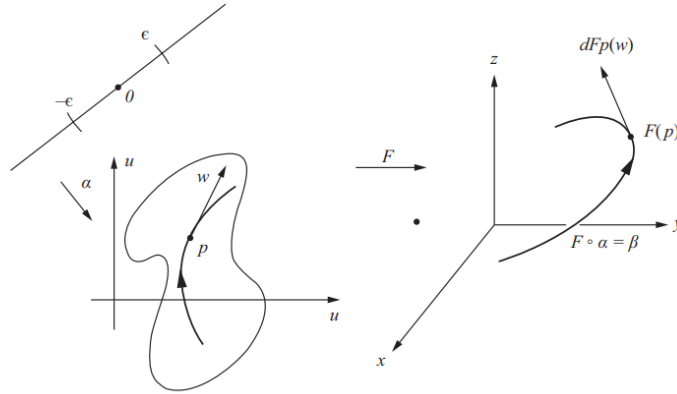
Fonte: (CARMO, 2016)

Definição 1.15. Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Associamos a cada $p \in U$ uma aplicação linear $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que é chamada **diferencial** de F em p , e é definida da seguinte maneira: sejam $w \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Como F é diferenciável e α também, resulta, pela regra da cadeia, que a curva $\beta = F \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ também é diferenciável. Assim (Ver Figura 1.7), definimos

$$dF_p(w) = \beta'(0)$$

Nesse processo, desempenha um papel fundamental a aplicação conhecida como mudança de parâmetros, a qual passamos a descrever.

Sejam $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $\mathbf{Y} : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ parametrizações distintas de uma superfície S num ponto $p \in S$. Como $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ são homeomorfismos, tem-se que:

Figura 1.7 – Diferencial de F em p 

Fonte: (CARMO, 2016)

- $V = \mathbf{X}(U) \cup \mathbf{Y}(W)$ é um aberto de S que contém p ;
- $U_0 = \mathbf{X}^{-1}(V) \subset U$ e $W_0 = \mathbf{Y}^{-1}(V) \subset W$

Por simplicidade de notação, escreveremos $\mathbf{X} = \mathbf{X}|_{U_0}$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}|_{W_0}$. Assim, a plicação composta

$$\xi = \mathbf{Y}^{-1} \circ \mathbf{X} : U_0 \rightarrow W_0$$

está bem definida e, por ser uma composição de difeomorfismos, é um difeomorfismo entre os abertos U_0 e W_0 , de $\mathbb{R}^2$, o qual denomina-se **mudança de parâmetros**.

Fazendo-se, então $a = \mathbf{X}^{-1}(p)$ e $b = \mathbf{Y}^{-1}(p)$, tem-se, em particular, que é $d\xi_a$ um isomorfismo. Daí, uma vez que $\mathbf{X} = \mathbf{Y} \circ \xi$, tem-se

$$d\mathbf{X}_a(\mathbb{R}^2) = d\mathbf{Y}_b(d\xi_a(\mathbb{R}^2)) = d\mathbf{Y}_b(\mathbb{R}^2),$$

isto é, $d\mathbf{X}_a$ e $d\mathbf{Y}_b$ têm o mesmo conjunto imagem.

Segue-se que o conjunto

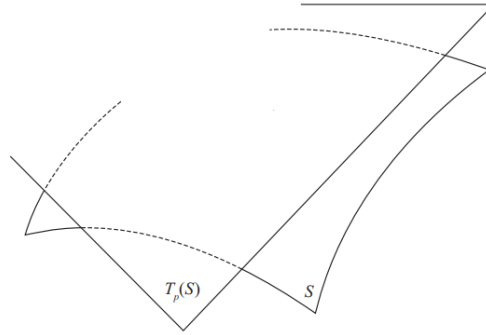
$$T_p S = d\mathbf{X}_a(\mathbb{R}^2), a = \mathbf{X}^{-1}(p),$$

ao qual chamamos de **plano tangente** (Ver Figura 1.8) a S em p , está bem definido, ou seja, independe da parametrização. Além disso, podemos afirmar que, o plano tangente de uma superfície regular S no ponto $p \in S$ é o conjunto de todos os vetores tangentes a S em p .

A existência de tal plano possibilita estender às superfícies regulares o cálculo diferencial e integral das aplicações nelas definidas.

Podemos agora definir a diferencial de uma aplicação diferenciável entre superfícies.

Figura 1.8 – Plano tangente

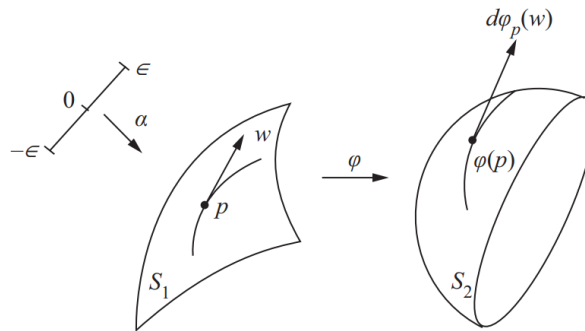


Fonte: (CARMO, 2016)

Definição 1.16. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies regulares e seja $\varphi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável de um conjunto aberto V de S_1 em S_2 . Dado $p \in V$, então todo vetor tangente $w \in T_p S_1$ é um vetor velocidade $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$ com $\alpha(0) = p$. A curva $\beta = \varphi \circ \alpha$ é tal que $\beta(0) = \varphi(p)$, e portanto $\beta'(0)$ é um vetor de $T_{\varphi(p)} S_2$. A aplicação

$$d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$$

definida por $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$ é chamada a **diferencial** de φ em $p \in S_1$ (Ver Figura 1.9).

Figura 1.9 – Diferencial de φ entre S_1 e S_2 

Fonte: (CARMO, 2016)

Pode-se provar que a diferencial de uma aplicação diferenciável é uma transformação linear. Para detalhes, veja (CARMO, 2012).

Do mesmo modo, define-se a diferencial de uma função diferenciável $f : U \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ em $p \in U$ como a aplicação linear $df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$.

A geometria das superfícies regulares de $\mathbb{R}^3$ divide-se em duas categorias: **intrínseca** e **extrínseca**. A geometria intrínseca é aquela cujos conceitos são estabelecidos sem fazer referência ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Por outro lado, a geometria extrínseca estuda os

conceitos geométricos associados a superfícies, os quais são concebidos a partir do fato de que essas são subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. As geometrias intrínseca e extrínseca de uma superfície regular são estudadas a partir de duas formas quadráticas.

Nesta seção, abordaremos inicialmente a primeira forma fundamental, a qual determina a geometria intrínseca da superfície. Em seguida, após uma breve discussão sobre orientabilidade de superfícies, apresentaremos a segunda forma fundamental, a qual determina a geometria extrínseca da superfície, e através da qual introduzem-se os essenciais conceitos de curvatura Gaussiana e curvatura média.

Definição 1.17. *Sejam S uma superfície regular, $T_p S$ o plano tangente a S em $p \in S$. A forma quadrática $I : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2$$

*é chamada **primeira forma fundamental** em $p \in S$.*

Observe que a primeira forma fundamental expressa o modo como cada espaço tangente à superfície S herda o produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$.

Como o plano $T_p S$ independe de parametrização, temos como consequência que o mesmo ocorre com a forma quadrática I_p . Todavia, dada uma parametrização $\mathbf{X}(u, v)$ pode-se expressar a primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ associada a $\mathbf{X}(u, v)$ em p .

De fato, como $w \in T_p S$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, com $p = \alpha(0) = \mathbf{X}(u_0, v_0)$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle \mathbf{X}_u u' + \mathbf{X}_v v', \mathbf{X}_u u' + \mathbf{X}_v v' \rangle \\ &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle_p u' v' + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

onde os valores das funções envolvidas são calculados em $p = \alpha(0)$ e

$$E(u_0, v_0) = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle_p$$

$$F(u_0, v_0) = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle_p$$

$$G(u_0, v_0) = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle_p$$

são os chamados **coeficientes da primeira forma fundamental** na base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ de $T_p S$. Note que, variando p , obtem-se as funções $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ que são diferenciáveis na vizinhança coordenada de p correspondente a $\mathbf{X}(u, v)$.

Exemplo 1.18. *Considere a parametrização $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ do cilindro reto (Ver Figura 1.10) dada por*

$$\mathbf{X}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$$

com

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}.$$

Veja que

$$\mathbf{X}_u = (-\sin(u), \cos(u), 0),$$

$$\mathbf{X}_v = (0, 0, 1)$$

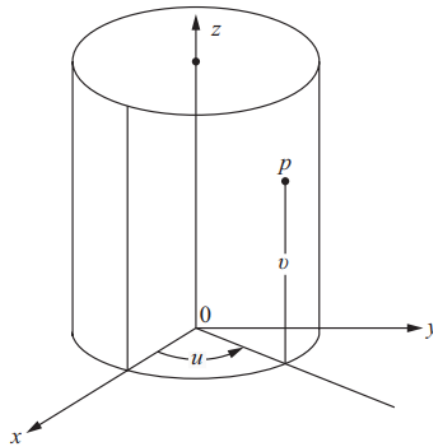
Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental do cilindro reto são

$$E = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \sin^2(u) + \cos^2(u) = 1,$$

$$F = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = 1.$$

Figura 1.10 – Cilindro reto



Fonte: (CARMO, 2016)

Introduziremos agora a noção de orientabilidade de superfícies, ou seja, em que sentido podemos dizer que a superfície S tem uma orientação.

Definição 1.19. *Uma superfície regular S é orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem jacobiano positivo em p . A escolha de tal família é chamada uma orientação de S , nesse caso, S diz-se orientada. Se uma tal escolha não for possível, a superfície é não orientável. Se S é orientada, uma parametrização (local) $\mathbf{X}$ é compatível com a orientação de S se, juntando $\mathbf{X}$ à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de S .*

Um conceito muito importante para a orientabilidade de superfícies é o de vetor normal unitário.

Dado um ponto p em uma superfície regular S , existem dois vetores unitários em $\mathbb{R}^3$ que são normais ao plano tangente $T_p S$; cada um deles é chamado de **vetor normal unitário** em p .

Uma vez fixada uma parametrização $\mathbf{X} : U \rightarrow S$ em $p \in S$, pode-se definir uma aplicação diferencial $N : \mathbf{X}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa a cada ponto $q \in U$ um vetor normal unitário $N(q) \in \mathbb{R}^3$ a S em q , dado por

$$N(p) = \frac{\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v|}(u, v).$$

Chama-se tal aplicação diferenciável de **campo diferenciável de vetores normais unitários**.

Proposição 1.20. *Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S .*

Demonstração: (CARMO, 2012). ■

Vale ressaltar que:

- Toda superfície regular é localmente orientável;
- Toda superfície regular que pode ser coberta pela imagem de uma única parametrização é orientável.

Além disso, observamos que, a orientação não é uma propriedade local de uma superfície regular, mas uma propriedade global, no sentido de que envolve toda a superfície.

