



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

RENATO ASSUNÇÃO MARQUES

**PROJETO DE CONTROLE ÓTIMO DLQR E DLQT VIA
HARDWARE-IN-THE-LOOP PARA MANOBRABILIDADE DE
VEÍCULOS AQUÁTICOS DE SUPERFÍCIE NÃO TRIPULADOS**

São Luís - MA
19 de janeiro de 2026

RENATO ASSUNÇÃO MARQUES

**PROJETO DE CONTROLE ÓTIMO DLQR E DLQT VIA
HARDWARE-IN-THE-LOOP PARA
MANOBRABILIDADE DE VEÍCULOS AQUÁTICOS DE
SUPERFÍCIE NÃO TRIPULADOS**

Monografia apresentada ao curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. João Viana da Fonseca Neto

Coorientador: Me. Victor Guimarães Furtado

São Luís - MA

19 de janeiro de 2026

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Marques, Renato Assunção.

PROJETO DE CONTROLE ÓTIMO DLQR E DLQT VIA HARDWARE-IN-THE-LOOP PARA MANOBRABILIDADE DE VEÍCULOS AQUÁTICOS DE SUPERFÍCIE NÃO TRIPULADOS / Renato Assunção Marques. - 2026.

145 f.

Coorientador(a) 1: Victor Guimarães Furtado.

Orientador(a): João Viana da Fonseca Neto.

Monografia (Graduação) - Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Maranhão, Anexo de Potência - Sala 4, 2026.

1. Controle Ótimo Digital. 2. Dlqt. 3. Manobrabilidade de Usv. 4. Derramamentos de Petróleo e Seus Derivados. 5. Hardware-in-the-loop. I. Fonseca Neto, João Viana da. II. Furtado, Victor Guimarães. III.

RENATO ASSUNÇÃO MARQUES

**PROJETO DE CONTROLE ÓTIMO DLQR E DLQT VIA
HARDWARE-IN-THE-LOOP PARA
MANOBRABILIDADE DE VEÍCULOS AQUÁTICOS DE
SUPERFÍCIE NÃO TRIPULADOS**

Monografia apresentada ao curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Monografia apresentada em: São Luís - MA, 19 de janeiro de 2026.

Prof. Dr. João Viana da Fonseca Neto
Orientador

Me. Victor Guimarães Furtado
Coorientador

Prof. Dr. Francisco das Chagas de Souza
Examinador

Profa. Dra. Monik Silva Sousa
Examinador

São Luís - MA
19 de janeiro de 2026

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida, pela saúde, força e determinação que me permitiram superar desafios e concluir esta etapa da minha formação acadêmica.

Aos meus pais, Reinaldo da Luz Marques e Elissandra V. Assunção Marques, minha irmã Renata de Kassia e minha esposa Joyna Mafra, pelo amor, apoio incondicional e incentivo constante, fundamentais para todas as etapas da minha vida. Agradeço por me ensinarem valores de dedicação e perseverança, e por me oferecerem suporte emocional e inspiração nos momentos de dificuldade, tornando sua presença, compreensão e incentivo essenciais ao longo desta jornada.

Ao meu orientador, Dr. João Viana da Fonseca Neto, e ao meu coorientador, Victor Guimarães Furtado, pelo compartilhamento de conhecimento, paciência e orientação ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço pela confiança, pelos ensinamentos valiosos, pelas discussões enriquecedoras e pelas sugestões precisas, que contribuíram significativamente para meu crescimento acadêmico e profissional.

Aos meus amigos de laboratório, Alam, Monik, Renato, Sivaldo, Witallo e Yan, pelos ensinamentos, companheirismo e apoio durante toda a jornada.

Aos amigos que a universidade me proporcionou, Etienne Santos, Fabrício de Araujo, Lucas Mendes, Raedson dos Santos e Wesley Danillo, pelo incentivo, ajuda e momentos de descontração que tornaram a trajetória acadêmica mais leve.

A todos os professores do curso de Engenharia Elétrica da UFMA pelo conhecimento transmitido e dedicação ao ensino.

À Universidade Federal do Maranhão e à Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis, por meio do Programa de Formação de Recursos Humanos 54.1, pelo suporte financeiro que tornou possível a realização deste trabalho.

Por fim, eu sou grato a todas as pessoas que contribuíram, de forma direta ou indireta, para a minha formação e desenvolvimento acadêmico ao longo da graduação.

Resumo

O projeto e implementação de controladores ótimos digitais constituem uma abordagem importante para a manobrabilidade de Veículos Aquáticos de Superfície Não Tripulados (*Unmanned Surface Vehicles* - USVs), permitindo o controle de suas velocidades, a otimização do consumo energético e a melhoria do desempenho operacional. A aplicação desses veículos no monitoramento de derramamentos de petróleo e seus derivados auxilia na realização de respostas rápidas e seguras, além de possibilitar operações em áreas de difícil acesso. Este trabalho propõe o projeto e implementação de controladores ótimos digitais do tipo Regulador Linear Quadrático (*Linear Quadratic Regulator* - LQR) e Rastreador Linear Quadrático (*Linear Quadratic Tracking* - LQT) para manobrabilidade do USV *CyberShip I*. Os controladores são desenvolvidos e simulados em ambiente computacional (*MATLAB*[®]), para avaliação preliminar de suas respostas dinâmicas e das ações de controle associadas. Em seguida, os algoritmos de controle são embarcados no microcontrolador ESP32, que permite a sua execução no sistema embarcado. A validação é realizada por meio da técnica *Hardware-in-the-Loop* (HIL), onde a dinâmica da planta é simulada no *MATLAB*[®], enquanto o microcontrolador processa os sinais enviados pelo ambiente computacional e fornece a ação de controle ótima para o simulador, garantindo uma avaliação de desempenho próxima às condições reais de operação. O desempenho do controlador Rastreador Linear Quadrático Discreto (*Discrete Linear Quadratic Tracking* - DLQT) com ação integral é comparado ao de um controlador clássico do tipo Proporcional-Integral (PI) em aplicação HIL, sendo avaliadas as métricas de tempo de subida, tempo de acomodação, sobressinal e erro em regime permanente.

Palavras-chave: Controle ótimo digital; DLQT; Manobrabilidade de USV; Derramamentos de petróleo e seus derivados; *Hardware-in-the-Loop*.

Abstract

The design and implementation of digital optimal controllers constitute an important approach to the maneuverability of Unmanned Surface Vehicles (USVs), enabling the control of their velocities, the optimization of energy consumption, and the improvement of operational performance. The application of these vehicles in the monitoring of oil spills and their derivatives supports rapid and safe response actions, while also enabling operations in hard-to-reach areas. This work proposes the design and implementation of digital optimal controllers based on the Linear Quadratic Regulator (LQR) and Linear Quadratic Tracking (LQT) approaches to improve the maneuverability of the CyberShip I USV. The controllers are developed and simulated in a computational environment (MATLAB[®]) for the preliminary evaluation of their dynamic responses and the associated control actions. Subsequently, the control algorithms are embedded in the ESP32 microcontroller, enabling their execution on the embedded system. Validation is performed using the Hardware-in-the-Loop (HIL) technique, in which the plant dynamics are simulated in *MATLAB*[®], while the microcontroller processes the signals sent by the computational environment and provides the optimal control action to the simulator, ensuring a performance evaluation close to real operating conditions. The performance of the Discrete Linear Quadratic Tracking (DLQT) controller with integral action is compared to that of a classical Proportional–Integral (PI) controller in a HIL application, evaluating the metrics of rise time, settling time, overshoot, and steady-state error.

Keywords: Digital optimal control; DLQT; USV maneuverability; Oil spills and their derivatives; Hardware-in-the-Loop.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Principais componentes estruturais e funcionais de um USV: (1) tipos de cascos; (2) sistema de propulsão; (3) sistema de orientação, navegação e controle (GNC); (4) sistema de comunicação; e (5) sensores (Fonte: Adaptado de (LIU et al., 2016)).	24
Figura 2 – Estrutura generalizada do sistema GNC de um USV (Fonte: Adaptado de (LIU et al., 2016)).	25
Figura 3 – Componentes de movimento no sistema referencial de corpo fixo para USV (Fonte: Adaptado de (FURTADO, 2025)).	27
Figura 4 – Representação do movimento horizontal do USV - 3DoF.	29
Figura 5 – Sistema de controle analógico (Fonte: (BAZANELLA; JUNIOR, 2005)).	34
Figura 6 – Sistema de controle com realimentação unitária - tempo discreto (Fonte: (ANGELICO; NEVES, 2023)).	34
Figura 7 – Simulador HIL: (a) Diagrama em blocos de um sistema embarcado conectado a um simulador HIL; (b) componentes de um simulador HIL básico (Fonte: Adaptado de (MIHALIČ; TRUNTIČ; HREN, 2022)). . .	36
Figura 8 – Configuração de aplicação de HIL (Fonte: Adaptado de (MIHALIČ; TRUNTIČ; HREN, 2022)).	37
Figura 9 – <i>CyberShip I</i> , um modelo de um navio de suprimento <i>offshore</i> , escala 1:70 (Fonte: (STRAND, 1999)).	53
Figura 10 – Configuração dos propulsores no <i>CyberShip I</i> (Fonte: (TOMERA; PODGÓRSKI, 2021)).	53
Figura 11 – Diagrama de blocos do sistema de controle DLQR.	59
Figura 12 – Diagrama de blocos do sistema de controle DLQT-I.	61
Figura 13 – Diagrama de blocos do controlador PID em malha fechada com a planta.	61
Figura 14 – Diagrama de blocos do sistema MIMO em malha fechada com o controlador para o modelo xg_0	63
Figura 15 – Diagrama de blocos do sistema MIMO para o modelo completo.	64
Figura 16 – Diagrama de blocos de um sistema TITO com desacoplamento do processo.	65
Figura 17 – Diagrama de blocos de um sistema TITO com desacoplamento simplificado.	67
Figura 18 – Diagrama de blocos da implementação HIL do controlador DLQR, com a planta do <i>CyberShip I</i> simulada no computador e o controlador executado no microcontrolador ESP32.	68
Figura 19 – Diagrama de blocos da implementação HIL do controlador DLQT-I, com a planta do <i>CyberShip I</i> simulada no computador e o controlador executado no microcontrolador ESP32.	69

Figura 20 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo x_{g_0} , com condições iniciais $u = 2$ e $v = 0,5$	74
Figura 21 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQR aplicado ao modelo x_{g_0} .	75
Figura 22 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo x_{g_0} , com condição inicial $r = 1$	76
Figura 23 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQR aplicado ao modelo x_{g_0} . . .	77
Figura 24 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo x_{g_0} .	79
Figura 25 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQT-I aplicado ao modelo x_{g_0} .	80
Figura 26 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo x_{g_0} .	81
Figura 27 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQT-I aplicado ao modelo x_{g_0} . . .	82
Figura 28 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo completo, com condições iniciais $u = 2$ e $v = 0,5$	84
Figura 29 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQR aplicado ao modelo completo.	85
Figura 30 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo completo, com condição inicial $r = 1$	86
Figura 31 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQR aplicado ao modelo completo.	87
Figura 32 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo completo.	89
Figura 33 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQT-I aplicado ao modelo completo.	90
Figura 34 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo completo.	91
Figura 35 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQT-I aplicado ao modelo completo.	92
Figura 36 – Experimento HIL do controlador DLQR, com a planta do <i>CyberShip I</i> simulada no <i>MATLAB</i> [®] e o controlador executado no microcontrolador ESP32.	93
Figura 37 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo x_{g_0} , com condições iniciais $u = 2$ e $v = 0,5$, via HIL.	94
Figura 38 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQR aplicado ao modelo x_{g_0} , via HIL.	95
Figura 39 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo x_{g_0} , com condição inicial $r = 1$, via HIL.	96
Figura 40 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQR aplicado ao modelo x_{g_0} , via HIL.	97
Figura 41 – Experimento HIL do controlador DLQT-I, com a planta do <i>CyberShip I</i> simulada no <i>MATLAB</i> [®] e o controlador executado no microcontrolador ESP32.	98

Figura 42 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo xg_0 , via HIL.	99
Figura 43 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQT-I aplicado ao modelo xg_0 , via HIL.	100
Figura 44 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo xg_0 , via HIL.	101
Figura 45 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQT-I aplicado ao modelo xg_0 , via HIL.	102
Figura 46 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo completo, com condições iniciais $u = 2$ e $v = 0, 5$, via HIL.	103
Figura 47 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQR aplicado ao modelo completo, via HIL.	104
Figura 48 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo completo, com condição inicial $r = 1$, via HIL.	105
Figura 49 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQR aplicado ao modelo completo, via HIL.	106
Figura 50 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo xg_0 , via HIL.	107
Figura 51 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQT-I, via HIL.	108
Figura 52 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo xg_0 , via HIL.	109
Figura 53 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQT-I, via HIL.	110
Figura 54 – Resposta comparativa dos controladores para velocidade u do modelo xg_0 , via HIL.	111
Figura 55 – Resposta comparativa dos controladores para velocidade v do modelo xg_0 , via HIL.	112
Figura 56 – Resposta comparativa dos controladores para velocidade r do modelo xg_0 , via HIL.	113
Figura 57 – Resposta comparativa das ações de controle para as velocidades u , v e r do modelo xg_0 , via HIL.	114
Figura 58 – Resposta comparativa dos controladores para velocidade u do modelo completo, via HIL.	116
Figura 59 – Resposta comparativa dos controladores para velocidade v do modelo completo, via HIL.	117
Figura 60 – Resposta comparativa dos controladores para velocidade r do modelo completo, via HIL.	118
Figura 61 – Resposta comparativa das ações de controle para as velocidades u , v e r do modelo completo, via HIL.	119
Figura 62 – Lugar das raízes da velocidade u - Sintonia LGR.	142

Figura 63 – Lugar das raízes da velocidade v - Sintonia LGR.	143
Figura 64 – Lugar das raízes da velocidade r - Sintonia LGR.	144

Lista de tabelas

Tabela 1 – Notação SNAME para embarcações marítimas.	27
Tabela 2 – Parâmetros do <i>CyberShip I</i>	54
Tabela 3 – Resultados da velocidade u para os controladores DLQT-I e PI — modelo xg_0	111
Tabela 4 – Resultados da velocidade v para os controladores DLQT-I e PI — modelo xg_0	112
Tabela 5 – Resultados da velocidade r para os controladores DLQT-I e PI — modelo xg_0	114
Tabela 6 – Resultados da velocidade u para os controladores DLQT-I e PI — modelo completo.	116
Tabela 7 – Resultados da velocidade v para os controladores DLQT-I e PI — modelo completo.	117
Tabela 8 – Resultados da velocidade r para os controladores DLQT-I e PI — modelo completo.	118

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADHDP	Aprendizado por reforço via Programação Dinâmica Heurística Dependente de Ação
A/D	Analógico-Digital
BODY	<i>Body-Fixed</i>
CG	Centro de gravidade da força gravitacional
CF	Centro de flutuabilidade
DARE	Equação Algébrica de Riccati Discreta (<i>Discrete Algebraic Riccati Equation</i>)
D/A	Digital-Analógico
DLQR	Regulador Linear Quadrático Discreto (<i>Discrete Linear Quadratic Regulator</i>)
DLQT	Rastreador Linear Quadrático Discreto (<i>Discrete Linear Quadratic Tracking</i>)
DLQT-I	Rastreador Linear Quadrático Discreto com ação integral
DoF	Graus de liberdade (<i>Degrees of Freedom</i>)
DSPs	Processadores digitais de sinais
ECEF	Sistema de Coordenadas Centrado na Terra e Fixo à Terra (<i>Earth-Centered Earth-Fixed</i>)
ECI	Sistema de Coordenadas Inercial Centrado na Terra (<i>Earth-Centered Inertial</i>)

GNC	Orientação, navegação e controle (<i>Guidance, Navigation and Control</i>)
GPS	Sistema de Posicionamento Global (<i>Global Positioning System</i>)
FRF	Fatoração de Raiz Quadrada
HIL	<i>Hardware-in-the-Loop</i>
LGR	Lugar Geométrico das Raízes
LMS	<i>Least Mean Squares</i>
LQR	Regulador Linear Quadrático (<i>Linear Quadratic Regulator</i>)
LQT	Rastreador Linear Quadrático (<i>Linear Quadratic Tracking</i>)
MIMO	Múltiplas entradas e múltiplas saídas (<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>)
NED	<i>North-East-Down</i>
NTNU	<i>Norwegian University of Science and Technology</i>
PID	Proporcional Integral Derivativo
PDA	Programação Dinâmica Adaptativa
PD	Posicionamento Dinâmico
PI	Proporcional–Integral
SISO	Entrada única e saída única (<i>Single-Input Single-Output</i>)
SNAME	<i>Society of Naval Architects and Marine Engineers</i>
USV	Veículo Aquático de Superfície Não Tripulado (<i>Unmanned Surface Vehicle</i>)
TITO	Dois entradas e duas saídas (<i>Two-Input, Two-Output</i>)
ZOH	Segurador de ordem zero (<i>Zero-Order Hold</i>)
IMU	Unidade de Medição Inercial (<i>Inertial Measurement Unit</i>)
SS	Espaço de Estados (<i>State-Space</i>)

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Justificativa	20
1.2	Objetivos	21
1.2.1	Objetivo Geral	21
1.2.2	Objetivos Específicos	21
1.3	Organização do Trabalho	22
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	23
2.1	Veículos Aquáticos de Superfície Não Tripulados	23
2.2	Modelo Matemático do USV	26
2.2.1	Sistemas de Coordenadas	28
2.3	Modelo Matemático do USV para Três Graus de Liberdade	29
2.3.1	Dinâmica em Três Graus de Liberdade	30
2.3.1.1	Matriz de Inércia	30
2.3.1.2	Matriz de Coriolis-Centrípeta	31
2.3.1.3	Matriz de Amortecimento	32
2.4	Controle Digital	33
2.4.1	Hardware-in-the-Loop	35
2.5	Controle Ótimo	38
2.5.1	O problema de Controle Ótimo Discreto	40
2.5.2	Programação Dinâmica para Controle Ótimo	41
2.5.3	O problema do Regulador Linear Quadrático Discreto	42
2.5.4	Formulação do Rastreador Linear Quadrático Discreto com Ação Integral	45
2.5.4.1	Relação com o Controlador PI	48
2.5.5	Método de Schur	49
3	PROJETO DO CONTROLADOR ÓTIMO DO TIPO DLQR E DLQT PARA MANOBRABILIDADE	52
3.1	Modelo Matemático do <i>CyberShip I</i>	52
3.1.1	Representação do Modelo Linear do <i>CyberShip I</i> em Espaço de Estados	55
3.2	Controlador DLQR	56
3.3	Controlador DLQT-I	59
3.4	Controlador PID	61
3.4.1	Projeto do Controlador PI para o Modelo x_{g0}	62
3.4.2	Projeto do Controlador PI para o Modelo Completo	63
3.5	Implementação HIL	68

4	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS E HIL DO CONTROLADOR DE MANOBRABILIDADE	70
4.1	Experimentos Computacionais	70
4.1.1	Controlador DLQR para o Modelo xg_0	70
4.1.2	Controlador DLQT-I para o Modelo xg_0	77
4.1.3	Controlador DLQR para o Modelo Completo	82
4.1.4	Controlador DLQT-I para o Modelo Completo	87
4.2	Experimentos HIL	92
4.2.1	Controlador DLQR aplicado ao Modelo xg_0 - HIL	92
4.2.2	Controlador DLQT-I aplicado ao Modelo xg_0 - HIL	97
4.2.3	Controlador DLQR aplicado ao Modelo Completo - HIL	102
4.2.4	Controlador DLQT-I aplicado ao Modelo Completo - HIL	106
4.2.5	Comparação entre o Controlador DLQT-I e o Controlador PI aplicado ao Modelo xg_0 — HIL	110
4.2.6	Comparação entre o Controlador DLQT-I e o Controlador PI aplicado ao Modelo Completo — HIL	115
5	CONCLUSÃO	120
5.1	Trabalhos Futuros	121
	REFERÊNCIAS	122
	APÊNDICES	127
	A – APLICAÇÃO DO MÉTODO DE SCHUR NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE RICCATI	128
A.1	Determinação da Matriz Estendida \tilde{P} pelo Método de Schur - Modelo xg_0	128
A.2	Determinação da Matriz P pelo Método de Schur - Modelo Completo	134
A.3	Determinação da Matriz Estendida \tilde{P} pelo Método de Schur - Modelo Completo	135
	B – SINTONIA CONTROLADOR PI	141
B.1	Sintonia do Controlador PI pelo Método do Lugar das Raízes	141

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os derramamentos de petróleo e seus derivados nos oceanos causam danos significativos ao meio ambiente marinho e costeiro, afetando ecossistemas, atividades econômicas locais e a saúde humana (EUZEBIO; RANGEL; MARQUES, 2019). Esses incidentes podem ocorrer por diversas razões, como vazamentos de oleodutos, descargas acidentais de navios, exploração *offshore* e outros desastres imprevisíveis. O monitoramento das áreas afetadas é fundamental para uma rápida tomada de decisão, além de contribuir nas ações de mitigação dos impactos ambientais (JORGE et al., 2019; ELMAKIS et al., 2024).

A detecção e o monitoramento de derramamentos de petróleo e seus derivados tradicionalmente dependem da atuação de especialistas e do uso de equipamentos especializados, envolvendo missões longas e complexas. Essas operações exigem a mobilização de consideráveis recursos humanos para patrulhamento de embarcações próximas a oleodutos, inspeção de áreas de ancoragem de navios e monitoramento de regiões previamente determinadas. Essa abordagem se torna ainda mais desafiadora na ausência de métodos e plataformas automatizadas, resultando em altos custos operacionais, maior exposição a riscos e limitações na capacidade de resposta rápida diante de acidentes ambientais (ELMAKIS; DEGANI, 2023; ELMAKIS et al., 2024). Nesse contexto, os veículos aquáticos de superfície não tripulados (*Unmanned Surface Vehicles - USVs*) instrumentalizados com sensores específicos para a avaliação da qualidade da água, destacam-se como uma alternativa para o monitoramento remoto de áreas atingidas por derramamentos, como apresentado em Maawali et al. (2019), Han e Ma (2021), Oktaviano et al. (2021) e Elmakis e Degani (2023).

Os USVs são embarcações projetadas para operar na superfície de ambientes aquáticos de forma autônoma ou remota, sem a necessidade de tripulação a bordo (KOLAWOLE; IGBINENIKARO, 2024). Esses veículos apresentam diferentes configurações

e funcionalidades, de acordo com sua aplicação. Apesar das variações, há componentes essenciais que devem ser considerados em qualquer projeto: o casco e os componentes estruturais auxiliares; o sistema de propulsão e alimentação; o sistema de orientação, navegação e controle (*Guidance, Navigation and Control* - GNC); os sistemas de comunicações; os equipamentos de aquisição de dados e a estação em terra. A integração entre esses componentes é fundamental para garantir o funcionamento e a operação do veículo (NÚÑEZ et al., 2022). Suas aplicações abrangem diversas áreas, como exploração de recursos oceânicos (SOTELO-TORRES; ALVAREZ; ROBERTS, 2023), pesquisas científicas (NGUYEN et al., 2022), aplicações militares (BORETTI, 2024) e monitoramento ambiental (YUAN et al., 2023). A utilização desses dispositivos proporcionam redução de custos, segurança ao evitar a exposição de equipes humanas, maior autonomia e capacidade de operar em condições ambientais adversas (KOLAWOLE; IGBINENIKARO, 2024).

A aplicação de USVs no monitoramento remoto depende da sua capacidade de deslocamento e posicionamento nas áreas de interesse. A manobrabilidade é a capacidade do veículo ajustar sua velocidade e orientação a partir dos comandos de controle, garantindo o deslocamento e posicionamento. O sistema de controle de manobrabilidade é responsável por determinar as forças e momentos a serem aplicados pelos atuadores (propulsores), para que o USV alcance a posição desejada (FOSSEN, 2011).

As abordagens adotadas no desenvolvimento de sistemas de controle para USVs variam conforme os requisitos operacionais e especificações do projeto para a aplicação. Em Furtado (2025), é apresentado um controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) adaptativo baseado em redes neurais do tipo *perceptron* com ajuste dos ganhos via algoritmo LMS (*Least Mean Squares*) para o controle de velocidade de um USV. Em Kotian, Umesh e Gangadharan (2023), é apresentado o desenvolvimento e implementação de um controlador PID, com validação por meio de simulações e testes de campo. Em Furtado e Neto (2024), é apresentado um método de controle ótimo online, baseado em Programação Dinâmica Adaptativa (PDA) com aprendizado por reforço via Programação Dinâmica Heurística Dependente de Ação (ADHDP), para o cálculo dos ganhos ótimos de um seguidor do tipo Rastreador Linear Quadrático Discreto com ação integral (DLQT-I) para manobrabilidade de um USV. Em Rigatos (2023), é apresentado um controlador ótimo não linear baseado em H-infinito, projetado para otimizar o desempenho de um USV. Em Feng et al. (2021) é apresentado um controlador ótimo do tipo LQR para um USV, com o objetivo de otimizar a orientação do veículo e comparar seu desempenho com controladores PID e *fuzzy*. Em Abdolmalaki, Mahjoob e Abbasi (2013) é apresentado um controlador *Fuzzy-LQR* para USVs, combinando o LQR e o controle fuzzy para melhorar precisão, robustez e resposta frente a variações ambientais. Em Halvorsen (2008) é apresentado um controlador ótimo do tipo LQR para o posicionamento dinâmico de um USV, que utiliza a modelagem da dinâmica dos atuadores e uma ação integral para aumentar a precisão e a estabilidade do sistema.

O desempenho e a autonomia dos USVs estão intrinsecamente relacionados ao seu consumo energético. Veículos movidos a baterias, embora apresentem alta eficiência energética, possuem autonomia limitada devido à capacidade de armazenamento das baterias, o que restringe sua aplicação a missões de curta duração. A busca por reduzir o consumo energético impulsiona o desenvolvimento de novos sistemas de controle, otimização de rotas e estratégias de gerenciamento de energia embarcada (ANDRADE; JR; FERNANDES, 2025). Sob essa perspectiva, o controle ótimo é uma abordagem de controle relevante para aplicações em USVs, pois considera o esforço energético e o desempenho do sistema por meio de uma função de custo essencial no projeto do controlador.

O controle ótimo é uma abordagem consolidada na teoria de controle, cujo objetivo consiste em determinar uma lei de controle que otimize uma função de custo, sujeita às restrições dinâmicas do sistema. Os controladores ótimos do tipo LQR e Rastreador Linear Quadrático (*Linear Quadratic Tracking* - LQT) são formulados a partir da minimização de uma função de custo quadrática, que pondera o desempenho do sistema e o esforço de controle (custo energético) (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012).

A implementação de controladores, em grande parte das aplicações, é realizada de forma digital devido à complexidade dos algoritmos, à flexibilidade no projeto e à compatibilidade com sistemas embarcados e computacionais. Ao contrário do controle analógico que requer o desenvolvimento de circuitos específicos para cada aplicação, o controle digital permite a implementação de diferentes algoritmos de controle e ajuste de seus parâmetros por meio de *software* (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013; ANGELICO; NEVES, 2023).

Dentre as vantagens do controle digital em relação ao analógico, há a possibilidade de simulação e validação antes da implementação prática. Os controladores analógicos precisam ser testados diretamente em *hardware* físico, enquanto os controladores digitais permitem a realização de testes em ambiente virtual para a análise do comportamento do sistema sob diferentes condições operacionais. As possibilidades de simulação e validação do controle digital são ampliadas com a integração entre o controlador físico e um modelo computacional da planta, reduzindo riscos, custos e tempo de desenvolvimento, por meio da técnica *Hardware-in-the-Loop* (HIL) (MIHALIČ; TRUNTIČ; HREN, 2022).

O HIL é uma técnica de simulação que avalia sistemas embarcados antes de sua implementação na planta física, permitindo que o sistema interaja com um ambiente simulado que reproduz o comportamento da planta, dos sensores e dos atuadores (ELVITIGALA, 2021). Em sistemas de controle o algoritmo é embarcado em microcontroladores e interage diretamente com um simulador que reproduz o comportamento dinâmico da planta. O microcontrolador recebe sinais de realimentação do ambiente computacional, que representam os sensores, e envia o sinal de controle, simulando uma operação em condições reais (MIHALIČ; TRUNTIČ; HREN, 2022). Essa

abordagem tem se mostrado eficaz no desenvolvimento de sistemas de controle embarcados para USVs, permitindo testar o desempenho e a robustez do controlador em cenários complexos ou críticos sem risco de danificar o sistema real e identificar falhas antes da implementação final (HALVORSEN, 2008; MOUSAZADEH et al., 2018).

Diante das problemáticas de controladores ótimos para aplicações de USVs em monitoramento de derramamentos de petróleo e seus derivados em regiões costeiras, neste trabalho é proposto um projeto de controladores ótimos digitais do tipo Regulador Linear Quadrático Discreto (*Discrete Linear Quadratic Regulator* - DLQR) e Rastreador Linear Quadrático Discreto (*Discrete Linear Quadratic Tracking* - DLQT) para o controle de manobrabilidade a partir das velocidades da embarcação. A abordagem envolve a discretização do modelo matemático do USV para a sintonia dos controladores ótimos digitais, discretização do controlador para a implementação dos algoritmos de controle ótimo embarcado em *hardware* e validação do controlador por meio da técnica HIL. Os controladores ótimos digitais são embarcados no microcontrolador ESP32, e a dinâmica da planta é simulada em ambiente computacional por meio do *software MATLAB*[®].

1.1 Justificativa

A aplicação de controladores ótimos do tipo LQR e LQT em sistemas de controle de USVs visa otimizar de forma ponderada o desempenho e o esforço de controle, considerando as restrições dinâmicas do sistema. Nesse contexto, a utilização dessas técnicas permite otimizar o consumo dos recursos energéticos do veículo, resultando em maior eficiência e, conseqüentemente, em maior autonomia operacional, ao mesmo tempo em que se garante um desempenho ótimo. Esses controladores minimizam uma função de custo quadrática que penaliza os estados do sistema e o esforço de controle aplicado pelos atuadores. Asseguram que o sistema mantenha estabilidade e robustez mesmo na presença de distúrbios ambientais e condições de operação adversas. O desenvolvimento da teoria de controle permitiu a aplicação de técnicas avançadas para aprimorar os sistemas de controle e navegação dos USVs, aumentando suas capacidades de manobrabilidade, autonomia e eficiência.

Um dos métodos para o monitoramento de áreas costeiras é a utilização de USVs, que são capazes de operar de forma autônoma ou remota em ambientes aquáticos. Instrumentalizados com sensores, esses veículos formam um nó de sensor dinâmico capaz de avaliar a qualidade da água, detectar a presença de poluentes, como petróleo e seus derivados, monitorar parâmetros ambientais e fornecer informações essenciais para a gestão de ecossistemas e prevenção de desastres ambientais. Esses dispositivos permitem a detecção de incidentes ambientais em regiões remotas e de difícil acesso, auxiliam na resposta rápida, fortalecem a proteção das áreas costeiras e contribuem de maneira significativa para a

preservação de ecossistemas essenciais. Em virtude dessas características, são amplamente utilizados no monitoramento de derramamentos de petróleo e seus derivados.

O derramamento de petróleo e seus derivados no mar é um problema grave que ocasiona impactos na sociedade e meio ambiente a curto, médio e longo prazo. Esses eventos afetam diretamente os ecossistemas marinhos e as comunidades que deles dependem, comprometendo a estabilidade ambiental e econômica das regiões atingidas. Entre os principais impactos, destacam-se a contaminação da água, da fauna e da flora, a intoxicação dos animais e os danos à saúde humana, que podem surgir tanto por contato direto quanto pela ingestão de organismos contaminados (EUZEBIO; RANGEL; MARQUES, 2019). Um exemplo desse tipo de desastre ambiental ocorreu em 2019, quando um derramamento de petróleo de origem desconhecida atingiu diversas localidades do litoral brasileiro, espalhando aproximadamente 5 mil toneladas de resíduos oleosos ao longo de 4 mil quilômetros de costa, afetando 11 estados e 55 unidades de conservação. Esses eventos afetam diretamente trabalhadores, serviços e atividades econômicas ligadas ao mar, como a pesca, o turismo e o transporte marítimo, ampliando ainda mais as consequências negativas desses acidentes (SILVA, 2021).

1.2 Objetivos

Nesta seção são descritos os objetivos gerais e específicos necessários para a conclusão da proposta do trabalho.

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver o projeto de controladores ótimos digitais do tipo DLQR e DLQT baseado em implementação HIL para manobrabilidade do USV *CyberShip* I. Os controladores do USV são avaliados por meio de simulações e pela técnica HIL, com dinâmica da planta representada por modelos matemáticos e simulada no *software MATLAB*[®].

1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos são os seguintes:

- Levantar o modelo matemático linear e não linear do USV;
- Discretizar o modelo matemático da planta;
- Desenvolver o projeto de controladores ótimos digitais (DLQR e DLQT) em ambiente simulado;

- Embarcar o algoritmo de controle ótimo (DLQR e DLQT) com a planta simulada internamente no microcontrolador ESP32;
- Avaliar o desempenho dos controladores embarcados no microcontrolador ESP32 por meio da técnica HIL, simulando a dinâmica da planta no *MATLAB*[®];

1.3 Organização do Trabalho

A presente monografia está estruturado em cinco capítulos. No Capítulo 1, é apresentada a introdução, incluindo a justificativa do trabalho, bem como os objetivos gerais e específicos. A fundamentação teórica necessária para o entendimento desta monografia é apresentada no Capítulo 2. Nesse capítulo, são abordados os conceitos essenciais sobre os USVs, abrangendo a dinâmica e a modelagem matemática do sistema. Além disso, são apresentados os fundamentos de controle digital, com destaque para a técnica HIL, bem como controle ótimo, com ênfase nos métodos DLQR e DLQT-I. Também são apresentados o método de Schur para solução de equações e o controlador clássico PID, oferecendo a base teórica necessária para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

No Capítulo 3, é apresentada a metodologia para o projeto do controlador ótimo do tipo DLQR e DLQT para manobrabilidade do USV. São detalhados a dinâmica do sistema, o modelo matemático com os parâmetros do *CyberShip I*, sua representação em espaço de estados e função de transferência. Além disso, a implementação via técnica HIL também é discutida, apresentando a arquitetura de implementação que descreve a interação entre o microcontrolador e o simulador computacional.

Os experimentos computacionais e suas análises são apresentados no Capítulo 4, incluindo resultados de simulação em *MATLAB*[®] e experimentais obtidos por meio da técnica HIL. A análise da resposta dos controladores DLQR, DLQT-I e PI para os dois modelos estudados é realizada, assim como as comparações entre o controlador DLQT-I e PI.

No Capítulo 5 apresentam-se a conclusão deste trabalho e os trabalhos futuros. Também, apresenta-se os apêndices com a aplicação do método de Schur na resolução da equação de Riccati e com a sintonia do controlador PI.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresenta-se o referencial teórico necessário para o desenvolvimento da monografia, abordando os conceitos fundamentais sobre USVs, a dinâmica e a modelagem matemática, bem como tópicos sobre controle ótimo do tipo DLQR e DLQT-I. Além disso, são discutidos conceitos de controle digital e a implementação por meio da técnica HIL.

2.1 Veículos Aquáticos de Superfície Não Tripulados

O desenvolvimento dos USVs teve início durante a Segunda Guerra Mundial, com o surgimento do Comox, considerado o primeiro protótipo desse tipo de embarcação, desenvolvido no Canadá em 1944 para fins militares (BAE; HONG, 2023). Na década de 1960, instituições militares e centros de pesquisa passaram a investir em sistemas marítimos capazes de operar remotamente. A partir da década de 1990, os avanços nas tecnologias computacionais, de comunicação e de navegação por Sistema de Posicionamento Global (*Global Positioning System* - GPS) impulsionaram a expansão dos veículos USVs para diversas aplicações (KOLAWOLE; IGBINENIKARO, 2024).

O USV é uma embarcação que opera na superfície da água sem a necessidade de tripulação a bordo, de forma autônoma ou controlada remotamente. Utilizado em diversas aplicações, como pesquisa científica, monitoramento ambiental, operações de defesa e transporte marítimo comercial (KOLAWOLE; IGBINENIKARO, 2024). Esses veículos apresentam um *design* modular, alta velocidade e grande capacidade de manobra que permitem a navegação rápida em áreas inacessíveis a embarcações convencionais, ampliando a autonomia das operações, reduzindo custos operacionais e minimizando os riscos à segurança humana (ZHANG; SHI; LIU, 2022).

Existem vários tipos de USVs, cada um projetado para tarefas específicas de acordo com os requisitos da missão, podendo ser classificados em autônomos, remotos e híbridos. Os USVs autônomos são equipados com sensores e algoritmos avançados que lhes permitem operar de forma independente, ajustando-se às condições ambientais em tempo real. Os USVs operados remotamente são controlados por operadores humanos à distância, utilizando enlaces de comunicação, como rádiofrequência ou satélite, para o envio de comandos e monitoramento dos movimentos da embarcação. Os USVs híbridos combinam as capacidades remotas e autônomas, oferecendo maior flexibilidade em ambientes complexos, nos quais a supervisão humana pode ser necessária em momentos específicos (KOLAWOLE; IGBINENIKARO, 2024).

Os USVs apresentam diferentes formatos e funcionalidades de acordo com a aplicação, no entanto alguns elementos compõem a estrutura base do USV, conforme exibido na Figura 1. O casco pode ser do tipo caiaque, catamarã ou trimarã, acompanhado de elementos estruturais, cada um adequado a diferentes aplicações e condições operacionais. O sistema de propulsão é responsável por gerar as forças de deslocamento, no qual a maioria dos USVs utiliza leme e hélice para controlar direção e velocidade, enquanto alguns empregam empuxo diferencial com motores independentes em cada casco (NÚÑEZ et al., 2022).