Exemplo 1.21. *A esfera é uma superfície orientável. Com efeito, dado um ponto p de uma esfera S de raio $r > 0$ e centro c , o plano tangente de S no ponto p é dado por $T_p S = \{p - c\}^\perp$. Assim, a aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $N(p) = \frac{p-c}{|p-c|}$, define em S um campo normal unitário diferencial, donde se conclui que S é orientável.*

Um exemplo notável de superfície que não é orientável é a **faixa de Mobius** M (Ver Figura 1.11). De fato, se M fosse orientável, pela Proposição 1.20, existiria um campo diferenciável $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais unitários. Contudo, mostraremos que isso não é possível.

Considere $\mathbf{X} : U \rightarrow M$ uma parametrização local de M dada por

$$\mathbf{X}(u, v) = \left(\left(2 - v \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right) \sin(u), \left(2 - v \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right) \cos(u), \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right),$$

com $0 < u < 2\pi$ e $-1 < v < 1$. Em tal parametrização, a vizinhança coordenada correspondente deixa de fora os pontos do intervalo aberto $u = 0$.

Por outro lado, tomando Ox como origem dos u 's, obtemos outra parametrização $\bar{\mathbf{X}}(\bar{u}, \bar{v})$ dada por

$$\begin{aligned} x &= \left\{ 2 - \bar{v} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}\right) \right\} \cos(\bar{u}), \\ y &= \left\{ 2 - \bar{v} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}\right) \right\} \sin(\bar{u}), \\ z &= \bar{v} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}\right), \end{aligned}$$

cujas vizinhança coordenada omite $u = \frac{\pi}{2}$.

Essas duas vizinhanças coordenadas cobrem a faixa de Mobius M , e consequentemente, M é uma superfície regular.

Observa-se que, a interseção dessa duas vizinhanças coordenadas não é conexa, mas construída de duas componentes conexas:

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \mathbf{X}(u, v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi \right\}, \\ W_2 &= \left\{ \mathbf{X}(u, v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi \right\}, \end{aligned}$$

onde a mudança de coordenada é dada por

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u - \frac{\pi}{2}, \\ \bar{v} &= v, \end{aligned}$$

em W_1 , e

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{3\pi}{2} + u, \\ \bar{v} &= -v, \end{aligned}$$

em W_2 . Assim,

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = 1 > 0,$$

em W_1 , e

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = -1 < 0,$$

em W_2 .

Suponha agora que a faixa de Mobius M seja orientável. Então, pela Proposição 1.20, existe um campo diferenciável de vetores normais $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Seja então,

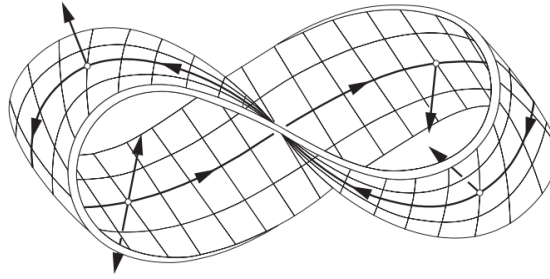
$$N(p) = \frac{\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v|}, \quad N(p) = \frac{\bar{\mathbf{X}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{X}}_{\bar{v}}}{|\bar{\mathbf{X}}_{\bar{u}} \wedge \bar{\mathbf{X}}_{\bar{v}}|} \quad \forall p \in M,$$

os campos diferenciáveis associados a $\mathbf{X}(u, v)$ e a $\bar{\mathbf{X}}(\bar{u}, \bar{v})$, respectivamente. Além disso, o Jacobiano da mudança de coordenadas é -1 em W_1 ou em W_2 .

Contudo, pela explicação em (CARMO, 2012) e pela Definição 1.19, as parametrizações de uma superfície determinam a mesma orientação nessa superfície (induzida pela orientação de $T_p S$) se o Jacobiano da mudança de coordenadas $\partial(u, v)/\partial(\bar{u}, \bar{v})$ é positivo. O que não ocorre nessa situação. De fato, se p é um ponto dessa componente da interseção, então $N(p) = -N(p)$, o que contraria a hipótese de M ser orientável. Portanto, a faixa de Möbius M é uma superfície não-orientável.

Intuitivamente, uma maneira de vermos esse resultado é percorrendo uma vez o círculo médio da faixa. Depois de uma volta, o campo normal N retornaria como $-N$ (Ver Figura 1.11).

Figura 1.11 – Faixa de Möbius



Fonte: (CARMO, 2016)

Na primeira seção desse capítulo vimos o conceito de curvatura para curvas regulares. Estenderemos agora esse tal conceito para superfícies regulares.

A partir desse momento, trabalharemos com superfícies orientáveis. S denotará uma superfície regular orientável com uma orientação que será chamada de N e diremos simplesmente que S é uma superfície com uma orientação N .

Definição 1.22. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . Como $|N(p)| = 1, \forall p \in S$, a aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma valores na esfera unitária*

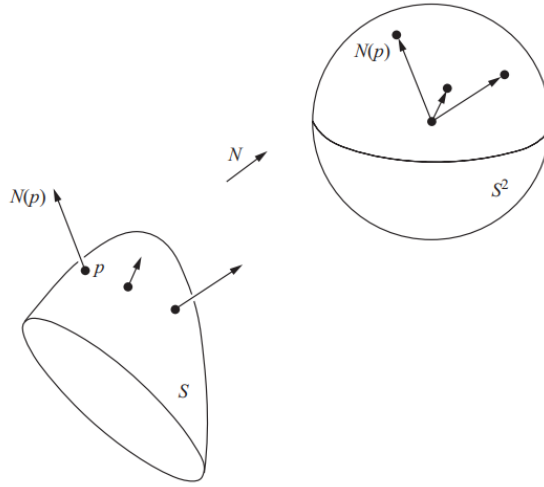
$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação $N : S \rightarrow S^2$, assim definida, é chamada **aplicação de Gauss** de S (Ver Figura 1.12).

Observe que a aplicação de Gauss é diferenciável. Além disso, note que $T_{N(p)} S^2$ e $T_p S$ coincidem, pois ambos são ortogonais ao vetor $N(p)$. Portanto, segue que dN_p define um operador linear de $T_p S$ em $T_p S$.

Vamos explicar como opera a aplicação linear $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$. Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ em S , com $\alpha(0) = p$, consideramos a curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ na esfera S^2 ; isso equivale a restringir o vetor normal N à curva $\alpha(t)$.

Figura 1.12 – A aplicação de Gauss



Fonte: (CARMO, 2016)

O vetor tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ é um vetor de $T_p S$ que mede a taxa de variação do vetor normal N restrito à curva $\alpha(t)$, em $t = 0$. Desse modo, dN_p mede quanto N se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p . No estudo das curvas, esta medida é dada por um número, a curvatura. No estudo das superfícies, esta medida é caracterizada por uma aplicação linear.

Exemplo 1.23. *Considere a esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Se $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma curva parametrizada em S^2 , então

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0,$$

mostrando que o vetor (x, y, z) é normal à esfera no ponto (x, y, z) . Assim, $\bar{N} = (x, y, z)$ e $N = (-x, -y, -z)$ são campos de vetores normais unitários em S^2 . Fixando a orientação para S^2 escolhendo $N = (-x, -y, -z)$ como um campo normal. Note que N aponta para o centro da esfera.

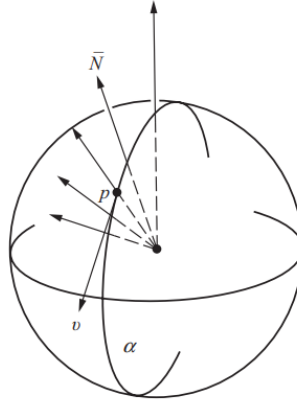
Restrito à curva $\alpha(t)$, o vetor normal

$$N(t) = (-x(t), -y(t), -z(t))$$

é uma função vetorial de t , e portanto

$$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t));$$

ou seja, $dN_p = -v$ para todo $p \in S^2$ e todo $v \in T_p S^2$. Notemos que com a escolha de $\bar{N}$ como um campo normal (isto é, com orientação oposta) teríamos obtido $d\bar{N}_p(v) = v$ (Ver Figura 1.13).

Figura 1.13 – Esfera unitária: $d\bar{N}_p(v) = v$.

Fonte: (CARMO, 2016)

Proposição 1.24. A diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.

Demonstração: Como dN_p é linear, basta verificar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$ para alguma base $\{w_1, w_2\}$ de $T_p S$. Fixe uma parametrização $\mathbf{X}(u, v)$ de S em p e seja $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ a base associada de $T_p S$. Suponha que $p = X(u_0, v_0)$ e seja $N(u, v) = N \circ X(u, v)$, $(u, v) \in U$. Note que $N_u = dN_{X(u,v)}(\mathbf{X}_u)$ e $N_v = dN_{X(u,v)}(\mathbf{X}_v)$ para todo $(u, v) \in U$.

Como N é normal à $T_{X(u,v)}S$, para todo $(u, v) \in U$, segue que $\langle N, \mathbf{X}_u \rangle = 0$ e $\langle N, \mathbf{X}_v \rangle = 0$ em U . Derivando essas duas igualdades em (u_0, v_0) , em relação a v e u , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}\langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle + \langle N, \mathbf{X}_{uv} \rangle &= 0, \\ \langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle + \langle N, \mathbf{X}_{vu} \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle dN_p(\mathbf{X}_u), \mathbf{X}_v \rangle = \langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle = -\langle N, \mathbf{X}_{vu} \rangle = \langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle = \langle dN_p(\mathbf{X}_v), \mathbf{X}_u \rangle$$

.

■

Por $dN_p : T_p \rightarrow T_p S$ ser um aplicação linear auto-adjunta, podemos associar dN_p a uma forma quadrática Q em $T_p S$ dada por $\langle dN_p(v), v \rangle$, onde $v \in T_p S$.

Definição 1.25. A forma quadrática II_p definida em $T_p S$ por

$$II_p = -\langle dN_p(v), v \rangle,$$

é chamada **segunda forma fundamental** de S em p .

Definição 1.26. *Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p e $\cos(\theta) = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a S em p . O número $k_n = k \cos(\theta)$ é chamado **curvatura normal** de $C \subset S$ em p .*

Isso significa que k_n é o comprimento da projeção do vetor kn sobre a reta normal à superfície em p , com o sinal dado pela orientação N de S em p .

Apresentaremos agora uma interpretação para a segunda forma fundamental II_p . Sejam $C \subset S$ uma curva parametrizada por $\alpha(s)$, onde s é o comprimento de arco de C , com $\alpha(0) = p$ e $N(s)$ a restrição do vetor normal N à curva $\alpha(s)$. Assim, $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ para todo s . Derivando a última igualdade em relação a s , temos

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle + \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle = 0,$$

então,

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = - \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

Pela definição da segunda forma fundamental e considerando que $\alpha'' = kn$, em virtude de α ser parametrizada pelo comprimento de arco. Então, podemos escrever

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= - \langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= - \langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N, kn \rangle \\ &= k_n(p). \end{aligned}$$

Em outros termos, para cada vetor unitário $v \in T_pS$, o valor da segunda forma fundamental II_p em v é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por p e tangente a v .