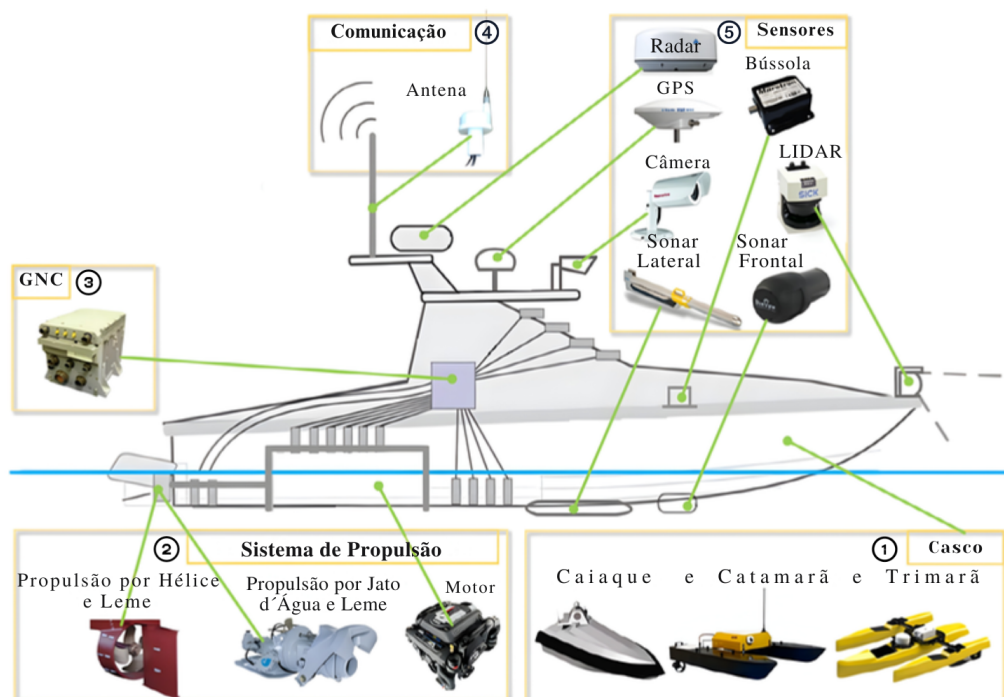


Figura 1 – Principais componentes estruturais e funcionais de um USV: (1) tipos de cascos; (2) sistema de propulsão; (3) sistema de orientação, navegação e controle (GNC); (4) sistema de comunicação; e (5) sensores (Fonte: Adaptado de (LIU et al., 2016)).

Os sistemas de comunicação exibido na Figura 1, incluem comunicação sem fio com estações de controle em terra e outros veículos para operação cooperativa, além da comunicação embarcada com sensores, atuadores e outros equipamentos. O sistema GNC é o componente mais importante do USV, geralmente formado por computadores e *softwares* integrados, sendo responsável por gerenciar todo o sistema. Os equipamentos de coleta de dados, como a Unidade de Medida Inercial (*Inertial Measurement Unit* - IMU) e o GPS, fornecem informações de posição, velocidade e orientação, permitindo que o USV navegue de forma precisa e mantenha seu desempenho operacional. Esses sensores podem ser complementados por câmeras, radar, sonar e outros dispositivos, conforme a tarefa específica (LIU et al., 2016).

O sistema GNC é um componente fundamental dos USVs, pois combina as funções de orientação, navegação e controle, formando um sistema de controle em malha fechada de posição e orientação, conforme exibido na Figura 2 (MAAWALI et al., 2019). Esse sistema integra diferentes módulos de *hardware* e *software*, coordenando a troca de informações entre sensores, atuadores e unidades de processamento, o que permite ao veículo receber e processar dados sobre as condições ambientais, planejar seu movimento e executar ações de controle (FOSSEN, 2011; NÚÑEZ et al., 2022).

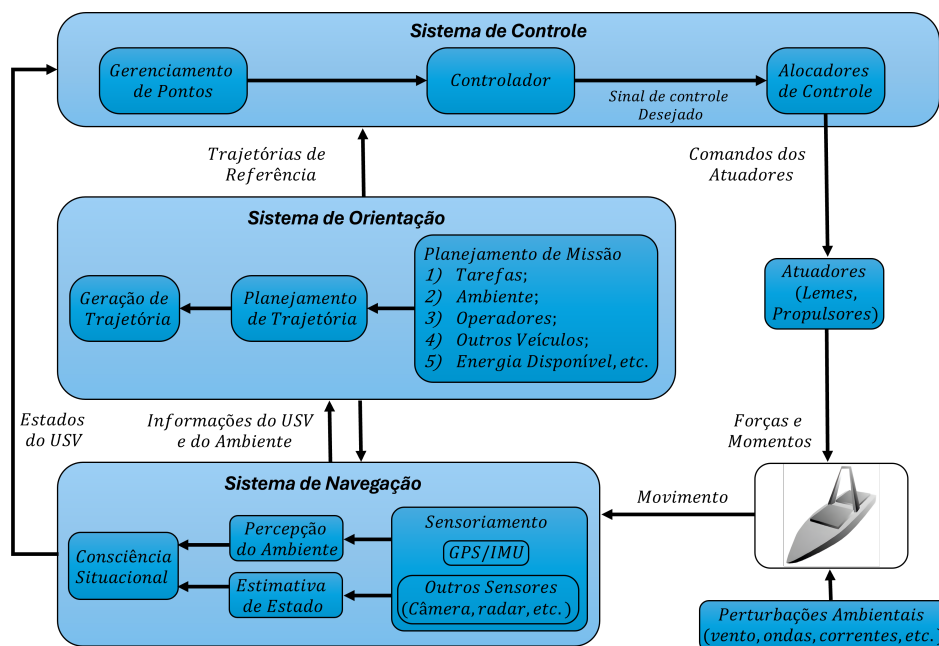


Figura 2 – Estrutura generalizada do sistema GNC de um USV (Fonte: Adaptado de (LIU et al., 2016)).

O sistema de orientação exibido na Figura 2, é o módulo responsável por gerar e atualizar continuamente as trajetórias de referência que o veículo deve seguir durante a missão. Ele recebe como entradas os pontos de passagem definidos pelo usuário ou pelo planejador de missão, bem como as informações de posição, velocidade e orientação fornecidas pelo sistema de navegação. Com base nesses dados, o sistema de orientação

calcula as trajetórias e referências temporais de posição e velocidade, que são enviadas ao sistema de controle. Em muitos casos, técnicas avançadas de otimização são empregadas para determinar a trajetória ou caminho ótimo que a embarcação deve seguir, considerando fatores como recurso energético, tempo mínimo de navegação, planejamento de rotas em função das condições climáticas, prevenção de colisões, controle de formação e sincronização. Alguns USVs possuem um módulo de planejamento dinâmico, que permite replanejar a missão e introduzir pontos de passagem no sistema de orientação que não foram previamente definidos (FOSSSEN, 2011; NÚÑEZ et al., 2022).

O sistema de controle é o módulo responsável por calcular as forças e momentos que o sistema de propulsão deve gerar, com base nas instruções fornecidas pelos sistemas de orientação e navegação, a fim de que o veículo atinja um determinado objetivo de controle. Ele recebe como entradas as referências desejadas de posição, velocidade e aceleração, bem como o estado atual dessas variáveis, obtido por meio dos sensores embarcados. Entre os principais objetivos de controle, destacam-se a minimização do consumo de energia, a regulação de ponto de referência, o acompanhamento de trajetória, o seguimento de caminho e o controle de manobras (FOSSSEN, 2011; LIU et al., 2016).

O sistema de navegação é o módulo responsável por estimar os estados atuais e futuros da embarcação, incluindo posição, orientação, velocidade e aceleração, além de integrar informações ambientais obtidas por meio de sensores específicos. Esses dados são processados e enviadas aos sistemas de orientação e controle, permitindo o planejamento de trajetórias e a execução de manobras (LIU et al., 2016; NÚÑEZ et al., 2022).

2.2 Modelo Matemático do USV

O modelo matemático de uma embarcação é composto por duas partes principais: o modelo cinemático, que tem como objetivo representar de forma geométrica como a posição e orientação da embarcação varia ao longo do tempo; e o modelo dinâmico, que descreve a relação entre as forças aplicadas ao veículo e o movimento resultante dessas forças (ER et al., 2023). O movimento de embarcações marítimas possui seis graus de liberdade (*Degrees of Freedom* – DoF), que representam um conjunto de deslocamentos e rotações independentes capazes de descrever completamente a posição e a orientação da embarcação (FOSSSEN, 2011). Os seis DoFs, segundo a notação da *Society of Naval Architects and Marine Engineers* (SNAME) para embarcações marítimas (SNAME, 1950), são apresentados na Figura 3.

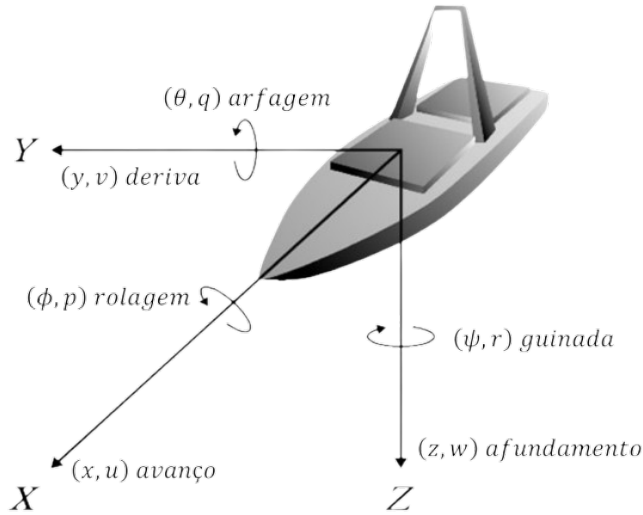


Figura 3 – Componentes de movimento no sistema referencial de corpo fixo para USV (Fonte: Adaptado de (FURTADO, 2025)).

Os seis graus de liberdade apresentados na Figura 3 são denominados como: avanço (*surge*), desvio (*sway*), afundamento (*heave*), rolagem (*roll*), arfagem (*pitch*) e guinada (*yaw*). A notação SNAME com forças, momentos, velocidades, posições e ângulos de embarcações é apresentada na Tabela 1.

Tabela 1 – Notação SNAME para embarcações marítimas.

DoF	Descrição	Forças e momentos	Posições e ângulos de Euler	Vel. lineares e angulares
1	avanço (<i>surge</i>)	X	x	u
2	deriva (<i>sway</i>)	Y	y	v
3	afundamento (<i>heave</i>)	Z	z	w
4	jogo (<i>roll</i>)	K	ϕ	p
5	arfagem (<i>pitch</i>)	M	θ	q
6	guinada (<i>yaw</i>)	N	ψ	r

O movimento de embarcações marítimas em seis graus de liberdade é descrito por equações vetoriais. A formulação geral da modelagem dinâmica e cinemática dessas embarcações, conforme apresentada em (FOSSEN, 1994), é dada por

$$\mathbf{M}\dot{\nu} + \mathbf{C}(\nu)\nu + \mathbf{D}_{\text{amp}}(\nu)\nu + \mathbf{g}(\eta) = \tau + \mathbf{g}_0 + \omega, \quad (2.1)$$

$$\dot{\eta} = \mathbf{J}(\eta)\nu, \quad (2.2)$$

sendo

- $\eta = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T$ o vetor da posição generalizada (posição e orientação);
- $\nu = [u, v, w, p, q, r]^T$ o vetor da velocidade generalizada (linear e angular);
- $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz de inércia;
- $\mathbf{C}(\nu) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz de Coriolis-centrípeta;
- $\mathbf{D}_{\text{amp}}(\nu) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz de amortecimento;
- \mathbf{g}_0 forças gravitacionais;
- $\mathbf{g}(\eta)$ forças de empuxo;
- $\mathbf{J}(\eta) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ a matriz Jacobiana de transformação cinemática;
- τ o vetor de força generalizada (forças e momentos) gerada pelos propulsores;
- ω o vetor de perturbações ambientais (ventos, ondas e correntezas);

O vetor η descreve a posição e ângulos de Euler e o vetor ν representa as velocidades linear e angulares, conforme apresentado na Tabela 1.

2.2.1 Sistemas de Coordenadas

A análise do movimento de embarcações marítimas em seis graus de liberdade requer a definição de dois sistemas de coordenadas centrados na Terra, o Sistema de Coordenadas Inercial Centrado na Terra (*Earth-Centered Inertial* – ECI) e o Sistema de Coordenadas Centrado na Terra e Fixo à Terra (*Earth-Centered Earth-Fixed* – ECEF), além de pelo menos dois sistemas de coordenadas de referência geográfica, o *North-East-Down* (NED) e o *Body-Fixed* (BODY), que descrevem suas posições e orientações. Em aplicações relacionadas ao movimento horizontal de embarcações marítimas, são considerados principalmente o sistema geográfico NED e BODY (FOSSEN, 2011).

O sistema de coordenadas NED representado por $\{n\} = (x_n, y_n, z_n)$ com origem o_n é definido como um plano tangente à superfície da Terra. Nesse sistema, o eixo x aponta para o Norte verdadeiro, o eixo y para o Leste e o eixo z é orientado para baixo, perpendicular à superfície terrestre. O sistema $\{n\}$ apresenta as coordenadas λ e μ em relação ao sistema ECEF, que representam a longitude e latitude, respectivamente. Em situações onde a longitude e a latitude são consideradas constantes, adota-se um plano tangente fixo à superfície da Terra para fins de navegação (ER et al., 2023).

O sistema de coordenadas BODY representado por $\{b\} = (x_b, y_b, z_b)$ com origem o_b é um sistema móvel, fixo à embarcação. A posição e a orientação da embarcação são expressas em relação a um referencial inercial, enquanto as velocidades lineares e angulares são representadas no sistema de coordenadas fixo ao corpo. A origem desse sistema o_b , é

posicionado no Centro de Origem (CO) da embarcação. Os eixos do corpo (x_b, y_b, z_b) são alinhados aos eixos principais de inércia, sendo o eixo x_b longitudinal e direcionado da popa para a proa, o eixo y_b transversal e direcionado para estibordo, e o eixo z_b orientado para baixo (FOSSSEN, 2011).

2.3 Modelo Matemático do USV para Três Graus de Liberdade

O deslocamento horizontal utiliza o modelo em três graus de liberdade para o controle de manobrabilidade, considerando questões de simetria e flutuabilidade, para desprezar os demais graus de liberdade. Esse modelo contempla apenas os movimentos no plano horizontal, representados pelas dinâmicas das velocidades de *surge* (velocidade longitudinal da embarcação na direção do seu eixo), *sway* (velocidade perpendicular ao eixo, responsável pelo movimento lateral do USV) e *yaw* (velocidade angular do veículo em torno de seu eixo vertical) (FOSSSEN, 2011), como apresentado na Figura 4.

O modelo reduzido (3DoF) é determinado a partir das seguintes considerações: (i) os movimentos *roll*, *pitch* e *heave* são desconsiderados, ou seja, as velocidades w , p , e q são nulas; (ii) o veículo possui uma distribuição de massa homogênea e simétrica no plano $X - Z$, tal que $I_{xy} = I_{yz} = 0$; (iii) o centro de gravidade da força gravitacional (CG) e o centro de flutuabilidade (CF) estão localizados na mesma direção no eixo Z (FOSSSEN, 2011; SETIAWAN et al., 2021).

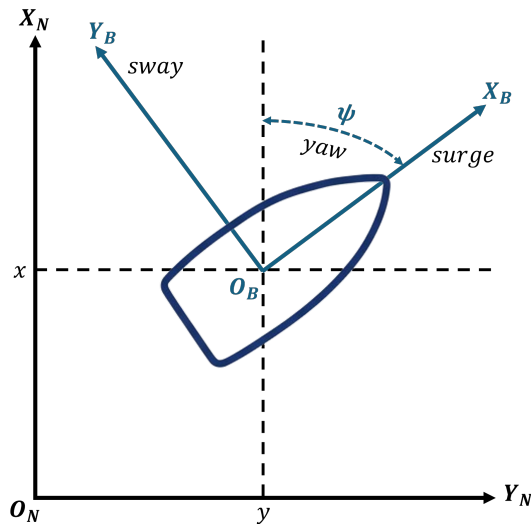


Figura 4 – Representação do movimento horizontal do USV - 3DoF.

O movimento da embarcação no plano horizontal apresentado na Figura 4, é descrito utilizando dois sistemas de coordenadas, limitados a duas dimensões: o referencial inercial, representado por X_N, O_N, Y_N (NED), e o referencial fixo ao corpo, representado por X_B, O_B, Y_B (BODY) (TOMERA; PODGÓRSKI, 2021). O deslocamento horizontal

é caracterizado pelas componentes de velocidade u e v , que representam as velocidades lineares nas direções X e Y , respectivamente, e r corresponde à velocidade angular em torno do eixo Z (FOSSSEN, 2011).

2.3.1 Dinâmica em Três Graus de Liberdade

A equação que descreve a dinâmica não linear do movimento em três graus de liberdade de uma embarcação no plano horizontal, considerando um amortecimento linear e desconsiderando os termos de flutuabilidade e gravidade, uma vez que o objetivo é modelar apenas o movimento horizontal da embarcação, é dada por (FOSSSEN, 2011)

$$\mathbf{M}\dot{\nu} + \mathbf{C}(\nu)\nu + \mathbf{D}_p\nu = \tau + \omega, \quad (2.3)$$

sendo $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz de inércia do sistema, $\mathbf{C}(\nu) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz de Coriolis-centrípeta, $\mathbf{D}_p \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz de amortecimento linear, $\nu = [u, v, r]^T$ é o vetor de velocidade, sendo u e v as componentes lineares de velocidade do movimento nas direções *surge* e *sway*, respectivamente, e r é a velocidade angular de *yaw*, $\tau = [\tau_u, \tau_v, \tau_r]^T$ é o vetor de entrada de controle constituído pelas forças de *surge* e *sway* e o momento de *yaw* produzidos pelos atuadores da embarcação e ω o vetor de perturbações, como distúrbios ambientais.

2.3.1.1 Matriz de Inércia

A matriz de inércia (\mathbf{M}) para embarcações marítimas, apresentada na Equação (2.3) é composta pela soma da matriz de inércia de corpo rígido (\mathbf{M}_{RB}) e da matriz de inércia de massa adicionada (\mathbf{M}_A) (FOSSSEN, 2011):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_A. \quad (2.4)$$

A matriz de inércia de corpo rígido é composta pela massa e pelos momentos de inércia do veículo. Essa matriz é simétrica e definida positiva (FOSSSEN, 2011):

$$\mathbf{M}_{RB} = \mathbf{M}_{RB}^T > 0. \quad (2.5)$$

A matriz de inércia de corpo rígido para três graus de liberdade é dada por

$$\mathbf{M}_{RB} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & mx_g \\ 0 & mx_g & I_z \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

sendo m a massa da embarcação, x_g é a distância entre a origem do sistema de coordenadas e o centro de gravidade ao longo do eixo x , e I_z é o momento de inércia da embarcação em relação ao eixo vertical.

A matriz de inércia de massa adicionada representa as forças e momentos induzidos pelas pressões hidrodinâmicas resultantes do movimento harmônico forçado da embarcação, sendo esses efeitos proporcionais à sua aceleração (FOSSSEN, 2011; ROSARIO et al., 2017). Essa matriz é dada por

$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} -X_{\dot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & -Y_{\dot{v}} & -Y_{\dot{r}} \\ 0 & -Y_{\dot{r}} & -N_{\dot{r}} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

sendo $X_{\dot{u}}$ a variação da força na direção de *surge* devido à aceleração longitudinal, $Y_{\dot{v}}$ é a variação da força na direção de *sway* em função da aceleração lateral, $Y_{\dot{r}}$ é a variação da força lateral decorrente da aceleração angular de *yaw* e $N_{\dot{r}}$ é o momento em torno do eixo de *yaw* associado à aceleração angular.

Logo, a matriz de inércia (\mathbf{M}) é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m - X_{\dot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & m - Y_{\dot{v}} & mx_g - Y_{\dot{r}} \\ 0 & mx_g - Y_{\dot{r}} & I_z - N_{\dot{r}} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

A matriz \mathbf{M} , apresentada na Equação (2.8), descreve a inércia total da embarcação no plano horizontal, considerando tanto a contribuição do corpo rígido quanto os efeitos da massa adicionada.

2.3.1.2 Matriz de Coriolis-Centrípeta

A matriz de Coriolis-centrípeta representa as forças e momentos centrípetos e de Coriolis que surgem devido à rotação do sistema de referência fixo ao corpo (BODY) em relação ao sistema inercial (NED) (FOSSSEN, 2011). Essa matriz é expressa por

$$\mathbf{C}(\nu) = \mathbf{C}_{RB}(\nu) + \mathbf{C}_A(\nu), \quad (2.9)$$

sendo $\mathbf{C}_{RB}(\nu)$ a matriz de Coriolis-centrípeta associada ao corpo rígido e $\mathbf{C}_A(\nu)$ é a matriz correspondente aos efeitos de massa adicionada. A matriz de Coriolis-centrípeta de corpo rígido apresenta a característica de ser antissimétrica, ou seja,

$$\mathbf{C}_{RB}(\nu) = -\mathbf{C}_{RB}^T(\nu), \quad (2.10)$$

o que implica o produto quadrático $\nu^T \mathbf{C}_{RB}(\nu)\nu = 0$, confirmando que as forças e momentos centrípetos e de Coriolis não realizam trabalho físico sobre o sistema (FOSSSEN, 2011). Para três graus de liberdade, a matriz de Coriolis-centrípeta de corpo rígido é dada por

$$\mathbf{C}_{RB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m(x_g r + v) \\ 0 & 0 & mu \\ m(x_g r + v) & -mu & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

e a matriz de Coriolis-centrípeta de massa adicionada dada por

$$\mathbf{C}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{r}}r \\ 0 & 0 & -X_{\dot{u}}u \\ -Y_{\dot{v}}v - Y_{\dot{r}}r & X_{\dot{u}}u & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Logo, a matriz de Coriolis-centrípeta \mathbf{C} é dada por

$$\mathbf{C}(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(m - Y_{\dot{v}})v - (mx_g - Y_{\dot{r}})r \\ 0 & 0 & (m - X_{\dot{u}})u \\ (m - Y_{\dot{v}})v + (mx_g - Y_{\dot{r}})r & -(m - X_{\dot{u}})u & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

A matriz \mathbf{C} , apresentada na Equação (2.13), representa as forças de Coriolis e centrípetas que surgem devido às velocidades lineares e angulares do veículo.

2.3.1.3 Matriz de Amortecimento

A matriz de amortecimento hidrodinâmico descreve as forças e momentos que atuam sobre a embarcação de forma contrária ao deslocamento, como o atrito de superfície, o amortecimento por deriva de onda, o amortecimento potencial e o amortecimento devido ao desprendimento de vórtices (BREIVIK, 2003; FOSSSEN, 2011). A matriz total de amortecimento hidrodinâmico é expressa por

$$\mathbf{D}_{\text{amp}}(\nu_r) = \mathbf{D}_{\mathbf{p}} + \mathbf{D}_{\mathbf{n}}(\nu_r), \quad (2.14)$$

sendo $\mathbf{D}_{\mathbf{p}}$ a componente linear, associada principalmente ao amortecimento potencial e ao atrito de superfície, e $\mathbf{D}_{\mathbf{n}}(\nu_r)$ é a componente não linear, relacionada ao amortecimento quadrático e a termos de ordem superior. Os diferentes termos de amortecimento contribuem simultaneamente para os efeitos lineares e quadráticos; contudo, em geral, é difícil separar essas influências. Em alguns casos, adota-se apenas o amortecimento linear, especialmente quando os efeitos não lineares são pouco significativos. A componente linear é particularmente relevante em baixas velocidades, pois garante a convergência exponencial

do movimento. A componente não linear torna-se predominante em altas velocidades, refletindo os efeitos quadráticos significativos associados à interação com ondas e ao desprendimento de vórtices (FOSSSEN, 2011).

A matriz de amortecimento linear e não linear é dada respectivamente, por (FOSSSEN, 2011)

$$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} -X_u & 0 & 0 \\ 0 & -Y_v & -Y_r \\ 0 & -N_v & -N_r \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{D}_n(\nu) = \begin{bmatrix} -X_{|u|u} & 0 & 0 \\ 0 & -Y_{|v|v} & -Y_{|r|v} \\ 0 & -N_{|v|v} & -N_{|r|r} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Logo, a matriz de amortecimento hidrodinâmico (\mathbf{D}_{amp}) é dada por

$$\mathbf{D}_{amp}(\nu) = \begin{bmatrix} -X_u - X_{|u|u} & 0 & 0 \\ 0 & -Y_v - Y_{|v|v} & -Y_r - Y_{|r|v} \\ 0 & -N_v - N_{|v|v} & -N_r - N_{|r|r} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

sendo X_u a força de amortecimento na direção X causada pela velocidade u , Y_v é a força de amortecimento na direção Y causada pela velocidade v , e os outros termos da matriz de forma equivalente.

2.4 Controle Digital

Com os avanços da eletrônica e da computação, os sistemas de controle passaram por uma transformação significativa, possibilitando a transição do controle analógico para a implementação digital de controladores em plataformas como microcontroladores, microprocessadores e processadores digitais de sinais (DSPs) (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013).

Os controladores analógicos operam com sinais de tempo contínuo. A variável de processo é medida por meio de um sensor, que converte a grandeza física em um sinal elétrico, pneumático ou mecânico. Esse sinal é então comparado com uma referência de mesma grandeza, e a diferença entre eles é aplicada ao controlador, constituído por um sistema elétrico, pneumático ou mecânico, que gera um sinal contínuo, que é aplicado na entrada da planta (BAZANELLA; JUNIOR, 2005), conforme apresentado na Figura 5.

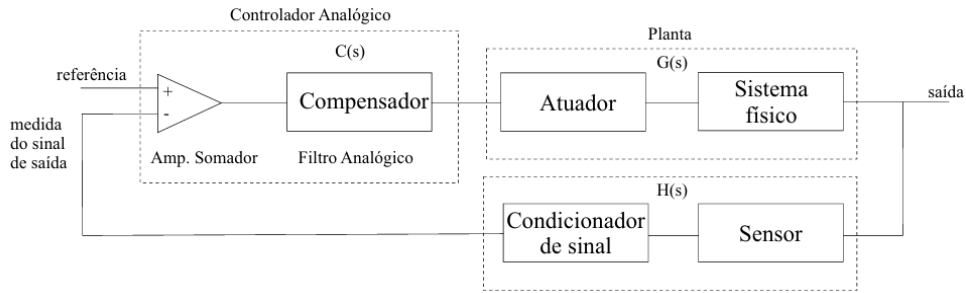


Figura 5 – Sistema de controle analógico (Fonte: (BAZANELLA; JUNIOR, 2005)).

O controle digital é uma abordagem moderna em que os sinais de entrada e saída são processados de forma digital, utilizando computadores, microprocessadores ou microcontroladores (SILVA et al., 2025). Um sistema de controle digital é representado pelo diagrama em blocos da Figura 6.

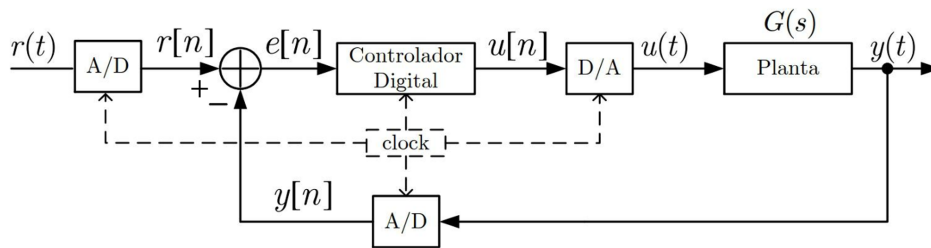


Figura 6 – Sistema de controle com realimentação unitária - tempo discreto (Fonte: (ANGELICO; NEVES, 2023)).

Observa-se na Figura 6 que a entrada de referência $r(t)$ é convertida em um sinal digital por meio de um conversor analógico-digital (A/D), possibilitando seu processamento pelo controlador digital. O sinal de controle $u[n]$ é convertido de volta para o domínio analógico por um conversor digital-analógico (D/A), antes de ser aplicado à planta contínua. A realimentação da saída do sistema, $y(t)$, também passa por um conversor A/D para que possa ser comparada com a referência no domínio digital e processada pelo controlador. Essa estrutura caracteriza um sistema de controle digital, onde os dados são processados em instantes discretos, mas a planta permanece no domínio contínuo (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013).

Entre as vantagens do controle digital estão a maior flexibilidade dos algoritmos de controle, que podem ser facilmente modificados ou ajustados por meio de *software*; a maior precisão no processamento dos sinais; a possibilidade de implementação de estratégias de controle complexas e adaptativas; a robustez frente a variações de temperatura e à alteração das características nominais dos componentes eletrônicos; e a mesma plataforma de *hardware* permite implementar diferentes tipos de projetos de controle, facilitando

alterações na sintonia dos controladores e tornando o processo de desenvolvimento mais simples e ágil (BAZANELLA; JUNIOR, 2005; FRANKLIN et al., 1998).

Nos sistemas de controle digital, os sinais coletados são amostrados no tempo para que possam ser processados pelo controlador, conforme é exibido na Figura 6. Essa amostragem consiste em medir o valor do sinal contínuo em instantes específicos e periódicos, definidos por uma taxa de amostragem. Uma taxa de amostragem muito baixa pode resultar em perda de informações sobre a dinâmica do sistema e provocar *aliasing*. Por outro lado, uma taxa excessivamente alta pode aumentar o custo computacional e esbarra em limitações do *hardware* digital (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013; ANGELICO; NEVES, 2023).

De acordo com o Teorema de Amostragem de Nyquist-Shannon, para que um sinal contínuo possa ser reconstruído com precisão a partir de suas amostras, a frequência de amostragem deve ser maior ou igual ao dobro da maior frequência presente no sinal (ANGELICO; NEVES, 2023), ou seja,

$$\omega_s \geq 2\omega_m, \quad (2.18)$$

sendo ω_s a frequência de amostragem (em rad/s) e ω_m é a maior frequência presente no sinal.

A discretização de sistemas de controle é um processo fundamental para a implementação prática de controladores digitais, pois estabelece a ponte entre os domínios contínuo e discreto. Nesse processo, o sinal discreto é uma aproximação do sinal contínuo, obtida por meio de valores amostrados, permitindo que a dinâmica do sistema seja analisada e controlada no tempo discreto por algoritmos digitais. A escolha da técnica de discretização exerce influência direta sobre o comportamento dinâmico e o desempenho do sistema, sendo as mais utilizadas o segurador de ordem zero (*Zero-Order Hold* - ZOH), os métodos *backward rectangular* e *forward rectangular*, e a transformação bilinear, também conhecida como método de *Tustin* (YANARATEŞ; OKUR; ALTAN, 2023).

2.4.1 Hardware-in-the-Loop

O controle digital permite a realização de simulações e validações antes da implementação física do sistema, possibilitando a verificação de aspectos fundamentais como estabilidade, desempenho dinâmico e interação com a planta real. Essa abordagem facilita ajustes finos nos parâmetros do controlador ainda na fase de projeto, reduzindo significativamente os riscos de falhas quando o sistema é colocado em operação e contribuindo para a diminuição de custos e do tempo de desenvolvimento.

Nesse contexto, a técnica HIL aplicada ao controle digital amplia ainda mais essa capacidade, uma vez que integra o controlador físico a um modelo computacional da

planta (MIHALIČ; TRUNTIČ; HREN, 2022). Essa integração possibilita a avaliação do comportamento do sistema, levando em consideração limitações do *hardware*, atrasos de processamento, efeitos da discretização e características próprias da implementação embarcada, sem comprometer a integridade do sistema ou dos equipamentos envolvidos (LOPES, 2017).

A utilização da técnica HIL nas indústrias aeroespacial e de defesa teve início na década de 1950, impulsionada pela necessidade de testar e validar sistemas críticos de forma segura e controlada. Com os avanços nas tecnologias computacionais e a redução dos custos de *hardware*, essa técnica passou a ser amplamente difundida e, atualmente, é aplicada em diversos segmentos de atuação, tais como as indústrias aeroespacial, química, de produção, robótica, automotiva e de defesa, consolidando-se como uma ferramenta essencial no desenvolvimento e na validação de sistemas de controle embarcados (COSTALONGA, 2020).

O princípio de funcionamento da técnica HIL, assim como os principais componentes necessários para sua implementação, é apresentado nas Figuras 7(a) e 7(b).

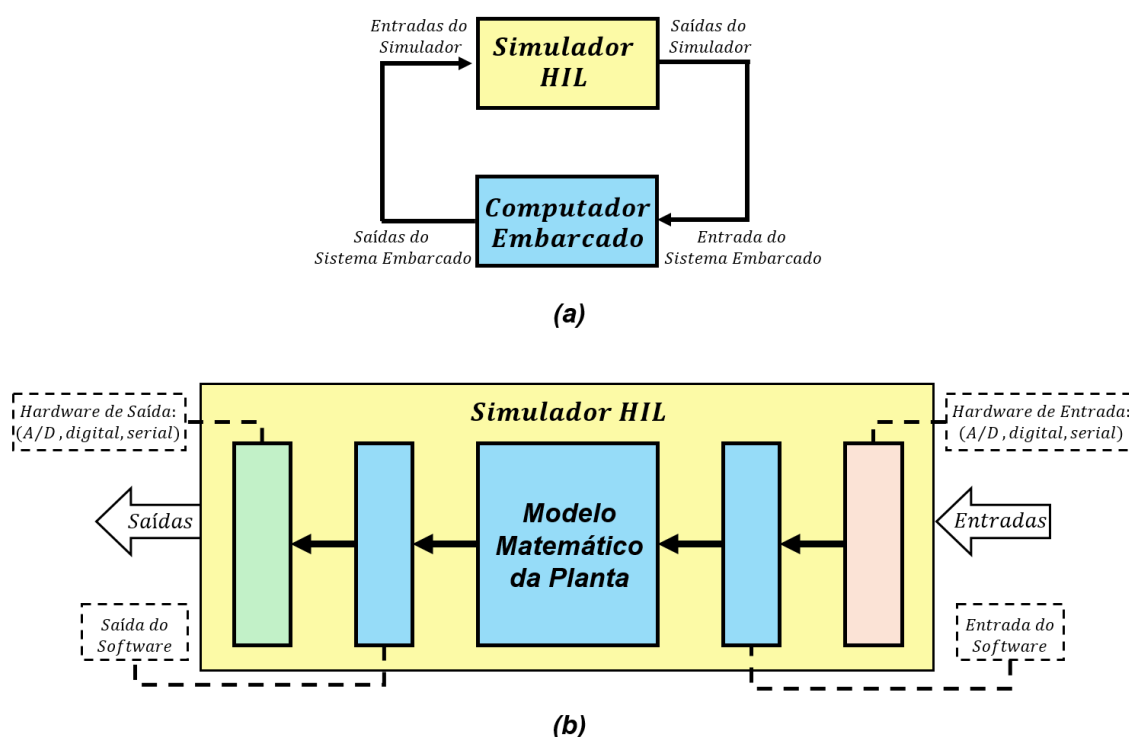


Figura 7 – Simulador HIL: (a) Diagrama em blocos de um sistema embarcado conectado a um simulador HIL; (b) componentes de um simulador HIL básico (Fonte: Adaptado de (MIHALIČ; TRUNTIČ; HREN, 2022)).

A Figura 7(a) apresenta o diagrama em blocos que descreve a interação entre o sistema embarcado, responsável pela execução do algoritmo de controle em *hardware*, e o simulador HIL, que simula o comportamento da planta. O controlador recebe sinais

de saída do simulador que representa as medições de sensores e gera sinais de saída correspondentes às ações de controle, que normalmente atuam sobre a planta física. Esses sinais de controle são então enviados ao simulador, que utiliza o modelo matemático da planta para calcular as novas variáveis de saída do sistema e envia ao controlador. Dessa forma, é possível validar algoritmos de controle, verificar estabilidade e desempenho, e simular diferentes condições operacionais sem risco de danificar o sistema real.

A estrutura interna básica de um simulador HIL é exibido na Figura 7(b), destacando os componentes fundamentais para simulação do comportamento da planta física. Inicialmente, os sinais provenientes do controlador passam por módulos de *hardware* de entrada, responsáveis por converter esses sinais para formatos compatíveis com o simulador. Após esse processamento, os sinais são encaminhados ao *software* de entrada, que interpreta e fornece essas informações ao modelo matemático da planta. O núcleo do simulador contém o modelo matemático da planta, que descreve formalmente as dinâmicas físicas e com base nos sinais de controle recebidos calcula as novas saídas correspondentes às variáveis que seriam medidas pelos sensores. Essas saídas passam por módulos de *hardware* responsáveis por converter os dados do modelo em sinais compatíveis com o controlador físico. Assim, o simulador HIL estabelece um ciclo fechado entre o controlador digital físico e o modelo matemático da planta, o qual reproduz o comportamento aproximado da planta e garante que o processo de teste e validação do controlador seja realizado.

A técnica HIL apresenta flexibilidade quanto à escolha dos componentes implementados em *hardware* ou simulados em *software*, sendo uma configuração comumente utilizada para exemplificar sua aplicação apresentada na Figura 8.

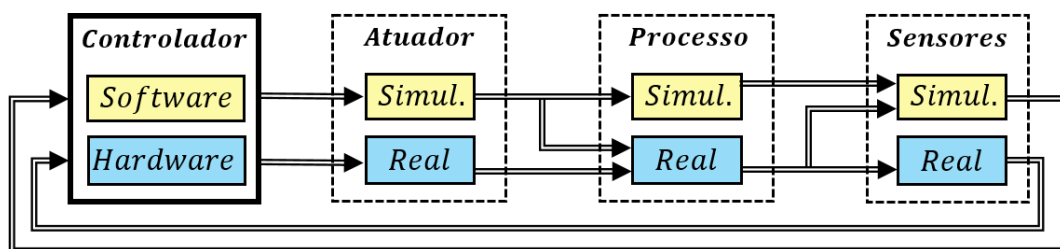


Figura 8 – Configuração de aplicação de HIL (Fonte: Adaptado de (MIHALIČ; TRUNTIČ; HREN, 2022)).

Observa-se na Figura 8, que o sistema é composto por diferentes elementos, tais como atuadores, sensores, processos e o sistema de controle, sendo possível, em uma simulação HIL, implementar qualquer um desses componentes, ou combinações entre eles, tanto em *hardware* quanto em *software*, o que confere maior flexibilidade à validação e aos testes do sistema de controle.

2.5 Controle Ótimo

O projeto de controladores clássicos é, de modo geral, um processo heurístico, no qual diversos métodos de análise são aplicados de forma iterativa até que se encontrem parâmetros de projeto capazes de produzir um sistema cujo desempenho atenda aos critérios estabelecidos nos domínios do tempo e da frequência, tais como tempo de subida, tempo de acomodação, sobressinal, e margens de ganho e de fase. Com os avanços tecnológicos, surgiram sistemas mais complexos, especialmente os sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (*Multiple-Input Multiple-Output* — MIMO), que se diferenciam dos sistemas tradicionais com entrada única e saída única (*Single-Input Single-Output* — SISO). Esses sistemas MIMO exigem critérios de desempenho mais rigorosos e diversificados do que aqueles contemplados pelos métodos clássicos, devido às interações entre múltiplas entradas e saídas (KIRK, 2004).

Uma abordagem para o projeto desses sistemas complexos é a teoria de controle moderno, cuja aplicação se tornou viável com o avanço dos computadores digitais. O objetivo dessa teoria é determinar os sinais de controle que permitam ao processo respeitar suas restrições físicas enquanto otimiza (minimiza ou maximiza) um determinado critério de desempenho (NAIDU, 2002; KIRK, 2004).

A teoria de controle clássica, tradicionalmente aplicada a sistemas SISO, fundamenta-se principalmente na utilização da transformada de Laplace e em métodos de análise no domínio da frequência. Por outro lado, a teoria de controle moderno emprega a representação em variáveis de estado, na qual a dinâmica do sistema é descrita por um conjunto de equações diferenciais (ou equações de diferenças, no caso discreto) denominadas espaço de estados (*State-Space* — SS) (NAIDU, 2002). A dinâmica de um sistema linear no SS é representada de forma geral por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.19)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.20)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de estado, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ é a matriz de transmissão direta, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saída, n é a ordem do sistema, m é a quantidade de entradas e p é a quantidade de saídas (OGATA, 2011). No domínio discreto, o modelo equivalente é dado por

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k, \quad (2.21)$$

$$y_k = C_d x_k + D_d u_k, \quad (2.22)$$

sendo x_k o vetor de estados no instante discreto k , u_k é o vetor de sinais de controle aplicado no mesmo instante, e A_d , B_d , C_d e D_d é as matrizes discretizadas do sistema contínuo. Essas matrizes são obtidas a partir da discretização do modelo no domínio contínuo, considerando o período de amostragem T_s . A matriz A_d descreve como o estado evolui de um instante discreto para o seguinte, enquanto B_d representa a influência do sinal de controle aplicado em cada passo. As matrizes C_d e D_d definem como o estado e a entrada afetam a saída do sistema no domínio discreto.

A dinâmica do sistema no tempo discreto ocorre por iterações sucessivas no tempo, ou seja, o estado x_{k+1} é calculado a partir do estado anterior x_k e da entrada u_k . Diferentemente do modelo contínuo, que utiliza equações diferenciais, o modelo discreto é formulado em termos de equações de diferença, permitindo que a atualização do sistema seja realizada passo a passo. Essa característica torna o modelo especialmente adequado para implementação em controladores digitais, que operam de forma sequencial a cada período de amostragem.

Na teoria de controle moderno, o problema de controle ótimo consiste em determinar uma lei de controle capaz de conduzir o sistema dinâmico a um estado desejado (ou trajetória) e, ao mesmo tempo maximizar ou minimizar um índice de desempenho. Esse índice pode assumir diferentes formas, como: problemas de tempo mínimo, em que busca-se levar o sistema ao estado desejado no menor tempo possível; problemas de mínimo combustível, cujo objetivo é minimizar o esforço total de controle aplicado ao sistema; e problemas de mínima energia, nos quais se pretende reduzir a energia gasta pelo sinal de controle ao longo do processo (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012). Uma formulação geral para o índice de desempenho é dada por

$$J = \phi(x(T), T) + \int_{t_0}^T L(x(t), u(t), t) dt, \quad (2.23)$$

sendo $\phi(\cdot)$ o custo terminal e $L(\cdot)$ é o custo instantâneo (ou Lagrangiano), que podem ser funções gerais do estado, do controle e do tempo. Os problemas em controle ótimo são classificados com base na estrutura do índice de desempenho J . Se o índice de desempenho contém apenas o termo terminal $\phi(\cdot)$, ele é denominado problema de Mayer; se contém apenas o termo integral, é chamado de problema de Lagrange; e se contém ambos os termos, é classificado como problema de Bolza, conforme apresentado na Equação (2.23) (NAIDU, 2002).

O problema de implementação de controladores ótimos digitais requer que a ação de controle seja definida no domínio discreto. Isso ocorre porque, em sistemas embarcados, a ação de controle é aplicada de forma amostrada, e tanto os estados quanto as entradas são processados em instantes discretos pelo microcontrolador.

2.5.1 O problema de Controle Ótimo Discreto

Seja a planta descrita por uma equação dinâmica não linear e variável no tempo, no domínio discreto, dada por

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, k), \quad (2.24)$$

sendo $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $u_k \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada de controle, $f(\cdot)$ é a função que descreve a dinâmica do sistema, e x_0 é a condição inicial. A Equação (2.24) representa uma restrição, pois determina o estado no instante $k + 1$ dado o controle e o estado no instante k . O índice de desempenho escalar para o sistema dinâmico, é dado por

$$J_i = \phi(N, x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L(x_k, u_k, k), \quad (2.25)$$

sendo o intervalo de tempo $[i, N]$ discreto, com passo de amostragem fixo, $\phi(\cdot)$ é a função de custo final do estado com instante final N , e $L(\cdot)$ é a função de custo instantâneo, geralmente dependente do instante k , do estado x_k e da entrada de controle u_k em cada passo intermediário $k \in [i, N]$.

O problema de controle ótimo consiste em encontrar a lei de controle u_k^* para todo $k \in [i, N]$ que conduza o sistema da Equação (2.24) ao longo de uma trajetória x_k^* , de modo que o valor do índice de desempenho da Equação (2.25) seja otimizado. O problema de otimização pode se apresentar como um problema de minimização ou maximização do índice de desempenho, dependendo do significado atribuído a ele. O problema de controle ótimo é avaliado tanto para o caso de regulação quanto para o de rastreamento (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012).

A solução clássica do problema de controle ótimo é obtida por meio da aplicação da teoria dos multiplicadores de Lagrange, fundamentada no Cálculo Variacional, o qual fornece as ferramentas matemáticas necessárias para estabelecer condições de otimalidade a partir da minimização (ou maximização) de um funcional. Nessa abordagem, analisa-se como pequenas variações admissíveis nas trajetórias de estado e de controle afetam o valor do funcional, impondo-se que a primeira variação seja nula para que a solução seja ótima. Essa formulação conduz ao Princípio do Mínimo de Pontryagin e à introdução do Hamiltoniano e das equações adjuntas como condições necessárias de otimalidade (KIRK, 2004).

Uma alternativa à abordagem do cálculo variacional para a solução de problemas de controle ótimo é a programação dinâmica, introduzida na década de 50 por Richard Bellman. Essa metodologia fundamenta-se no princípio da otimalidade de Bellman, o qual estabelece que: Uma política ótima possui a propriedade de que, independentemente das decisões anteriores (isto é, dos controles aplicados anteriormente), as decisões restantes

devem constituir uma política ótima com relação ao estado resultante dessas decisões anteriores. Esse princípio reduz consideravelmente o número de estratégias de controle que precisam ser analisadas. Além disso, implica que a determinação da estratégia ótima deve ser feita trabalhando-se do tempo final para o inicial. Assim, o problema de controle ótimo formulado via programação dinâmica é um problema resolvido retroativamente no tempo (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012).

A abordagem variacional conduz a um problema de valor de duas fronteiras, no qual devem ser resolvidas simultaneamente as equações de estado e coestado. Para sistemas não lineares ou quando existem restrições adicionais sobre as variáveis de controle, esse conjunto de equações torna-se mais complexo e difícil de resolver. Por outro lado, a programação dinâmica pode ser aplicada diretamente a sistemas não lineares e, quanto mais restrições houver nas variáveis de controle e estado, menor tende a ser o conjunto de decisões admissíveis considerado no processo de otimização, o que pode contribuir para reduzir o esforço de busca pela solução ótima, uma vez que a otimização passa a ocorrer sobre um espaço de decisões mais limitado (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012).

2.5.2 Programação Dinâmica para Controle Ótimo

A programação dinâmica fornece um método sistemático para determinar leis de controle ótimas em sistemas dinâmicos, especialmente quando formulados em tempo discreto. Considerando um sistema descrito pela Equação (2.24), o objetivo é utilizar o princípio da otimalidade para determinar uma sequência de controles $\{u_k\}$ admissíveis que minimize a função de custo dada na Equação (2.25), sendo $[i, N]$ o intervalo de interesse (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012).

A solução é baseada no princípio da otimalidade, segundo o qual a política ótima, do estágio inicial até o final, é composta por decisões ótimas em cada estágio intermediário. Suponha que o custo ótimo a partir do instante $k + 1$ até o tempo final N já seja conhecido, isto é, que a função $J_{k+1}^*(x_{k+1})$ esteja disponível para todo x_{k+1} admissível, e que a sequência ótima de controles correspondente $u_{k+1}^*, u_{k+2}^*, \dots, u_{N-1}^*$ tenha sido determinada. Essa sequência produz o custo ótimo quando aplicada ao sistema cuja condição inicial no instante $k + 1$ é x_{k+1} , e depende, portanto, exclusivamente do valor de x_{k+1} (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012).

Considere, agora, que no instante k seja aplicado um controle arbitrário u_k e que, a partir do instante $k + 1$, seja utilizada a sequência ótima já conhecida. O custo total associado a essa decisão é

$$L_k(x_k, u_k) + J_{k+1}^*(x_{k+1}), \quad (2.26)$$

sendo x_k o estado no tempo k , e x_{k+1} é gerado pela dinâmica do sistema dado na Equação (2.24).

Pelo princípio da otimalidade de Bellman, o custo ótimo a partir do instante k é dado por (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012)

$$J_k^*(x_k) = \min_{u_k} \left[L_k(x_k, u_k) + J_{k+1}^*(x_{k+1}) \right], \quad (2.27)$$

conhecida como a equação de Bellman e o controle ótimo no instante k é dado por

$$u_k^* = \arg \min_{u_k} \left[L_k(x_k, u_k) + J_{k+1}^*(x_{k+1}) \right]. \quad (2.28)$$

Esse processo permite obter o controle ótimo por meio de uma busca recursiva, etapa por etapa, garantindo que a solução encontrada corresponde a um mínimo global (NAIDU, 2002).

2.5.3 O problema do Regulador Linear Quadrático Discreto

Ao analisar o LQR, observa-se que o índice de desempenho é formulado como uma função quadrática, correspondente a uma superfície quadrática em um espaço de dimensão $(n + m)$. O regulador discreto é um caso específico do problema de controle ótimo linear quadrático no domínio discreto. A dinâmica da planta a ser controlada é dada pela Equação (2.21), com condição inicial conhecida x_i . O objetivo do problema de controle ótimo discreto é determinar a sequência de controles $\{u_k\}$ que minimize um índice de desempenho quadrático utilizando o princípio da otimalidade para um horizonte finito, dado por

$$J_i = \frac{1}{2} x_N^T P_N x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k), \quad (2.29)$$

enquanto satisfaz as restrições dinâmicas do sistema dado na Equação (2.21), sendo $[i, N]$ o intervalo de tempo de interesse, $Q = Q^T \geq 0$ e $R = R^T > 0$ as matrizes de ponderações de estado e de controle, e $P_N = P_N^T \geq 0$ é uma matriz que pondera o estado final no instante N . As matrizes Q e P possuem dimensão $n \times n$, enquanto a matriz R possui dimensão $m \times m$. No problema do regulador, a lei de controle ótima tem como objetivo conduzir o sistema de um estado inicial não nulo x_i , no instante i , até o estado nulo no instante N , levando em consideração a utilização mínima de energia de controle (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012).

Assume-se que o estado inicial x_i é fixo, enquanto o estado final x_N é livre. Na aplicação da programação dinâmica, o procedimento é iniciado no estágio final N e procede-se no sentido reverso até o estágio inicial. Em cada estágio, determina-se o controle ótimo correspondente e calcula-se o custo ótimo $J_k^*(x_k)$ para cada estado admissível naquele instante.

Para começar, no estágio $k = N$, o custo ótimo é dado por

$$J_N^* = \frac{1}{2} x_N^T P_N x_N, \quad (2.30)$$

o que corresponde à penalidade associada ao estado final x_N no instante N . Agora, reduzindo-se o índice para $k = N - 1$, tem-se

$$J_{N-1} = \frac{1}{2} x_{N-1}^T Q x_{N-1} + \frac{1}{2} u_{N-1}^T R u_{N-1} + \frac{1}{2} x_N^T P_N x_N. \quad (2.31)$$

De acordo com a Equação (2.27), precisa-se encontrar o controle ótimo u_{N-1}^* para minimizar a função de custo (2.31). Dessa forma, usando-se a equação de estado (2.21), tem-se

$$J_{N-1} = \frac{1}{2} x_{N-1}^T Q x_{N-1} + \frac{1}{2} u_{N-1}^T R u_{N-1} + \frac{1}{2} (A_d x_{N-1} + B_d u_{N-1})^T P_N (A_d x_{N-1} + B_d u_{N-1}). \quad (2.32)$$

Como não há restrições sobre os estados e controles, pode-se calcular o valor mínimo da Equação (2.32) em relação a u_{N-1} , fazendo

$$\frac{\partial J_{N-1}}{\partial u_{N-1}} = R u_{N-1} + B_d^T P_N (A_d x_{N-1} + B_d u_{N-1}) = 0. \quad (2.33)$$

Resolvendo para o controle ótimo u_{N-1}^* , tem-se

$$u_{N-1}^* = - (B_d^T P_N B_d + R)^{-1} B_d^T P_N A_d x_{N-1}. \quad (2.34)$$

Definindo

$$K_{N-1} = (B_d^T P_N B_d + R)^{-1} B_d^T P_N A_d, \quad (2.35)$$

resultado na lei de controle ótima de realimentação dada por

$$u_{N-1}^* = -K_{N-1} x_{N-1}. \quad (2.36)$$

O custo ótimo no instante $k = N - 1$ é calculado substituindo-se a Equação (2.36) em (2.32), que após simplificações, resulta

$$J_{N-1}^* = \frac{1}{2} x_{N-1}^T [(A_d - B_d K_{N-1})^T P_N (A_d - B_d K_{N-1}) + K_{N-1}^T R K_{N-1} + Q] x_{N-1}. \quad (2.37)$$

Definindo

$$P_{N-1} = (A_d - B_d K_{N-1})^T P_N (A_d - B_d K_{N-1}) + K_{N-1}^T R K_{N-1} + Q. \quad (2.38)$$

reescrevendo a Equação (2.37), tem-se

$$J_{N-1}^* = \frac{1}{2} x_{N-1}^T P_{N-1} x_{N-1}. \quad (2.39)$$

Agora reduz-se para o estágio $k = N - 2$, logo tem-se

$$J_{N-2} = \frac{1}{2} x_{N-2}^T Q x_{N-2} + \frac{1}{2} u_{N-2}^T R u_{N-2} + \frac{1}{2} x_{N-1}^T P_{N-1} x_{N-1}, \quad (2.40)$$

sendo P_{N-1} dado pela Equação (2.38). Para determinar o controle ótimo u_{N-2}^* , aplica-se o princípio da otimalidade (2.27), minimizando-se a Equação (2.40) em relação a u_{N-2} , obtendo-se relações semelhantes às Equações (2.35), (2.36), (2.38) e (2.41). Por exemplo, a função de custo ótima torna-se

$$J_{N-2}^* = \frac{1}{2} x_{N-2}^T P_{N-2} x_{N-2}, \quad (2.41)$$

sendo P_{N-2} obtida de forma análoga à Equação (2.38), substituindo-se $N - 1$ por $N - 2$. Esse procedimento pode ser repetido para os estágios $N - 3, N - 4, \dots, i$.

De forma generalizada, para um instante arbitrário k , tem-se as seguintes relações

$$u_k^* = -K_k x_k, \quad (2.42)$$

$$K_k = \left(B_d^T P_{k+1} B_d + R \right)^{-1} B_d^T P_{k+1} A_d, \quad (2.43)$$

$$P_k = (A_d - B_d K_k)^T P_{k+1} (A_d - B_d K_k) + K_k^T R K_k + Q, \quad (2.44)$$

$$J_k^* = \frac{1}{2} x_k^T P_k x_k, \quad (2.45)$$

sendo a condição final P_N para a Equação (2.44) dada em (2.29). Essa formulação evidencia que a estratégia de controle ótimo é determinada de forma recursiva no tempo, a partir do estágio final. Se a sequência de ganhos ótimos da Equação (2.43) for aplicada na Equação (2.44), esta torna-se a equação matricial de Riccati estabilizada de Joseph. Substituindo-se a Equação (2.43) em (2.44), obtém-se

$$P_k = Q + A_d^T P_{k+1} A_d - A_d^T P_{k+1} B_d \left(R + B_d^T P_{k+1} B_d \right)^{-1} B_d^T P_{k+1} A_d, \quad (2.46)$$

que corresponde à equação HJB discreta para o caso DLQR.

Um caso particular do problema DLQR ocorre quando as matrizes A_d e B_d do sistema dinâmico, bem como as matrizes de ponderação Q e R , são invariantes no tempo e o intervalo de otimização é infinito, isto é, $(N - k) \rightarrow \infty$. Nessas condições, a existência e a estabilidade da solução do regulador podem ser garantidas supondo-se que o par (A_d, B_d) seja estabilizável e que o par (A_d, C_d) seja completamente observável, para qualquer matriz C_d tal que $C_d^T C_d = Q$. Então, para $N \rightarrow \infty$ tem-se que $P \triangleq P_{k+1} = P_k$ é constante e corresponde à única solução definida positiva da equação

$$P = Q + A_d^T P A_d - A_d^T P B_d (R + B_d^T P B_d)^{-1} B_d^T P A_d, \quad (2.47)$$

que é denominada Equação Algébrica de Riccati em Tempo Discreto (*Discrete Algebraic Riccati Equation* – DARE). Além disso, o sistema em malha fechada é descrito por

$$x_{k+1} = (A_d - B_d K_\infty) x_k, \quad (2.48)$$

o qual é assintoticamente estável, sendo K_∞ o ganho em regime permanente, dado por

$$K_\infty = (B_d^T P B_d + R)^{-1} B_d^T P A_d. \quad (2.49)$$

2.5.4 Formulação do Rastreador Linear Quadrático Discreto com Ação Integral

O objetivo do projeto de controle de um rastreador ótimo discreto (DLQT) é desenvolver um controlador capaz de gerar um seguidor (ou rastreador) de trajetória no domínio discreto, garantindo que o sistema acompanhe uma trajetória de referência ao longo de um intervalo de tempo. Essa tarefa é realizada por meio de uma lei de controle em malha fechada (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012).

O controlador DLQT com ação integral (DLQT-I) é uma extensão do controlador DLQT clássico, estruturado de modo a garantir a eliminação do erro estacionário mesmo na presença de perturbações. Enquanto o DLQT clássico busca minimizar o erro instantâneo entre a saída y_k e uma referência r , ele não assegura, por si só, erro de regime permanente nulo em sistemas que não possuem integradores na dinâmica. A adição de um estado integral corrige exatamente essa limitação, acrescentando à formulação um mecanismo equivalente à ação integral de controladores PI (RUSCIO, 2012).

Um controlador PI atua principalmente sobre a saída e é geralmente empregado em sistemas SISO, enquanto que o controlador ótimo MIMO DLQT-I utiliza realimentação de saída e estado. Isso é possível porque o problema de rastreamento é reformulado como um problema de regulação sobre um sistema aumentado, no qual o erro acumulado passa a ser tratado como um novo estado dinâmico (RUSCIO, 2012).

Seja um sistema linear descrito pela equação de estado, Equação (2.21), e pela equação de saída, Equação (2.22). O objetivo do projeto de controle é garantir que a saída

y_k acompanhe um sinal de referência desejado r_k ao longo do intervalo de tempo discreto $k \in [0, N]$. A função de custo a ser minimizada é dada por

$$J_i = \frac{1}{2}x_N^T P x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} \left[(y_k - r)^T Q (y_k - r) + \Delta u_k^T R \Delta u_k \right], \quad (2.50)$$

sendo $P = P^T \geq 0$, $Q = Q^T \geq 0$ e $R = R^T > 0$ as matrizes de ponderação de desvio de estado final, de estado e controle respectivamente. Além disso, $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$ o incremento de controle, a referência r_k é considerada uma constante r e $y_k - r$ representa o erro de rastreamento em cada instante.

O termo terminal $\frac{1}{2}x_N^T P x_N$ desempenha um papel importante em problemas de horizonte finito. Entretanto, para horizontes grandes ou infinitos ($N = \infty$) ou quando P é a solução da equação de *Riccati* associada ao problema de regulação, esse termo pode ser omitido sem influenciar a estabilidade do controlador. Assim, obtém-se o índice de custo no horizonte infinito, dado por (RUSCIO, 2012)

$$J_i = \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{\infty} \left[(y_k - r)^T Q (y_k - r) + \Delta u_k^T R \Delta u_k \right]. \quad (2.51)$$

A solução apresentada por Ruscio (2012) considera uma modelagem para a expansão do sistema, na qual o sistema é descrito por

$$\Delta x_{k+1} = A_d \Delta x_k + B_d \Delta u_k, \quad (2.52)$$

$$y_k = y_{k-1} + C_d \Delta x_k, \quad (2.53)$$

sendo $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Expandindo o sistema de equações, inserindo a Equação (2.53) em (2.52), tem-se o novo sistema em espaço de estados dado por

$$\begin{bmatrix} \Delta x_{k+1} \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & 0_{n \times p} \\ C_d & I_{p \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ y_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d \\ 0_{p \times m} \end{bmatrix} \Delta u_k \quad (2.54)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C_d & I_{p \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ y_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

sendo n o número de estados, p é o número de saídas e m é o número de entradas de controle.

O índice de desempenho da Equação (2.51) com $r = 0$ e o modelo em espaço de estados dado pelas Equações (2.54) e (2.55), representam o problema de controle linear quadrático padrão. Quando a referência r é diferente de zero e constante, a Equação (2.55) é reescrita como

$$y_k - r = y_{k-1} - r + C_d \Delta x_k. \quad (2.56)$$

As Equações de estado (2.54) e saída (2.55) são reescritas incluindo o erro do sistema dado na Equação (2.56):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_{k+1} \\ y_k - r \end{bmatrix}}_{\tilde{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_d & 0_{n \times r} \\ C_d & I_{r \times r} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_d} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_k \\ y_{k-1} - r \end{bmatrix}}_{\tilde{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_d \\ 0_{r \times m} \end{bmatrix}}_{\tilde{B}_d} \Delta u_k, \quad (2.57)$$

$$\underbrace{y_k - r}_{\tilde{y}_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_d & I_{r \times r} \end{bmatrix}}_{\tilde{C}_d} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_k \\ y_{k-1} - r \end{bmatrix}}_{\tilde{x}_k}. \quad (2.58)$$

O novo modelo em espaço de estados é dado na forma

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}_d \tilde{x}_k + \tilde{B}_d \Delta u_k, \quad (2.59)$$

sendo $\tilde{x}_{k+1} \in \mathbb{R}^{(n+p)}$, $\tilde{A}_d \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$, $\tilde{x}_k \in \mathbb{R}^{(n+p)}$ e $\tilde{B}_d \in \mathbb{R}^{(n+p) \times m}$ as novas matrizes e vetores aumentados da dinâmica do sistema. A saída do sistema é dado por

$$\tilde{y}_k = \tilde{C}_d \tilde{x}_k, \quad (2.60)$$

sendo $\tilde{y}_k \in \mathbb{R}^p$ e $\tilde{C}_d \in \mathbb{R}^{p \times (n+p)}$ é o vetor e a matriz de saída aumentada do sistema, respectivamente. O índice de desempenho é reescrito como

$$J_i = \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{\infty} (\tilde{y}_k^T Q \tilde{y}_k + \Delta u_k^T R \Delta u_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{\infty} (\tilde{x}_k^T \tilde{Q} \tilde{x}_k + \Delta u_k^T R \Delta u_k), \quad (2.61)$$

sendo a matriz de ponderação $\tilde{Q} = \tilde{C}_d^T Q \tilde{C}_d$, com $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ e a matriz de ponderação R permanece inalterada (RUSCIO, 2012).

A solução para o problema de controle ótimo linear quadrático padrão formado pelas Equações (2.59), (2.60) e (2.61), consiste em minimizar o índice de desempenho (2.61) em relação ao desvio de controle Δu_k e sujeito à restrição dada pela Equação (2.59). Essa solução é obtida pela realimentação de estado, dada por

$$\Delta u_k = K \tilde{x}_k, \quad (2.62)$$

sendo a matriz de ganho de realimentação K , dada por

$$K = -(R + \tilde{B}_d^T P \tilde{B}_d)^{-1} \tilde{B}_d^T P \tilde{A}_d, \quad (2.63)$$

sendo P a solução positiva para a DARE, dada por

$$P = \tilde{Q} + K^T R K + (\tilde{A}_d + \tilde{B}_d K)^T P (\tilde{A}_d + \tilde{B}_d K). \quad (2.64)$$

Na forma matricial, a Equação (2.62) é dada por

$$\Delta u_k = \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_k \\ y_{k-1} - r \end{bmatrix}}_{\tilde{x}_k}, \quad (2.65)$$

com $u_k = u_{k-1} + \Delta u_k$ e $r = r_k$ a Equação (2.65) é reescrita como

$$u_k = u_{k-1} + K_1 \Delta x_k + K_2 (y_{k-1} - r_k). \quad (2.66)$$

A lei de controle dada na Equação (2.66) apresenta similaridade com um controlador PI convencional. O controlador DLQT-I assegura erro de rastreamento nulo em regime permanente, desde que o sistema em malha fechada seja estável e as variáveis de controle permaneça dentro dos limites permitidos, sem saturação (RUSCIO, 2012).

2.5.4.1 Relação com o Controlador PI

Nesta seção, é realizada a comparação da estrutura do controlador DLQT-I, dado na Equação (2.66), com um controlador PI em sua forma incremental.

Um controlador PI convencional pode ser escrito como

$$u = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) (r - y) = K_p (r - y) + \frac{K_p}{T_i s} (r - y). \quad (2.67)$$

Define-se o estado do controlador PI z como

$$z = \frac{1}{s} (r - y). \quad (2.68)$$

Assim, o controlador PI em tempo contínuo pode ser escrito como

$$\dot{z} = r - y, \quad (2.69)$$

$$u = K_p (r - y) + \frac{K_p}{T_i} z. \quad (2.70)$$

A formulação discreta do controlador PI é dada por

$$z_{k+1} - z_k = h(r - y_k), \quad (2.71)$$

$$u_k = K_p (r - y_k) + \frac{K_p}{T_i} z_k, \quad (2.72)$$

onde h é o intervalo de amostragem.

A formulação na forma incremental do controlador PI é obtida subtraindo-se a ação de controle no instante $k - 1$ da ação de controle no instante k . Assim, tem-se

$$\begin{aligned} u_k - u_{k-1} &= K_p (r - y_k) + \frac{K_p}{T_i} z_k - \left[K_p (r - y_{k-1}) + \frac{K_p}{T_i} z_{k-1} \right] \\ &= -K_p (y_k - y_{k-1}) + \frac{K_p}{T_i} (z_k - z_{k-1}). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Da Equação (2.71), tem-se que

$$z_k - z_{k-1} = h(r - y_{k-1}). \quad (2.74)$$

Substituindo a Equação (2.74) em (2.73), obtém-se

$$u_k = u_{k-1} + K_1(y_k - y_{k-1}) + K_2(y_{k-1} - r), \quad (2.75)$$

sendo

$$K_1 = -K_p, \quad K_2 = -\frac{K_p}{T_i}h. \quad (2.76)$$

Além disso, considerando que a saída do sistema é dada pela Equação (2.22), com $D_d = 0$, tem-se

$$u_k = u_{k-1} + K_1 C_d \Delta x_k + K_2 (y_{k-1} - r), \quad (2.77)$$

com $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Ao comparar a Equação (2.77) com a estrutura do controlador DLQT-I apresentado na Equação (2.66), observa-se que ambos possuem a mesma estrutura. A diferença entre eles reside no fato de que o controlador ótimo utiliza realimentação do vetor de estados em desvio Δx_k , enquanto o controlador PI utiliza apenas a realimentação do desvio da saída, isto é, $\Delta y_k = C_d \Delta x_k$.

2.5.5 Método de Schur

O algoritmo de Schur é um método numérico utilizado para encontrar a solução estável da Equação Algébrica de Riccati (ARE) a partir da decomposição de Schur da matriz Hamiltoniana associada ao sistema. Ele é uma variação da abordagem clássica baseada em autovetores, substituindo-os por vetores de Schur, que apresentam vantagens numéricas significativas. Diferentemente do uso direto de autovetores, que costuma ser numericamente insatisfatório, o método de Schur emprega vetores numericamente mais estáveis para construir uma base adequada do subespaço relevante ao problema. Isso torna a técnica mais confiável e eficiente, especialmente quando comparada a métodos como o método de Newton. Uma das principais vantagens do método de Schur é que a redução para a forma quase-triangular é um passo intermediário natural na decomposição QR usada no cálculo de autovetores, o que reduz o custo computacional em relação à abordagem baseada diretamente em autovetores. Além disso, mesmo quando a matriz Hamiltoniana é defectiva, o método de Schur não sofre das dificuldades típicas associadas ao cálculo de seus autovetores, tornando-o uma alternativa mais estável para a solução da ARE (LAUB, 1979).

Definição 1. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é ortogonal se $A^T = A^{-1}$, enquanto que a matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é unitária se $A^H = A^{-1}$. Seja a matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

sendo $J \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e I_n é a matriz identidade de ordem n , e que satisfaz $J^T = J^{-1} = -J$.

Definição 2. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ é Hamiltoniana se $J^{-1}A^T J = -A$ e que a matriz $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ é Simplética se $J^{-1}A^T J = A^{-1}$.

As matrizes Hamiltonianas e Simpléticas estão intrinsicamente relacionadas (LAUB, 1979).

Teorema 1. (1) Seja $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ uma matriz Hamiltoniana. Então $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow -\lambda \in \sigma(A)$, com a mesma multiplicidade. (2) Seja $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ uma matriz simplética. Então $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \in \sigma(A)$, com a mesma multiplicidade.

Teorema 2. Seja $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ uma matriz Simplética ou Hamiltoniana e $U \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ uma matriz Simplética. Então, $U^{-1}AU$ é uma matriz Hamiltoniana ou Simplética.

Teorema 3. (Forma Canônica de Schur): Suponha que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sejam autovalores da matriz $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Então, existe uma transformação de similaridade unitária U tal que $U^H A U$ é triangular superior, com elementos diagonais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nessa ordem.

Teorema 4. (Forma Real de Schur): Seja $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Então, existe uma transformação de similaridade ortogonal U tal que $U^T A U$ é uma matriz quasi-triangular superior. Além disso, a matriz U pode ser escolhida de modo que os blocos diagonais 2×2 e 1×1 apareçam em qualquer ordem desejada.

As dificuldades numéricas associadas ao uso de autovetores de uma matriz Hamiltoniana quase defectiva podem ser evitadas com o emprego do método de Schur. Nesse método, a solução da ARE é obtida por meio da redução da matriz Hamiltoniana Z à sua Forma Real de Schur, uma representação quasi-triangular obtida via transformações ortogonais de similaridade (LAUB, 1979).

O método de Schur permite resolver a equação algébrica de Riccati, tanto no tempo contínuo quanto no discreto, utilizando um conjunto apropriado de vetores de Schur extraídos da matriz Hamiltoniana associada ao problema. Pelo Teorema 4, existe uma transformação ortogonal $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que transforma a matriz Hamiltoniana Z na forma de Schur real, dada por

$$S = U^T Z U = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

onde S_{11} e S_{22} são matrizes quasi-triangulares. Os blocos na diagonal de S_{11} e S_{22} possuem, no máximo, dimensão 2×2 . A transformação de Z para a forma real de Schur não é única,

mas é sempre possível escolher a matriz U de modo que os autovalores associados ao bloco S_{11} estejam estritamente localizados dentro do círculo unitário, enquanto os autovalores associados ao bloco S_{22} estejam estritamente localizados fora do círculo unitário. A matriz U é particionada de forma compatível em quatro blocos $n \times n$:

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

Se a matriz U_{11} é não singular, então a solução da ARE é semidefinida positiva e dada pela expressão:

$$P = U_{21}U_{11}^{-1}. \quad (2.81)$$

A seguir é apresentado os passos para resolver o problema pelo método de Schur, baseado na teoria apresentada.

1. Definição da matriz Hamiltoniana Z .
2. Redução da matriz Z para a forma real de Schur (2.79) usando transformações ortogonais de similaridade.
3. Reordena-se a decomposição da forma real de Schur por meio de uma transformação ortogonal adicional, de modo que o bloco quase triangular S_{11} , localizado no canto superior esquerdo de S , contenha todos os autovalores estritamente localizados no interior do círculo unitário. As transformações são acumuladas em U .
4. Calcula-se a solução estabilizante da equação de Riccati dada na Equação (2.81).

CAPÍTULO 3

PROJETO DO CONTROLADOR ÓTIMO DO TIPO DLQR E DLQT PARA MANOBRABILIDADE

Neste capítulo, apresenta-se o modelo matemático linear do *CyberShip I* para três graus de liberdade e deslocamento horizontal, bem como sua representação em espaço de estados. A formulação dos controladores DLQR e DLQT-I, o método de Schur, o desacoplamento do modelo para a implementação do controlador PI e a técnica HIL.

3.1 Modelo Matemático do *CyberShip I*

O modelo matemático do USV utilizado na implementação dos controladores e simulações computacionais, é o do *CyberShip I*. Esse modelo foi desenvolvido pelo Departamento de Engenharia Cibernética da *Norwegian University of Science and Technology* (NTNU) em Trondheim - Noruega. O modelo é a representação de um navio de suprimento *offshore* em escala 1:70, com comprimento de 1,19 metros e massa de 17,6 kg, conforme exibido na Figura 9. A embarcação é controlada por propulsores, com seu comportamento não linear para o deslocamento horizontal descrito pela Equação (2.3), apresentada na Seção 2.3.1. Utilizando técnicas de identificação de sistemas e métodos hidrodinâmicos, os parâmetros do modelo para três graus de liberdade foram determinados e são apresentados em McGookin (1997), Strand (1999) e Cid (2003). O modelo foi adotado em trabalhos, como Jeong et al. (2010), Tomera e Podgórski (2021), Zhong et al. (2023) e Furtado (2025).



Figura 9 – *CyberShip I*, um modelo de um navio de suprimento *offshore*, escala 1:70 (Fonte: (STRAND, 1999)).

A embarcação apresentada na Figura 9 é equipada com quatro propulsores azimutais. As rotações das hélices dos quatro propulsores podem ser controladas independentemente, assim como seus respectivos ângulos de azimute (TOMERA; PODGÓRSKI, 2021). A Figura 10 exibe a localização dos atuadores instalados no *CyberShip I*.

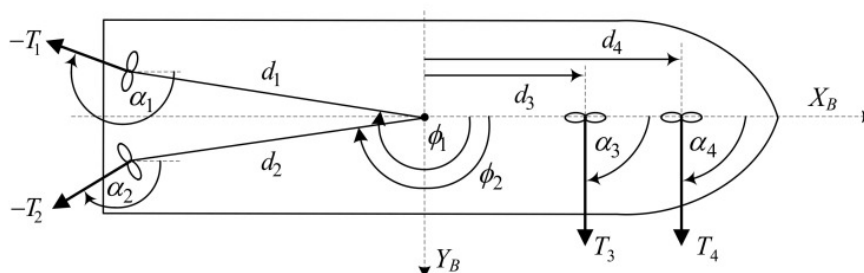


Figura 10 – Configuração dos propulsores no *CyberShip I* (Fonte: (TOMERA; PODGÓRSKI, 2021)).

Os propulsores da popa (T_1 e T_2) estão posicionados simetricamente em relação ao eixo fixo no corpo X_B , enquanto os propulsores da proa (T_3 e T_4) estão localizados ao longo do mesmo eixo X_B , conforme exibido na Figura 10 (CID, 2003). Os ângulos dos propulsores da popa, α_1 e α_2 , podem ser controlados individualmente, ao passo que os ângulos dos propulsores da proa, α_3 e α_4 , são sempre iguais, ou seja, esses propulsores operam na mesma direção. Além disso, os ângulos dos azimutais são limitados a uma faixa de aproximadamente 180° (MCGOOKIN, 1997).

Os parâmetros do *CyberShip I* são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros do *CyberShip I*

Parâmetro	Valor	Unidade(SI)
m	17,6	kg
I_z	1,80	kg·m ²
x_g	-0,04	m
$X_{\dot{u}}$	-1,40	kg
$Y_{\dot{v}}$	-17,6	kg
$N_{\dot{r}}$	-0,18	kg·m ²
$Y_{\dot{r}}$	0	kg·m
$N_{\dot{v}}$	0	kg·m
X_u	-4,0	kg/s
Y_v	-6,0	kg/s
N_r	-1,0	kg·m ² /s

Substituindo os valores dos parâmetros apresentados na Tabela 2, nas Equações (2.8), (2.13) e (2.15), tem-se:

$$M = \begin{bmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & 35,2 & -0,704 \\ 0 & -0,704 & 1,98 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

$$C(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -35,2v \\ 0 & 0 & 19u \\ 35,2v & -19u & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$D_p = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Um segundo modelo, denominado x_{g0} , também é utilizado nas implementações do controlador. Esse modelo corresponde a uma simplificação obtida ao posicionar a origem O_b do referencial fixo ao corpo no centro de gravidade (CG) do veículo, desde que o CG esteja localizado no plano principal de simetria (FOSSÉN, 1994). Essa consideração torna a distância x_g igual zero e altera levemente a dinâmica do sistema, causa o desacoplamento existente entre as velocidade v e r no modelo linear apresentado na Seção 3.1.1, pois a matriz M se torna diagonal, conforme apresentado em (ZHONG et al., 2023) e é dada por

$$M = \begin{bmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & 35,2 & 0 \\ 0 & 0 & 1,98 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

3.1.1 Representação do Modelo Linear do *CyberShip I* em Espaço de Estados

O modelo linear do USV é obtido a partir da definição das matrizes que descrevem sua dinâmica, bem como das considerações necessárias às condições de operação. Em aplicações que operam em baixa velocidade, como o Posicionamento Dinâmico (PD), ou que envolvem pequenos deslocamentos e manobras com velocidade relativa reduzida, considera-se um amortecimento linear e despreza-se o efeito Coriolis. Assim, para esse caso, o modelo linear é dado por (FOSSSEN, 2011):

$$M\dot{\nu} + D_p\nu = \tau. \quad (3.5)$$

O modelo dinâmico do sistema, dado pela Equação (3.5), é reorganizado para ser expresso na forma de espaço de estados, que tem sua forma canônica dada nas Equações (2.19) e (2.20). Reorganizando a Equação (3.5), tem-se

$$\dot{\nu} = -M^{-1}D_p\nu + M^{-1}\tau, \quad (3.6)$$

por analogia com a representação no espaço de estados, tem-se $x(t) = \nu$, $u(t) = \tau$, as matrizes de estados e entrada, dadas por

$$A = -M^{-1}D_p, \quad B = M^{-1}. \quad (3.7)$$

A equação de saída é dada por

$$y(t) = Cx(t), \quad (3.8)$$

sendo C uma matriz identidade, pois as saídas do sistema são as próprias velocidades dadas pelo vetor de estados, e não há matriz de transmissão direta.