Dada uma superfície S com orientação N , sabemos $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ é um operador linear autoadjunto. Pelo Teorema espectral, segue-se que dN_p é diagonalizável, i.e., existem autovalores reais $k_1 = k_1(p) \geq k_2 = k_2(p)$ de $-dN_p$ e uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS , a qual é formada pelos autovetores associados a k_1 e k_2 , tal que

$$dN_p(e_1) = -k_1 e_1$$

$$dN_p(e_2) = -k_2 e_2.$$

Ademais, k_1 e k_2 são o máximo e o mínimo da forma quadrática II_p restrita ao círculo unitário de T_pS .

Definição 1.27. *O máximo da curvatura normal k_1 e o mínimo da curvatura normal k_2 são chamadas **curvaturas principais** em p ; as direções correspondentes, ou seja, as direções dadas pelos autovetores e_1 e e_2 são chamadas **direções principais**.*

Mostraremos que conhecendo as curvaturas principais k_1 e k_2 e as direções principais e_1 e e_2 podemos calcular a curvatura normal k_n em qualquer direção tangente. Dado $v \in T_p$, $|v| = 1$ e uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$. Então

$$v = e_1 \cos(\theta) + e_2 \sin(\theta),$$

onde θ é o ângulo entre e_1 e v na orientação de $T_p S$. Usando o fato de que $II_p(v, v)$ é igual à curvatura normal de S em p na direção v , temos

$$\begin{aligned} k_n &= II_p(v) \\ &= -\langle dN_p(v), v \rangle \\ &= \langle dN_p(e_1 \cos(\theta) + e_2 \sin(\theta)), e_1 \cos(\theta) + e_2 \sin(\theta) \rangle \\ &= \langle e_1 k_1 \cos(\theta) + e_2 k_2 \sin(\theta), e_1 \cos(\theta) + e_2 \sin(\theta) \rangle \\ &= k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

Como dN_p é diagonalizável, a matriz associada ao operador dN_p é uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal são o máximo e o mínimo da forma quadrática II_p . Assim, o determinante de dN_p é o produto $(-k_1)(-k_2) = k_1 k_2$ das curvaturas principais, e o traço de dN_p é o negativo $-(k_1 + k_2)$ da soma das curvaturas principais. Vale ressaltar que, mudando a orientação da superfície, o determinante não muda, mas o traço muda de sinal.

Definição 1.28. *Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado **curvatura de Gauss** K de S em p e, o negativo da metade do traço de dN_p é chamado **curvatura média** H de S em p . Em termos de curvaturas principais, temos*

$$K = k_1 k_2 \text{ e } H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Definição 1.29. *Um ponto de uma superfície S é chamado*

1. **Elíptico**, se $\det(dN_p) > 0$ (i.e. $K > 0$).
2. **Hiperbólico**, se $\det(dN_p) < 0$ (i.e. $K < 0$).
3. **Parabólico**, se $\det(dN_p) = 0$ (i.e. $K = 0$), com $dN_p \neq 0$.
4. **Planar**, se $dN_p = 0$

Definição 1.30. *Se em $p \in S$, $k_1 = k_2$, então p é chamado um **ponto umbílico** de S . Em particular, os pontos planares ($k_1 = k_2 = 0$) são pontos umbílicos.*

Obteremos agora as expressões da diferencial da aplicação de Gauss e da segunda forma fundamental em um sistema de coordenadas locais.

Sejam $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização em um ponto p da superfície regular S compatível com a orientação N de S , ou seja,

$$N = \frac{\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v|},$$

e $\alpha(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S com $\alpha(0) = p$. Assim, podemos escrever o vetor tangente a $\alpha(t)$ em p como

$$\alpha' = u' \mathbf{X}_u + v' \mathbf{X}_v$$

e

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Note que N é unitário, isto é, $\langle N, N \rangle = 1$. Derivando essa igualdade em relação u resulta, $\langle N_u, N \rangle + \langle N, N_u \rangle = 0$, donde sai $\langle N_u, N \rangle = 0$. Da mesma forma, obtem-se $\langle N_v, N \rangle = 0$. Logo, N_u e N_v são ortogonais a N , ou seja, N_u e N_v pertencem a $T_p S$.

Dado $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ base de $T_p S$, N_u e N_v podem ser escritas da seguinte maneira

$$N_u = a_{11} \mathbf{X}_u + a_{21} \mathbf{X}_v$$

$$N_v = a_{12} \mathbf{X}_u + a_{22} \mathbf{X}_v.$$

E assim

$$\begin{aligned} dN(\alpha') &= (a_{11} \mathbf{X}_u + a_{21} \mathbf{X}_v)u' + (a_{12} \mathbf{X}_u + a_{22} \mathbf{X}_v)v' \\ &= (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{X}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{X}_v, \end{aligned}$$

que pode ser escrita como

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Logo, podemos concluir que, na base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$, dN é dada pela matriz $(a)_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Usando a definição de segunda forma fundamental e o fato da diferencial da aplicação de Gauss ser autoadjunta, temos

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{X}_u u' + \mathbf{X}_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u u', \mathbf{X}_u u' \rangle - \langle N_u u', \mathbf{X}_v v' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{X}_u u' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{X}_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u u', \mathbf{X}_u u' \rangle - \langle N_u u', \mathbf{X}_v v' \rangle - \langle N_u u', \mathbf{X}_v v' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{X}_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle (u')^2 - 2 \langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle u' v' - \langle N_v, \mathbf{X}_v \rangle (v')^2 \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle, \\ f &= -\langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle = -\langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle, \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{X}_v \rangle, \end{aligned}$$

são os chamados **coeficientes da segunda forma fundamental**.

Conhecendo esses coeficientes, vamos encontrar os valores a_{ij} da matriz (a_{ij}) de dN em função dos coeficientes da primeira e da segunda forma quadrática. Assim

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle a_{11}\mathbf{X}_u + a_{21}\mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u \rangle = a_{11} \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle + a_{21} \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F \\ -f &= \langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle = \langle a_{11}\mathbf{X}_u + a_{21}\mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = a_{11} \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle + a_{21} \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G \\ -f &= \langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle = \langle a_{12}\mathbf{X}_u + a_{22}\mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u \rangle = a_{12} \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle + a_{22} \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F \\ -g &= \langle N_v, \mathbf{X}_v \rangle = \langle a_{12}\mathbf{X}_u + a_{22}\mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = a_{12} \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle + a_{22} \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G \end{aligned}$$

Escrevendo na forma matricial

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade pela inversa da matriz dos coeficientes da primeira forma obtemos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

como

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

temos que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Usando os valores encontrados da matriz (a_{ij}) de dN e considerando que a curvatura Gaussiana é igual ao determinante de dN , podemos escrever

$$\begin{aligned}
K &= a_{11} \cdot a_{22} - (a_{21} \cdot a_{12}) \\
&= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \cdot \frac{fF - gE}{EG - F^2} - \left(\frac{eF - fE}{EG - F^2} \cdot \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \\
&= \frac{f^2F^2 - fgEF - efFG + egEG}{(EG - F^2)^2} - \frac{egF^2 - efFG - fgEF + f^2EG}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{f^2F^2 + egEG + egF^2 + f^2EG}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{-f^2(EG - F^2) + eg(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{(-f^2 + eg)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{eg - f^2}{(EG - F^2)^2}.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, sendo a curvatura média igual ao negativo da metade do traço de dN , temos

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{-eG + 2fF - gE}{EG - F^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right).
\end{aligned}$$

Portanto, mostramos que a curvatura Gaussiana e a curvatura média podem ser dadas em função de E, F, G, e, f, g que são os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental.

Vamos agora estudar o comportamento das derivadas segunda dos vetores $\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v$ e N em relação a u e v , isto é, $\mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_{vu}, \mathbf{X}_{vv}, N_u$ e N_v .

Seja $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização compatível com a orientação N de S . Considerando que é possível associar a cada ponto de $\mathbf{X}(U)$ um triedro natural dado pelos

vetores $\mathbf{X}_u$, $\mathbf{X}_v$ e N , podemos escrever as derivadas desses vetores na base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, N\}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{X}_v + L_1 N, \\ \mathbf{X}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{X}_v + L_2 N, \\ \mathbf{X}_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{X}_v + \bar{L}_2 N, \\ \mathbf{X}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{X}_v + L_3 N, \\ N_u &= a_{11} \mathbf{X}_u + a_{21} \mathbf{X}_v, \\ N_v &= a_{12} \mathbf{X}_u + a_{22} \mathbf{X}_v,\end{aligned}$$

onde os (a_{ij}) , $i, j = 1, 2$, foram obtidos anteriormente. Os coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$, são chamados **símbolos de Christoffel** em S na parametrização $\mathbf{X}$.

Determinaremos os valores dos símbolos de Christoffel em função de E, F, G e de suas derivadas.

Como $\mathbf{X}_{uv} = \mathbf{X}_{vu}$, temos que, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ e $L_2 = \bar{L}_2$. Tomando agora o produto interno das primeiras quatro igualdades de com N , obtemos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{X}_{uu}, N \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle \mathbf{X}_u, N \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \mathbf{X}_v, N \rangle + L_1 \langle N, N \rangle = L_2, \\ \langle \mathbf{X}_{uv}, N \rangle &= \Gamma_{12}^1 \langle \mathbf{X}_u, N \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle \mathbf{X}_v, N \rangle + L_2 \langle N, N \rangle = L_2, \\ \langle \mathbf{X}_{vu}, N \rangle &= \Gamma_{21}^1 \langle \mathbf{X}_u, N \rangle + \Gamma_{21}^2 \langle \mathbf{X}_v, N \rangle + \bar{L}_2 \langle N, N \rangle = \bar{L}_2, \\ \langle \mathbf{X}_{vv}, N \rangle &= \Gamma_{22}^1 \langle \mathbf{X}_u, N \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle \mathbf{X}_v, N \rangle + L_3 \langle N, N \rangle = L_3,\end{aligned}$$

Sabendo que $L_2 = \bar{L}_2$, reescrevemos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{X}_{uu}, N \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle \mathbf{X}_u, N \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \mathbf{X}_v, N \rangle + L_1 \langle N, N \rangle = L_2, \\ \langle \mathbf{X}_{uv}, N \rangle &= \Gamma_{12}^1 \langle \mathbf{X}_u, N \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle \mathbf{X}_v, N \rangle + L_2 \langle N, N \rangle = L_2 = \bar{L}_2, \\ \langle \mathbf{X}_{vv}, N \rangle &= \Gamma_{22}^1 \langle \mathbf{X}_u, N \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle \mathbf{X}_v, N \rangle + L_3 \langle N, N \rangle = L_3,\end{aligned}$$

Por outro lado, como N é ortogonal a $T_p S$, ou seja, $\langle N, \mathbf{X}_u \rangle = \langle N, \mathbf{X}_v \rangle = 0$, podemos derivar o produto interno em relação a u e a v , de modo que,

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \langle N, \mathbf{X}_u \rangle &= \langle \mathbf{X}_{uu}, N \rangle + \langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle = 0, \\ \frac{d}{dv} \langle N, \mathbf{X}_u \rangle &= \langle N, \mathbf{X}_{uv} \rangle + \langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle = 0, \\ \frac{d}{dv} \langle N, \mathbf{X}_v \rangle &= \langle N, \mathbf{X}_{vv} \rangle + \langle N_v, \mathbf{X}_v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\langle N, \mathbf{X}_{uu} \rangle &= -\langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle = e, \\ \langle \mathbf{X}_{uv}, N \rangle &= -\langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle = f, \\ \langle N, \mathbf{X}_{vv} \rangle &= -\langle N_v, \mathbf{X}_v \rangle = g.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} e &= L_1, \\ f &= L_2 = \bar{L}_2, \\ g &= L_3. \end{aligned}$$

Logo, podemos reescrever (as derivadas de $\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v$ e N na base $\{ \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, N \}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{X}_v + eN, \\ \mathbf{X}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{X}_v + fN, \\ \mathbf{X}_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{X}_v + fN, \\ \mathbf{X}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{X}_v + gN, \\ N_u &= a_{11} \mathbf{X}_u + a_{21} \mathbf{X}_v, \\ N_v &= a_{12} \mathbf{X}_u + a_{22} \mathbf{X}_v. \end{aligned}$$

Tomando o produto interno das primeiras igualdades das equações anteriores com $\mathbf{X}_u$ e $\mathbf{X}_v$, resulta,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_u \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle + e \langle N, \mathbf{X}_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F, \\ \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle + e \langle N, \mathbf{X}_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G, \\ \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_u \rangle &= \Gamma_{12}^1 \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u \rangle + f \langle N, \mathbf{X}_u \rangle = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F, \\ \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle &= \Gamma_{12}^1 \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle + f \langle N, \mathbf{X}_v \rangle = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G, \\ \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_u \rangle &= \Gamma_{22}^1 \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u \rangle + g \langle N, \mathbf{X}_u \rangle = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F, \\ \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_v \rangle &= \Gamma_{22}^1 \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle + g \langle N, \mathbf{X}_v \rangle = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Em contrapartida, derivando E, F e G em relação a u e v ,

$$\begin{aligned} E_u &= \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_u \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uu} \rangle = 2 \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_u \rangle, \\ E_v &= \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_u \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uv} \rangle = 2 \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_u \rangle, \\ F_u &= \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vu} \rangle, \\ F_v &= \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vv} \rangle, \\ G_u &= \langle \mathbf{X}_{vu}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vu} \rangle = 2 \langle \mathbf{X}_{vu}, \mathbf{X}_v \rangle, \\ G_v &= \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vv} \rangle = 2 \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_v \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_u \rangle &= \frac{1}{2}E_u, \\
\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle &= F_u - \frac{1}{2}E_v, \\
\langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_u \rangle &= \frac{1}{2}E_v, \\
\langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle &= \frac{1}{2}G_u, \\
\langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_u \rangle &= F_v - \frac{1}{2}G_u, \\
\langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_v \rangle &= \frac{1}{2}G_v.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Juntando as igualdades de 1.1 e 1.2 obtemos os seguintes sistemas de equações

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2}E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2}E_v, \end{cases}
\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2}E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2}G_u, \end{cases}
\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2}G_v. \end{cases}$$

A partir desse sistema é possível calcular os símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u G - 2F F_u - E_v F}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v G - F G_u}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2F_v G - G G_u - F G_u}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{2E F_u - E E_v - E_u F}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{E G_u - E_v F}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{E G_v - 2F F_v - F G_u}{2(EG - F^2)}.
\end{aligned}$$

Conhecendo os valores dos símbolos de Christoffel podemos expressar a curvatura Gaussiana em função desses valores. Isso significa que, a curvatura Gaussiana pode ser expressa em termos dos coeficientes da primeira forma quadrática e de suas derivadas. De fato, como $(\mathbf{X}_{uu})_v = (\mathbf{X}_{uv})_u$, temos

$$(\mathbf{X}_{uu})_v - (\mathbf{X}_{uv})_u = 0.$$

Isso implica que,

$$(\Gamma_{11}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{X}_v + eN)_v - (\mathbf{X}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{X}_v + fN)_u = 0.$$

Derivando e organizando adequadamente, resulta

$$\begin{aligned} & [(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u] \mathbf{X}_u + [(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u] \mathbf{X}_v + (e_v - f_u) N \\ & = (\Gamma_{12}^1) \mathbf{X}_{uu} + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \mathbf{X}_{uv} - \Gamma_{11}^2 \mathbf{X}_{vv} - eN_v + fN_u. \end{aligned}$$

Manipulando o segundo membro dessa igualdade, vemos que,

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{12}^1) \mathbf{X}_{uu} + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \mathbf{X}_{uv} - \Gamma_{11}^2 \mathbf{X}_{vv} - eN_v + fN_u \\ & = (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - ea_{12} + fa_{11}) \mathbf{X}_u \\ & + (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - ea_{22} + fa_{21}) \mathbf{X}_v \\ & + (e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2) N. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} & [(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u] \mathbf{X}_u + [(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u] \mathbf{X}_v + (e_v - f_u) N \\ & = (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - ea_{12} + fa_{11}) \mathbf{X}_u \\ & + (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - ea_{22} + fa_{21}) \mathbf{X}_v \\ & + (e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2) N \end{aligned}$$

Logo, igualando os coeficientes de $\mathbf{X}_v$ na última equação, obtemos

$$(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - ea_{22} + fa_{21},$$

isto é,

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = ea_{22} - fa_{21},$$

como

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2} \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2},$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 \\ & = e \left(\frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) + f \left(\frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ & = \frac{efF - egE - efF + f^2E}{EG - F^2} \\ & = -E \left(\frac{egE - f^2}{EG - F^2} \right) \\ & = -EK. \end{aligned}$$

Portanto, provamos que a curvatura Gaussiana K pode ser calculada como função dos símbolos de Christoffel em uma parametrização e de suas primeiras derivadas. Vale ressaltar que a importância desse resultado, segundo (CARMO, 2012), se deve ao fato de mostrar que a curvatura Gaussiana, cuja definição relacionada essencialmente à posição da superfície no espaço (segunda forma fundamental), não depende apenas da estrutura métrica da superfície (primeira forma fundamental). Nota-se ainda que o conhecimento da primeira e da segunda formas fundamentais determina localmente a superfície.

Para finalizarmos esse capítulo apresentaremos algumas definições e proposições sobre as geodésicas, um dos conceitos mais fundamentais da geometria intrínseca.

Antes de definirmos curva geodésica, faz-se necessário conceituar derivada covariante de um campo de vetores. Onde um **campo de vetores tangentes** em um conjunto aberto $U \subset S$ de uma superfície regular S é uma correspondência w que associa a cada $p \in U$ um vetor $w(p) \in T_p S$. O campo de vetores é diferenciável em p , se para alguma parametrização $\mathbf{X}(u, v)$ em p , as componentes a e b de $w = a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v$ na base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ são funções diferenciáveis em p . Se o campo de vetores w é diferenciável para todo $p \in U$, então, dizemos que w é diferenciável em U .

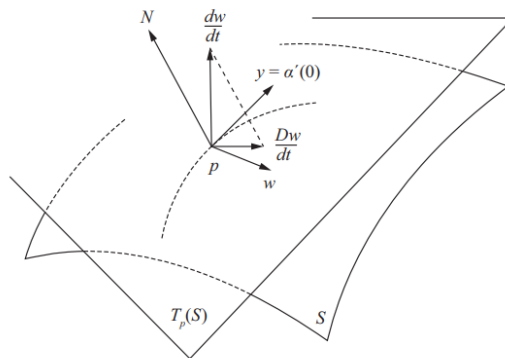
Definição 1.31. *Sejam w um campo diferenciável de vetores em um conjunto aberto $U \subset S$, $p \in U$ e $y \in T_p S$. Considere uma curva parametrizada*

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$$

*com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = y$ e seja $w(t), t \in (-\epsilon, \epsilon)$, a restrição do campo de vetores w à curva α . O vetor obtido pela projeção de $(dw/dt)(0)$ sobre o plano $T_p S$ é chamada **derivada covariante** em p do campo de vetores w em relação ao vetor y e é denotada por (Ver Figura 1.14)*

$$\left(\frac{Dw}{dt} \right) (0).$$

Figura 1.14 – Derivada covariante



Fonte: (CARMO, 2016)

Vamos obter uma expressão em termos de uma parametrização $\mathbf{X}(u, v)$ de S em p para a derivada covariante. Sejam $\mathbf{X}(u(t), v(t)) = \alpha(t)$ a expressão da curva α e

$$\begin{aligned} w(t) &= a(u(t), v(t))\mathbf{X}_u + b(u(t), v(t))\mathbf{X}_v \\ &= a(t)\mathbf{X}_u + b(t)\mathbf{X}_v \end{aligned}$$

a expressão de $w(t)$ na parametrização $\mathbf{X}(u(t), v(t))$. Derivando $w(t)$ em relação a t , e usando as equações de

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= a(\mathbf{X}_{uu}u' + \mathbf{X}_{uv}v') + b(\mathbf{X}_{uv}u' + \mathbf{X}_{vv}v') + a'\mathbf{X}_u + b'\mathbf{X}_v \\ &= a[(\Gamma_{11}^1\mathbf{X}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{X}_v + eN)u'(\Gamma_{12}^1\mathbf{X}_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{X}_v + fN)v'] \\ &\quad + b[(\Gamma_{21}^1\mathbf{X}_u + \Gamma_{21}^2\mathbf{X}_v + fN)u' + (\Gamma_{22}^1\mathbf{X}_u + \Gamma_{22}^2\mathbf{X}_v + gN)v'] \\ &\quad + a'\mathbf{X}_u + b'\mathbf{X}_v. \end{aligned}$$

Como Dw/dt é a componente de dw/dt no plano tangente, temos,

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} &= a[(\Gamma_{11}^1\mathbf{X}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{X}_v)u'(\Gamma_{12}^1\mathbf{X}_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{X}_v)v'] \\ &\quad + b[(\Gamma_{21}^1\mathbf{X}_u + \Gamma_{21}^2\mathbf{X}_v)u' + (\Gamma_{22}^1\mathbf{X}_u + \Gamma_{22}^2\mathbf{X}_v)v'] \\ &\quad + a'\mathbf{X}_u + b'\mathbf{X}_v. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos, resulta

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} &= (a' + \Gamma_{11}^1au' + \Gamma_{12}^1av' + \Gamma_{21}^1bu' + \Gamma_{22}^1bv')\mathbf{X}_u \\ &\quad + (b' + \Gamma_{11}^2au' + \Gamma_{12}^2av' + \Gamma_{21}^2bu' + \Gamma_{22}^2bv')\mathbf{X}_v. \end{aligned}$$

Em outras palavras, a derivada covariante depende apenas do vetor $(u', v') = y$ e não da curva α , sendo expressa através dos símbolos de Christoffel, e consequentemente, pela primeira forma fundamental. Portanto, a derivada covariante é um conceito intrínseco da superfície.