As matrizes da equação de espaço de estados do modelo linear x_{g0} são obtidas substituindo-se as Equações (3.3) e (3.4) em (3.7). Logo, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} -0,2105 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1705 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5051 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,0526 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0284 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5051 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Para o modelo linear completo, as matrizes são obtidas substituindo-se as Equações (3.1) e (3.3) em (3.7). Logo, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} -0,2105 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1717 & -0,0102 \\ 0 & -0,0610 & -0,5087 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,0526 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0286 & 0,0102 \\ 0 & 0,0102 & 0,5087 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

O projeto dos controladores DLQR e DLQT-I requerem que o modelo do *CyberShip* I seja expresso em tempo discreto, uma vez que sua implementação ocorre em ambiente digital. Assim, o sistema em espaço de estado dado nas Equações (2.19) e (2.20) é convertido para a forma discreta por meio do método ZOH, que assume que o sinal de controle permanece constante ao longo de cada intervalo de amostragem.

Dado um período de amostragem T_s , as matrizes discretas de estado e de entrada são dadas, respectivamente, por

$$A_d = e^{AT_s}, \quad (3.11)$$

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A\tau} d\tau B. \quad (3.12)$$

Se a matriz A for não singular, a Equação (3.12) pode ser simplificada (ANGELICO; NEVES, 2023):

$$B_d = A^{-1} (e^{AT_s} - I) B = (e^{AT_s} - I) A^{-1} B. \quad (3.13)$$

As matrizes de saída e transmissão direta são dadas por:

$$C_d = C, \quad D_d = D. \quad (3.14)$$

O sistema discreto assume a forma apresentada nas Equações (2.21) e (2.22). Essa formulação é utilizada diretamente nas etapas de projeto dos controladores DLQR e DLQT-I.

3.2 Controlador DLQR

O controlador DLQR tem como objetivo minimizar o índice de desempenho apresentado na Equação (2.29), no qual as matrizes Q e R ponderam, respectivamente, a penalização dos estados e do esforço de controle. A escolha adequada dessas matrizes influencia diretamente o comportamento do sistema em malha fechada, afetando tanto a velocidade de resposta quanto as ações de controle. Para o controlador DLQR as matrizes

Q e R são definidas por tentativa e erro, buscando ponderar desempenho dinâmico e ações de controle.

Para a implementação do controlador DLQR, é necessário a discretização das matrizes do sistema. Considerando um período de amostragem T_s , as Equações (3.7) e (3.8) são substituídas nas expressões de discretização apresentadas em (3.11), (3.13) e (3.14), permitindo a obtenção das matrizes discretas A_d , B_d e C_d , que são utilizadas na formulação do controlador.

As condições de controlabilidade e observabilidade do sistema é verificada. A controlabilidade do sistema é avaliada por meio do posto da matriz de controlabilidade, dada por

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B_d & A_d B_d & A_d^2 B_d & \dots & A_d^{n-1} B_d \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

sendo n a ordem do sistema. Se $\text{rank}(\mathcal{C}) = n$, o sistema é considerado totalmente controlável.

A observabilidade de um sistema é dada pela matriz de observabilidade, dada por

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ C_d A_d^2 \\ \vdots \\ C_d A_d^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

send n é a ordem do sistema. Se $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$, o sistema é totalmente observável, ou seja, todos os estados podem ser reconstruídos a partir das saídas. Caso contrário, se $\text{rank}(\mathcal{O}) < n$, alguns estados não podem ser inferidos a partir das saídas, o que limita o projeto de observadores ou de controladores baseados na realimentação dos estados.

O projeto do controlador DLQR requer a solução da DARE, dada na Equação (2.47). Para resolver essa equação, utiliza-se o método de Schur apresentado na Seção 2.5.5.

Considera-se que o par (A_d, B_d) é estabilizável e que (C_d, A_d) é detectável, sendo C_d uma Fatoração de Raiz Quadrada (FRF) da matriz Q , isto é, $C_d^T C_d = Q$ e $\text{rank}(C_d) = \text{rank}(Q)$. Além disso, considera-se que a matriz A_d é inversível, uma hipótese comum na dinâmica em malha aberta de sistemas em tempo discreto. Sob essas suposições, a Equação (2.47) possui uma solução única, semidefinida positiva (LAUB, 1979).

Define-se $G = B_d R^{-1} B_d^T$. A matriz simplética Z é dada por

$$Z = \begin{pmatrix} A_d + G A_d^{-T} Q & -G A_d^{-T} \\ -A_d^{-T} Q & A_d^{-T} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

sendo $Z \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Sob as hipóteses consideradas, a matriz Z não apresenta autovalores sobre o círculo unitário, permitindo a separação espectral necessária à solução estabilizante da Equação de Riccati. Pelo Teorema 4, encontra-se uma transformação ortogonal $U \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ que coloca Z na forma real de Schur:

$$U^T Z U = S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

A decomposição de Schur é então reordenada por meio de uma transformação ortogonal adicional, de modo que o bloco S_{11} contenha somente os autovalores localizados no interior do círculo unitário, enquanto o bloco S_{22} contenha os autovalores localizados no exterior do círculo unitário. As transformações ortogonais são acumuladas em uma única matriz U_{ord} , preservando a relação

$$U_{\text{ord}}^T Z U_{\text{ord}} = S_{\text{ord}} = \begin{pmatrix} S_{\text{ord},11} & S_{\text{ord},12} \\ 0 & S_{\text{ord},22} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

A matriz U_{ord} é particionada de forma compatível em quatro blocos $n \times n$:

$$U_{\text{ord}} = \begin{pmatrix} U_{\text{ord},11} & U_{\text{ord},12} \\ U_{\text{ord},21} & U_{\text{ord},22} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Com essas suposições, obtém-se (LAUB, 1979):

$$P = U_{\text{ord},21} U_{\text{ord},11}^{-1}, \quad (3.21)$$

que resolve a Equação (2.47), sendo $P = P^T \geq 0$.

Com a matriz P obtida a partir da equação de Riccati discreta, o ganho ótimo é calculado por:

$$K = \left(R + B_d^T P B_d \right)^{-1} B_d^T P A_d. \quad (3.22)$$

A lei de controle implementada é dada por:

$$u_k = -K x_k. \quad (3.23)$$

O diagrama de blocos da Figura 11 exhibe a configuração do controlador DLQR.

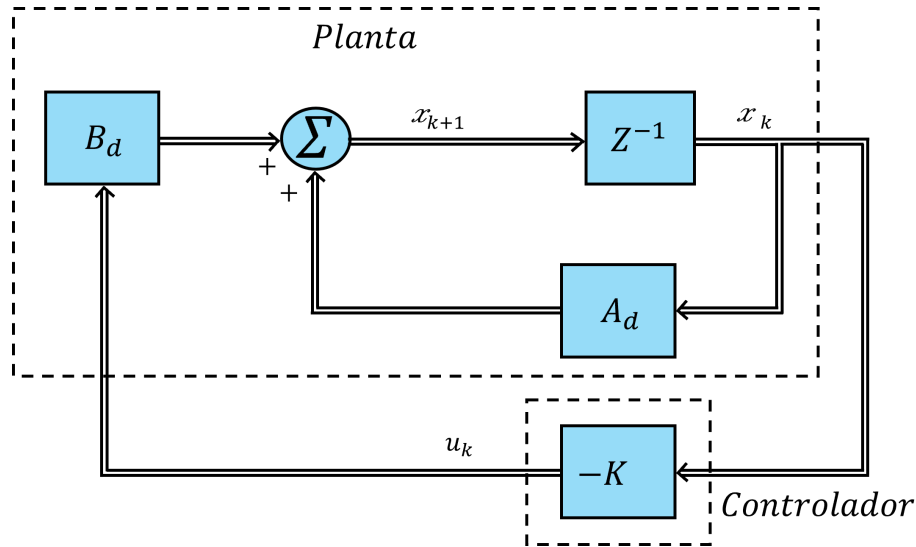


Figura 11 – Diagrama de blocos do sistema de controle DLQR.

O sistema de controle apresentado na Figura 11 utiliza realimentação de estados para o cálculo da ação de controle. A planta é descrita pelas matrizes A_d e B_d . O ganho do controlador é dado por K , e o sinal de controle u_k é calculado a partir do vetor de estados x_k , fechando a malha de controle.

3.3 Controlador DLQT-I

A planta do USV é classificada como um sistema do tipo 0, isto é, não possui um integrador implícito em sua dinâmica. Como consequência, apresenta erro de regime permanente quando submetida a rastreamento de referência utilizando apenas ações proporcionais, como ocorre no caso do controlador DLQT convencional. Para eliminar esse erro e garantir rastreamento da referência, torna-se necessária a inclusão de uma parcela integrativa no projeto do controlador. Considerando o sistema dinâmico representado pelas Equações (3.6) e (3.8), formula-se um novo sistema estendido a partir das matrizes originais, segundo o procedimento apresentado na Seção 2.5.4.

A implementação utilizada do DLQT-I pode ser interpretada como uma extensão natural do problema de controle ótimo DLQR, no qual o sistema em espaço de estados é remodelado. Os estados e as leis de controle são substituídos por suas respectivas variações, e é realizada uma expansão incluindo o erro como um novo estado. Logo, a regulação do novo sistema implica em tornar a variação dos estados e o erro nulos, ou seja, rastrear a referência e manter os estados sem variações no regime permanente.

Com as matrizes discretas do sistema (A_d, B_d, C_d) , determinam-se as matrizes expandidas apresentadas na Seção 2.5.4, dadas por

$$\tilde{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & 0_{n \times r} \\ C_d & I_{r \times r} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\tilde{B}_d = \begin{bmatrix} B_d \\ 0_{r \times m} \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\tilde{C}_d = [C_d \quad I_{r \times r}], \quad (3.26)$$

sendo $n = m = r = 3$.

O índice de desempenho a ser minimizado é dado pela Equação (2.61), sendo a matriz de ponderação de estado expandida (\tilde{Q}) definida por

$$\tilde{Q} = \tilde{C}_d^T Q \tilde{C}_d. \quad (3.27)$$

As matrizes Q e R são ajustadas por meio de um processo iterativo de tentativa e erro, de forma a atender aos requisitos de desempenho desejados.

A matriz P é obtida pela solução da DARE dada na equação (2.64). A forma de resolver essa equação é similar à apresentada no DLQR, por meio do método de Schur, descrito na Seção 3.2. A diferença relevante no caso do DLQT-I é a matriz estendida \tilde{Z} , que substitui a matriz Z utilizada na formulação do DLQR.

Definindo $\tilde{G} = \tilde{B}_d R^{-1} \tilde{B}_d^T$, tem-se a matriz \tilde{Z} dada por

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_d + \tilde{G} \tilde{A}_d^{-T} \tilde{Q} & -\tilde{G} \tilde{A}_d^{-T} \\ -\tilde{A}_d^{-T} \tilde{Q} & \tilde{A}_d^{-T} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Com a matriz P definida, calcula-se o ganho de realimentação K dado na Equação (2.63). A lei de controle do controlador DLQT-I é dada por

$$u_k = u_{k-1} + K \tilde{x}_k, \quad (3.29)$$

sendo $K = [K_1 \quad K_2]$, onde K_1 representa o ganho de realimentação de estados e K_2 representa o ganho de realimentação da saída. Assim, a nova lei de controle pode ser reescrita como

$$u_k = u_{k-1} + K_1(x_k - x_{k-1}) + K_2(y_{k-1} - r_k), \quad (3.30)$$

sendo a saída y_k do sistema obtida pela seleção dos estados de interesse, dada por

$$y_k = C_d x_k, \quad (3.31)$$

onde C_d é a matriz C discretizada. A Figura 12 exibe a arquitetura do controlador DLQT-I em diagrama de blocos.

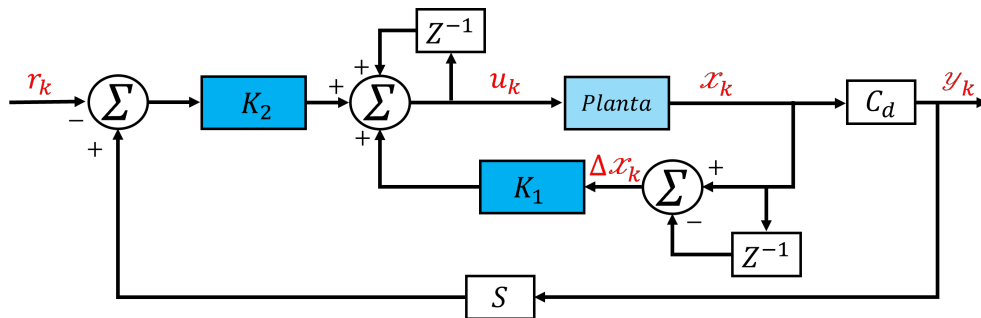


Figura 12 – Diagrama de blocos do sistema de controle DLQT-I.

O sistema de controle, apresentado na Figura 12, utiliza dois ganhos: K_1 , referente à realimentação de estados, e K_2 , referente à realimentação de saída que multiplica o erro do sistema. O bloco S representa os sensores de realimentação em malha fechada, enquanto a referência de entrada do sistema é r_k e a saída é y_k .

3.4 Controlador PID

Nos sistemas de controle industriais, os controladores do tipo PID e suas variantes modificadas são amplamente utilizados devido à sua simplicidade e facilidade de implementação. Esse controlador é caracterizado por três parâmetros: ganho proporcional, ganho integral e ganho derivativo. O desempenho do controlador PID depende desses três ganhos, e a determinação adequada desses valores é conhecida como sintonia do controlador PID. Ele pode ser utilizado em uma de suas duas formas: paralela ou série. A Figura 13 exibe o controlador PID na sua forma série aplicado a uma dada planta. A principal vantagem desse tipo de controlador é sua ampla aplicabilidade à maioria dos sistemas de controle (OGATA, 2011).

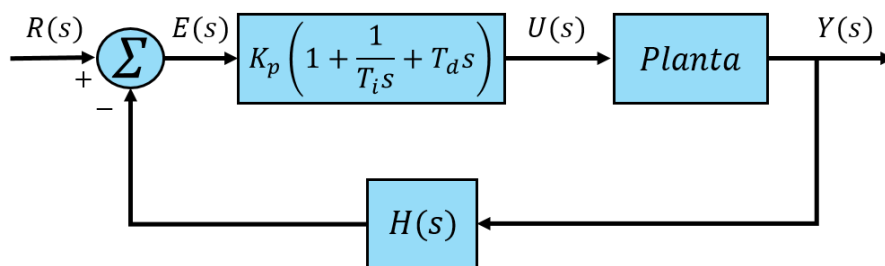


Figura 13 – Diagrama de blocos do controlador PID em malha fechada com a planta.

No diagrama de blocos da Figura 13, tem-se que $R(s)$ é a entrada de referência, $E(s)$ é o sinal de erro, $U(s)$ é o esforço de controle e $Y(s)$ é a saída do sistema. Definindo

$u(t)$ como a saída do controlador, a forma série do controlador PID é dada por

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (3.32)$$

no domínio de Laplace, o controlador é dado por

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s), \quad (3.33)$$

sendo K_p o ganho proporcional, T_i é o tempo integral e T_d é o tempo derivativo. Os valores desses parâmetros podem ser determinados por meio de diferentes métodos de sintonia, tais como Ziegler-Nichols, alocação de polos, resposta em frequência e lugar das raízes, permitindo assim garantir o desempenho desejado do sistema.

O controlador PI é uma variação do controlador PID obtida pela eliminação da ação derivativa, sendo composto apenas pelas ações proporcional e integral. Sua função de transferência é dada por

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right). \quad (3.34)$$

Essa estrutura resulta na presença de um polo na origem e de um zero real negativo localizado em $s = -1/T_i$. Em virtude dessas características, o controlador PI pode ser interpretado como um compensador de atraso. A presença do polo na origem faz com que o controlador apresente ganho infinito na frequência nula, o que contribui para a eliminação do erro em regime permanente para entradas do tipo degrau, melhorando assim as características de regime permanente do sistema controlado. No entanto, a introdução da ação integral pode reduzir a margem de estabilidade e aumentar o sobressinal, tornando necessária uma sintonia adequada dos parâmetros do controlador (OGATA, 2011; FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013).

3.4.1 Projeto do Controlador PI para o Modelo xg_0

O controlador PI é desenvolvido para comparação dos resultados obtidos pelo controlador DLQT-I. A correlação entre funções de transferência e equações no espaço de estados é apresentado na referência Ogata (2011), onde é possível obter uma função de transferência de um sistema SISO ou uma matriz de funções de transferência de um sistema MIMO a partir das equações no espaço de estados, dada por

$$G_p(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]. \quad (3.35)$$

A matriz de função de transferência do modelo xg_0 é obtida ao substituir a Equação (3.9) na Equação (3.35), considerando $D = 0$. Assim, tem-se:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,0526}{s+0,2105} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0,0284}{s+0,1705} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{0,5051}{s+0,5051} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

A matriz de função de transferência indica que o sistema é diagonal, ou seja, cada saída depende apenas da sua entrada correspondente. Dessa forma, cada velocidade pode ser controlado de forma independente, o que simplifica o projeto de controladores individuais para cada eixo. As funções de transferência representam sistemas de primeira ordem, com polos reais negativos. Como não há acoplamento entre as funções de transferência, é possível projetar cada controlador PI de forma independente, de acordo com as especificações de projeto, simplificando a sintonia e a análise do sistema.

A representação da planta com o controlador em diagrama de blocos é apresentada na Figura 14.

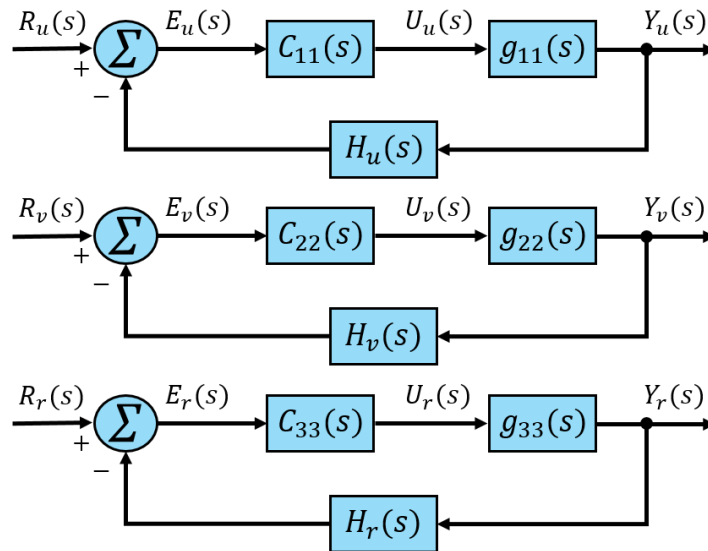


Figura 14 – Diagrama de blocos do sistema MIMO em malha fechada com o controlador para o modelo xg_0 .

Os elementos $g_{11}(s)$, $g_{22}(s)$ e $g_{33}(s)$ apresentados na Figura 14 correspondente às funções de transferência das velocidades *surge*, *sway* e *yaw*, respectivamente. As realimentações $H(s)$ são consideradas unitárias, $R_u(s)$, $R_v(s)$ e $R_r(s)$ são as referências, e $Y_u(s)$, $Y_v(s)$ e $Y_r(s)$ são as velocidades de saída.

3.4.2 Projeto do Controlador PI para o Modelo Completo

A matriz de função de transferência do modelo completo é obtida substituindo a Equação (3.10) na Equação (3.35), com $D = 0$. Logo, tem-se:

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,0526}{s + 0,2105} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0,0286s + 0,0144}{s^2 + 0,6803s + 0,0867} & \frac{0,0102s}{s^2 + 0,6803s + 0,0867} \\ 0 & \frac{0,0102s}{s^2 + 0,6803s + 0,0867} & \frac{0,5087s + 0,0867}{s^2 + 0,6803s + 0,0867} \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

sendo a função de transferência g_{11} igual à do modelo xg_0 . Observa-se que há um acoplamento dinâmico entre as variáveis de entrada e saída correspondentes às funções de transferência g_{22} e g_{33} , evidenciado pela presença dos termos fora da diagonal principal da matriz de funções de transferência.

O diagrama de blocos do sistema a partir da matriz de funções de transferência é exibido na Figura 15.

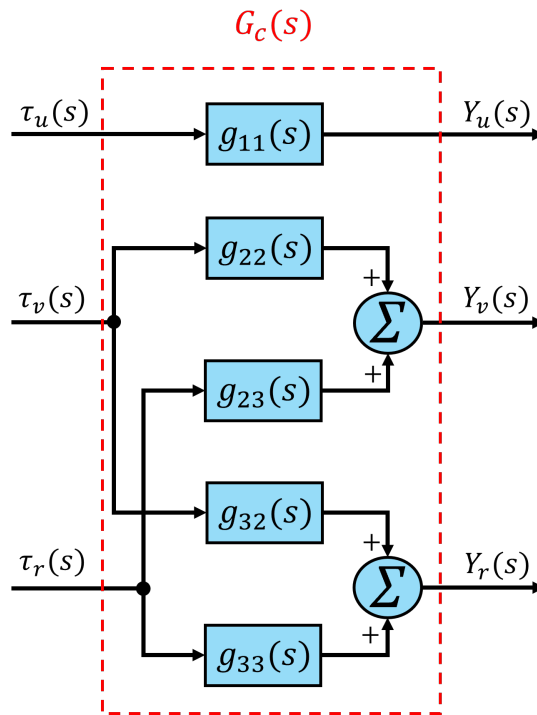


Figura 15 – Diagrama de blocos do sistema MIMO para o modelo completo.

Na Figura 15, as entradas dos blocos correspondem às forças geradas pelos propulsores. Observa-se que a saída Y_u , associada à função de transferência g_{11} , depende exclusivamente de sua respectiva entrada τ_u , não sofrendo influência das demais entradas do sistema. Por outro lado, verifica-se a existência de acoplamento entre a entrada τ_v e a saída v_r , bem como entre a entrada τ_r e a saída v_v , decorrente da presença dos termos g_{23} e g_{32} , o que caracteriza a formação de um subsistema acoplado.

Esse acoplamento implica que variações em uma das entradas influenciam simultaneamente mais de uma saída, especificamente entre a entrada 2 e a saída 3,

e entre a entrada 3 e a saída 2, dificultando o projeto direto de controladores SISO independentes, como o controlador PI. Diante dessa estrutura, o procedimento utilizado consiste inicialmente em tratar a dinâmica associada à função de transferência g_{11} de forma independente, uma vez que ela não apresenta acoplamento com as demais variáveis do sistema. Para o subsistema acoplado, torna-se necessário empregar técnicas de desacoplamento, cujo objetivo é reduzir ou eliminar a influência cruzada entre entradas e saídas. Esses métodos permitem uma análise mais simplificada do problema de controle, possibilitando que cada par entrada-saída seja tratado de forma aproximadamente independente, resultando em três sistemas SISO equivalentes para fins de projeto dos controladores (PAULO, 2015).

O objetivo do desacoplamento é inserir um novo bloco entre o controlador e o processo, capaz de cancelar, total ou parcialmente, os efeitos das interações entre as malhas de controle (CAMPOS; TEIXEIRA, 2010), conforme apresentado na Figura 16.

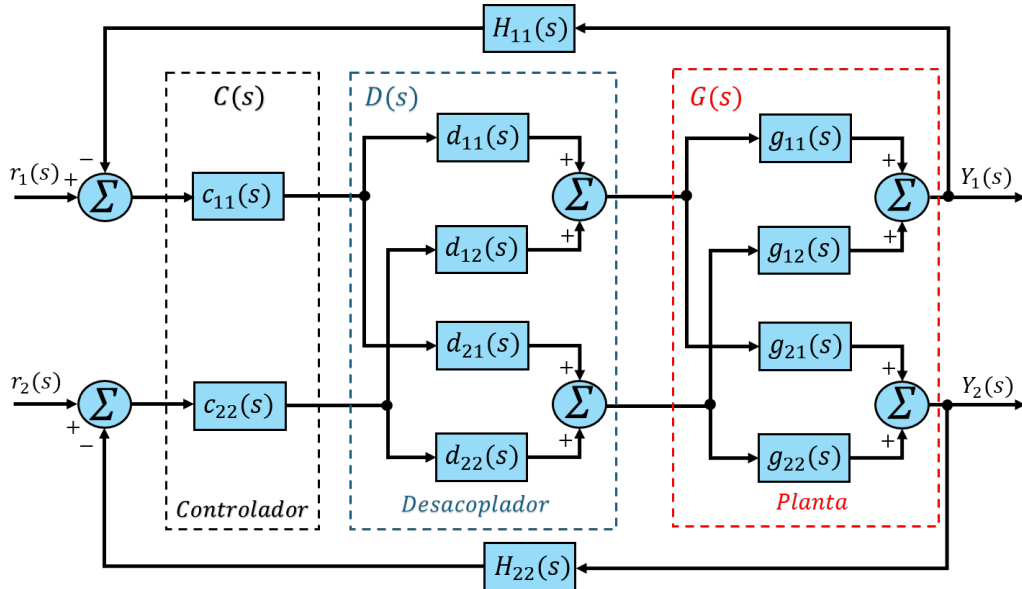


Figura 16 – Diagrama de blocos de um sistema TITO com desacoplamento do processo.

A Figura 16 exibe um exemplo de um sistema acoplado com duas entradas e duas saídas (*Two-Input, Two-Output* – TITO). O controlador, o desacoplador e a planta são representados pelas matrizes $C(s)$, $D(s)$ e $G(s)$, respectivamente. A matriz do processo desacoplado, formada pelos blocos do desacoplador e o processo, é representada por $Q(s)$.

Essas matrizes são dadas por:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad D(s) = \begin{bmatrix} d_{11}(s) & d_{12}(s) \\ d_{21}(s) & d_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad C(s) = \begin{bmatrix} c_{11}(s) & 0 \\ 0 & c_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

A matriz equivalente do processo desacoplado é definida como:

$$Q(s) = G(s)D(s) = \begin{bmatrix} q_{11}(s) & 0 \\ 0 & q_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

O desacoplador para um sistema TITO é dado pela seguinte relação:

$$D(s) = G^{-1}(s) Q(s) = \frac{\text{adj}(G(s))}{\det(G(s))} Q(s). \quad (3.40)$$

Substituindo as Equações (3.38) e (3.39) em (3.40), tem-se

$$D(s) = \frac{1}{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)} \begin{bmatrix} g_{22}(s)q_{11}(s) & -g_{12}(s)q_{22}(s) \\ -g_{21}(s)q_{11}(s) & g_{11}(s)q_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Os elementos $g_{11}(s)$, $g_{12}(s)$, $g_{21}(s)$ e $g_{22}(s)$, que representam as funções de transferência do processo, são conhecidos. Os elementos $q_{11}(s)$ e $q_{22}(s)$ são desconhecidos e representam a dinâmica desejada para o sistema desacoplado. Para determinar a matriz desacopladora $D(s)$, diferentes escolhas para $q_{11}(s)$ e $q_{22}(s)$ podem ser realizadas, de acordo com os objetivos de controle, tais como o desacoplamento ideal, o desacoplamento simplificado e o desacoplamento invertido (PAULO, 2015).

O modelo do *CyberShip I*, no que se refere ao acoplamento entre entradas e saídas, pode ser considerado um sistema TITO, uma vez que apenas duas entradas e duas saídas apresentam interação dinâmica. Para realizar o desacoplamento do processo, adotou-se o método de desacoplamento simplificado, onde sua matriz de desacoplamento é dada por (JÚNIOR; BARROS, 2015)

$$D(s) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{g_{12}(s)}{g_{11}(s)} \\ -\frac{g_{21}(s)}{g_{22}(s)} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Substituindo a Equação (3.42) na Equação (3.39), obtém-se a seguinte matriz de transferência do sistema desacoplado:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) - \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{22}(s)} & 0 \\ 0 & g_{22}(s) - \frac{g_{21}(s)g_{12}(s)}{g_{11}(s)} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Na Figura 17 é apresentado o diagrama de blocos de um sistema TITO com o desacoplamento simplificado.

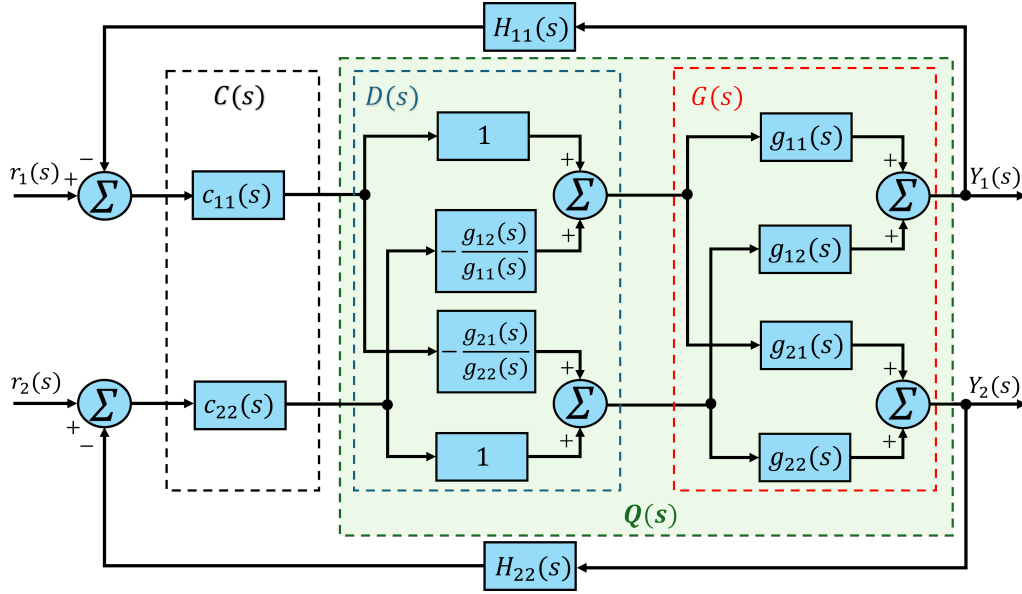


Figura 17 – Diagrama de blocos de um sistema TITO com desacoplamento simplificado.

Considerando os elementos acoplados da matriz de funções de transferência, apresentada na Equação (3.37), como um sistema TITO, determina-se as seguintes relações:

$$g_{11}(s) = \frac{0,0286 s + 0,0144}{s^2 + 0,6803 s + 0,0867}, \quad g_{12}(s) = \frac{0,0102 s}{s^2 + 0,6803 s + 0,0867}, \quad (3.44)$$

$$g_{21}(s) = \frac{0,0102 s}{s^2 + 0,6803 s + 0,0867}, \quad g_{22}(s) = \frac{0,5087 s + 0,0867}{s^2 + 0,6803 s + 0,0867}. \quad (3.45)$$

Substituindo as Equações (3.44) e (3.45) em (3.42), obtém-se os elementos da matriz desacopladora $D(s)$:

$$d_{11}(s) = 1, \quad d_{12}(s) = -\frac{0,01017 s^3 + 0,006919 s^2 + 0,0008817 s}{0,5051 s^3 + 0,429 s^2 + 0,1019 s + 0,007404}, \quad (3.46)$$

$$d_{21}(s) = -\frac{0,01017 s^3 + 0,006919 s^2 + 0,0008817 s}{0,02861 s^3 + 0,03391 s^2 + 0,01231 s + 0,001253}, \quad d_{22}(s) = 1. \quad (3.47)$$

Os elementos das matriz desacoplada $Q(s)$ é obtido substituindo as Equações (3.44) e (3.45) em (3.43). Logo, tem-se

$$q_{11}(s) = \frac{0,0284 s^6 + 0,0579 s^5 + 0,0468 s^4 + 0,0190 s^3 + 0,0040 s^2 + 0,0004 s}{s^7 + 2,21 s^6 + 1,9940 s^5 + 0,9475 s^4 + 0,2560 s^3 + 0,0395 s^2 + 0,0032 s + 0,0001}, \quad (3.48)$$

$$q_{22}(s) = \frac{0,5015 s^6 + 1,0230 s^5 + 0,8255 s^4 + 0,3345 s^3 + 0,0714 s^2 + 0,0076 s + 0,0003}{s^7 + 2,5460 s^6 + 2,6790 s^5 + 1,5010 s^4 + 0,4807 s^3 + 0,0875 s^2 + 0,0084 s + 0,0003}, \quad (3.49)$$

$$q_{12}(s) = 0, \quad q_{21}(s) = 0. \quad (3.50)$$

Com a matriz de funções de transferência desacoplada definida, projeta-se cada controlador PI de forma independente para cada velocidade do sistema.

3.5 Implementação HIL

A implementação HIL tem como objetivo testar e validar os controladores, na qual a planta do *CyberShip I* é simulada em um computador, enquanto o algoritmo de controle é executado no microcontrolador ESP32, conforme apresentado na Figura 18. Essa abordagem permite avaliar o desempenho do controlador em condições próximas às de operação real, reduzindo custos, tempo de testes em campo e riscos associados à implementação direta na embarcação.

Na Figura 7(a) é apresentado o diagrama de blocos que descreve a interação entre o computador embarcado e o simulador HIL. Em relação à Figura 18, o computador embarcado corresponde ao microcontrolador ESP32, o qual, no caso do controlador DLQR, recebe as referências especificadas para cada velocidade (r_u, r_v, r_r) e os estados do sistema (x_u, x_v, x_r), e envia as ações de controle correspondentes (u_u, u_v, u_r) ao simulador HIL, que representa a planta simulada do sistema.

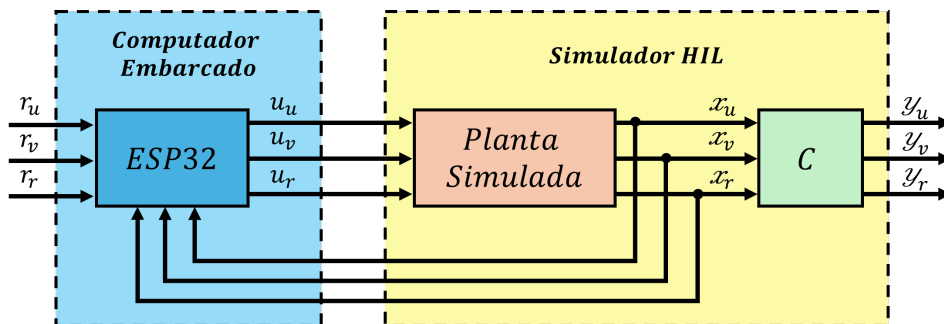


Figura 18 – Diagrama de blocos da implementação HIL do controlador DLQR, com a planta do *CyberShip I* simulada no computador e o controlador executado no microcontrolador ESP32.

Na arquitetura adotada para o DLQR, conforme exibido na Figura 18, o computador simula a planta do *CyberShip I* utilizando as equações discretizadas do modelo. A cada iteração, o sistema atualiza o estado usando o valor anterior e o sinal de controle recebido, conforme apresentado na Equação (2.21), e determina a saída do sistema de acordo

com a Equação (2.22). Em seguida, esses valores são enviados ao microcontrolador ESP32, garantindo a atualização contínua dos estados e o fechamento do ciclo HIL. O microcontrolador executa o algoritmo de controle no domínio discreto, respeitando o período de amostragem definido. Ao receber os estados enviados pelo computador, o microcontrolador aplica a lei de controle correspondente ao método selecionado. Para o controlador DLQR, o sinal de controle é obtido diretamente a partir da Equação (2.42).

Para o controlador DLQT-I, que incorpora a ação integral distribuída no vetor de estados expandidos, a arquitetura utilizada é similar, conforme ilustrado na Figura 19.

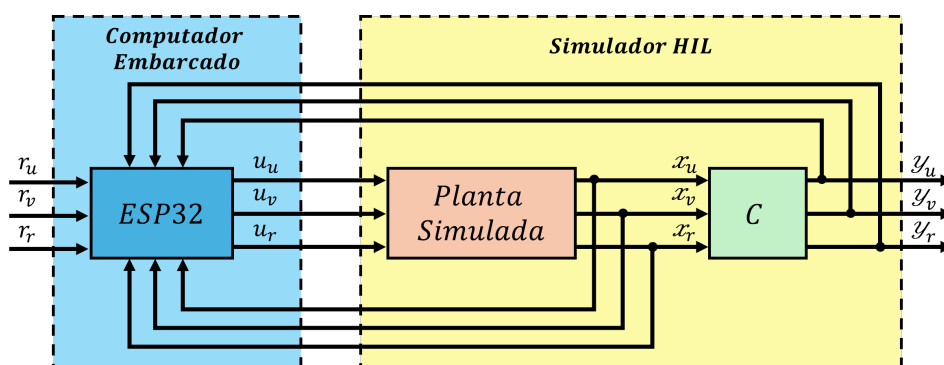


Figura 19 – Diagrama de blocos da implementação HIL do controlador DLQT-I, com a planta do *CyberShip I* simulada no computador e o controlador executado no microcontrolador ESP32.