A definição de derivada covariante pode ser estendida a um campo de vetores que esteja definido apenas em pontos de uma curva parametrizada. Para obtermos a derivada covariante de um campo ao longo de $\alpha : I \rightarrow S$ em $t \in I$ considera-se a derivada usual $(dw/dt)(t)$ de w em t e projeta-se esse vetor ortogonalmente sobre o plano tangente $T_{\alpha(t)}S$.

Definição 1.32. Um campo de vetores w ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ é chamado **paralelo** se

$$\frac{Dw}{dt} = 0,$$

para todo $t \in I$.

Proposição 1.33. Sejam v e w campos de vetores paralelos ao longo de $\alpha : I \rightarrow S$. Então $\langle v(t), w(t) \rangle$ é constante. Em particular, $|v(t)|$ e $|w(t)|$ são constantes.

Demonstração: Dizer que o campo w é paralelo ao longo de α significa que (dw/dt) é normal ao plano que é tangente à superfície em $\alpha(t)$, ou seja,

$$\langle v(t), w'(t) \rangle = 0, \quad t \in I.$$

Por outro lado, sendo v paralelo ao longo de α , temos que dv/dt também é normal ao plano tangente em $\alpha(t)$, isto é,

$$\langle v'(t), w(t) \rangle = 0, \quad t \in I.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), w(t) \rangle = \langle v'(t), w(t) \rangle + \langle v(t), w'(t) \rangle = 0.$$

Logo, $\langle v(t), w(t) \rangle$ é constante.

Para mostrarmos que $|v(t)|$ e $|w(t)|$ são constantes, lembremos que

$$|v(t)| = \frac{\langle v(t), v(t) \rangle}{\sqrt{\langle v(t), v(t) \rangle}} \quad \text{e} \quad |w(t)| = \frac{\langle w(t), w(t) \rangle}{\sqrt{\langle w(t), w(t) \rangle}},$$

além disso, como v e w são campos de vetores paralelos, temos que, $\langle v(t), v'(t) \rangle = 0$ e $\langle w(t), w'(t) \rangle = 0$. Assim,

$$\frac{d}{dt} |v(t)| = \frac{2 \langle v(t), v'(t) \rangle - \frac{2 \langle v(t), v'(t) \rangle}{2 \sqrt{\langle v(t), v(t) \rangle}}}{\langle v(t), v(t) \rangle} = 0$$

e

$$\frac{d}{dt} |w(t)| = \frac{2 \langle w(t), w'(t) \rangle - \frac{2 \langle w(t), w'(t) \rangle}{2 \sqrt{\langle w(t), w(t) \rangle}}}{\langle w(t), w(t) \rangle} = 0.$$

Portanto, concluímos que, $|v(t)|$ e $|w(t)|$ são constantes. ■

Definição 1.34. Uma curva parametrizada, não constante, $\alpha : I \rightarrow S$ é chamada **geodésica** em $t \in S$ se o seu campo de vetores tangentes $\alpha'(t)$ é paralelo ao longo de α em t , ou seja,

$$\frac{D\alpha'(t)}{dt} = 0.$$

Dizemos que α é uma geodésica parametrizada se é geodésica para todo $t \in I$.

A Proposição 1.33 garante que se α é uma geodésica então $|\alpha'(t)|$ é constante. De outro modo, o parâmetro t de uma geodésica parametrizada α é proporcional ao comprimento de arco de α .

Observa-se que uma curva $C \subset S$ é uma geodésica se e só se sua normal principal em cada $p \in C$ é paralela à normal de S em p .

Exemplo 1.35. *Os grandes círculos de uma esfera S^2 são geodésicas. Com efeito, os grandes círculos C são obtidos intersectando a esfera com o plano que passa pelo centro O da esfera. A normal principal em um ponto $p \in C$ está na direção da reta que conecta p a O pois C é um círculo de centro O que é a mesma direção da normal da esfera. Assim, α é uma geodésica.*

Com o intuito de definirmos curvatura geodésica, apresentaremos o conceito de valor algébrico da derivada covariante. Esse último conceito é importante pelo fato da curvatura geodésica, que definiremos, mudar de sinal com a mudança de orientação de S .

Definição 1.36. *Seja w um campo diferenciável e unitário de vetores ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ sobre uma superfície orientada S . Como $w(t), t \in I$ é um campo de vetores unitário, $(dw/dt)(t)$ é normal a $w(t)$, e portanto*

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \wedge w(t)).$$

O número real $\lambda = \lambda(t)$, denotado por $[Dw/dt]$ é chamado **valor algébrico** da derivada covariante de w em t .

Observa-se que, o sinal de $[Dw/dt]$ depende da orientação de S e que

$$[Dw/dt] = \langle dw/dt, N \wedge w \rangle.$$

Definição 1.37. *Seja C uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada S , e seja $\alpha(s)$ uma parametrização de C , em uma vizinhança $p \in S$ pelo comprimento de arco s . O valor algébrico $[D\alpha'(s)/ds] = k_g$ da derivada covariante de $\alpha'(s)$ é chamada **curvatura geodésica** de C em p .*

Da Definição 1.37, podemos afirmar que, as curvas geodésicas são curvas regulares com curvatura geodésica nula.

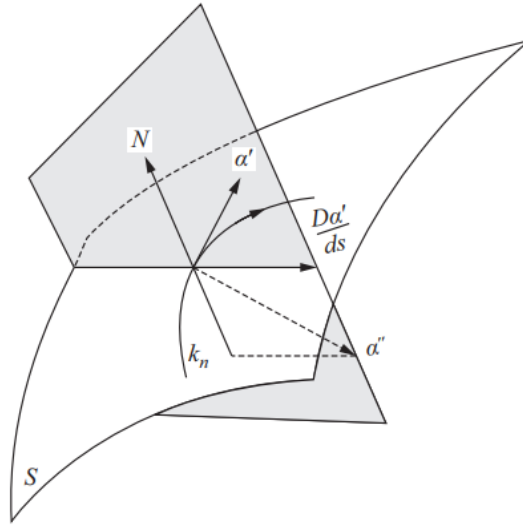
O valor absoluto da curvatura geodésica k_g de C em p é o valor absoluto da componente tangencial do vetor $\alpha''(s) = kn$ onde k é a curvatura de C em p e n é o vetor normal de C em p . Como o valor absoluto da componente normal do vetor kn é o valor absoluto da curvatura normal k_n de $C \subset S$ em p , podemos escrever

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

Considerando que $k_n = k \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre N e n , então

$$\begin{aligned} k^2 &= k_g^2 + k_n^2 \Rightarrow k^2 = k_g^2 + (k^2 \cos^2 \theta) \\ &\Rightarrow k_g^2 = k^2(1 - \cos^2 \theta) \\ &\Rightarrow k_g^2 = k^2 \sin^2 \theta \\ &\Rightarrow k_g = \pm \sin \theta. \end{aligned}$$

Figura 1.15 – Curvaturas



Fonte: (CARMO, 2016)

onde, o sinal de k_g depende das orientações de S^2 e de C .

Enunciaremos agora um lema que relaciona a derivada de dois campos de vetores unitários ao longo de uma curva com a variação do ângulo formado por eles. Não demonstraremos o lema, mas usaremos tal resultado na demonstração da proposição que apresentaremos logo em seguida.

Lema 1.38. *Sejam v e w dois campos diferenciáveis de vetores ao longo da curva $\alpha : I \rightarrow S$, com $|v(t)| = |w(t)| = 1$, $t \in I$. Então,*

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] - \left[\frac{Dv}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

onde, φ é uma função diferenciável que determina o ângulo de $v(t)$ e $w(t)$ na orientação de S .

Antes de enunciarmos a última proposição desse capítulo, daremos uma consequência do Lema 1.38

Sejam C uma curva regular orientada em S , $\alpha(s)$ uma parametrização pelo comprimento de arco s de C em p e $v(s)$ um campo paralelo ao longo de $\alpha(s)$. Assim, tomando $w(s) = \alpha'(s)$, temos

$$k_g = \left[\frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Isso significa que, a curvatura geodésica é a taxa de variação do ângulo que a tangente à curva faz com uma direção paralela ao longo da curva.

Proposição 1.39. *Sejam $\mathbf{X}(u, v)$ uma parametrização ortogonal (isto é, $F = 0$) de uma vizinhança de uma superfície orientada S , e $w(t)$ um campo de vetores unitário e diferenciável ao longo da curva $\mathbf{X} = (u(t), v(t))$. Então,*

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde $\varphi(t)$ é o ângulo de $\mathbf{X}_u$ a $w(t)$ na orientação dada e, G_u e E_v são as derivadas dos coeficientes da primeira forma fundamental G e E em relação a u e v , respectivamente.

Demonstração: Sejam $e_1 = \frac{\mathbf{X}_u}{\sqrt{E}}$ e $e_2 = \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}}$ vetores unitários tangentes às curvas coordenadas. Note que, $e_1 \wedge e_2 = N$, onde N é a orientação dada de S . Pelo Lema 1.38, temos

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \left[\frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde $e_1(t) = e_1(u(t), v(t))$ é o campo e_1 restrito à curva $\mathbf{X}(u(t), v(t))$. Mas,

$$\left[\frac{De_1}{dt} \right] = \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \wedge e_1 \right\rangle = \left\langle \frac{de_1}{dt}, e_2 \right\rangle = \langle (e_1)_u, e_2 \rangle \frac{du}{dt} + \langle (e_1)_v, e_2 \rangle \frac{dv}{dt}.$$

Note que,

$$\begin{aligned} \langle (e_1)_u, e_2 \rangle &= \left\langle \left(\frac{\mathbf{X}_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\mathbf{X}_{uu}\sqrt{E} - \mathbf{X}_u(\sqrt{E})_u}{E}, \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\mathbf{X}_{uu}\sqrt{E} - \frac{\mathbf{X}_u E_u}{2\sqrt{E}}}{E}, \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\frac{2\mathbf{X}_{uu}E - \mathbf{X}_u E_u}{2\sqrt{E}}}{E}, \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{2\mathbf{X}_{uu}E - \mathbf{X}_u E_u}{2E\sqrt{E}}, \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \frac{\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle}{\sqrt{EG}} - \frac{E_u \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle}{2E\sqrt{EG}} \\ &= \frac{\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle}{\sqrt{EG}}, \end{aligned}$$

do mesmo modo,

$$\begin{aligned}
\langle (e_1)_v, e_2 \rangle &= \left\langle \left(\frac{\mathbf{X}_u}{\sqrt{E}} \right)_v, \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\mathbf{X}_{uv}\sqrt{E} - \mathbf{X}_u(\sqrt{E})_v}{E}, \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\mathbf{X}_{uv}\sqrt{E} - \frac{\mathbf{X}_u E_v}{2\sqrt{E}}}{E}, \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\frac{2\mathbf{X}_{uv}E - \mathbf{X}_u E_v}{2\sqrt{E}}}{E}, \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{2\mathbf{X}_{uv}E - \mathbf{X}_u E_v}{2E\sqrt{E}}, \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
&= \frac{\langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle}{\sqrt{EG}} - \frac{E_v \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle}{2E\sqrt{EG}} \\
&= \frac{\langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle}{\sqrt{EG}}.
\end{aligned}$$

Como $F = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0$, então derivando em relação a u e a v , obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vu} \rangle &= 0 \\
\Rightarrow \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle &= -\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vu} \rangle \\
\Rightarrow \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle &= -\frac{1}{2}E_v
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vv} \rangle &= 0 \\
\Rightarrow \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle &= -\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vv} \rangle \\
\Rightarrow \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_u \rangle &= -(F_u - \frac{1}{2}G_u) \\
\Rightarrow \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_u \rangle &= \frac{1}{2}G_u.
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\langle (e_1)_u, e_2 \rangle = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \quad \text{e} \quad \langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}.$$

Logo, rescrevendo a equação temos

$$\begin{aligned}
\left[\frac{De_1}{dt} \right] &= \langle (e_1)_u, e_2 \rangle \frac{du}{dt} + \langle (e_1)_v, e_2 \rangle \frac{dv}{dt} \\
&= \left(-\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right) \frac{dv}{dt} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}.$$

■

Vale evidenciar que, se $w = \alpha'(s)$, então

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.3)$$

2 O Teorema de Gauss-Bonnet e aplicações

Abordaremos nesse capítulo o Teorema de Gauss-Bonnet que segundo Lima, é um dos mais belos e significativos resultados da Geometria Diferencial (LIMA, 2016).

Uma das mais importantes características do Teorema de Gauss-Bonnet é o fato de apresentar uma surpreendente relação entre a topologia de uma superfície compacta e a integral dupla de sua curvatura Gaussiana: a curvatura total de uma superfície regular compacta S é um invariante topológico. De modo preciso, vale a igualdade

$$\int \int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S),$$

onde $\chi(S)$ é chamada **característica de Euler-Poincaré** de S .

Na primeira seção, apresentaremos alguns fatos importantes para a compreensão do Teorema de Gauss-Bonnet, que será expresso em seguida na sua versão local. Para a versão global, introduziremos algumas proposições significativas.

Na segunda seção, daremos algumas das aplicações do Teorema de Gauss-Bonnet.

Por questão de objetividade, omitiremos as demonstrações dos resultados topológicos citados e utilizados neste capítulo.

2.1 O Teorema de Gauss-Bonnet

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Diz-se que S é **conexa** se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por uma curva contínua contida em S .

De agora em diante, trabalharemos apenas com superfícies conexas.

Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ uma aplicação contínua de um intervalo fechado $[0, l]$ sobre uma superfície regular S . Dizemos que α é uma **curva parametrizada simples, fechada e regular por partes**, se:

1. $\alpha(0) = \alpha(l)$
2. Se $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in [0, l)$, então $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$
3. Existe uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = l,$$

de $[0, l]$ tal que α é diferenciável e regular em cada $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k$.

A curva α , assim definida, é caracterizada por ser uma curva fechada (condição 1) sem auto-interseções (condição 2) e que deixa de ter uma reta tangente bem definida apenas em um número finito de pontos (condição 3).

Os pontos $\alpha(t_i), i = 0, \dots, k$, são chamados de **vértices** de α e os traços $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ são chamados **arcos regulares** de α . Dizemos que o traço $\alpha([0, l])$ de α é uma **curva fechada simples regular por partes**.

Pela condição de regularidade, advinda do fato de α ser formada de curvas regulares, para cada vértice $\alpha(t_i)$ existem

1. o limite à esquerda, ou seja, para $t < t_i$,

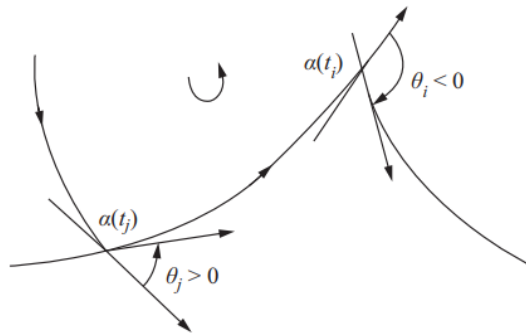
$$\lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t) = \alpha'(t_i^-) \neq 0,$$

2. o limite à direita, ou seja, para $t > t_i$,

$$\lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t) = \alpha'(t_i^+) \neq 0,$$

Suponha agora que S está orientada e seja $|\theta_i|$, com $0 < |\theta_i| \leq \pi$, a menor determinação do ângulo de $\alpha'(t_i^-)$ a $\alpha'(t_i^+)$. Se $|\theta_i| \neq \pi$, o sinal de θ_i é o mesmo do determinante $(\alpha'(t_i^-), \alpha'(t_i^+), N)$, isso significa que se o vértice $\alpha(t_i)$ não é uma cúspide (Ver Figura 2.1), o sinal de θ_i é dado pela orientação de S . O ângulo com sinal θ_i , com $-\pi < \theta_i < \pi$, é chamado **ângulo externo** no vértice $\alpha(t_i)$.

Figura 2.1 – Sinal do ângulo externo de uma curva regular por partes que não é uma cúspide

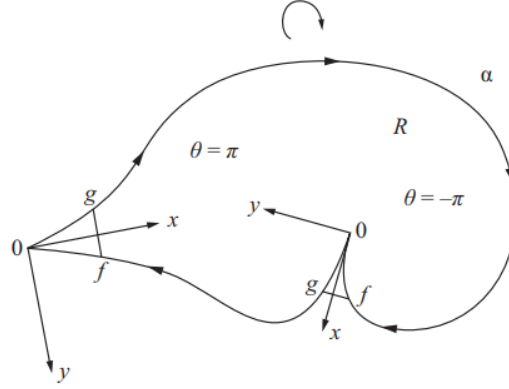


Fonte: (CARMO, 2016)

No caso em que o vértice é uma cúspide, ou seja, $|\theta_i| = \pi$, escolhemos o sinal de θ_i do seguinte modo. Usando uma parametrização então devemos analisar o caso em que $\alpha \subset \mathbb{R}^2$, com $\alpha(t_i) = 0$, $\alpha'(t_i^-)$ na parte negativa do eixo Ox e $\alpha'(t_i^+)$ na parte positiva do eixo Ox . Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o traço de α restrito a $(t_i - \epsilon, t_i)$ é o gráfico de uma função $f : (0, \epsilon') \rightarrow \mathbb{R}$ e o traço de α restrito a $(t_i, t_i + \epsilon)$ é o gráfico de uma função

$g : (0, \epsilon'') \rightarrow \mathbb{R}$. A condição 2 dada para uma curva parametrizada regular simples, fechada e regular garante que $f(x) > g(x)$ ou $f(x) < g(x)$, para todo x onde f e g estão definidas. Se $f(x) > g(x)$, defini-se $\theta_i = \pi$, mas, se $f(x) < g(x)$, defini-se $\theta_i = -\pi$ (Ver Figura 2.2).

Figura 2.2 – Sinal do ângulo externo no caso de uma cúspide.



Fonte: (CARMO, 2016)

Sejam

1. $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização compatível com a orientação de S e U homeomorfo a um disco aberto no plano.
2. $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbf{X}(U) \subset S$ uma curva parametrizada simples, fechada e regular por partes, com vértices $\alpha(t_i)$ e ângulos externos θ_i , $i = 0, \dots, k$
3. $\varphi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis que medem a cada $t \in [t_i, t_{i+1}]$, o ângulo positivo de $\mathbf{X}_u$ a $\alpha'(t)$.

Teorema 2.1 (do Índice de Rotação). *Com a notação acima*

$$\sum_{i=0}^k (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi,$$

onde o sinal positivo ou negativo depende da orientação de α .

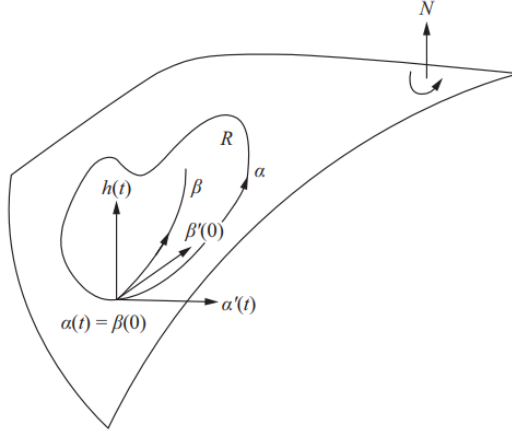
Em outras palavras, o Teorema do Índice de Rotação afirma que a variação total do ângulo do vetor tangente a α com uma dada direção mais os “saltos” nos vértices é igual a 2π ou -2π , dependendo da orientação da curva.

Introduziremos agora algumas terminologias importantes ao nosso estudo.

Seja S uma superfície orientada. Uma região $R \subset S$ (união de um conjunto aberto conexo com sua fronteira) é uma **região simples** se R é homeomorfa a um disco e a fronteira ∂R de R é o traço de uma curva parametrizada simples, fechada e regular por partes $\alpha : I \rightarrow S$. Dizemos que α está orientada positivamente se para cada $\alpha(t)$,

pertencente a um arco regular, a base ortogonal positiva $\{\alpha'(t), h(t)\}$ satisfaz a condição de que $h(t)$ “aponta para dentro” de R ; ou seja, para qualquer curva $\beta : I \rightarrow R$ com $\beta(0) = \alpha(t)$ e $\beta'(0) \neq \alpha'(t)$, temos $\langle \beta'(0), h(t) \rangle > 0$. Intuitivamente, isso significa que ao andarmos pela curva α na direção positiva com a cabeça apontada para N , a região R estará à nossa esquerda (Ver Figura 2.3).