A cada iteração, o computador simula o comportamento do sistema, calcula os estados e a saída, e envia ao microcontrolador ESP32 a referência (r_u, r_v, r_r) , os estados (x_u, x_v, x_r) e a saída (y_u, y_v, y_r) , conforme exibido na Figura 19. O sinal de controle é calculado utilizando a relação apresentada na Equação (3.30). O ESP32 armazena internamente os valores de u_{k-1} , x_{k-1} e dos estados expandidos, assegurando a continuidade do cálculo entre iterações sucessivas.

O simulador foi estruturado para operar de forma sincronizada com o *hardware*, segundo uma lógica baseada em eventos discretos, na qual cada iteração da simulação somente avança após receber o sinal de controle atualizado, preservando a sincronização entre a simulação e o sistema embarcado.

CAPÍTULO 4

EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS E HIL DO CONTROLADOR DE MANOBRABILIDADE

Este capítulo apresenta os resultados obtidos nas etapas de simulação e implementação do controlador para o modelo do *CyberShip* I. Os experimentos computacionais foram realizados no ambiente *MATLAB*[®]. As análises compreendem a avaliação do controlador DLQR, do controlador DLQT-I e da implementação prática do controle por meio da técnica HIL utilizando o microcontrolador ESP32.

4.1 Experimentos Computacionais

Esta seção apresenta os resultados obtidos por meio de simulações realizadas no ambiente *MATLAB*[®], utilizando os modelos dinâmicos desenvolvidos e os controladores projetados nas etapas anteriores. As simulações são organizadas de forma a contemplar tanto o modelo x_{g_0} quanto o modelo completo do sistema, permitindo observar a influência do acoplamento dinâmico sobre a resposta. Para cada modelo, são apresentados os resultados referentes aos controladores DLQR e DLQT-I.

4.1.1 Controlador DLQR para o Modelo x_{g_0}

O controlador DLQR é aplicado ao modelo x_{g_0} e os resultados da simulação são analisados a seguir. Seu objetivo é estabilizar os estados do sistema, conduzindo as velocidades u , v e r ao valor de equilíbrio (zero), enquanto minimiza o índice de desempenho quadrático.

As matrizes obtidas na Equação (3.9), são discretizadas pelo método ZOH com tempo de amostragem de 0,1 segundos. Logo, tem-se:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0,9792 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9831 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9507 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0,0052 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0028 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0493 \end{bmatrix}, C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Os autovalores da matriz A_d são $\lambda(A_d) = \{0,9792, 0,9831, 0,9507\}$, todos estritamente menores que a unidade. Assim, o sistema discreto não possui polos em $z = 1$ e é classificado como do tipo 0.

São analisadas as condições de controlabilidade e observabilidade do sistema. Substituindo-se as matrizes definidas na Equação (4.1) na expressão da matriz de controlabilidade (3.15), obtém-se

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0,0052 & 0 & 0 & 0,0051 & 0 & 0 & 0,0050 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0028 & 0 & 0 & 0,0028 & 0 & 0 & 0,0027 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0493 & 0 & 0 & 0,0468 & 0 & 0 & 0,0445 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

e seu posto é 3, sendo igual ao número de estados do sistema, logo o sistema é totalmente controlável. Logo, é totalmente controlável, ele é automaticamente estabilizável. Portanto, a condição requerida pelo método de Schur é satisfeita. Para a análise de observabilidade, substituem-se as matrizes definidas na Equação (4.1) na expressão da matriz de observabilidade dada em (3.16), obtendo-se

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,9792 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9831 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9507 \\ 0,9588 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9665 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9039 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

e seu posto é 3, logo o sistema é totalmente observável, e automaticamente detectável. Portanto, a condição de detectabilidade exigida pelo método de Schur também é satisfeita.

Após verificar se o sistema é estabilizável e detectável, a matriz P é calculada utilizando o método de Schur aplicado à DARE, conforme apresentado na Seção 2.5.5, permitindo determinar o ganho de realimentação ótimo K , que assegura estabilidade e

desempenho desejado do sistema em malha fechada. As matrizes de ponderação de estados Q e de entrada R são definidas de forma empírica como matrizes identidade. Logo tem-se:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

O método de Schur é utilizado para calcular a solução da DARE, seguindo os passos apresentado na Seção 2.5.5. Substituindo as matrizes (4.1) e (4.4) na Equação (3.17), obtém-se a matriz simplética dada por

$$Z = \begin{bmatrix} 0,9792 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9831 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9533 & 0 & 0 & -0,0026 \\ -1,0213 & 0 & 0 & 1,0213 & 0 & 0 \\ 0 & -1,0172 & 0 & 0 & 1,0172 & 0 \\ 0 & 0 & -1,0518 & 0 & 0 & 1,0518 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Determina-se uma transformação ortogonal U que coloca Z na forma real de Schur descrita pela Equação (3.18), logo tem-se

$$U = \begin{bmatrix} -0,0418 & 0,9991 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0002 & 1 \\ 0 & 0 & -0,1140 & 0,9935 & 0 & 0 \\ -0,9991 & -0,0418 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,0002 \\ 0 & 0 & -0,9935 & -0,1140 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

com a matriz quasi-triangular correspondente:

$$S = \begin{bmatrix} 0,9785 & 1,0212 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0219 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9311 & 1,0493 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0740 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0174 & -1,0172 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9829 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Reordenando a decomposição de Schur por meio de uma transformação ortogonal, de modo que o bloco quasi-triangular S_{11} contenha todos os autovalores estritamente localizados dentro do círculo unitário, obtém-se

$$S_{\text{ord}} = \begin{bmatrix} 0,9785 & 0 & 0 & 1,0212 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9311 & 0 & 0 & -1,0493 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9829 & 0 & 0 & -1,0172 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0219 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0740 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0174 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

consequentemente, atualiza-se U para manter a ortogonalidade. Logo, tem-se

$$U_{\text{ord}} = \begin{bmatrix} -0,0418 & 0 & 0 & 0,9991 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0337 & 0 & 0 & 0,9994 \\ 0 & 0,1140 & 0 & 0 & 0,9935 & 0 \\ -0,9991 & 0 & 0 & -0,0418 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9994 & 0 & 0 & -0,0337 \\ 0 & 0,9935 & 0 & 0 & -0,1140 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

sendo os blocos

$$U_{\text{ord},11} = \begin{bmatrix} -0,0418 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0337 \\ 0 & 0,1140 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$U_{\text{ord},21} = \begin{bmatrix} -0,9991 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9994 \\ 0 & 0,9935 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Portanto, calcula-se a matriz P , substituindo as matrizes (4.10) e (4.11) em (2.81). Logo, tem-se

$$P = \begin{bmatrix} 23,8936 & 0 & 0 \\ 0 & 29,6353 & 0 \\ 0 & 0 & 8,7121 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Com a matriz P obtida, calcula-se o ganho ótimo substituindo as matrizes (4.1), (4.4) e (4.12) em (3.22), logo tem-se

$$K = \begin{bmatrix} 0,1218 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0820 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3995 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

A matriz de ganhos K é diagonal, indicando que cada entrada de controle atua predominantemente sobre o respectivo estado associado.

A resposta das velocidades u e v do modelo xg_0 com o controlador DLQR, considerando as condições iniciais $u(0) = 2$ e $v(0) = 0,5$ é apresentado na Figura 20.

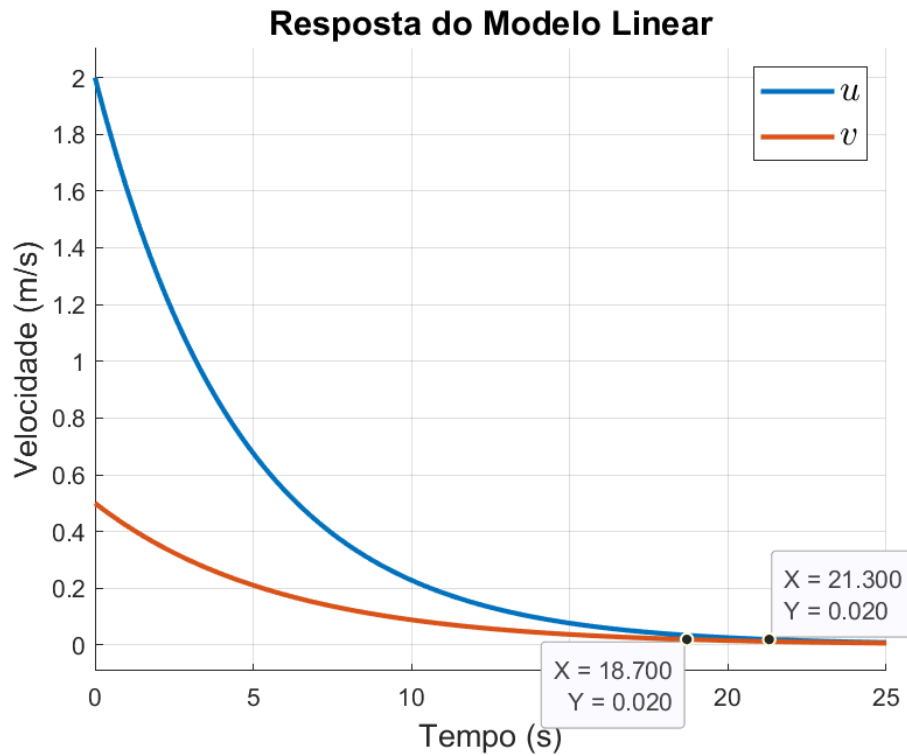


Figura 20 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo xg_0 , com condições iniciais $u = 2$ e $v = 0,5$.

Considerando o critério de 2% para o tempo de acomodação, observa-se que a velocidade u atinge a região de regime permanente por volta de 21,3 segundos, enquanto a velocidade v leva aproximadamente 18,7 segundos para entrar e permanecer dentro da mesma faixa de tolerância.

A Figura 21 exibe os sinais de controle τ_1 e τ_2 , das velocidades u e v , respectivamente.

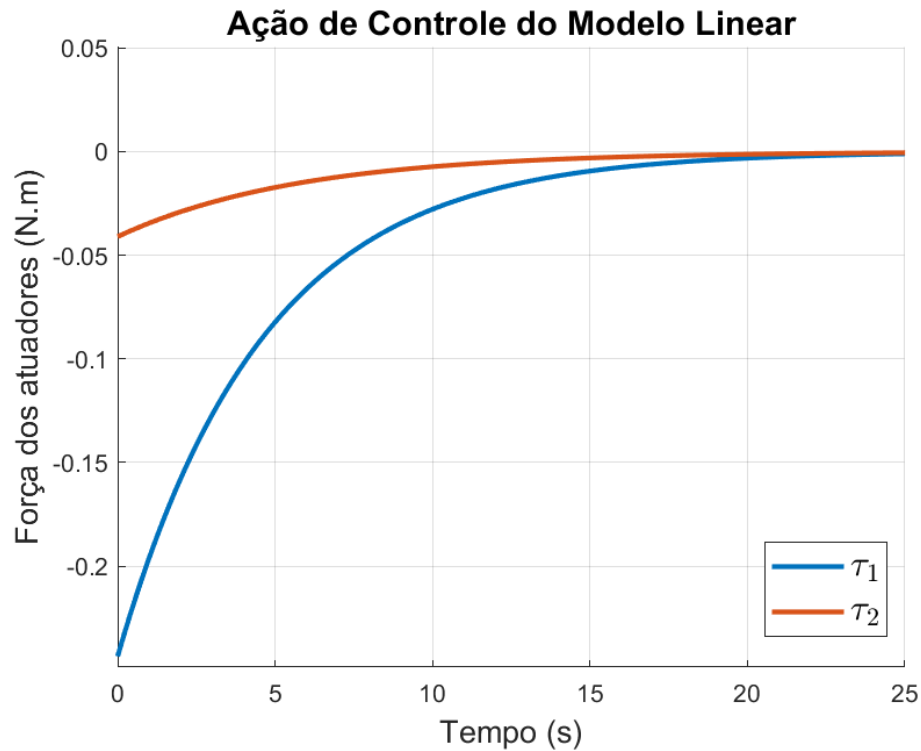


Figura 21 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQR aplicado ao modelo x_{g_0} .

As ações de controle apresentadas na Figura 21 estabilizam-se em tempos próximos aos dos seus respectivos estados, uma vez que o sinal de controle no DLQR é diretamente proporcional ao vetor de estados. Assim, à medida que os estados convergem para a referência (zero), as ações de controle também reduzem sua magnitude e aproximam-se de seus valores de regime permanente. O sinal de controle τ_1 inicia-se aproximadamente em $-0,243$ N.m, enquanto τ_2 parte de cerca de $-0,041$ N.m. Ambos convergem para zero por volta de 20 segundos.

Na Figura 22 é apresentada a resposta da velocidade r , considerando a condição inicial $r(0) = 1$.

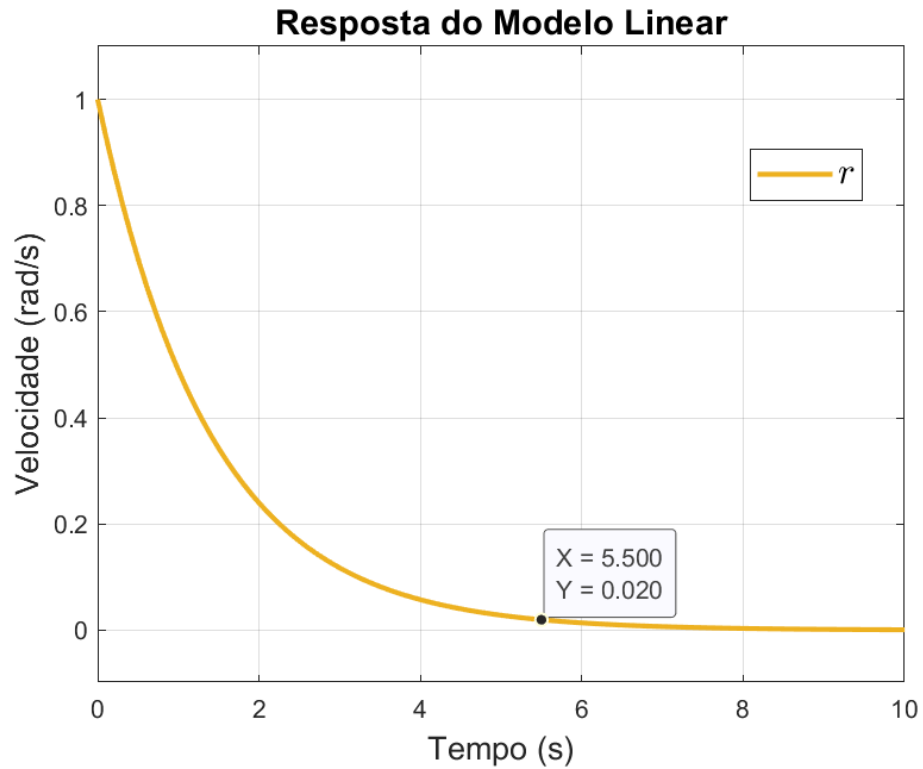


Figura 22 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo xg_0 , com condição inicial $r = 1$.

Observa-se na Figura 22 que o estado r converge para zero mais rapidamente em comparação com as demais velocidades, atingindo a região de regime permanente para o critério de 2% em aproximadamente 5,5 segundos.

A Figura 23 apresenta o sinal de controle τ_3 da velocidade r .

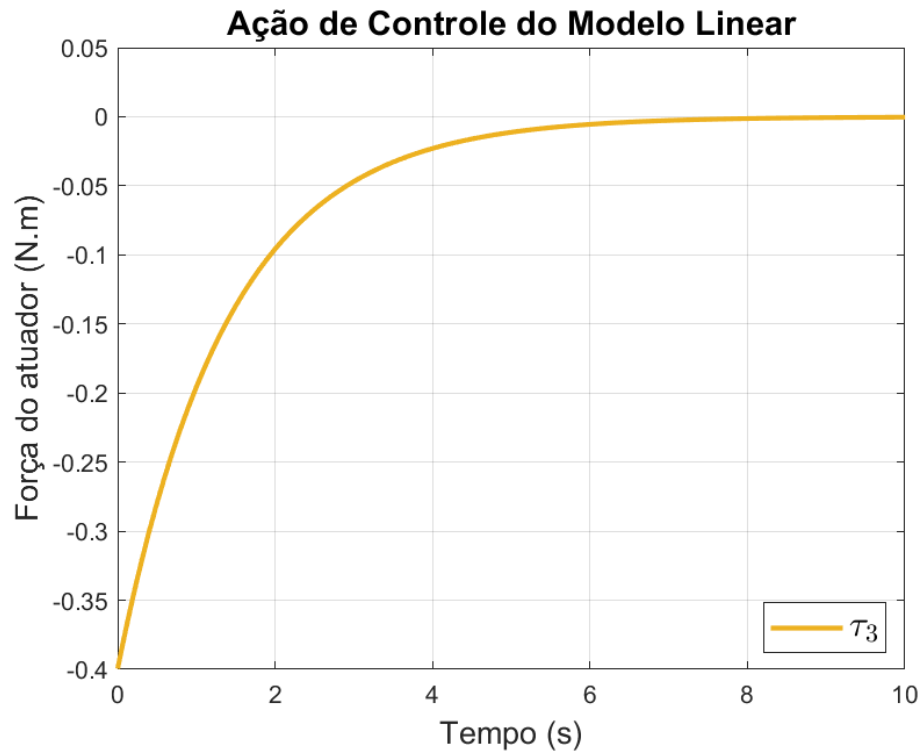


Figura 23 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQR aplicado ao modelo x_{g_0} .

A ação de controle exibida na Figura 23, inicia-se em aproximadamente $-0,4$ N.m, reduzindo-se gradualmente até valores próximos de zero por volta de 7 segundos, conforme o estado correspondente converge para a referência.

4.1.2 Controlador DLQT-I para o Modelo x_{g_0}

A simulação do controlador DLQT-I para o modelo x_{g_0} é realizado e analisado a seguir. O objetivo do DLQT-I é regular os estados do sistema para a referência desejada, garantindo estabilidade assintótica e eliminação do erro de regime permanente por meio da inclusão da ação integral.

Para a implementação do controlador DLQT-I, calculam-se as matrizes discretas expandidas do sistema, conforme descrito na Seção 2.5.4. As matrizes de ponderação de estados Q e de entrada R são definidas por tentativa e erro, e escolhidas como matrizes identidades. Substituindo as matrizes da Equação (4.1) nas expressões (3.24), (3.25) e (3.26), obtêm-se as matrizes aumentadas do sistema:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0,9792 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9831 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9507 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0,0052 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0028 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0493 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

A matriz de ponderação de estado expandida \tilde{Q} é calculada substituindo a matriz (4.16) e a matriz identidade Q em (3.27). Assim, obtém-se:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Para determinar a matriz estendida \tilde{P} , utiliza-se o método de Schur. Seguem-se os mesmos passos apresentados na Seção 2.5.5, agora aplicados às matrizes estendidas, com o objetivo de obter a matriz U particionada e determinar os blocos U_{11} e U_{21} , que são então substituídos na Equação (3.21). Os cálculos necessários para a determinação de \tilde{P} são apresentados no Apêndice A.1. A matriz \tilde{P} é dada por:

$$\tilde{P} = 10^3 \begin{bmatrix} 3,2188 & 0 & 0 & 0,2002 & 0 & 0 \\ 0 & 7,8260 & 0 & 0 & 0,3659 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1288 & 0 & 0 & 0,0233 \\ 0,2002 & 0 & 0 & 0,0199 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3659 & 0 & 0 & 0,0272 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0233 & 0 & 0 & 0,0064 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Calcula-se o ganho ótimo substituindo as matrizes (4.14), (4.15), (4.16), (4.17) e (4.18) em (2.63). Logo, obtém-se

$$K = \begin{bmatrix} -16,0555 & 0 & 0 & -0,9590 & 0 & 0 \\ 0 & -21,3753 & 0 & 0 & -0,9703 & 0 \\ 0 & 0 & -5,4695 & 0 & 0 & -0,8729 \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

sendo

$$K_1 = \begin{bmatrix} -16,0555 & 0 & 0 \\ 0 & -21,3753 & 0 \\ 0 & 0 & -5,4695 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0,9590 & 0 & 0 \\ 0 & -0,9703 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8729 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Após a determinação dos ganhos ótimos do controlador DLQT-I, procede-se à análise do seu desempenho dinâmico. Para isso, são avaliadas as respostas ao degrau das velocidades u , v e r , considerando o sistema expandido com ação integral. O objetivo dessa análise é verificar se o controlador consegue regular os estados para as referências desejadas, assegurando a eliminação do erro de regime permanente.

A resposta das velocidades u e v do modelo xg_0 com o controlador DLQT-I para uma entrada em degrau unitário é exibida na Figura 24.

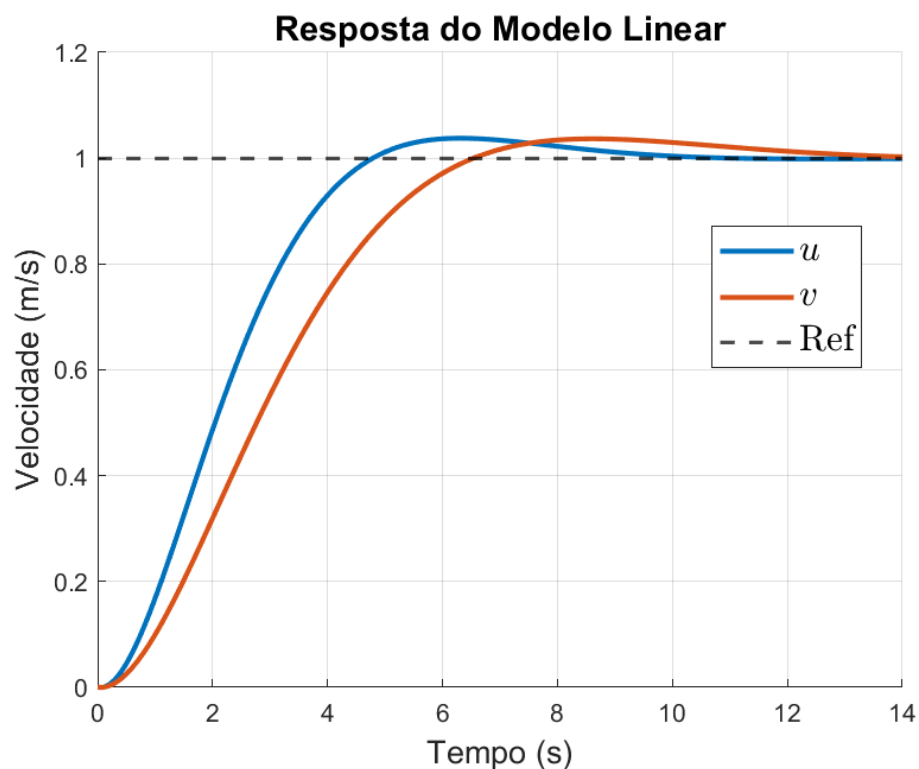


Figura 24 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo xg_0 .

Observa-se na Figura 24 que o controlador rastreou a entrada de referência degrau unitário. A velocidade u apresenta um tempo de subida de aproximadamente 3,03 segundos e um tempo de acomodação de cerca de 8,20 segundos. O sobressinal é de 3,77 %, e a resposta atinge o regime permanente sem oscilações significativas. A velocidade v apresenta um tempo de subida de aproximadamente 4,14 segundos e um tempo de acomodação em torno de 11,12 segundos. O sobressinal também é baixo, em torno de 3,66 %, indicando uma resposta suavizada e sem oscilações relevantes. Para ambas as velocidades, observa-se ausência de erro de regime permanente, evidenciando que o controlador DLQT-I é capaz de eliminar o erro em regime permanente e garantir o rastreamento do sinal de referência.

O sinal de controle τ_1 e τ_2 , associados às velocidades u e v , é exibido na Figura 25.

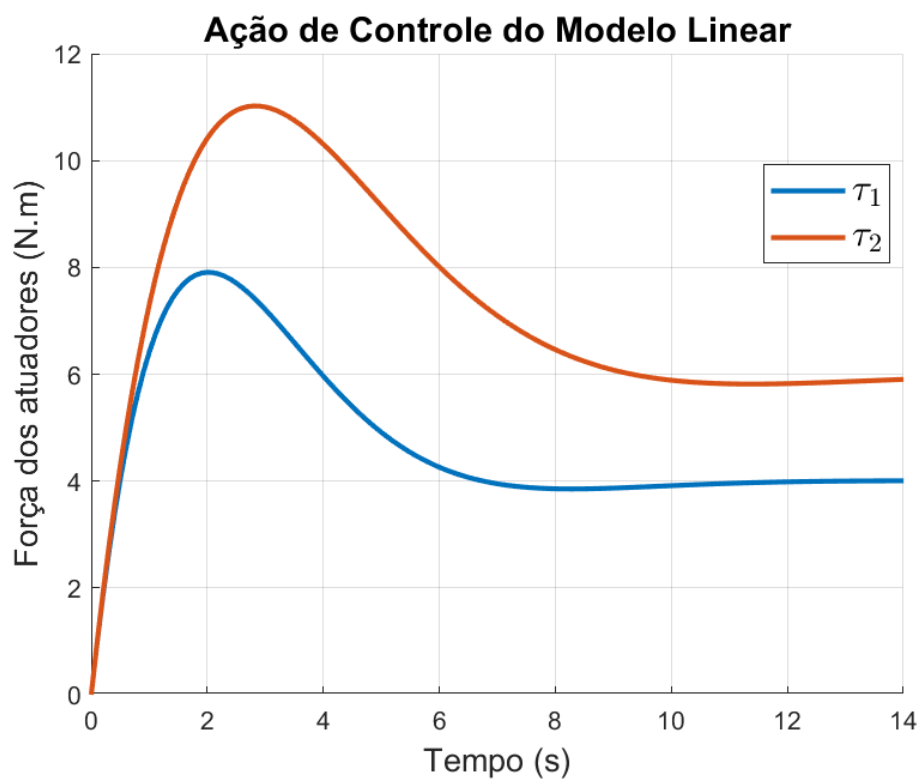


Figura 25 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQT-I aplicado ao modelo xg_0 .

Observa-se, na Figura 25, um pico inicial nas duas ações de controle durante a resposta transitória, com τ_1 e τ_2 aproximadamente iguais a 11 N.m e 8 N.m, respectivamente. Em seguida, ocorre uma decaída exponencial até os valores de regime permanente, aproximadamente 4 N.m para τ_1 e 6 N.m para τ_2 , alcançados por volta de 9 segundos.

A Figura 22 apresenta a resposta do controlador para a velocidade r .

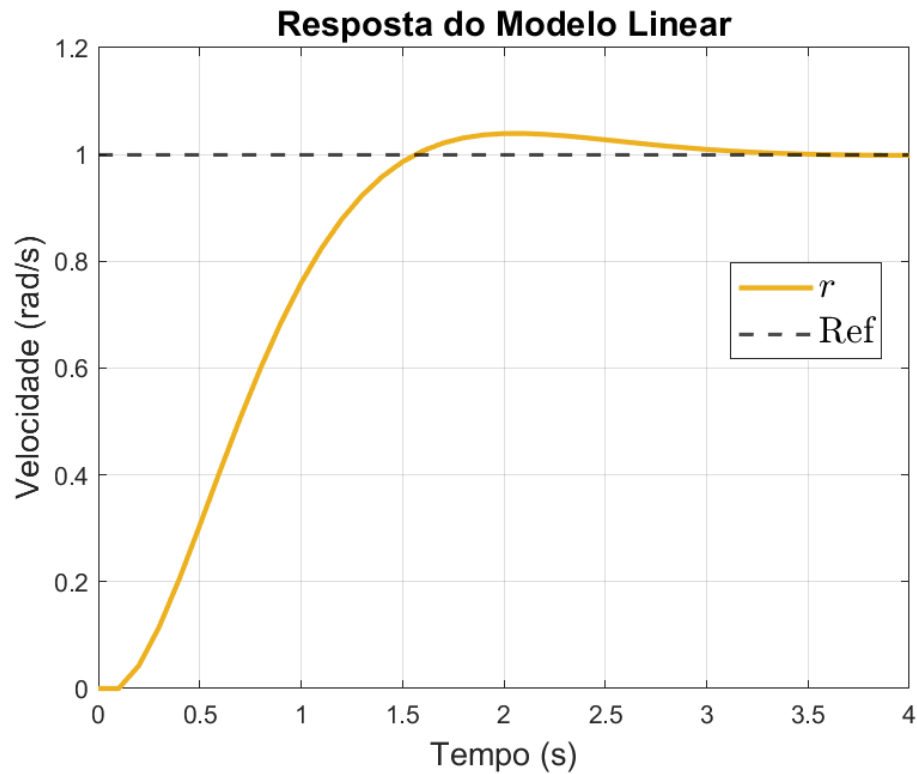


Figura 26 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo xg_0 .

Na Figura 26 é possível verificar a capacidade do controlador projetado em rastrear a entrada de referência para a velocidade angular r . Observa-se que r apresenta um comportamento mais rápido que as velocidades u e v , com tempo de subida de aproximadamente 0,97 segundos e tempo de acomodação em torno de 2,69 segundos. O sobressinal é de cerca de 3,94%, indicando apenas uma pequena oscilação transitória.

Na Figura 27 é exibido o sinal de controle τ_3 da velocidade r .

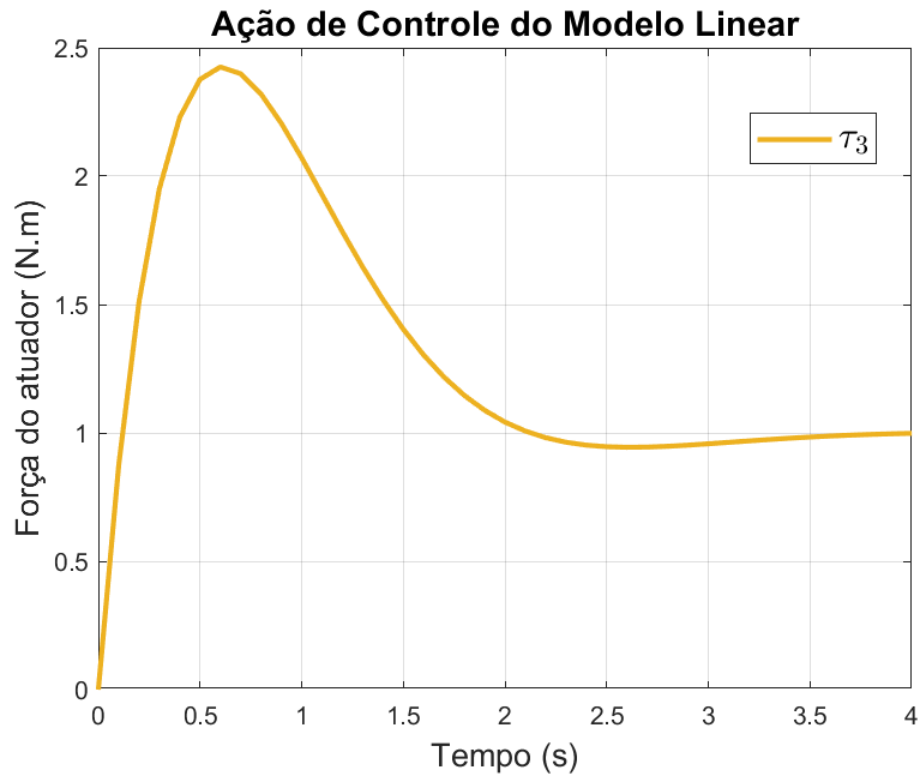


Figura 27 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQT-I aplicado ao modelo xg_0 .

A ação de controle exibida na Figura 23, tem um pico inicial de aproximadamente 2,4 N.m e decai para um valor de regime permanente de 1 N.m em aproximadamente 3,5 segundos.

4.1.3 Controlador DLQR para o Modelo Completo

Nesta seção é apresentado os resultados obtidos a partir da simulação do controlador DLQR aplicado ao modelo completo do sistema. As matrizes em espaço de estado do modelo linear completo são discretizadas pelo método ZOH com um tempo de amostragem de 0,1 segundos. Logo, tem-se:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0,9792 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9830 & -0,0010 \\ 0 & -0,0059 & 0,9504 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0,0052 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0028 & 0,0010 \\ 0 & 0,0010 & 0,0496 \end{bmatrix}, C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

A condição de controlabilidade é analisada, substituindo a Equação (4.21) em (3.15), logo tem-se

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0,0052 & 0 & 0 & 0,0051 & 0 & 0 & 0,0050 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0028 & 0,0010 & 0 & 0,0028 & 0,0009 & 0 & 0,0027 & 0,0009 \\ 0 & 0,0010 & 0,0496 & 0 & 0,0009 & 0,0471 & 0 & 0,0009 & 0,0448 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

sendo seu posto 3, logo o sistema é totalmente controlável, conseqüentemente é estabilizável, atendendo a condição requerida pelo método de Schur.

Para análise da observabilidade do sistema, substitui-se a Equação (4.21) em (3.16), logo tem-se

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,9792 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9830 & -0,0010 \\ 0 & -0,0059 & 0,9504 \\ 0,9588 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9663 & -0,0019 \\ 0 & -0,0114 & 0,9033 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

sendo seu posto 3, logo o sistema é observável, conseqüentemente é detectável, atendendo a condição exigida pelo método de Schur.

Após verificar se o sistema é estabilizável e detectável, a matriz P é obtida por meio do método de Schur, aplicado à DARE, conforme descrito na Seção 2.5.5.

As matrizes Q e R são escolhidas como matrizes identidade. Substituindo as matrizes da Equação (4.21) na Equação (3.17), e encontrando a matriz U particionada, para substituir os elementos U_{11} e U_{21} na Equação (3.21), conforme é apresentado no Apêndice A.2. A matriz P é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 23,8936 & 0 & 0 \\ 0 & 29,7817 & -1,0364 \\ 0 & -1,0364 & 8,6744 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Com a matriz P obtida, calcula-se o ganho ótimo substituindo as matrizes da Equação (4.1) e (4.24) na Equação (3.22). Logo, tem-se

$$K = \begin{bmatrix} 0,1218 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0820 & 0,0051 \\ 0 & -0,0238 & 0,3994 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Observa-se, a partir da matriz de ganhos, que existe um acoplamento entre as velocidades v e r , evidenciado pelos elementos fora da diagonal.

A resposta das velocidades u e v do modelo completo com o controlador DLQR, considerando as mesmas condições iniciais utilizadas para o modelo xg_0 , $u(0) = 2$ e $v(0) = 0,5$, é apresentado na Figura 28.

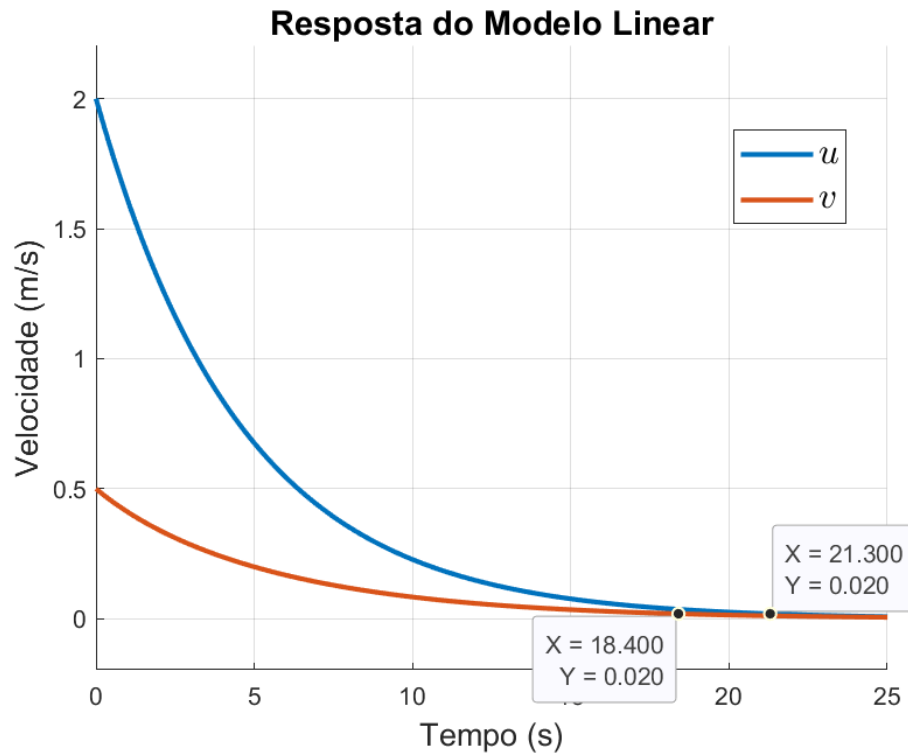


Figura 28 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo completo, com condições iniciais $u = 2$ e $v = 0,5$.

Observa-se na Figura 28 que ambas as velocidades decaem de seus valores iniciais até zero, comportamento esperado para o controlador DLQR. Adota-se o critério de 2% para a análise do tempo de acomodação do sistema. Nota-se que a velocidade u apresenta resposta idêntica à do modelo xg_0 , uma vez que não é influenciada pelas demais velocidades, atingindo a região de regime permanente por volta de 21,3 segundos. Já a velocidade v leva aproximadamente 18,4 segundos para entrar e permanecer dentro da mesma faixa de tolerância.

Os sinais de controle τ_1 e τ_2 , correspondentes às velocidades u e v , respectivamente, são exibidos na Figura 29

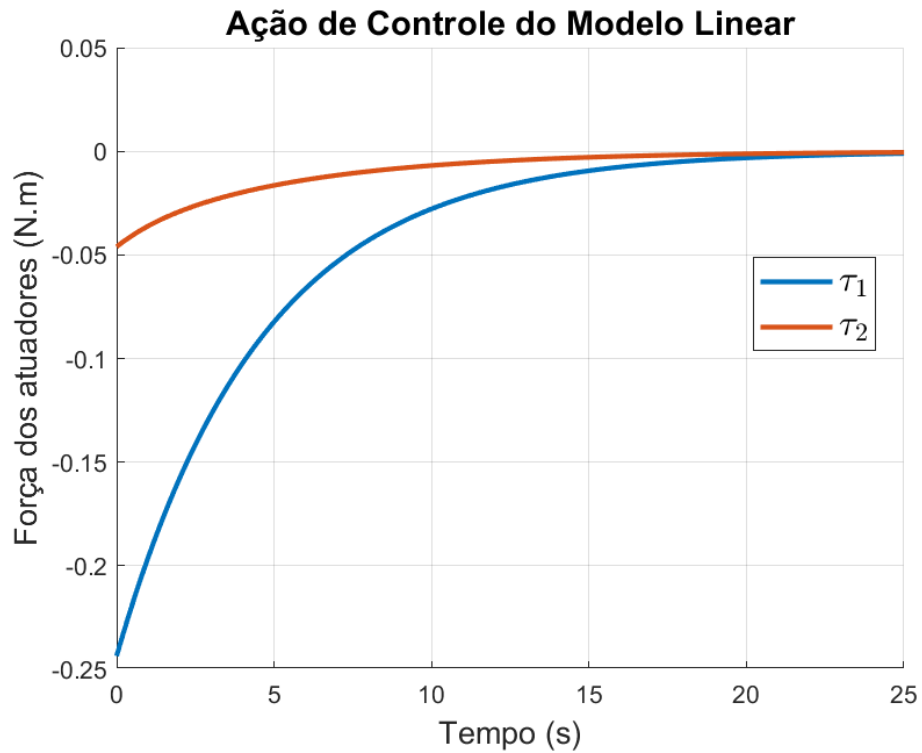


Figura 29 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQR aplicado ao modelo completo.

As ações de controle apresentadas na Figura 29 iniciam-se em valores negativos e convergem para zero, assim que a resposta do sistema se estabiliza. O tempo de acomodação da ação de controle são próximos aos dos seus respectivos estados. O sinal de controle τ_1 inicia-se aproximadamente em $-0,243$ N.m, enquanto τ_2 parte de cerca de $-0,046$ N.m. Ambos convergem para zero por volta de 20 segundos.

Na Figura 30 é apresentada a resposta da velocidade r , considerando a condição inicial $r(0) = 1$.

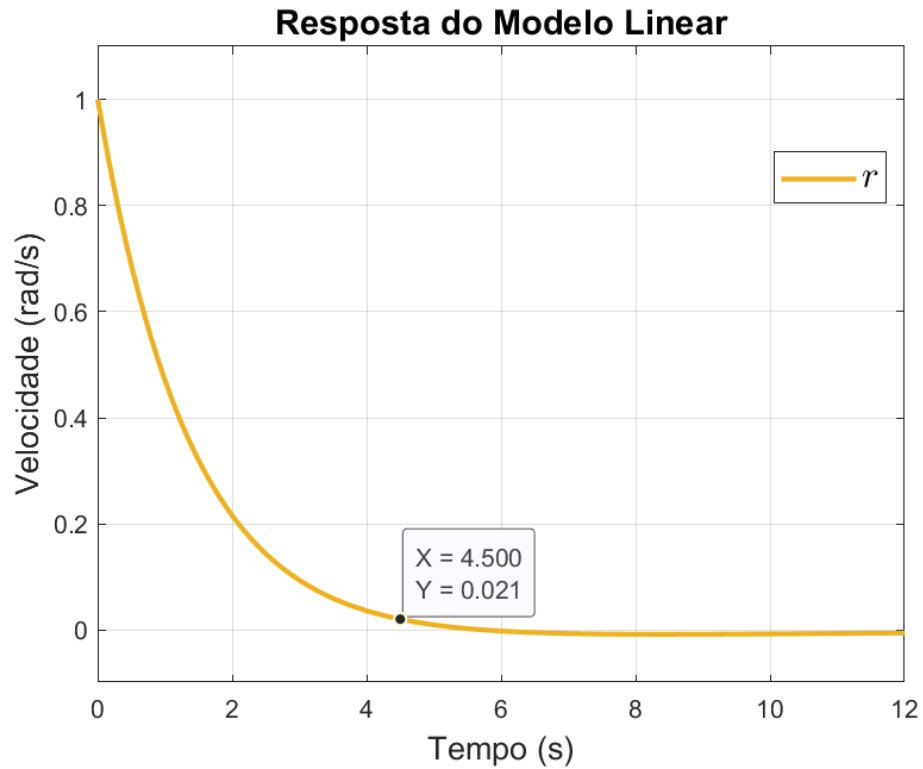


Figura 30 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo completo, com condição inicial $r = 1$.

A resposta da velocidade r , exibida na Figura 30, assim como no modelo xg_0 converge para zero mais rapidamente em comparação com as demais velocidades, atingindo a região de regime permanente para o critério de 2% em aproximadamente 4,5 segundos.

A Figura 31 apresenta o sinal de controle τ_3 da velocidade r .

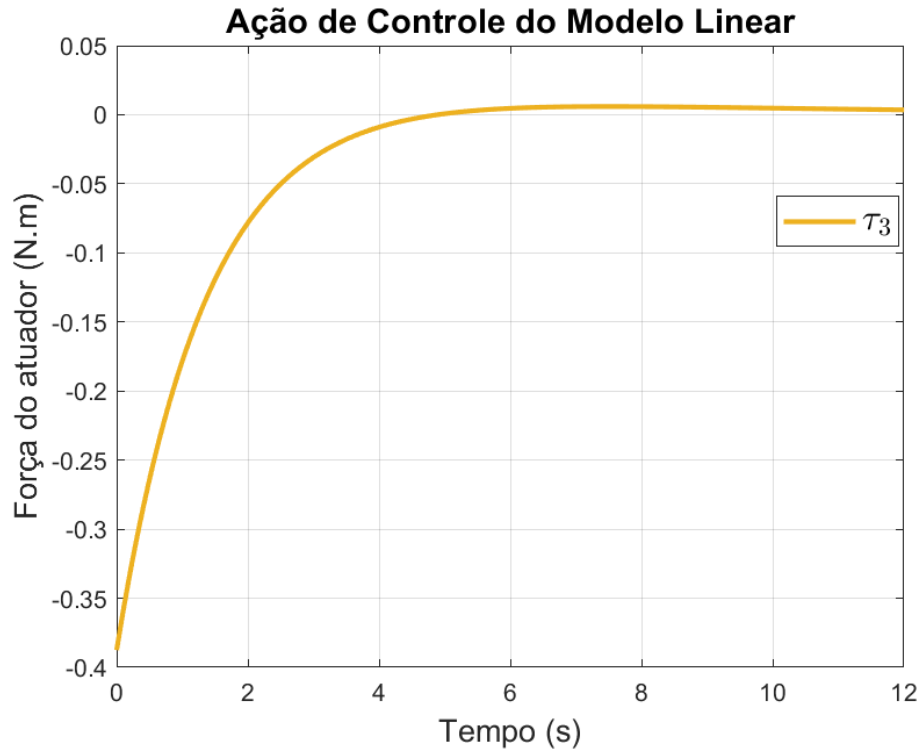


Figura 31 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQR aplicado ao modelo completo.

A ação de controle exibida na Figura 31, inicia-se em aproximadamente $-0,38$ N.m, reduzindo-se gradualmente até valores próximos de zero por volta de 6 segundos, conforme o estado correspondente converge para a referência.

4.1.4 Controlador DLQT-I para o Modelo Completo

Os resultados obtidos a partir da simulação do controlador DLQT-I aplicado ao modelo completo do sistema é apresentado a seguir. As matrizes discretas expandidas são calculadas substituindo-se as matrizes da Equação (4.21) nas Equações (3.24), (3.25) e (3.26). Logo, obtêm-se as matrizes aumentadas do sistema:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0,9792 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9830 & -0,0010 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0059 & 0,9504 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0,0052 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0028 & 0,0010 \\ 0 & 0,0010 & 0,0496 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

A matriz de ponderação de estado expandida \tilde{Q} é calculada substituindo a matriz da Equação (4.28) e a matriz identidade Q na equação (3.27). Assim, obtém-se:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

A matriz estendida \tilde{P} é calculada pelo método de Schur, substituindo-se as matrizes das Equações (4.26), (4.27), (4.28) e (4.29) na Equação (3.28), e então encontrando-se a matriz U , para substituir na Equação (3.21), conforme é apresentado no Apêndice A.3. Assim, obtém-se

$$\tilde{P} = 10^3 \begin{bmatrix} 3,2188 & 0 & 0 & 0,2002 & 0 & 0 \\ 0 & 7,8283 & -0,1655 & 0 & 0,3659 & -0,0056 \\ 0 & -0,1655 & 0,1309 & 0 & -0,0073 & 0,0232 \\ 0,2002 & 0 & 0 & 0,0199 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3659 & -0,0073 & 0 & 0,0272 & -0,0004 \\ 0 & -0,0056 & 0,0232 & 0 & -0,0004 & 0,0064 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

O ganho do controlador DLQT-I é calculado substituindo as matrizes das Equações (4.26), (4.27), (4.28), (4.29) e (4.30) na Equação (2.63). Logo, obtém-se

$$K = \begin{bmatrix} -16,0555 & 0 & 0 & -0,9590 & 0 & 0 \\ 0 & -21,3719 & 0,3433 & 0 & -0,9703 & -0,0026 \\ 0 & 0,4912 & -5,4553 & 0 & 0,0059 & -0,8725 \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

sendo

$$K_1 = \begin{bmatrix} -16,0555 & 0 & 0 \\ 0 & -21,3719 & 0,3433 \\ 0 & 0,4912 & -5,4553 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0,9590 & 0 & 0 \\ 0 & -0,9703 & -0,0026 \\ 0 & 0,0059 & -0,8725 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Com os ganhos do controlador DLQT-I encontrados, analisa-se o comportamento dinâmico do modelo completo para uma resposta degrau unitário.

A resposta das velocidades u e v com o controlador DLQT-I para uma entrada em degrau é exibida na Figura 32.

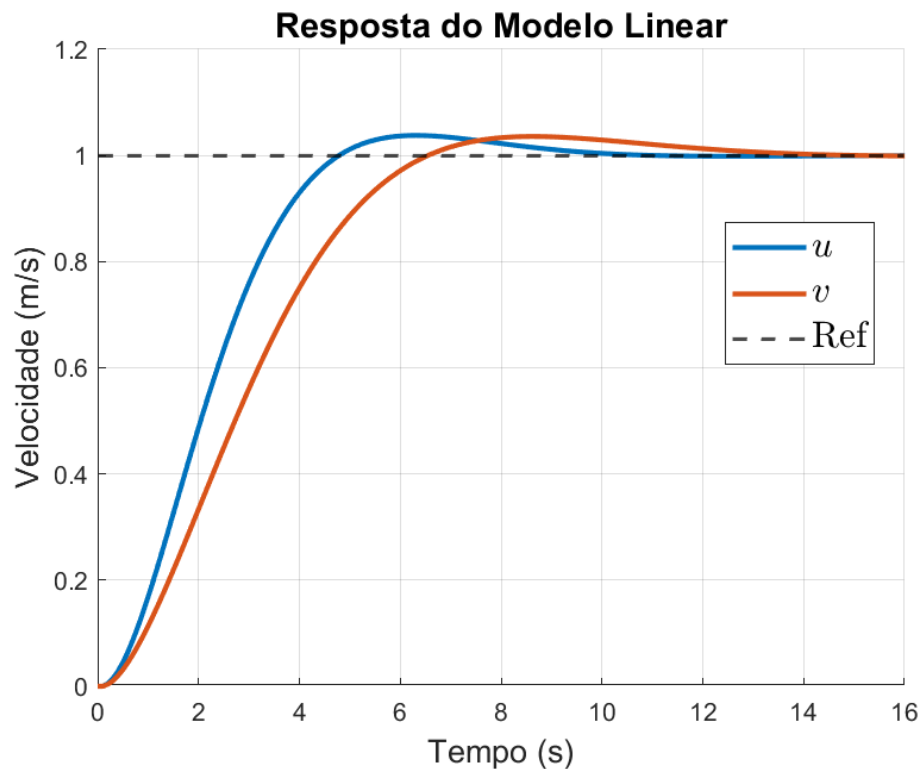


Figura 32 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo completo.

Observa-se na Figura 32 que o controlador rastreou a entrada de referência. A velocidade u apresenta um tempo de subida de 3,03 segundos, tempo de acomodação de 8,20 segundos e um sobressinal de 3,77%. Por outro lado, a velocidade v apresenta um comportamento distinto daquele obtido no modelo xg_0 , devido ao acoplamento com a velocidade r . O tempo de subida é de aproximadamente 4,20 segundos, enquanto o tempo de acomodação situa-se em torno de 11,08 segundos. O sobressinal também é baixo, cerca de 3,57%. Para ambas as velocidades, não há erro de regime permanente.

O sinal de controle τ_1 e τ_2 , associados às velocidades u e v , é exibido na Figura 33.

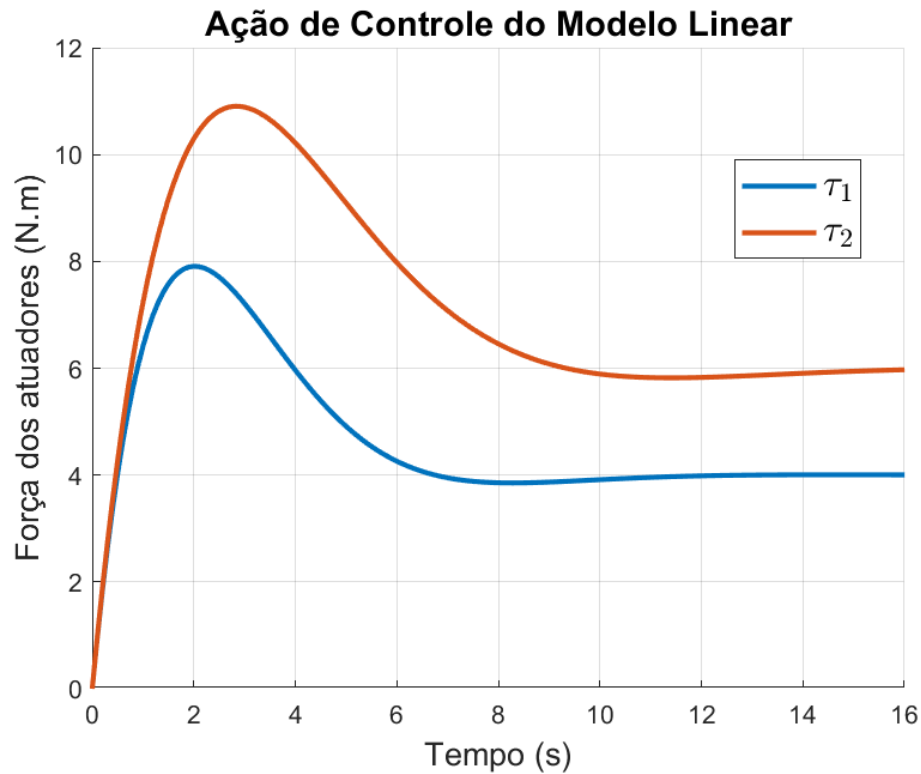


Figura 33 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQT-I aplicado ao modelo completo.

Observa-se na Figura 33 que, durante o regime transitório, as ações de controle apresentam picos iniciais de aproximadamente 11 N.m para τ_1 e 8 N.m para τ_2 . Após esse pico, ambas as ações decaem de forma exponencial até atingirem os valores de regime permanente, próximos de 4 N.m para τ_1 e 6 N.m para τ_2 , estabilizando por volta de 10 segundos.

Na Figura 30 é exibida a resposta do controlador DLQT-I para a velocidade r .

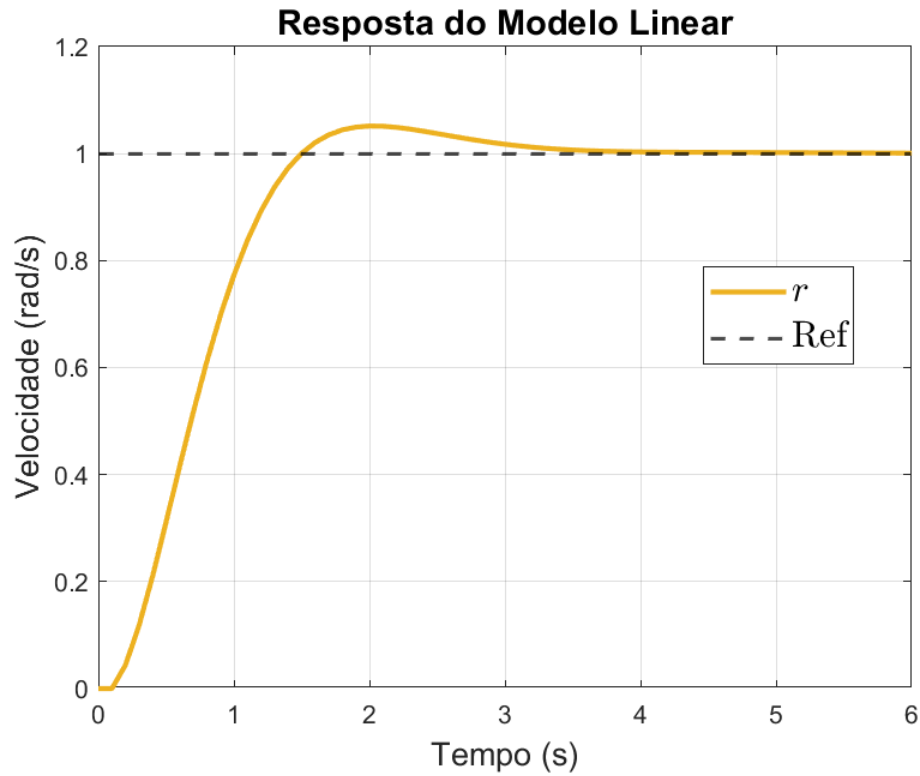


Figura 34 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo completo.

Observa-se na Figura 34 que a resposta da velocidade r apresenta um tempo de subida de aproximadamente 0,94 segundos e um tempo de acomodação em torno de 2,92 segundos. O sobressinal é de 5,15%, e o erro em regime permanente nulo.

A Figura 35 apresenta o sinal de controle τ_3 da velocidade r .

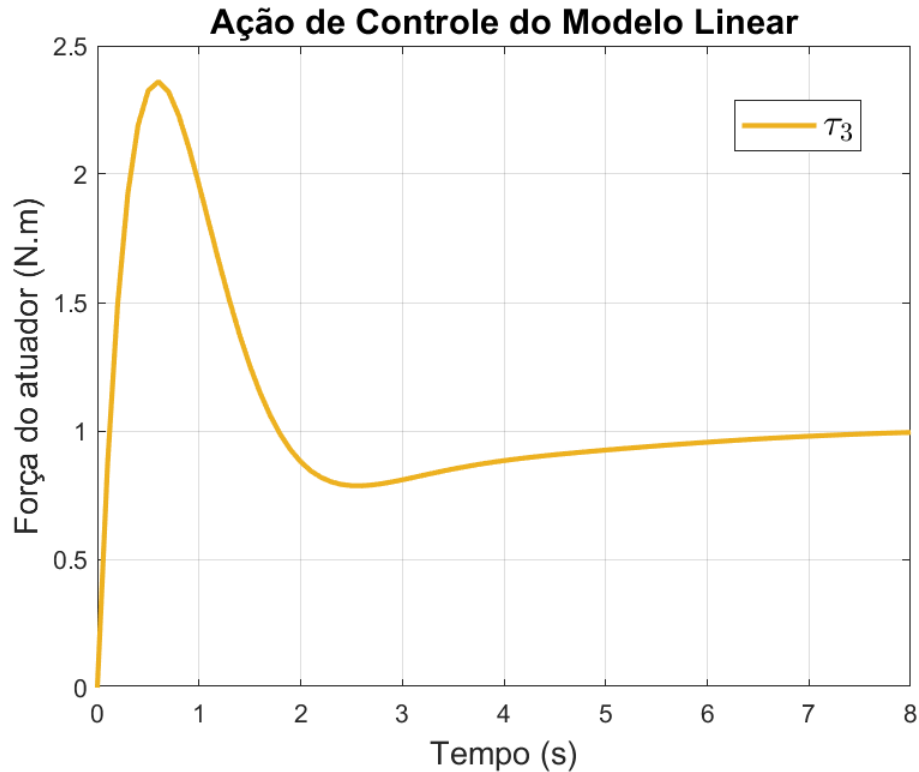


Figura 35 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQT-I aplicado ao modelo completo.

A ação de controle exibida na Figura 31, tem um pico de aproximadamente 2,4 N.m e decai para um valor de regime permanente de 1 N.m em aproximadamente 8 segundos.

4.2 Experimentos HIL

Esta seção apresenta os resultados obtidos via a técnica HIL. As mesmas configurações de controladores e modelos utilizadas na etapa de simulação em *MATLAB*[®] foram mantidas, permitindo uma comparação direta entre o comportamento simulado e o comportamento obtido utilizando a implementação HIL. Os testes foram realizados tanto para o modelo reduzido x_{g_0} quanto para o modelo completo, utilizando os controladores DLQR e DLQT-I.

4.2.1 Controlador DLQR aplicado ao Modelo x_{g_0} - HIL

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para o controlador DLQR aplicado ao modelo x_{g_0} , projetado na Seção 4.1.1 e executado por meio da técnica HIL. Na Figura 36 exibe a realização dos experimentos HIL para o controlado, onde o simulador HIL envia os estados do sistema ao microcontrolador ESP32, que, por sua vez, retorna as ações de controle aplicadas ao simulador.

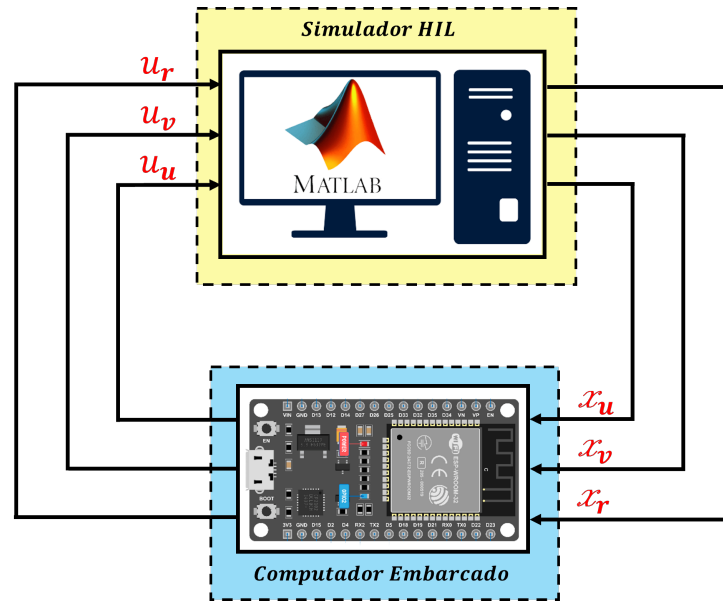


Figura 36 – Experimento HIL do controlador DLQR, com a planta do *CyberShip I* simulada no *MATLAB*[®] e o controlador executado no microcontrolador ESP32.

Utilizou-se um tempo de amostragem de 0,1 segundos e o método de discretização ZOH. A matriz de ganho K , embarcada no microcontrolador ESP32, corresponde exatamente à calculada na Seção 4.1.1, apresentada na matriz da Equação (4.25), e foi empregada para implementar a lei de controle definida pela Equação (3.23), a partir dos estados enviados pelo *MATLAB*[®] a cada período de amostragem. A comunicação entre o *MATLAB*[®] e o ESP32 foi realizada via porta serial a 115200 bauds, transmitindo continuamente o vetor de estados para o microcontrolador. Este, por sua vez, retorna o vetor de ação de controle, conforme exibido na Figura 36, que é utilizado pelo *MATLAB*[®] para atualizar a dinâmica discreta do modelo, de acordo com as Equações (2.21) e (2.22), a cada ciclo de controle.

A resposta das velocidades u e v do modelo xg_0 com o controlador DLQR, considerando as mesmas condições iniciais utilizadas nos experimentos computacionais, $u(0) = 2$ e $v(0) = 0,5$, é apresentado na Figura 37.

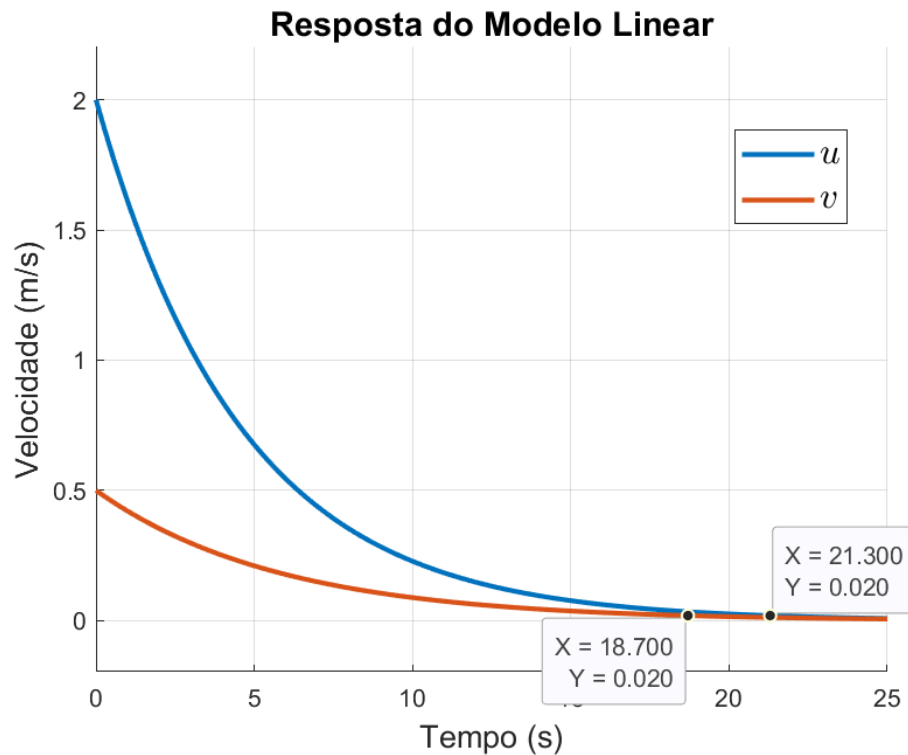


Figura 37 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo xg_0 , com condições iniciais $u = 2$ e $v = 0,5$, via HIL.

O critério de 2% para o tempo de acomodação também é utilizado nesta análise. A resposta exibida na Figura 37 é similar à obtida nos experimentos computacionais da Figura 20. A velocidade u atinge a região de regime permanente por volta de 21,3 segundos, enquanto a velocidade v leva aproximadamente 18,7 segundos para entrar e permanecer dentro da mesma faixa de tolerância.

Na Figura 38 é exibido os sinais de controle τ_1 e τ_2 , das velocidades u e v , respectivamente.

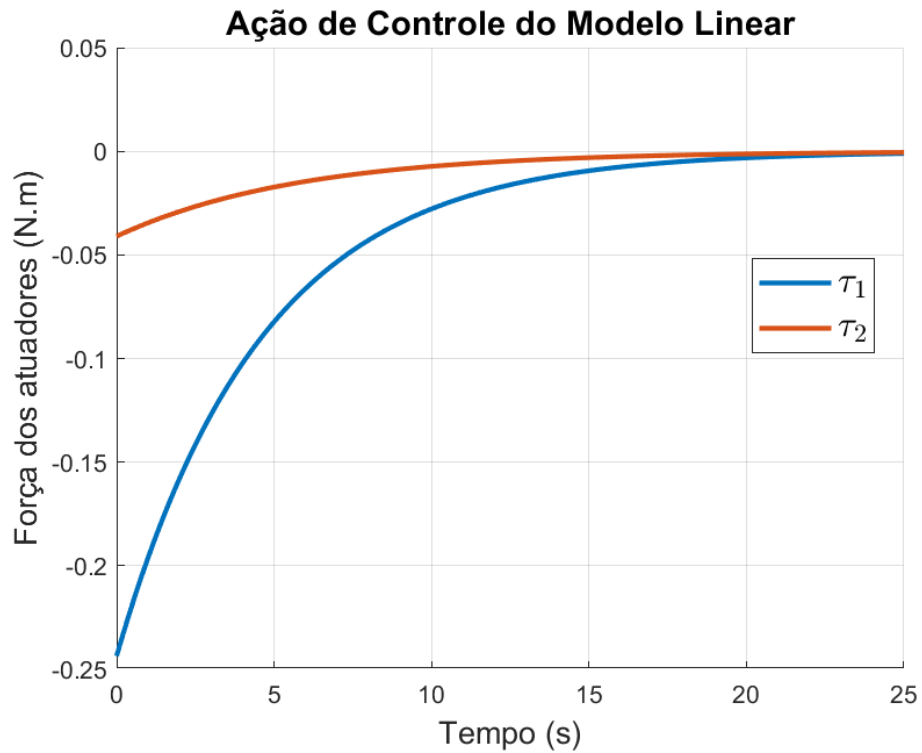


Figura 38 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQR aplicado ao modelo xg_0 , via HIL.

O sinal de controle da velocidade u , τ_1 , inicia-se aproximadamente em $-0,243$ N.m, enquanto o sinal de controle da velocidade v , τ_2 , parte de cerca de $-0,041$ N.m, conforme observa-se na Figura 38. Ambos convergem para zero por volta de 20 segundos.

Na Figura 39 é apresentada a resposta da velocidade r , considerando a condição inicial $r(0) = 1$.

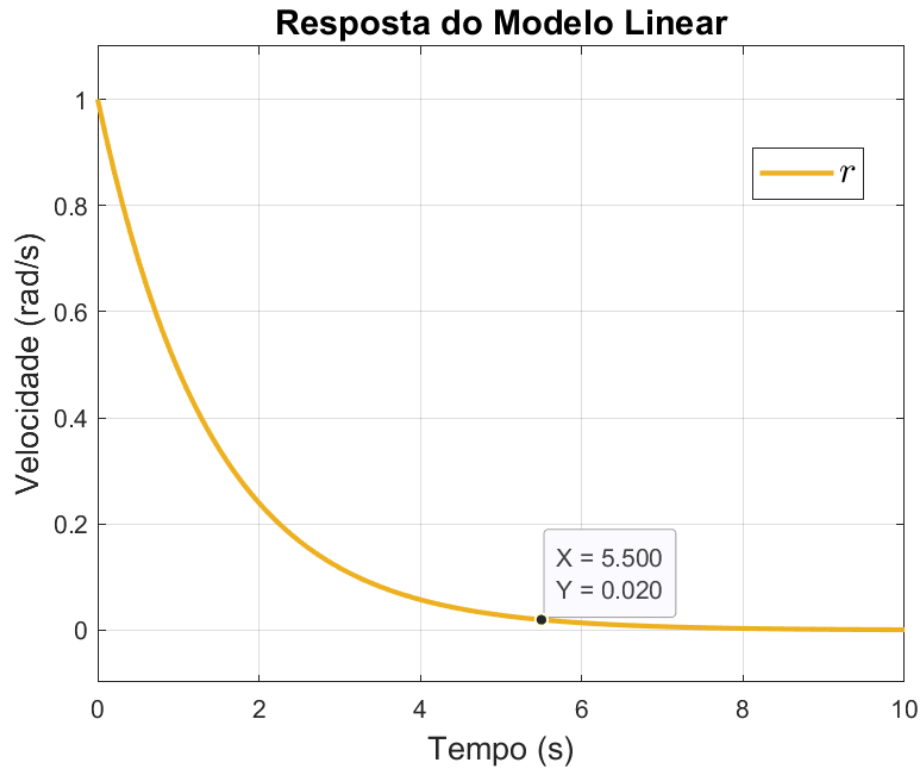


Figura 39 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo xg_0 , com condição inicial $r = 1$, via HIL.

Observa-se na Figura 39 que o estado r converge para a região de regime permanente, considerando o critério de 2%, em aproximadamente 5,5 segundos, de forma semelhante à resposta apresentada na Figura 22, obtida nos experimentos computacionais.

A Figura 40 apresenta o sinal de controle τ_3 da velocidade r .

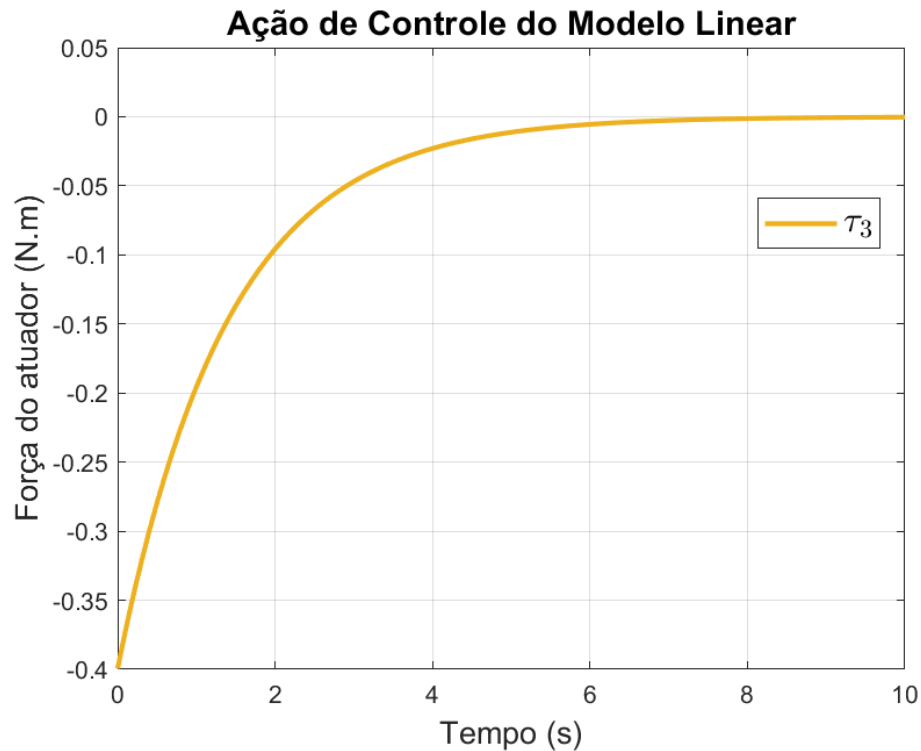


Figura 40 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQR aplicado ao modelo x_{g_0} , via HIL.

O sinal de controle exibido na Figura 40 apresenta um valor inicial de aproximadamente $-0,4$ N.m e decresce gradualmente até atingir valores próximos de zero por volta de 7 segundos, à medida que o estado correspondente se aproxima de zero.

4.2.2 Controlador DLQT-I aplicado ao Modelo x_{g_0} - HIL

Os resultados obtidos para o controlador DLQT-I, aplicado ao modelo x_{g_0} conforme projetado na Seção 4.1.2, são apresentados para a implementação via HIL. A Figura 41 exhibe a realização dos experimentos HIL para o controlador, nos quais o simulador HIL envia as variáveis de estado, as saídas e as referências das respectivas velocidades ao microcontrolador ESP32, que, por sua vez, retorna as ações de controle calculadas ao simulador.

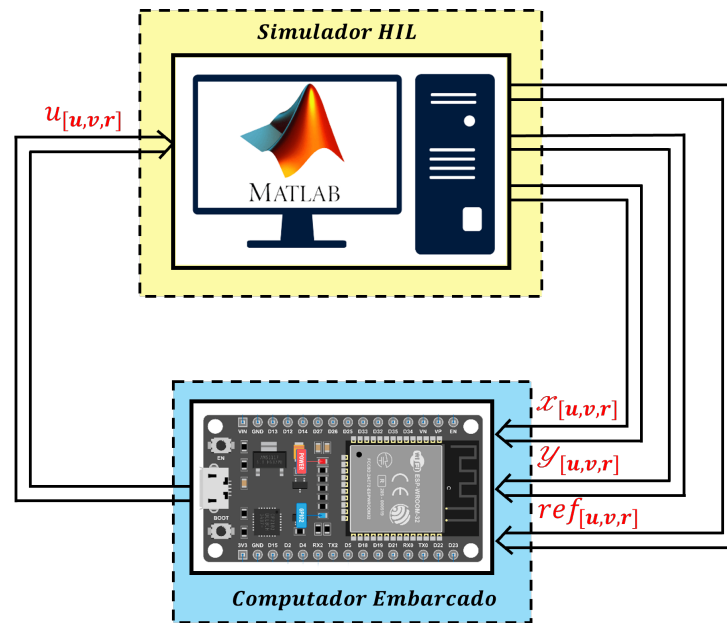


Figura 41 – Experimento HIL do controlador DLQT-I, com a planta do *CyberShip I* simulada no *MATLAB*[®] e o controlador executado no microcontrolador ESP32.

Assim como no caso do controlador DLQT-I simulado, utilizou-se um tempo de amostragem de 0,1 segundos e o método de discretização ZOH para a obtenção do modelo discreto utilizado no laço de controle.

A matriz de ganho K_1 e K_2 , calculadas na Seção 4.1.2 e dada pela Equação (4.20), foram embarcadas no microcontrolador ESP32. Esse controlador implementa a lei de controle dada na Equação (3.29). A comunicação entre *MATLAB*[®] e ESP32 foi realizada via porta serial a 115200 bauds. A cada período de amostragem, o *MATLAB*[®] envia ao microcontrolador o vetor de estados, a saída e a referência do modelo discreto, que, por sua vez, retorna o vetor de controle, conforme exibido na Figura 41. O *MATLAB*[®], então, atualizava a dinâmica do modelo discreto conforme as Equações (2.21) e (2.22).

A resposta das velocidades u e v do modelo xg_0 com o controlador DLQT-I para uma entrada em degrau é exibida na Figura 42.