Figura 2.3 – Uma curva da fronteira orientada positivamente



Fonte: (CARMO, 2016)

Considere agora $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S compatível com sua orientação e $R \subset \mathbf{X}(U)$ uma região limitada de S . Se f é uma função diferenciável em S , então pode-se afirmar que

$$\int \int_{\mathbf{X}^{-1}(R)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

independe da parametrização $\mathbf{X}$ escolhida na classe de orientação de $\mathbf{X}$. Esta integral tem um significado geométrico e é chamado **integral de f sobre a região R** , sendo geralmente denotada por

$$\int \int_R f \, d\sigma.$$

Teorema 2.2 (Teorema de Gauss-Bonnet - versão local). *Seja $\mathbf{X} : U \rightarrow S$ uma parametrização ortogonal (i.e., $F = 0$) de uma superfície orientada S , onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é homeomorfo a um disco aberto e $\mathbf{X}$ é compatível com a orientação de S . Sejam $R \subset \mathbf{X}(U)$ uma região simples de S e $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $\partial R = \alpha(I)$. Suponha que α está orientada positivamente, parametrizada pelo comprimento de arco s e sejam $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$ e $\theta_0, \dots, \theta_k$, respectivamente, os vértices e os ângulos externos de α . Então,*

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) \, ds + \int \int_R K \, d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi,$$

onde k_g é a curvatura geodésica dos arcos regulares de α e K é a curvatura Gaussiana de S .

Demonstração: Sejam $u = u(s)$, $v = v(s)$ a expressão de α na parametrização $\mathbf{X}$. Vimos no capítulo 1, seção 2, que da Proposição (1.39) obtemos a equação 1.3, isto é,

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi}{ds}, \quad (2.1)$$

onde $\varphi_i = \varphi_i(s)$ é uma função diferenciável que mede o ângulo positivo de $\mathbf{X}_u$ a $\alpha'(s)$ em $[s_i, s_{i+1}]$. Integrando a equação (2.1) em todos os intervalos $[s_i, s_{i+1}]$ e somando os resultados, obtemos

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds. \quad (2.2)$$

Agora utilizando o teorema de Gauss-Green no plano uv , o qual afirma que se $P(u, v)$ e $Q(u, v)$ são funções diferenciáveis em uma região simples $A \subset \mathbb{R}^2$, cuja fronteira é dada por $u = u(s)$, $v = v(s)$, então

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(P \frac{du}{ds} + Q \frac{dv}{ds} \right) ds = \int \int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) dudv,$$

podemos escrever

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \int \int_{\mathbf{X}^{-1}} \left\{ \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v - \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_v \right\} dudv + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds. \quad (2.3)$$

Como $\mathbf{X}$ é uma parametrização ortogonal (i.e., $F = 0$), então

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}$$

(a equação acima é dada como exercício na página 283 em (CARMO, 2012)). Assim,

$$\int \int_{\mathbf{X}^{-1}} \left\{ \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v - \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_v \right\} dudv = - \int \int_{\mathbf{X}^{-1}(R)} K \sqrt{EG} dudv = - \int \int_R K d\sigma. \quad (2.4)$$

Por outro lado, pelo Teorema do Índice de Rotação,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds = \sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)) = \pm 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i. \quad (2.5)$$

Logo, substituindo as expressões (2.4) e (2.5) na igualdade (2.3), obtemos

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = - \int \int_R K d\sigma \pm 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i.$$

Como a curva α está orientada positivamente, o sinal da expressão (2.5) é positivo.

Portanto,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi.$$

■

Para globalizar o teorema de Gauss-Bonnet é necessário mais alguns preliminares topológicos.

Seja S uma superfície regular, dizemos que uma região (conexa) $R \subset S$ é **regular** se R é compacta e sua fronteira ∂R é uma união finita de curvas fechadas, simples e regulares por partes que não se intersectam. Por conveniência, considera-se uma superfície compacta como uma região regular, cuja fronteira é o conjunto vazio.

Quando uma região simples tem apenas três vértices com ângulos externos $\theta_i \neq 0, i = 1, 2, 3$, então, dizemos que é a região é um **triângulo**.

Uma **triangulação** de uma região regular $R \subset S$ é uma família finita $\mathcal{T}$ de triângulos $T_i, i = 1, \dots, n$, tal que

1. $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$.
2. Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset, i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou um vértice comum de T_i e T_j .

Dada uma triangulação $\mathcal{T}$ de um região regular $R \subset S$ de uma superfície regular S , denotaremos por F o número de triângulos (faces), por E o número de lados (arestas) e por V o número de vértices da triangulação. O número

$$F - E + V = \chi$$

é chamado **característica de Euler-Poincaré** da triangulação.

Em posse dessas terminologias, podemos enunciar os seguintes resultados topológicos.

Proposição 2.3. *Toda região regular de uma superfície regular admite uma triangulação.*

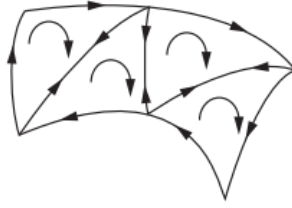
Proposição 2.4. *Seja S uma superfície orientada e $\{\mathbf{X}_\alpha\}, \alpha \in A$, uma família de parametrizações compatíveis com a orientação de S . Então existe uma triangulação $\mathcal{T}$ de R tal que todo $T \in \mathcal{T}$ está contido em alguma vizinhança coordenada da família $\{\mathbf{X}_\alpha\}$. Além disso, se a fronteira de todo triângulo de $\mathcal{T}$ for orientada positivamente, triângulos adjacentes determinam orientações opostas na arestas comum a eles (Ver Figura 2.4).*

Proposição 2.5. *Se $R \subset S$ é uma região regular de uma superfície S , a característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação de R . Convém, portanto denotá-la por $\chi(R)$.*

Em outras palavras, a Proposição 2.5 afirma que a característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico de uma região regular R .

Nota-se que este invariante possibilita uma classificação topológica das superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$. A título de exemplos temos que a característica de Euler-Poincaré da

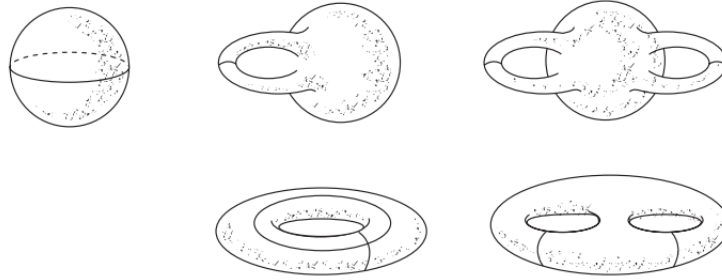
Figura 2.4 – Orientação de uma triangulação



Fonte: (CARMO, 2016)

esfera é 2, a do toro (esfera com uma "alça") é zero, a do 2-toro (esfera com duas alças) é -2 , em geral, de um n -toro (esfera com n alças) é $-2(n - 1)$ (Ver Figura 2.5).

Figura 2.5 – Esfera, toro (esfera com uma alça) e 2-toro (esfera com duas alças)



Fonte: (CARMO, 2016)

Proposição 2.6. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta e conexa. Então um dos valores $2, 0, -2, \dots, -2n, \dots$ é assumido pela característica de Euler-Poincaré $\chi(S)$. Além disso, se $S' \subset \mathbb{R}^3$ é outra superfície compacta e conexa e $\chi(S) = \chi(S')$, então S é homeomorfa a S' .*

Em outros termos, toda superfície compacta e conexa $S \subset \mathbb{R}^3$ é homeomorfa a uma esfera com um número g de alças. O número

$$g = \frac{2 - \chi(S)}{2}$$

é chamado **gênero** de S .

Sejam $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada S e $\mathcal{T}$ uma triangulação de R tal que todo triângulo $T_j \in \mathcal{T}, j = 1, \dots, k$, esteja contido em uma vizinhança coordenada $\mathbf{X}_j(U_j)$ de uma família de parametrizações $\{\mathbf{X}_\alpha\}, \alpha \in A$, compatível com a orientação de S . Seja f uma função diferenciável em S .

Proposição 2.7. *Com a notação acima, a soma*

$$\sum_{j=1}^k \int \int_{\mathbf{X}_j^{-1}(T_j)} f(u_j, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2} du_j dv_j$$

não depende da triangulação $\mathcal{T}$ nem da família $\{\mathbf{X}_\alpha\}$ de parametrizações de S .

Esta soma tem um significado geométrico e é chamada a integral de f sobre a região regular R . É frequentemente denotada por

$$\int \int_R f d\sigma.$$

Teorema 2.8 (Teorema de Gauss-Bonnet versão global). *Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada e sejam $C_1, \dots, C_n$ as curvas fechadas, simples e regulares por partes que formam a fronteira ∂R de R . Suponha que cada C_i é orientada positivamente e sejam $\theta_1, \dots, \theta_p$ todos os ângulos externos das curvas $C_1, \dots, C_n$. Então*

$$\sum_{i=1}^k \int_{C_i} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi\chi(R),$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i e a integral sobre C_i significa a soma das integrais em todos os arcos regulares de C_i .

Demonstração: Considere uma triangulação $\mathcal{T}$ da região R tal que qualquer triângulo T_j esteja contido em uma vizinhança coordenada da família de parametrizações ortogonais compatíveis com a orientação de S . A existência de tal triangulação é garantida pela Proposição 2.4. Além disso, se a fronteira de cada triângulo de $\mathcal{T}$ for orientada positivamente, então obtemos orientações opostas nas arestas que são comuns a triângulos adjacentes.

Aplicando a versão local do Teorema de Gauss-Bonnet a cada triângulo de $\mathcal{T}$, somando os resultados e, acrescentado a isso a Proposição 2.7 e o fato de que cada aresta “interior” é contada duas vezes com orientações opostas, obtemos

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{j,k=1}^F \theta_{jk} = 2\pi F, \quad (2.6)$$

onde F denota o número de triângulos de $\mathcal{T}$ e $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$ são os ângulos externos do triângulo T_j .

Seja φ_{jk} os ângulos internos do triângulo T_j , ou seja, $\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$. Assim,

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = \sum_{j,k} \pi - \sum_{j,k} \varphi_{jk} = 3\pi F - \sum_{j,k} \varphi_{jk}. \quad (2.7)$$

Para darmos continuidade, faremos uso das seguintes notações:

- E_e = número de arestas externas de $\mathcal{T}$.
- E_i = número de arestas internas de $\mathcal{T}$.
- V_e = número de vértices externos de $\mathcal{T}$.

- V_i = números de vértices interno de $\mathcal{T}$.

Como as curvas C_i são fechadas, temos $E_e = V_e$. Além disso,

$$3F = 2E_i + E_e.$$

Observamos que a igualdade acima pode ser provada por indução e deve ser levado em consideração três casos. Provaremos um dos casos.

Primeiramente, consideremos uma triangulação com apenas um triângulo, ou seja, quando $F = 1$, $E_e = 3$ e $E_i = 0$. Logo $3F = 2E_i + E_e$ (Ver Figura 2.6).