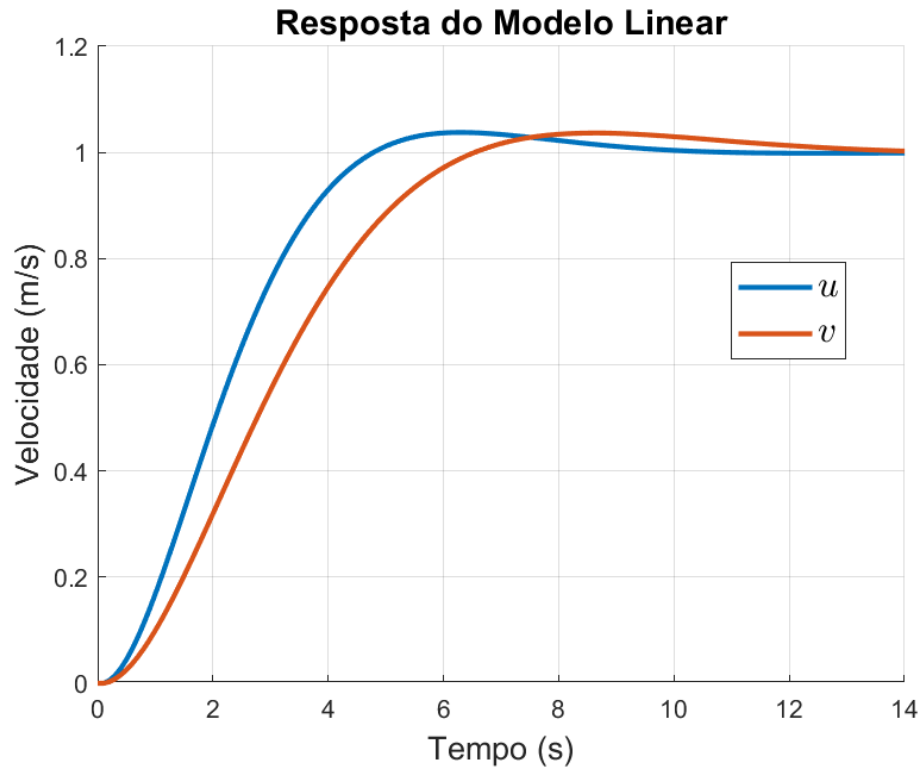


Figura 42 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo xg_0 , via HIL.

O controlador DLQT-I demonstra eficiência na eliminação do erro em regime permanente e no rastreamento do sinal de referência. Isso é evidenciado pelas respostas das velocidades u e v apresentadas na Figura 42. A velocidade u apresenta um tempo de subida de aproximadamente 3,02 segundos e um tempo de acomodação próximo de 8,20 segundos, com sobressinal de 3,77%, atingindo o regime permanente sem oscilações significativas. A velocidade v atinge o regime permanente sem oscilações relevantes, apresentando um tempo de subida de cerca de 4,13 segundos, tempo de acomodação em torno de 11,10 segundos e sobressinal baixo de aproximadamente 3,66%. O comportamento apresentado de ambas as velocidades é similar ao apresentado na Figura 24.

O sinal de controle τ_1 e τ_2 , associados às velocidades u e v , é exibido na Figura 43.

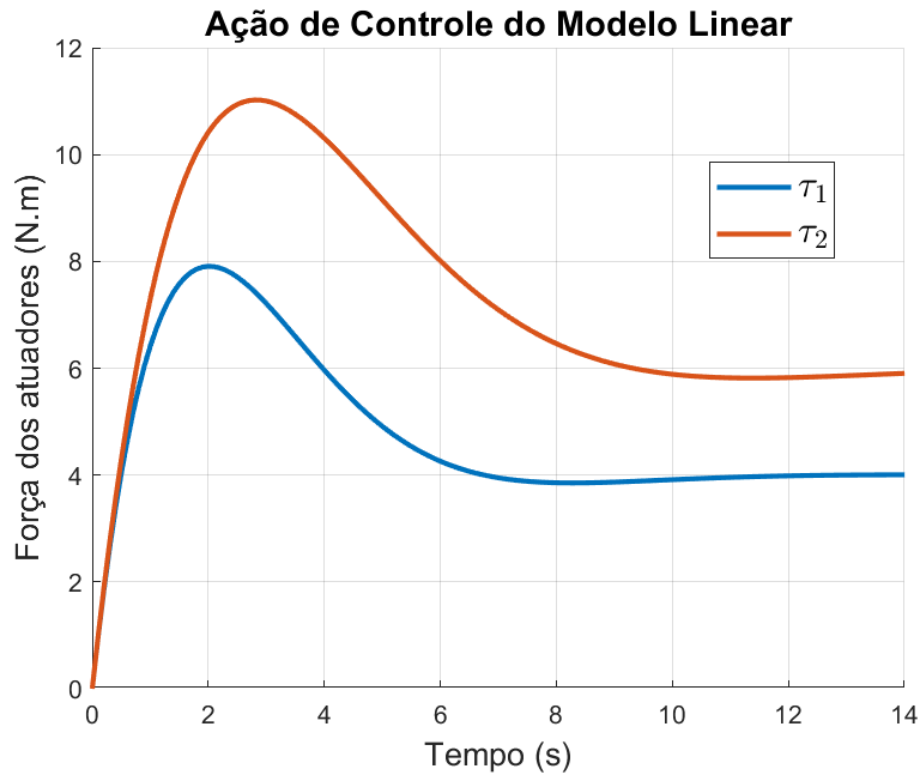


Figura 43 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQT-I aplicado ao modelo x_{g_0} , via HIL.

Na Figura 43, observa-se um pico inicial nas duas ações de controle durante a resposta transitória. Esses picos atingem valores de aproximadamente $\tau_1 = 11$ N.m para u e $\tau_2 = 8$ N.m para v . Após esse pico, ocorre uma decaída exponencial até os valores de regime permanente, com τ_1 estabilizando-se em torno de 4 N.m em 7 segundos e τ_2 em 6 N.m, atingido aproximadamente aos 10 segundos.

A Figura 39 apresenta a resposta do controlador para a velocidade r .

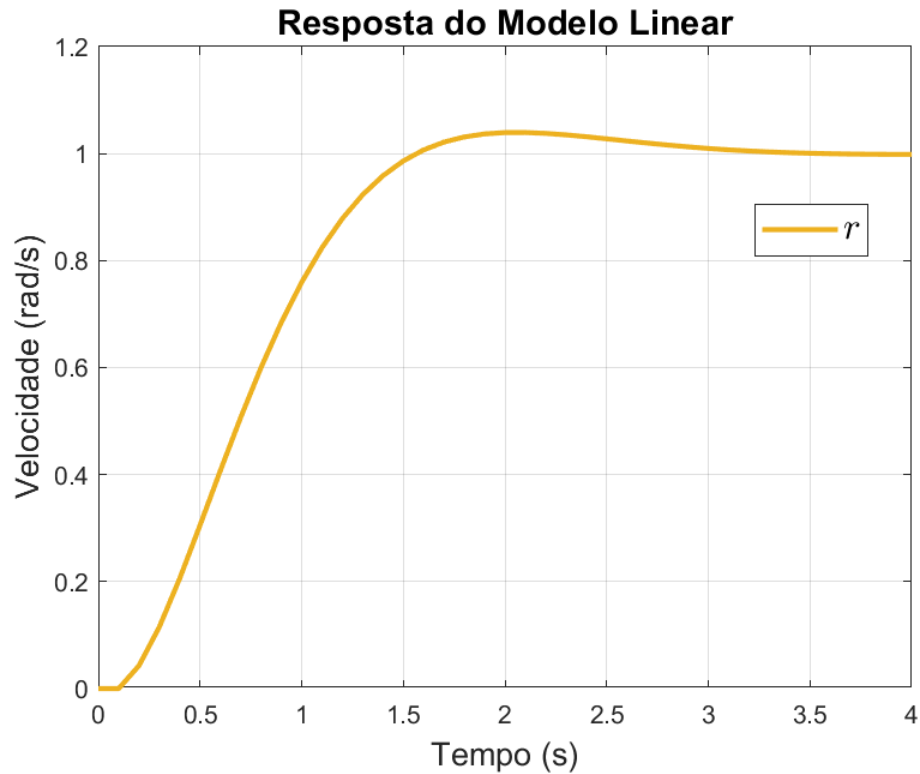


Figura 44 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo x_{g_0} , via HIL.

Na Figura 44, observa-se o desempenho do controlador projetado no rastreamento da referência para a velocidade angular r . A resposta apresenta um tempo de subida de aproximadamente 0,97 segundos e um tempo de acomodação em torno de 2,69 segundos. O sobressinal é de cerca de 3,94% e um erro de regime permanente nulo.

A Figura 45 apresenta o sinal de controle τ_3 da velocidade r .

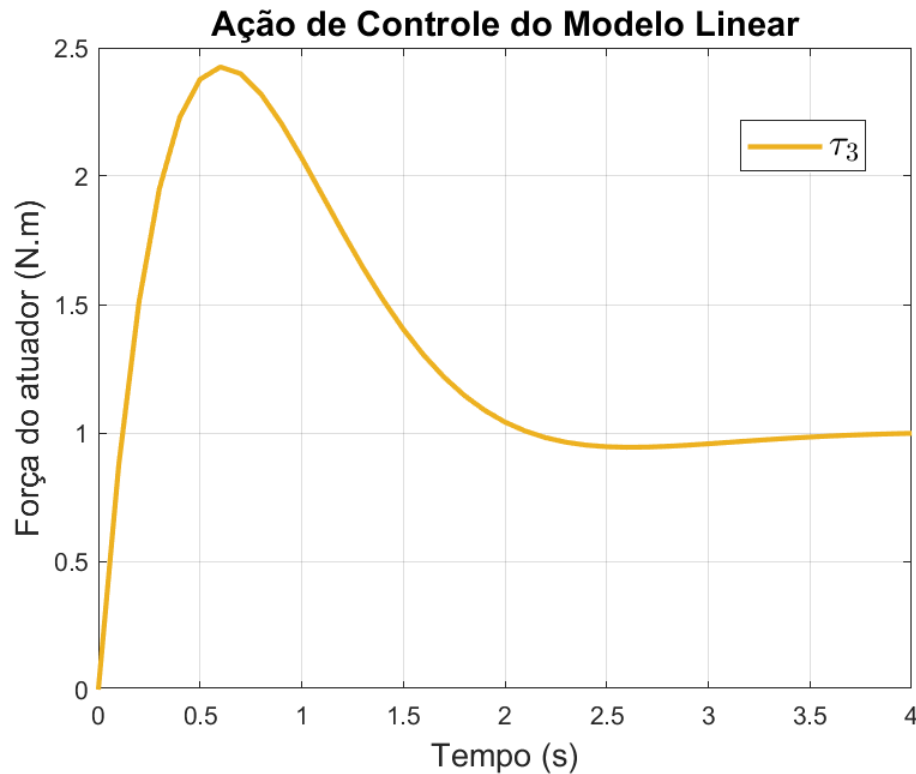


Figura 45 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQT-I aplicado ao modelo x_{g_0} , via HIL.

A ação de controle exibida na Figura 40 apresenta um pico inicial de aproximadamente 2,4 N.m, decaindo em seguida para o valor de regime permanente de 1 N.m, alcançado por volta de 3,5 segundos.

4.2.3 Controlador DLQR aplicado ao Modelo Completo - HIL

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para o controlador DLQR aplicado ao modelo completo, projetado na Seção 4.1.3 e executado por meio da técnica HIL. Utilizou-se um tempo de amostragem de 0,1 segundos e o método de discretização ZOH.

Os procedimentos para implementação é similar ao utilizado para o modelo x_{g_0} apresentado na Seção 4.2.1, onde a matriz de ganho K dado na Equação (4.25) é embarcada no microcontrolador ESP32, e implementa-se a lei de controle definida na Equação (3.23), a partir dos estados enviados pelo *MATLAB*[®] a cada período de amostragem e então é atualizada a dinâmica discreta do modelo, conforme as Equações (2.21) e (2.22). A comunicação entre o *MATLAB*[®] e o ESP32 foi realizada via porta serial a 115200 bauds.

A resposta das velocidades u e v do modelo completo com o controlador DLQR, considerando as condições iniciais $u(0) = 2$ e $v(0) = 0,5$ é apresentado na Figura 46.

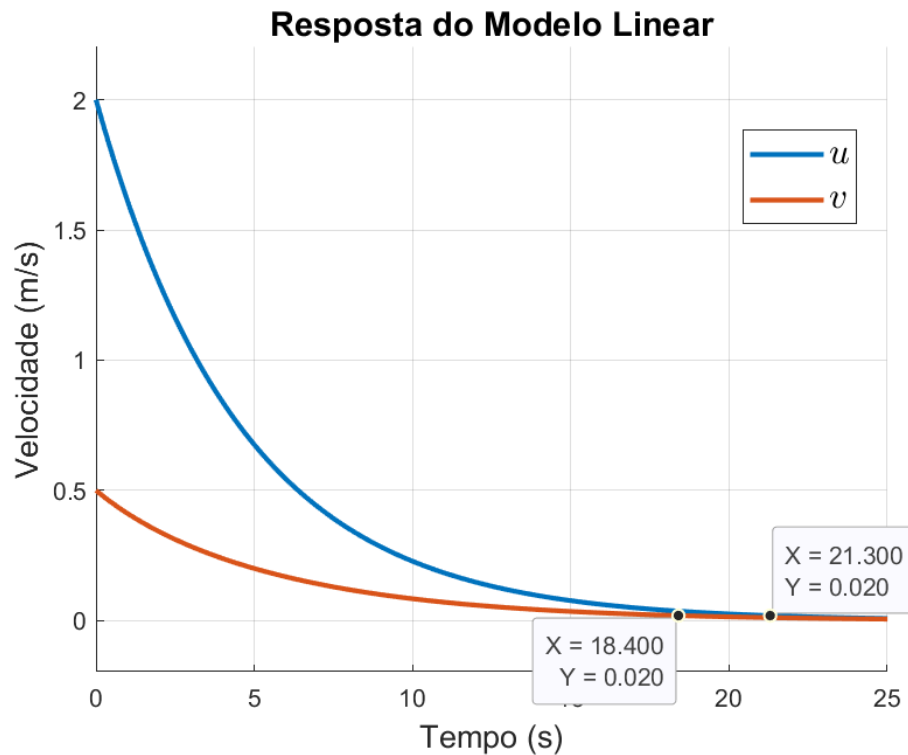


Figura 46 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo completo, com condições iniciais $u = 2$ e $v = 0,5$, via HIL.

Observa-se que ambas as velocidades decaem gradualmente de seus valores iniciais até zero. Considerando um critério de 2% para o tempo de acomodação, a velocidade v atinge o regime permanente aproximadamente aos 18,4 segundos, enquanto a velocidade u demora cerca de 21,3 segundos para permanecer dentro da faixa de tolerância, conforme exibido na Figura 46. Essa resposta é similar à obtida nos experimentos computacionais apresentados na Figura 28.

Os sinais de controle associados, τ_1 e τ_2 , correspondentes às velocidades u e v , são apresentados na Figura 47.

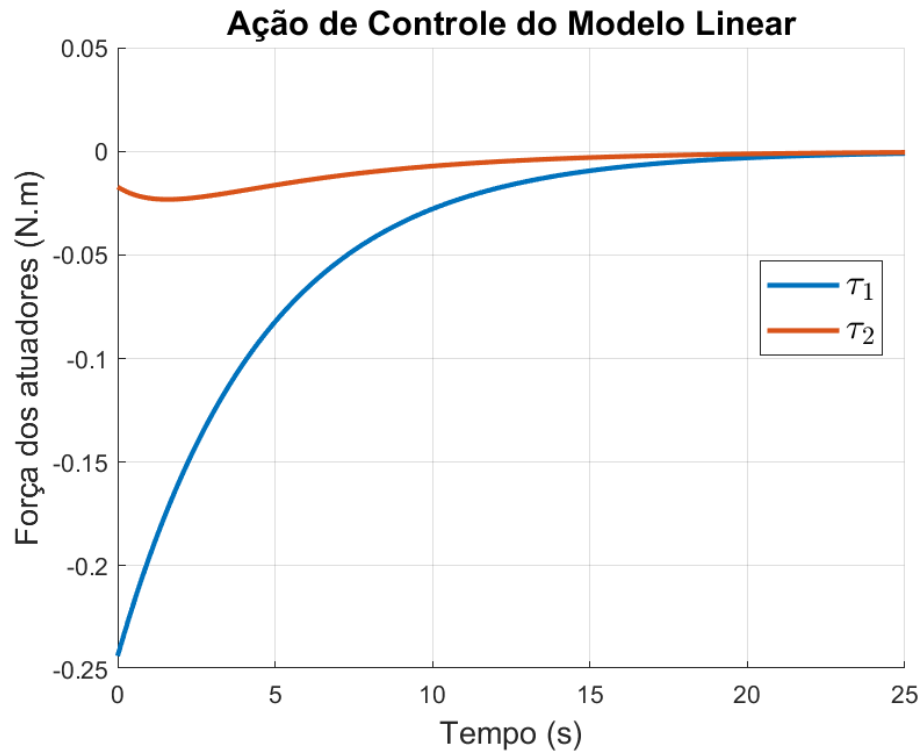


Figura 47 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQR aplicado ao modelo completo, via HIL.

Na Figura 47 observa-se que as ações de controle começam com valores negativos e gradualmente convergem para zero à medida que a resposta do sistema se aproxima de zero. O sinal de controle τ_1 inicia-se em aproximadamente $-0,243$ N.m, enquanto τ_2 parte de cerca de $-0,024$ N.m, ambos alcançando valores próximos de zero por volta dos 20 segundos.

Na Figura 48 é apresentada a resposta da velocidade r , considerando a condição inicial $r(0) = 1$.

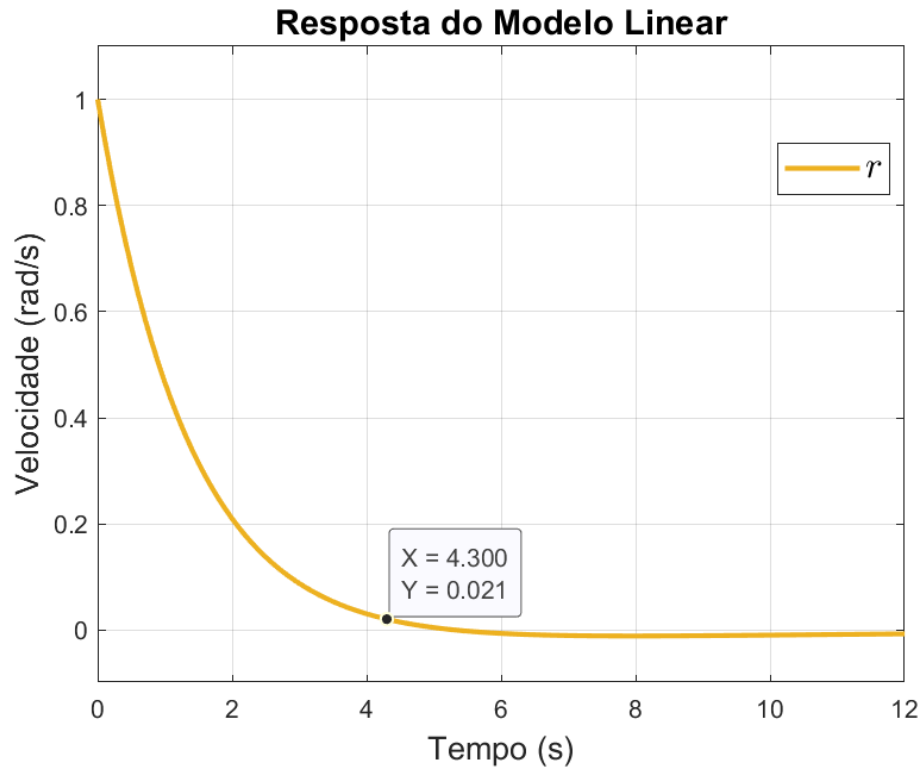


Figura 48 – Resposta do sistema com o controlador DLQR aplicado ao modelo completo, com condição inicial $r = 1$, via HIL.

Conforme exibido na Figura 48, a velocidade r decai até zero, atingindo a região de regime permanente, considerando o critério de 2%, em aproximadamente 4,3 segundos. Em comparação com a resposta obtida nos experimentos computacionais, apresentada na Figura 30, esse tempo de acomodação é maior.

A Figura 49 apresenta o sinal de controle τ_3 da velocidade r .

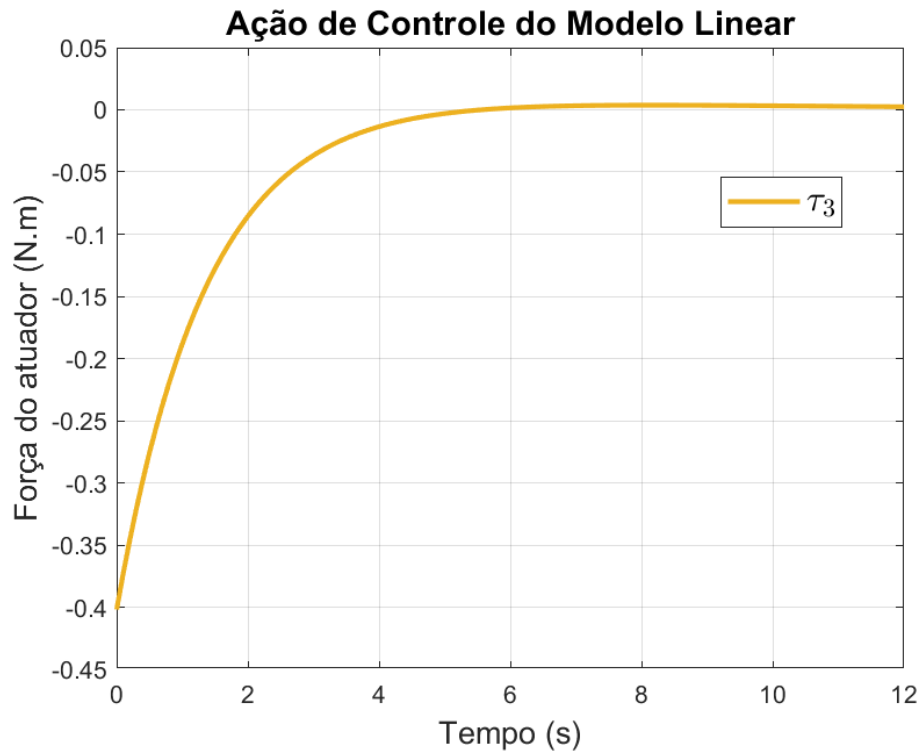


Figura 49 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQR aplicado ao modelo completo, via HIL.

Na Figura 49 observa-se que a ação de controle inicia-se em aproximadamente $-0,4\text{N.m}$ e decai gradualmente até valores próximos de zero por volta de 5 segundos, à medida que o estado correspondente converge para zero.

4.2.4 Controlador DLQT-I aplicado ao Modelo Completo - HIL

Os resultados obtidos para o controlador DLQT-I aplicado ao modelo completo, conforme projetado na Seção 4.1.4, é implementado usando a técnica HIL. Assim como no caso do controlador DLQT-I, utiliza-se um tempo de amostragem de 0,1 segundos e o método de discretização ZOH para a obtenção do modelo discreto.

Os procedimentos adotados são similares aos apresentados na Seção 4.2.2 para o modelo xg_0 . As matrizes de ganho K_1 e K_2 , calculadas na Seção 4.1.4 e apresentadas na Equação (4.32), foram embarcadas no microcontrolador ESP32, onde a lei de controle definida na Equação (3.29) é aplicada para atualizar a dinâmica do modelo discreto, conforme as Equações (2.21) e (2.22).

A resposta das velocidades u e v do modelo completo com o controlador DLQT-I para uma entrada em degrau é exibida na Figura 50.

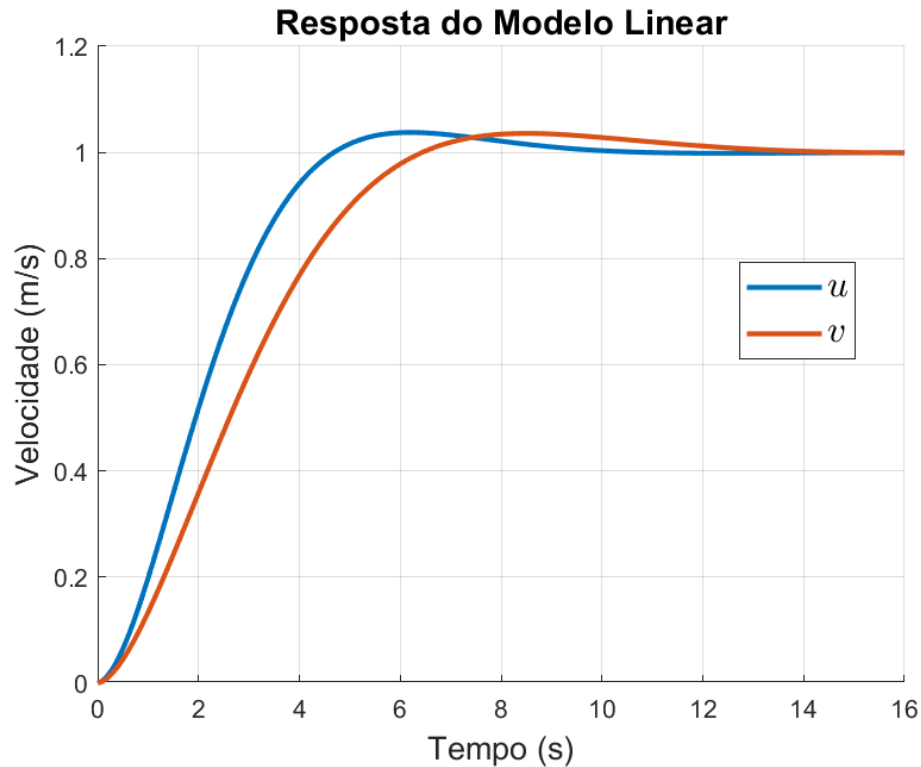


Figura 50 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo xg_0 , via HIL.

Na Figura 50 observa-se que o controlador DLQT-I consegue eliminar o erro em regime permanente e garantir o rastreamento adequado do sinal de referência. A velocidade u apresenta um tempo de subida de aproximadamente 3,02 segundos e um tempo de acomodação próximo de 8,10 segundos, com sobressinal de 3,77%, atingindo o regime permanente sem oscilações significativas. A velocidade v atinge o regime permanente sem oscilações relevantes, apresentando tempo de subida de cerca de 4,18 segundos, tempo de acomodação em torno de 10,97 segundos e sobressinal baixo, aproximadamente 3,59%. Em comparação com os resultados computacionais exibidos na Figura 32, observa-se que as respostas em HIL apresentam pequenas variações nos critérios analisados.

Na Figura 51 são apresentados os sinais de controle τ_1 e τ_2 , correspondentes às velocidades u e v , respectivamente.

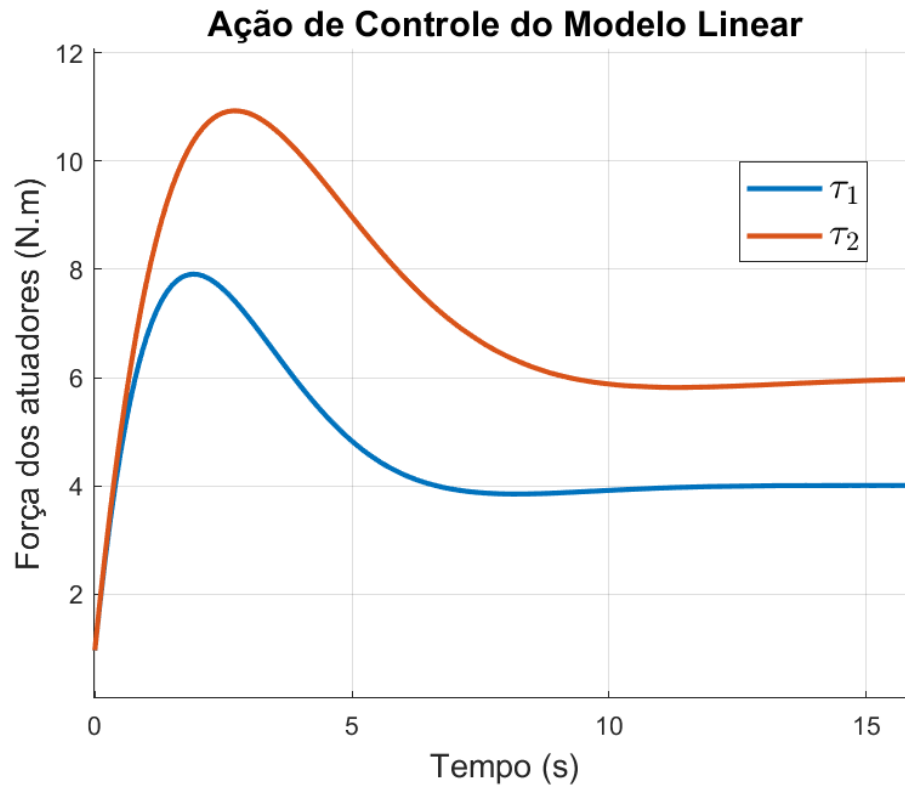


Figura 51 – Ações de controle τ_1 e τ_2 do controlador DLQT-I, via HIL.

Na Figura 51 observa-se que ambas as ações de controle apresentam um pico inicial durante a resposta transitória, atingindo aproximadamente $\tau_1 = 10,93$ N.m e $\tau_2 = 8$ N.m, respectivamente. Em seguida, ocorre uma decaída exponencial até os valores de regime permanente, cerca de 4 N.m para τ_1 e 6 N.m para τ_2 , alcançados aproximadamente aos 7 e 10 segundos, respectivamente.

A Figura 48 apresenta a resposta do controlador para a velocidade r .

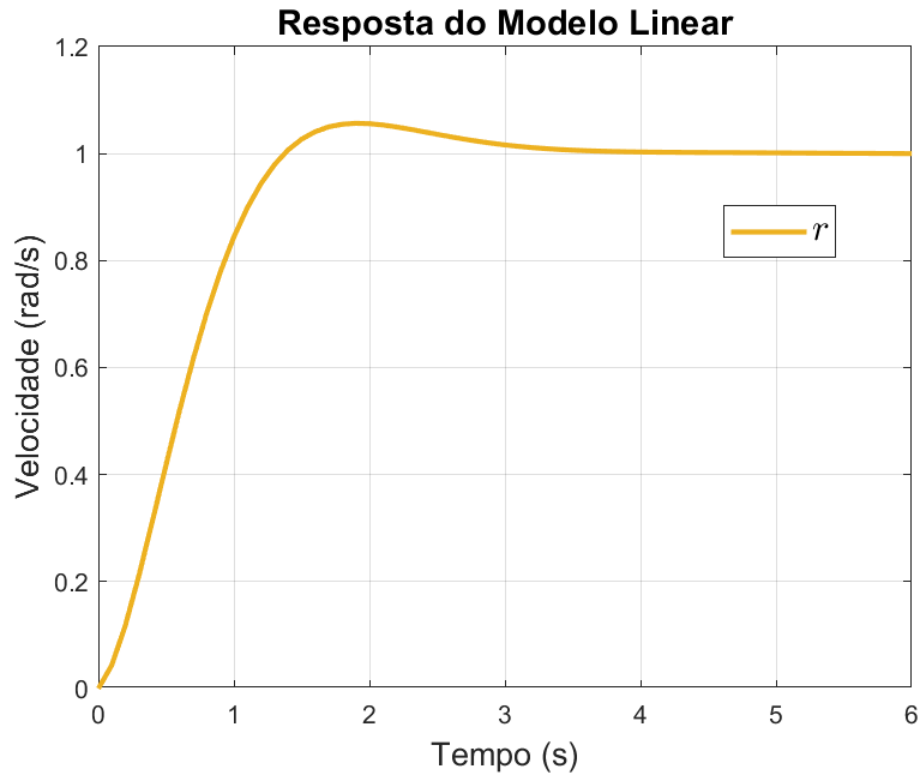


Figura 52 – Resposta do sistema com o controlador DLQT-I aplicado ao modelo xg_0 , via HIL.

A Figura 52 evidencia a capacidade do controlador projetado em rastrear a entrada de referência para a velocidade angular r . Observa-se que r apresenta um tempo de subida de aproximadamente 0,92 segundos e tempo de acomodação em torno de 2,88 segundos. O sobressinal é de cerca de 5,66%, indicando apenas uma pequena oscilação transitória. Assim como as velocidades u e v , observa-se que, em comparação com os experimentos computacionais, apresentam pequenas variações nos critérios analisados.

Na Figura 53 é apresentado o sinal de controle τ_3 da velocidade r .

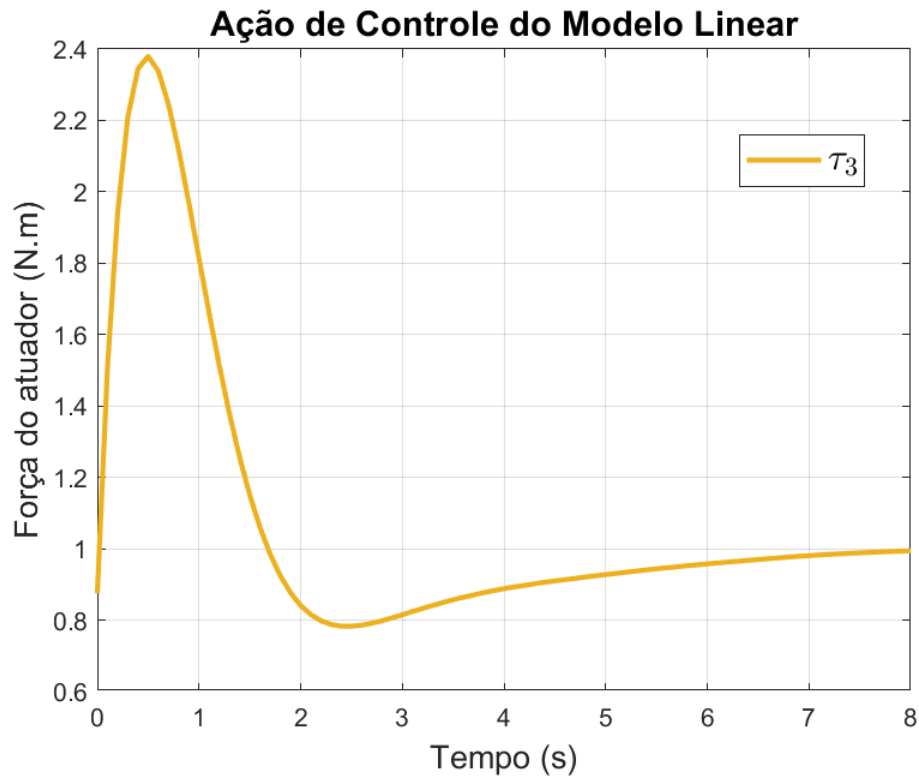


Figura 53 – Ação de controle τ_3 do controlador DLQT-I, via HIL.

Na Figura 49 observa-se que a ação de controle apresenta um pico de aproximadamente 2,4 N.m, decaindo em seguida para o valor de regime permanente de 1 N.m, atingido por volta de 8 segundos.

4.2.5 Comparação entre o Controlador DLQT-I e o Controlador PI aplicado ao Modelo x_{g_0} — HIL

Nesta seção é apresentada a comparação das respostas do sistema obtidas com os controlador DLQT-I apresentado na Seção 4.2.2 e o controlador PI, utilizando a técnica HIL, para o modelo x_{g_0} . Os ganhos do controlador PI são obtidos por meio da sintonia pelo Lugar das Raízes, conforme apresentado no Apêndice B.1.

Para a velocidade u tem-se que o ganho $K_p = 1,93$ e $K_i = 0,87$. Na Figura 54 é exibida a resposta ao degrau dos controladores DLQT-I e PI.

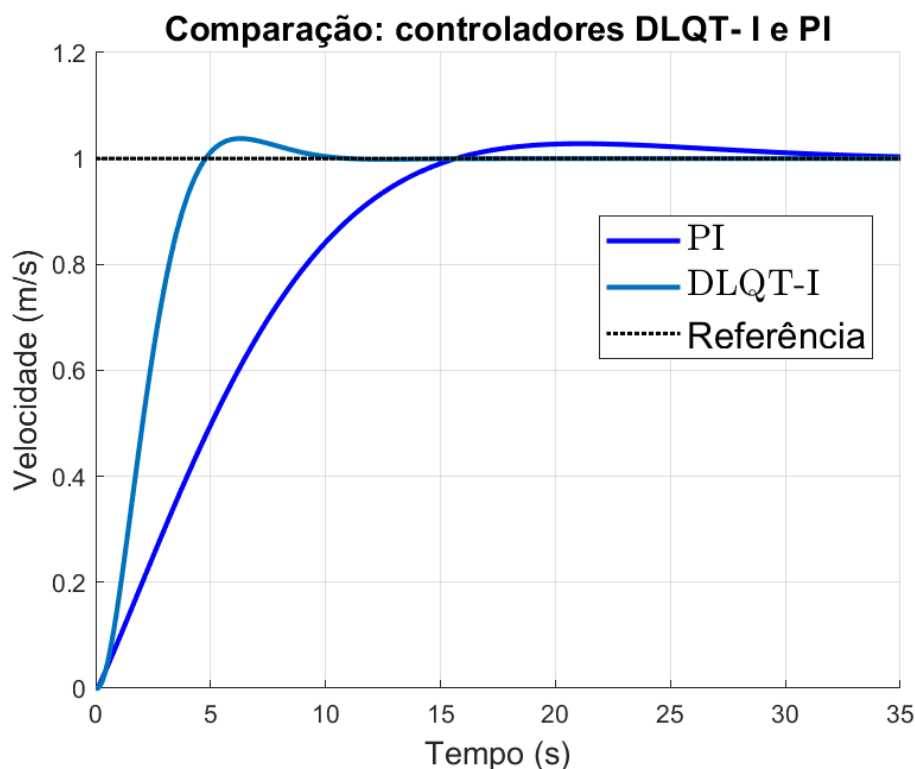


Figura 54 – Resposta comparativa dos controladores para velocidade u do modelo x_{g_0} , via HIL.

Na Tabela 3 são apresentados os resultados da velocidade u para os controladores DLQT-I e PI, considerando o modelo x_{g_0} e a implementação via técnica HIL.

Tabela 3 – Resultados da velocidade u para os controladores DLQT-I e PI — modelo x_{g_0} .

Parâmetro	DLQT-I	PI
Tempo de subida (s)	3,02	10,32
Tempo de acomodação (s)	8,21	26,05
Sobressinal (%)	3,77	3,82
Tempo de pico (s)	6,30	21,10
Erro de regime	0	0

Observa-se, na Tabela 3, que o tempo de subida do controlador DLQT-I é de aproximadamente 3,02 segundos, enquanto o controlador PI necessita de cerca de 10,32 segundos para atingir a região próxima ao valor de referência, demonstrando que o DLQT-I proporciona uma resposta mais rápida. Essa característica torna-se ainda mais evidente ao se analisar o tempo de pico da resposta, no qual o DLQT-I atinge o valor máximo em aproximadamente 6,30 segundos, ao passo que o controlador PI apresenta seu pico em torno de 21,10 segundos, evidenciando que o sistema controlado por PI possui uma dinâmica significativamente mais lenta, conforme exibido na Figura 54.