Agora, suponha que em uma triangulação $\mathcal{T}$ com k triângulos, isto é, $F = k$ valha $3F = 2E_i + E_e$. Acrescentemos um triângulo à essa triangulação introduzindo duas arestas que partem, cada uma, de dois vértices externos (V_e) consecutivos e se encontram em ponto. Obtemos então uma nova triangulação denotada por $\mathcal{T}'$. Sendo F' , E_i' e E_e' o número de faces, de arestas internas e de arestas externas de $\mathcal{T}'$, vemos que $F' = F + 1$, $E_i' = E_i + 1$ e $E_e' = E_e + 1$ (nota-se que uma aresta externa em $\mathcal{T}$ torna-se uma aresta interna em $\mathcal{T}'$ e conta-se aquelas duas arestas externas introduzidas). Assim, usando o a hipótese de indução, podemos escrever

$$\begin{aligned} 2E_i' + E_e' &= 2(E_i + 1) + (E_e + 1) \\ &= 2E_i + 2 + E_e + 1 \\ &= (2E_i + E_e) + 3 \\ &= 3F + 3 \\ &= 3(F + 1) \\ &= 3F'. \end{aligned}$$

ou seja, $3F' = 2E_i' + E_e'$.

Portanto, por indução, vimos que $3F = 2E_i + E_e$.

Figura 2.6 – Triangulação quando $F = 1$



Fonte: (ARAÚJO, 2021)

Desse modo, reescrevendo a equação (2.7), temos

$$\sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j,k} \varphi_{jk}.$$

Observe que os vértices externos podem ser vértices de alguma curva C_i ou vértices introduzidos pela triangulação. Assim, escrevemos $V_e = V_{ec} + V_{et}$, onde V_{ec} é o número de vértices das curvas C_i e V_{et} é o número de vértices externos da triangulação que não são vértices de alguma das curvas C_i .

Como a soma dos ângulos em torno de cada vértice interno é 2π e considerando que $E_e = V_e$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} &= 2\pi E_i + \pi E_e - \left(2\pi V_i + \pi V_{et} + \sum_{l=1}^p (\pi - \theta_l) \right) \\
&= 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_{l=1}^p (\pi - \theta_l) + (\pi E_e) - (\pi E_e) \\
&= 2\pi E_i + \pi E_e + (\pi E_e) - 2\pi V_i - \pi V_{et} - (\pi V_e) - \sum_{l=1}^p (\pi - \theta_l) \\
&= 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \pi V_e - \pi V_{ec} + \sum_{l=1}^p \theta_l \\
&= 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi(V_{ec} - V_{et}) + \sum_{l=1}^p \theta_l \\
&= 2\pi(E_i + E_e) - 2\pi(V_i + V_e) + \sum_{l=1}^p \theta_l \\
&= 2\pi E - 2\pi V + \sum_{l=1}^p \theta_l.
\end{aligned}$$

Logo, substituindo a última expressão na igualdade (2.6), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g ds + \int_R K d\sigma + \sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} &= 2\pi F \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g ds + \int_R K d\sigma + 2\pi E - 2\pi V + \sum_{l=1}^p \theta_l &= 2\pi F \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g ds + \int_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l &= 2\pi(F + V - E) \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g ds + \int_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l &= 2\pi\chi(R).
\end{aligned}$$

■

Corolário 2.9. *Se R é uma região simples de S , então*

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi,$$

De fato, se R é uma região simples, então é homeomorfa a um disco, e como o disco tem característica de Eule-Poincaré igual a 1 temos que vale a igualdade acima.

Como uma superfície compacta pode ser considerada uma região com fronteira vazia, obtemos

Corolário 2.10. *Seja S uma superfície compacta e orientável; então*

$$\int_S K \, d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

2.2 Aplicações

Nessa última seção, apresentaremos algumas aplicações do **Teorema de Gauss-Bonnet**.

Aplicação 1

Uma superfície regular compacta com curvatura de Gauss positiva é homeomorfa a uma esfera.

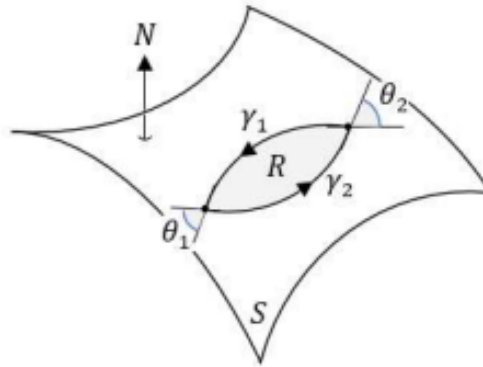
De fato, se S é uma superfície regular compacta com curvatura positiva, então, pela Proposição 2.6, a característica de Euler-Poincaré $\chi(S) = 2$. Por outro lado, sabemos que, dado uma esfera S' , temos $\chi(S') = 2$. Assim, $\chi(S) = \chi(S')$. Como S' é compacta resulta pela mesma proposição, que a superfície S é homeomorfa a esfera S' .

Aplicação 2

Seja S uma superfície orientável com curvatura de Gauss não positiva. Então, duas geodésicas γ_1 e γ_2 que partem de um ponto $p \in S$ não podem se encontrar novamente em um ponto $q \in S$ de tal forma que os traços de γ_1 e γ_2 constituam a fronteira de uma região simples R de S .

Suponhamos, por contradição, que duas geodésicas γ_1 e γ_2 que partem de um ponto $p \in S$ se encontrem novamente em um ponto $q \in S$ e que os traços de γ_1 e γ_2 constituem a fronteira de uma região simples R de S (Ver Figura 2.7).

Figura 2.7 – Região R formada por γ_1 e γ_2



Fonte: (ARAÚJO, 2021)

Então, considerando θ_1 e θ_2 os ângulos externos da região R , temos pelo Teorema de Gauss Bonnet que

$$\int \int_R K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi.$$

Como as geodésicas γ_1 e γ_2 não podem ser tangentes em q , pois são distintas,

temos que $|\theta_i| < \pi$, para $i = 1, 2$. Portanto

$$\int_R K d\sigma = 2\pi - (\theta_1 + \theta_2) > 0.$$

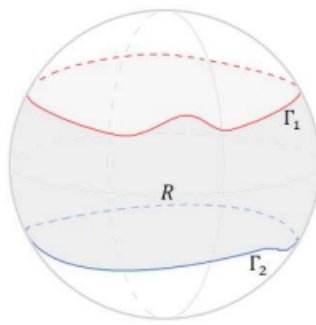
Uma contradição já que S possui curvatura não-positiva, isto é, $K \leq 0$.

Aplicação 3

Se existem duas geodésicas simples e fechadas Γ_1 e Γ_2 em uma superfície S compacta, conexa e com curvatura de Gauss positiva, então Γ_1 e Γ_2 se intersectam.

Como a superfície S é compacta, conexa e com curvatura de Gauss positiva, temos, pela Aplicação 1 que S é homeomorfa a uma esfera. Suponha, por absurdo, que Γ_1 e Γ_2 não se intersectam. Então, o conjunto formado por Γ_1 e Γ_2 é a fronteira de uma região R (Ver Figura 2.8).

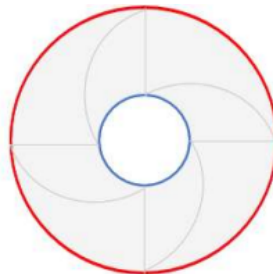
Figura 2.8 – Região R formada por Γ_1 e Γ_2



Fonte: (ARAÚJO, 2021)

Como R pode ser considerada como uma esfera com dois “furos”, resulta que R é homeomorfa a uma coroa circular que tem característica de Euler-Poincaré igual a zero (Ver Figura 2.9).

Figura 2.9 – Coroa circular



Fonte: (ARAÚJO, 2021)

Consequentemente, $\chi(R) = 0$. Pelo Teorema de Gauss-Bonnet, temos

$$\int_R K = 2\pi\chi(R) = 0,$$

o que contraria a hipótese $K > 0$. Logo, Γ_1 e Γ_2 se intersectam.

Aplicação 4

Seja T um triângulo geodésico (i.e., cujos lados são geodésicas) em uma superfície orientada S . Sejam θ_1, θ_2 e θ_3 os ângulos externos de T e $\varphi_1 = \pi - \theta_1, \varphi_2 = \pi - \theta_2$ e $\varphi_3 = \pi - \theta_3$ os ângulos internos. Então a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico é

1. igual a π , se $K = 0$;
2. maior do que π , $K > 0$;
3. menor do que π , se $K < 0$.

Com efeito, pelo Teorema de Gauss-Bonnet, temos

$$\int \int_T K \, d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \varphi_i) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi,$$

o que prova a aplicação.

2.3 Considerações finais

Como consideração final, destaca-se que a Aplicação 4 está associada com a discussão histórica sobre a veracidade do postulado das paralelas citado no início deste projeto.

A partir do postulado das paralelas, decorre que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a π . Em verdade, esse resultado é válido em superfícies com curvatura Gaussiana igual a zero, que é o caso do plano, onde aplica-se a geometria Euclidiana. Entretanto, considerando as geodésicas como retas, temos que, em superfícies com curvatura maior ou menor do que zero, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior ou menor que π , respectivamente.

Um resultado ainda mais geral dado por (CARMO, 2012) mostra que, considerando as geodésicas como retas, as superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana negativa constante constituem modelos (locais) de uma geometria onde valem os axiomas de Euclides, exceto o postulado das paralelas e o axioma que garante a possibilidade de estender retas indefinitivamente.

Além disso, a partir da definição de superfície abstrata, é possível construir um modelo de geometria não-Euclidiana na qual todos os axiomas de Euclides são válidos, exceto o postulado das paralelas o qual é violado da seguinte maneira: dada uma “reta” r (geodésica que se prolonga indefinidamente) e um ponto $p \notin r$, existem infinitas paralelas à r passando por p . Na mesma referência, o autor descreve esse modelo abstrato, conhecido

como *plano hiperbólico*. Portanto, esse modelo mostra que o quinto postulado de Euclides é independente dos outros quatro.

Referências

ARAÚJO, J. J. de. *O teorema de Gauss-Bonnet*. Monografia (Curso de Matemática – Licenciatura) — Universidade Federal de Alagoas, Arapicara – AL, 2021. Citado 4 vezes nas páginas 12, 56, 59 e 60.

CARMO, M. P. D. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado 13 vezes nas páginas 10, 11, 12, 14, 17, 19, 20, 23, 26, 28, 40, 52 e 61.

CARMO, M. P. D. *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2016. Citado 19 vezes nas páginas 11, 13, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 25, 28, 29, 30, 40, 44, 49, 50, 51 e 54.

DELGADO, J.; FRENSEL, K. Geometria diferencial i. *Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro*, 2017. Citado na página 12.

LIMA, R. F. de. Introdução a geometria diferencial. *Sociedade Brasileira de Matemática*, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 48.

MLODINOW, L. A janela de euclides. *A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço*. São Paulo: Geração Editorial, 2004. Citado na página 10.

SILVA, L. G. *Curvas e Superfícies Regulares: Um estudo sobre curvatura*. Monografia (Curso de Matemática – Licenciatura) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano, Urutaí – GO, 2022. Citado na página 12.

TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*. [S.l.]: Editora Blucher, 2008. Citado na página 12.