Ao analisar o sobressinal, observa-se na Tabela 3, que o controlador PI apresenta um valor de aproximadamente de 3,82%, superior ao sobressinal do controlador DLQT-I,

que é da ordem de 3,77%. No que se refere ao tempo de acomodação, o controlador DLQT-I apresenta um valor de aproximadamente 8,21 segundos, enquanto o controlador PI necessita de cerca de 26,05 segundos para que a resposta permaneça dentro da faixa de tolerância de 2%, permanecendo por um longo intervalo em regime transitório. Observa-se, por fim, que ambos os controladores apresentam erro em regime permanente nulo, resultado da presença da ação integral em ambas as estratégias de controle.

A Figura 55 exibe a comparação do comportamento da saída do sistema v , considerando a aplicação do controlador PI com ganhos $K_p = 1,81$ e $K_i = 0,82$.

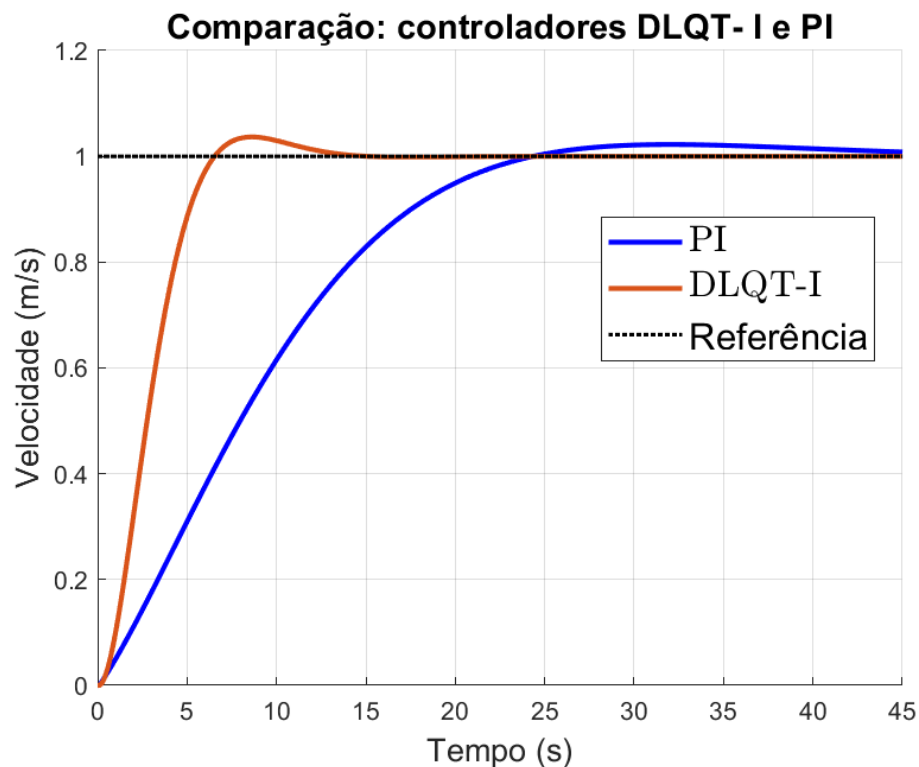


Figura 55 – Resposta comparativa dos controladores para velocidade v do modelo xg_0 , via HIL.

A Tabela 4 apresenta os resultados da velocidade v para ambos os controladores.

Tabela 4 – Resultados da velocidade v para os controladores DLQT-I e PI — modelo xg_0 .

Parâmetro	DLQT-I	PI
Tempo de subida (s)	4,14	15,70
Tempo de acomodação (s)	11,10	35,71
Sobressinal (%)	3,66	3,62
Tempo de pico (s)	8,60	32,00
Erro de regime	0	0

A resposta da velocidade v apresenta um comportamento semelhante ao observado para a velocidade u . Observa-se, na Tabela 4, que o controlador PI possui um tempo de

subida de aproximadamente 15,70 segundos, enquanto o controlador DLQT-I necessita de 4,14 segundos para atingir a mesma região da resposta. O tempo de pico do DLQT-I é de aproximadamente 8,60 segundos, ao passo que o controlador PI apresenta um tempo de pico em torno de 32 segundos, valor cerca de quatro vezes superior, evidenciando a resposta mais lenta associada ao controlador PI. Ao analisar o regime transitório por meio do tempo de acomodação, observa-se que o controlador DLQT-I estabiliza a resposta em aproximadamente 11,10 segundos, enquanto o controlador PI necessita de cerca de 35,71 segundos para que a resposta permaneça dentro da faixa de tolerância especificada, confirmando a maior duração do regime transitório no caso do PI, como pode ser observado na Figura 55.

Em relação ao sobressinal apresentado na Tabela 4, o controlador DLQT-I apresenta um valor de aproximadamente 3,66%, enquanto o controlador PI apresenta um sobressinal menor, de 3,62%. O erro de regime permanente apresentado pelos controladores é nulo, indicando que as estratégias de controle empregadas foram capazes de rastrear adequadamente a referência desejada.

A Figura 56 apresenta a comparação dos controladores para a velocidade r , com os ganhos do PI definidos por $K_p = 0,41$ e $K_i = 0,48$.

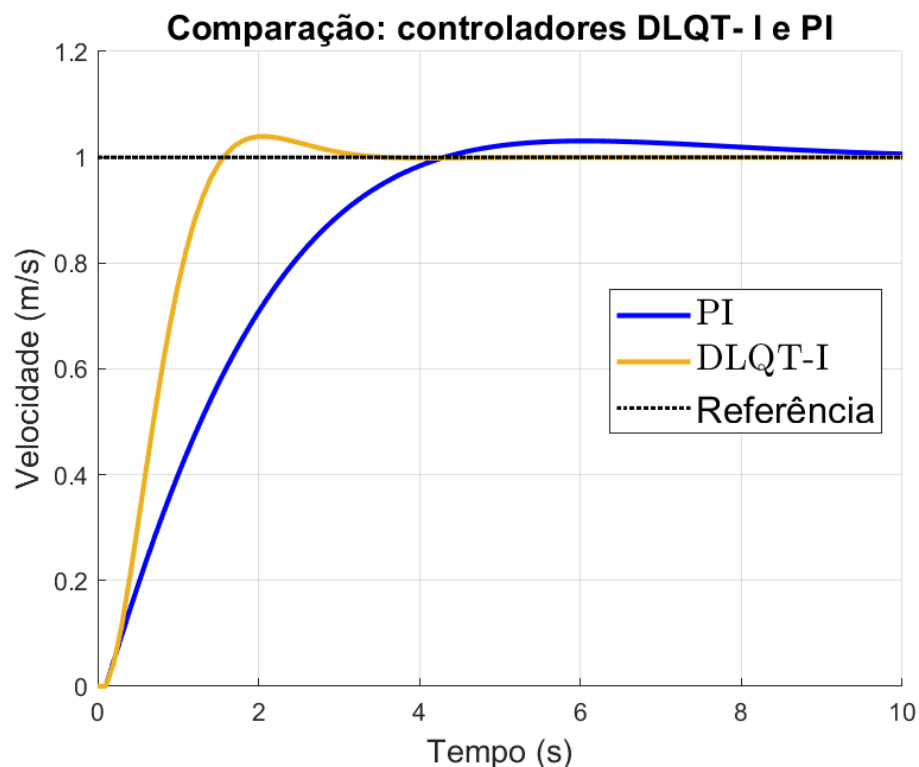


Figura 56 – Resposta comparativa dos controladores para velocidade r do modelo xg_0 , via HIL.

Os resultados da resposta dos controladores para a velocidade r são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Resultados da velocidade r para os controladores DLQT-I e PI — modelo xg_0 .

Parâmetro	DLQT-I	PI
Tempo de subida (s)	0,97	2,77
Tempo de acomodação (s)	2,69	7,91
Sobressinal (%)	3,94	3,92
Tempo de pico (s)	2,10	6,00
Erro de regime	0	0

Conforme ilustrado na Figura 56, a resposta da velocidade angular r apresenta um comportamento dinâmico rápido para ambos os controladores. O tempo de subida obtido com o controlador DLQT-I é de aproximadamente 0,97 segundos, enquanto o controlador PI apresenta um tempo de subida em torno de 2,77 segundos, como é observado na Tabela 5. Observa-se que o controlador PI atinge o valor de pico em aproximadamente 6 segundos, com um tempo de acomodação de cerca de 7,91 segundos. Em contrapartida, o controlador DLQT-I apresenta o pico da resposta em torno de 2,10 segundos e um tempo de acomodação de aproximadamente 2,69 segundos, evidenciando que o DLQT-I responde de forma mais rápida e se estabiliza em um intervalo de tempo consideravelmente menor. O controlador DLQT-I apresenta um sobressinal de aproximadamente 3,94%, enquanto o controlador PI apresenta um sobressinal de cerca de 3,92%. Esses valores são próximos entre si, indicando que as respostas obtidas com ambos os controladores não apresentam oscilações significativas. Ambos os controladores são capazes de rastrear a referência especificada, apresentando erro de regime permanente nulo.

A comparação entre os sinais de controle é exibido na Figura 57.

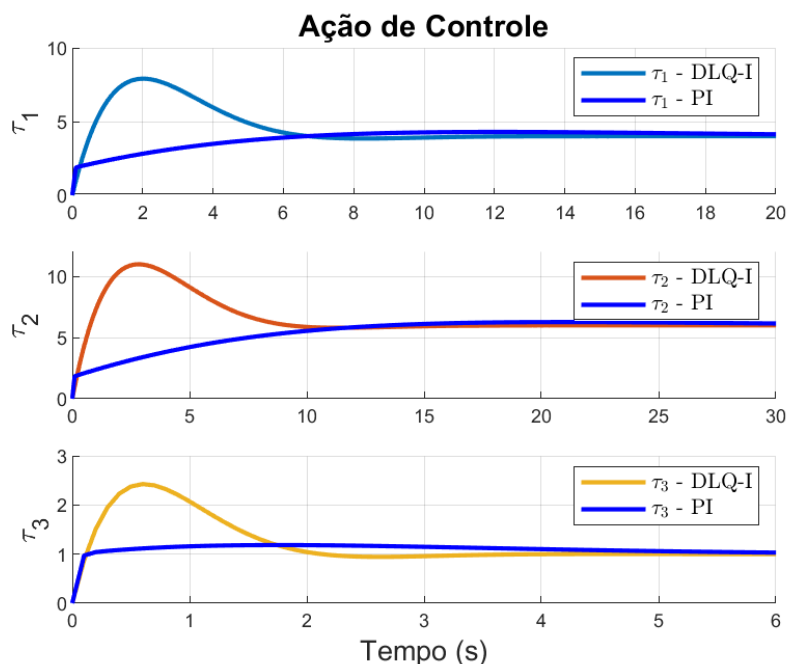


Figura 57 – Resposta comparativa das ações de controle para as velocidades u , v e r do modelo xg_0 , via HIL.

Observa-se, na Figura 57, uma diferença significativa entre as ações de controle geradas pelos controladores DLQT-I e PI para as três entradas de controle τ_1 , τ_2 e τ_3 . De modo geral, o controlador DLQT-I apresenta maior esforço de controle durante o regime transitório, com picos iniciais mais elevados, enquanto o controlador PI produz sinais de controle mais suaves e progressivos, porém associados a uma dinâmica mais lenta da resposta do sistema. Apesar das diferenças significativas no regime transitório, as ações de controle geradas por ambos os controladores tendem a convergir para valores semelhantes em regime permanente. Esse comportamento indica que, uma vez atingido o equilíbrio, os dois controladores demandam esforços equivalentes para manter o sistema operando na referência desejada.

4.2.6 Comparação entre o Controlador DLQT-I e o Controlador PI aplicado ao Modelo Completo — HIL

Nesta seção é apresentada a comparação das respostas do sistema obtidas com o controlador DLQT-I, apresentado na Seção 4.2.4, e com o controlador PI, ambos implementados por meio da técnica HIL, considerando o modelo completo. Para a implementação do controlador PI, é utilizado o desacoplamento apresentado na Seção 3.4.2 para as velocidades v e r . Os ganhos do controlador PI adotados são os mesmos empregados no modelo x_{g_0} .

A Figura 58 apresenta a comparação para as saídas do sistema u .

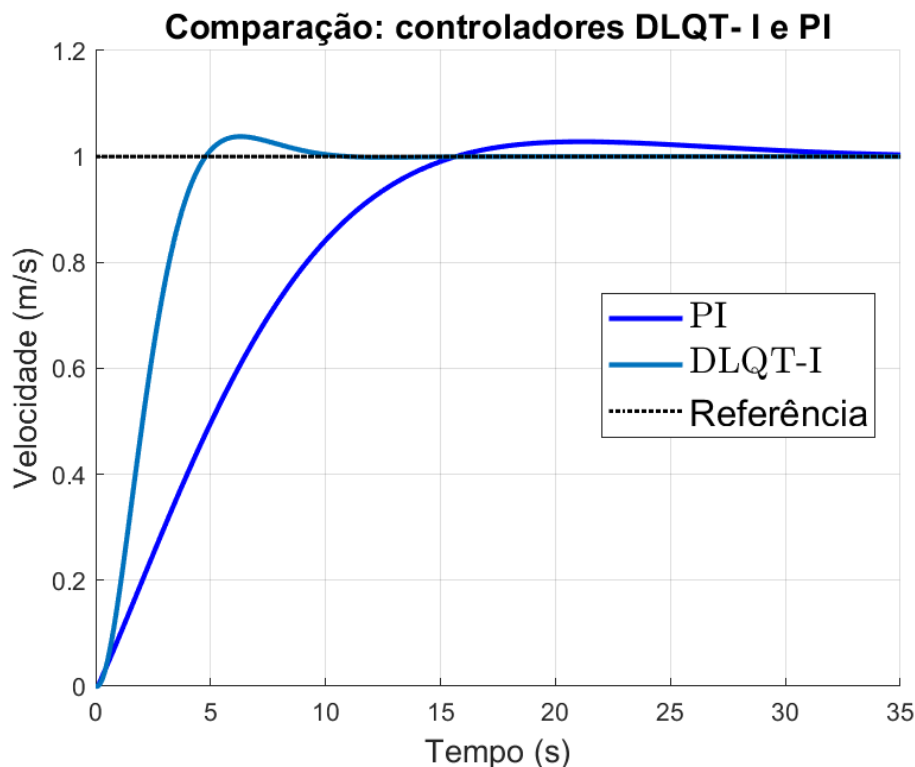


Figura 58 – Resposta comparativa dos controladores para velocidade u do modelo completo, via HIL.

Observa-se na Figura 58 que o controlador DLQT-I apresenta uma resposta mais rápida em relação ao controlador PI. Na Tabela 6 são apresentados os resultados das respostas da velocidade u obtidas com os controladores.

Tabela 6 – Resultados da velocidade u para os controladores DLQT-I e PI — modelo completo.

Parâmetro	DLQT-I	PI
Tempo de subida (s)	3,02	10,32
Tempo de acomodação (s)	8,21	26,05
Sobressinal (%)	3,77	3,82
Tempo de pico (s)	6,30	21,10
Erro de regime	0	0

Ao comparar os resultados apresentados na Tabela 3 para o modelo xg_0 com os obtidos para o modelo completo, exibido na Tabela 6, observa-se que os resultados são semelhantes. Esse comportamento é esperado, uma vez que a velocidade u não apresenta acoplamento dinâmico com as demais variáveis do sistema, fazendo com que sua resposta permaneça inalterada mesmo quando é considerado o modelo completo.

A Figura 59 apresenta a comparação para a velocidade v .

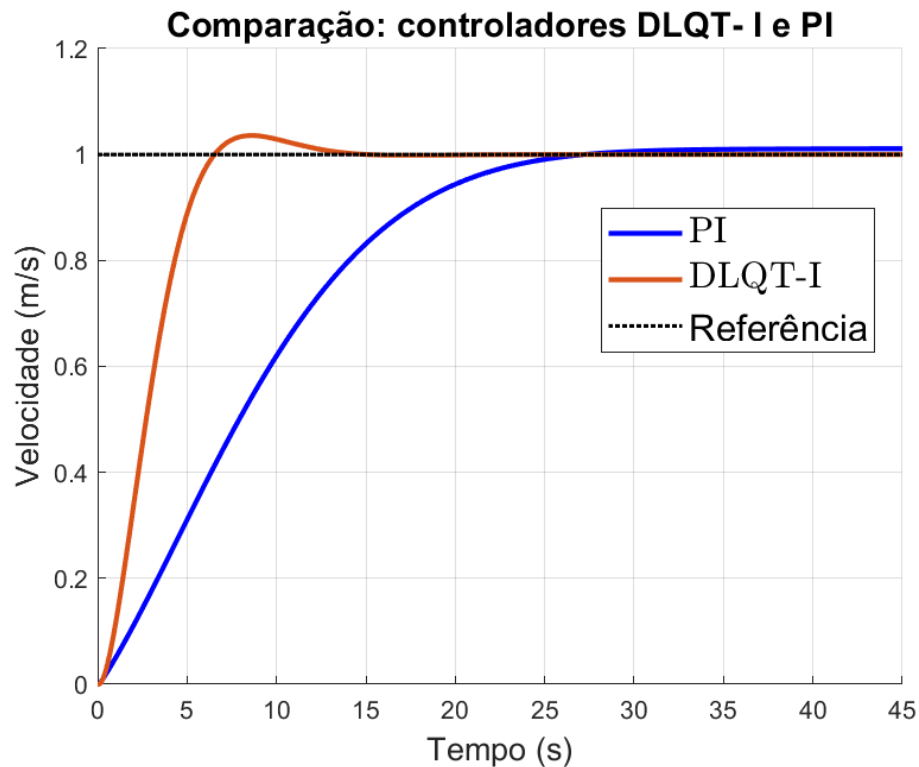


Figura 59 – Resposta comparativa dos controladores para velocidade v do modelo completo, via HIL.

Observa-se, na Figura 59, que o controlador DLQT-I também apresenta uma resposta mais rápida para essa saída. Na Tabela 7 são apresentados os resultados correspondentes a ambas as respostas.

Tabela 7 – Resultados da velocidade v para os controladores DLQT-I e PI — modelo completo.

Parâmetro	DLQT-I	PI
Tempo de subida (s)	4,18	15,75
Tempo de acomodação (s)	11,07	23,31
Sobressinal (%)	3,59	1,10
Tempo de pico (s)	8,60	45,30
Erro de regime	0	0

O controlador DLQT-I apresenta um tempo de subida de aproximadamente 4,19 segundos e um tempo de acomodação de 11,07 segundos, conforme observado na Tabela 7. Em contrapartida, o controlador PI apresenta tempos de subida e de acomodação significativamente maiores, de 15,75 segundos e 23,31 segundos, respectivamente. Além disso, o controlador DLQT-I atinge o pico da resposta em aproximadamente 8,6 segundos, com um sobressinal de 3,59%, enquanto o controlador PI apresenta um tempo de pico muito mais elevado, da ordem de 45,3 segundos, e um sobressinal de 1,10%. Ambos os controladores conseguem rastrear a referência.

A Figura 60 apresenta a comparação para as saídas do sistema r .

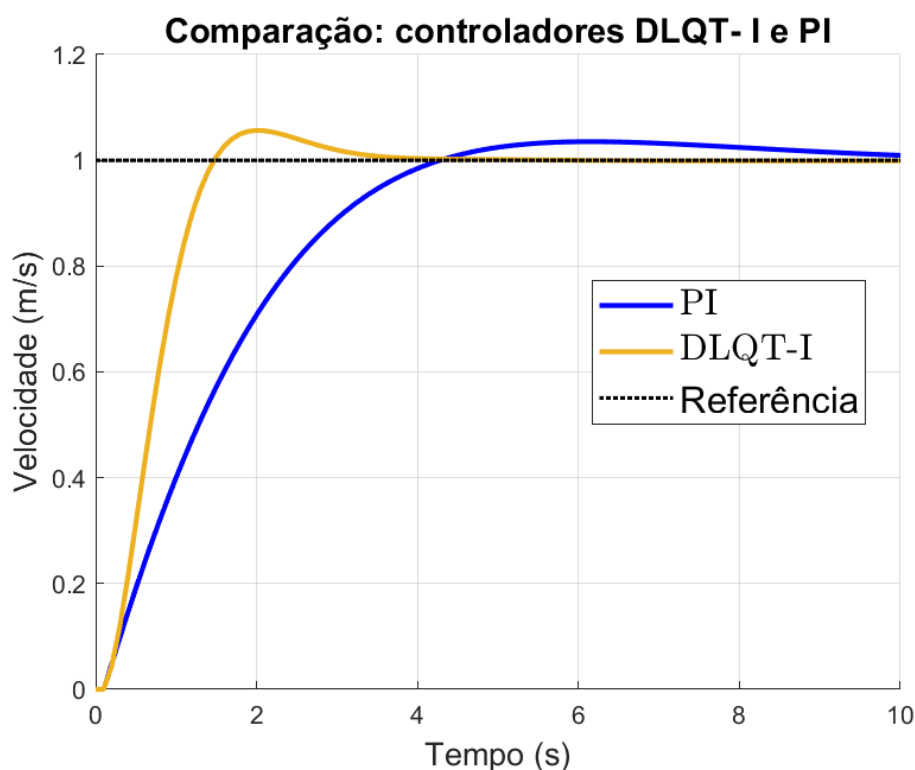


Figura 60 – Resposta comparativa dos controladores para velocidade r do modelo completo, via HIL.

Na Tabela 8 é apresentado os resultados para a velocidade r .

Tabela 8 – Resultados da velocidade r para os controladores DLQT-I e PI — modelo completo.

Parâmetro	DLQT-I	PI
Tempo de subida (s)	0,93	2,77
Tempo de acomodação (s)	2,98	8,52
Sobressinal (%)	5,66	3,53
Tempo de pico (s)	2,00	6,10
Erro de regime	0	0

Conforme apresentado na Tabela 8, o controlador DLQT-I apresenta um tempo de subida de aproximadamente 0,93 segundos, enquanto o controlador PI necessita de cerca de 2,77 segundos para atingir a mesma região da resposta. Essa diferença pode ser claramente observada na Figura 60, na qual a resposta obtida com o controlador DLQT-I converge mais rapidamente para o valor de referência. O tempo de acomodação do controlador DLQT-I é de aproximadamente 2,98 segundos, valor inferior ao observado para o controlador PI, que apresenta um tempo de acomodação de 8,52 segundos. Em relação ao sobressinal, o DLQT-I apresenta um valor superior (5,66%) quando comparado ao controlador PI (3,53%), conforme indicado na Tabela 8. Entretanto, esse sobressinal ocorre em um intervalo de

tempo significativamente menor, com tempo de pico de aproximadamente 2,0 segundos para o DLQT-I, contra cerca de 6,1 segundos para o PI, reforçando a maior rapidez da resposta proporcionada pelo controlador ótimo.

A Figura 61 apresenta a comparação das ações de controle associadas às velocidades u , v e r do modelo completo, obtidas por meio da técnica HIL. Observa-se que os sinais de controle são semelhantes às ações de controle geradas para o modelo xg_0 , apresentadas na Figura 57.

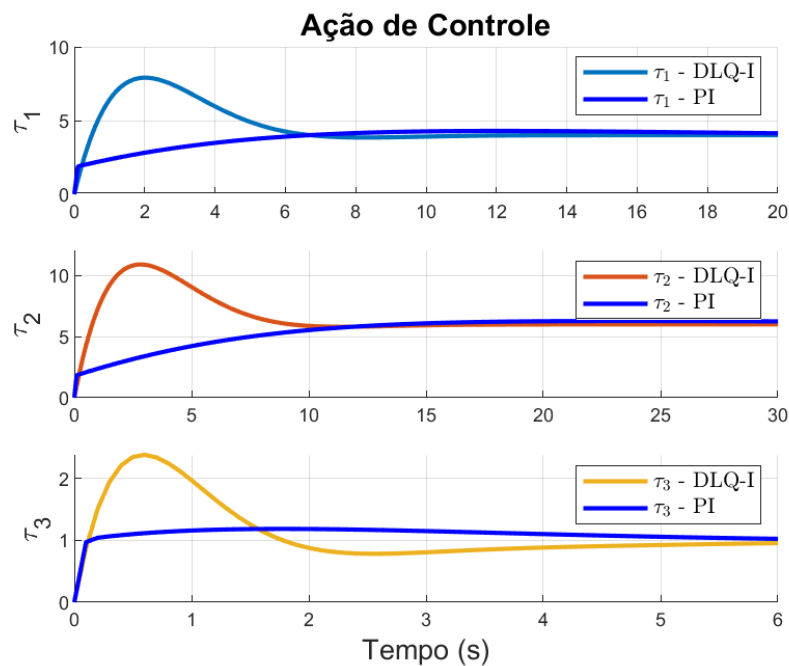


Figura 61 – Resposta comparativa das ações de controle para as velocidades u , v e r do modelo completo, via HIL.

As ações de controle geradas pelo controlador DLQT-I, conforme exibido na Figura 61, apresentam picos mais elevados nos instantes iniciais, o que está diretamente relacionado à sua capacidade de reduzir significativamente os tempos de subida e de acomodação das velocidades. Por outro lado, o controlador PI apresenta ações de controle mais suaves e distribuídas ao longo do tempo, o que resulta em respostas mais lentas e em tempos transitórios mais elevados.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Nesta monografia foi apresentado o projeto e a implementação de controladores ótimos digitais aplicados ao controle de manobrabilidade do USV *CyberShip I*, considerando sua relevância em aplicações como o monitoramento de derramamentos de petróleo e de seus derivados, que demandam respostas rápidas e envolvem ambientes de difícil acesso.

Os controladores projetados foram avaliados por meio de experimentos computacionais e da técnica HIL, permitindo uma análise detalhada do comportamento dinâmico do sistema e dos principais índices de desempenho: tempo de subida, tempo de acomodação, sobressinal e erro em regime permanente. Os controladores ótimos digitais mostrou-se viável para aplicações em manobrabilidade de USVs, devido à sua capacidade de regular os estados e rastrear a entrada de referência, eliminando o erro em regime permanente e garantindo desempenho ótimo.

A utilização da técnica HIL possibilitou o teste e a validação dos controladores em um ambiente mais próximo da aplicação real, integrando o modelo do sistema ao *hardware* embarcado. Essa abordagem mostrou-se fundamental para a avaliação de aspectos práticos da implementação, como a correta execução do algoritmo de controle no microcontrolador, os efeitos da discretização e limitações computacionais, permitindo ainda a identificação e a correção de falhas antes da aplicação em uma planta real.

Uma análise comparativa entre controladores PI clássicos e o controlador ótimo digital DLQT-I foi realizada, com o objetivo de comparar o desempenho dinâmico e transitório das diferentes estratégias de controle adotadas. Os resultados obtidos por meio de simulações computacionais e da técnica de HIL demonstraram que o controlador DLQT-I apresenta desempenho superior em relação ao controlador PI, especialmente no que se refere aos tempos de subida, de acomodação e ao comportamento transitório das respostas.

De forma geral, o controlador DLQT-I foi capaz de conduzir o sistema ao regime permanente de maneira mais rápida, mesmo à custa de ações de controle mais intensas nos instantes iniciais. Por outro lado, o controlador PI apresentou uma atuação mais conservadora, caracterizada por sinais de controle mais suaves, o que resultou em respostas mais lentas e em tempos transitórios mais elevados. Esses resultados reforçam as vantagens da abordagem ótima digital e evidenciam a importância da técnica HIL como etapa intermediária essencial entre a simulação e a aplicação prática.

5.1 Trabalhos Futuros

- Análise da influência de perturbações no desempenho dos controladores.
- Realização do projeto de sintonia *online* dos controladores, com validação utilizando a técnica HIL.
- Avaliação dos controladores ótimos digitais em outros microcontroladores.
- Inserção de atuadores reais na técnica HIL, possibilitando a validação do sistema em condições mais próximas da operação real.

REFERÊNCIAS

ABDOLMALAKI, R.; MAHJOOB, M.; ABBASI, E. Fuzzy lqr controller for heading control of an unmanned surface vessel. In: *International Workshops in Electrical-Electronics Engineering*. [S.l.: s.n.], 2013. Citado na página 18.

ANDRADE, E. M. de; JR, J. S. S.; FERNANDES, A. C. Operative unmanned surface vessels (usvs): A review of market-ready solutions. *Automation*, MDPI, v. 6, n. 2, p. 17, 2025. Citado na página 19.

ANGELICO, B. A.; NEVES, G. P. d. *Controle Digital Aplicado*. São Bernardo do Campo: SBA Press, 2023. 324 p. ISBN 978-65-5506-363-9. Citado 5 vezes nas páginas 8, 19, 34, 35 e 56.

BAE, I.; HONG, J. Survey on the developments of unmanned marine vehicles: Intelligence and cooperation. *Sensors*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 23, n. 10, p. 4643, 2023. Citado na página 23.

BAZANELLA, A. S.; JUNIOR, J. M. G. da S. *Sistemas de Controle: princípios e métodos de projeto*. [S.l.]: UFRGS, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 8, 33, 34 e 35.

BORETTI, A. Unmanned surface vehicles for naval warfare and maritime security. *The Journal of Defense Modeling and Simulation*, SAGE Publications Sage UK: London, England, p. 15485129241283056, 2024. Citado na página 18.

BREIVIK, M. Nonlinear maneuvering control of underactuated ships. *Norwegian University of Science and Technology, Trondheim*, v. 25, p. 10–30, 2003. Citado na página 32.

CAMPOS, M. C. M.; TEIXEIRA, H. C. G. *Controles Típicos de Equipamentos e Processos Industriais*. [S.l.]: Editora Blucher, 2010. Citado na página 65.

CID, M. E. A. *Optimisation of time domain controllers for supply ships using genetic algorithms and genetic programming*. Tese (Doutorado) — University of Glasgow, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 53.

COSTALONGA, T. O. *Técnica Hardware-in-the-Loop no desenvolvimento de sistemas de controle e automação*. 2020. Curso de Aperfeiçoamento Avançado do CIAW. Artigo adaptado de TCC destaque no Curso de Aperfeiçoamento Avançado do CIAW. Citado na página 36.

- ELMAKIS, O.; DEGANI, A. Usv port oil spill cleanup using hybrid multi-destination rl-cpp. *IEEE Access*, IEEE, v. 11, p. 122722–122735, 2023. Citado na página 17.
- ELMAKIS, O.; POLINOV, S.; SHAKED, T.; GORDON, G.; DEGANI, A. Os-breeze: Oil spills boundary red emission zone estimation using unmanned surface vehicles. *Sensors*, MDPI, v. 24, n. 2, p. 703, 2024. Citado na página 17.
- ELVITIGALA, C. S. Low-cost hardware-in-the-loop (hil) simulator for simulation and analysis of embedded systems with non-real-time applications. 2021. Citado na página 19.
- ER, M. J.; MA, C.; LIU, T.; GONG, H. Intelligent motion control of unmanned surface vehicles: A critical review. *Ocean Engineering*, Elsevier, v. 280, p. 114562, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.
- EUZEBIO, C. S.; RANGEL, G. da S.; MARQUES, R. C. Derramamento de petróleo e seus impactos no ambiente e na saúde humana. *Revista Brasileira de Ciências Ambientais*, n. 52, p. 79–98, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.
- FENG, P.; WU, J.; YANG, X.; ZHANG, W.; GUO, H. Design and realization of lqr course keeping control for small unmanned surface vehicle. In: IEEE. *2021 China Automation Congress (CAC)*. [S.l.], 2021. p. 6640–6645. Citado na página 18.
- FOSSSEN, T. I. *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 54.
- FOSSSEN, T. I. *Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado 10 vezes nas páginas 18, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33 e 55.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Sistemas de Controle para Engenharia*. [S.l.]: Bookman Editora, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 19, 33, 34, 35 e 62.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. et al. *Digital control of dynamic systems*. [S.l.]: Addison-wesley Menlo Park, 1998. v. 3. Citado na página 35.
- FURTADO, V. G. *Modelagem não linear e controlador ator-crítico para manobrabilidade de um USV baseado em DLQT-I e programação dinâmica heurística dependente de ação*. 134 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Engenharia de Eletricidade/CCET)) — Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2025. Citado 4 vezes nas páginas 8, 18, 27 e 52.
- FURTADO, V. G.; NETO, J. V. d. F. Controlador ator-crítico para manobrabilidade de um usv baseado em dlqt-i e programação dinâmica heurística dependente de ação. In: *Anais do XXV Congresso Brasileiro de Automática*. [S.l.]: s.n., 2024. Citado na página 18.
- HALVORSEN, H. *Dynamic positioning for unmanned surface vehicles*. Dissertação (Mestrado) — Institutt for teknisk kybernetikk, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.
- HAN, Y.; MA, W. Automatic monitoring of water pollution based on the combination of uav and usv. In: IEEE. *2021 IEEE 4th International Conference on Electronic Information and Communication Technology (ICEICT)*. [S.l.], 2021. p. 420–424. Citado na página 17.
- JEONG, J. S.; LEE, D. S.; KIM, Y. B.; LEE, K. S. et al. Modeling and control allocation for ship berthing system design. In: IEEE. *ICCCAS 2010*. [S.l.], 2010. p. 195–200. Citado na página 52.

- JORGE, V. A.; GRANADA, R.; MAIDANA, R. G.; JURAK, D. A.; HECK, G.; NEGREIROS, A. P.; SANTOS, D. H. D.; GONÇALVES, L. M.; AMORY, A. M. A survey on unmanned surface vehicles for disaster robotics: Main challenges and directions. *Sensors*, MDPI, v. 19, n. 3, p. 702, 2019. Citado na página 17.
- JÚNIOR, G. A.; BARROS, P. R. Estudo comparativo de técnicas de projeto de desacoplador para sistemas multivariáveis. *Revista Principia*, n. 28, p. 130–143, 2015. Citado na página 66.
- KIRK, D. E. *Optimal control theory: an introduction*. [S.l.]: Courier Corporation, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 40.
- KOLAWOLE, A.; IGBINENIKARO, O. P. Review of the role of unmanned surface vehicles (usvs) in enhancing offshore oil and gas exploration: Opportunities and challenges in nigerian waters. *International Journal of Research and Innovation in Applied Science*, International Journal of Research and Innovation in Applied Science (IJRIAS), v. 9, n. 10, p. 171–186, 2024. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 23 e 24.
- KOTIAN, R.; UMESH, P.; GANGADHARAN, K. Real-time implementation of pid control for unmanned surface vessel: A practical approach. In: IEEE. *2023 IEEE International Conference on Electronics, Computing and Communication Technologies (CONECCT)*. [S.l.], 2023. p. 1–6. Citado na página 18.
- LAUB, A. J. A schur method for solving algebraic riccati equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 24, n. 6, p. 913–921, 1979. Citado 4 vezes nas páginas 49, 50, 57 e 58.
- LEWIS, F. L.; VRABIE, D.; SYRMOS, V. L. *Optimal Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 19, 39, 40, 41, 42 e 45.
- LIU, Z.; ZHANG, Y.; YU, X.; YUAN, C. Unmanned surface vehicles: An overview of developments and challenges. *Annual Reviews in Control*, Elsevier, v. 41, p. 71–93, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 8, 24, 25 e 26.
- LOPES, A. M. R. *Aplicação da simulação Hardware in the Loop para testes e desenvolvimento de suspensões veiculares*. 123 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2017. Citado na página 36.
- MAAWALI, W. A.; NAABI, A. A.; YARUUBI, M. A.; SALEEM, A.; MAASHRI, A. A. Design and implementation of an unmanned surface vehicle for oil spill handling. In: IEEE. *2019 1st International Conference on Unmanned Vehicle Systems-Oman (UVS)*. [S.l.], 2019. p. 1–6. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 25.
- MCGOOKIN, E. W. *Optimisation of Sliding Mode Controllers for Marine Applications: A study of methods and implementation issues*. Tese (Doutorado) — University of Glasgow, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 53.
- MIHALIČ, F.; TRUNTIČ, M.; HREN, A. Hardware-in-the-loop simulations: A historical overview of engineering challenges. *Electronics*, MDPI, v. 11, n. 15, p. 2462, 2022. Citado 4 vezes nas páginas 8, 19, 36 e 37.

- MOUSAZADEH, H.; JAFARBIGLU, H.; ABDOLMALEKI, H.; OMRANI, E.; MONHASERI, F.; ABDOLLAHZADEH, M.-r.; MOHAMMADI-AGHDAM, A.; KIAPEI, A.; SALMANI-ZAKARIA, Y.; MAKHSOOS, A. Developing a navigation, guidance and obstacle avoidance algorithm for an unmanned surface vehicle (usv) by algorithms fusion. *Ocean Engineering*, Elsevier, v. 159, p. 56–65, 2018. Citado na página 20.
- NAIDU, D. S. *Optimal control systems*. [S.l.]: CRC press, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 38, 39 e 42.
- NGUYEN, X.-D.; VO, T.-K.; VAN, D.-H.; HA, M.-T. Design and implementation of an autonomous usv in bathymetric surveys. *International Journal of Intelligent Systems and Applications in Engineering*, v. 10, n. 4, p. 570–573, 2022. Disponível em: <<https://ijisae.org/index.php/IJISAE/article/view/2325>>. Citado na página 18.
- NÚÑEZ, M. B. et al. El uso de los vehículos marinos no tripulados en la gestión y la investigación de aguas marinas y continentales. Universidad de Huelva; Ayuntamiento de Isla Cristina, 2022. Citado 4 vezes nas páginas 18, 24, 25 e 26.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno. 5ª*. [S.l.]: São Paulo: Pearson, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 38, 61, 62 e 141.
- OKTAVIANO, I.; SUTRISNO, I.; ADHITYA, R.; ARFIANTO, A.; SUHARSO, D.; SUWONDO, I.; ARDHANA, V.; SOEROSO, H.; MULYODIPUTRO, M. et al. Design of android based unmanned surface vehicles (usv) for oil spill monitoring. In: IOP PUBLISHING. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. [S.l.], 2021. v. 1175, n. 1, p. 012004. Citado na página 17.
- PAULO, T. F. Controle adaptativo com desacoplamento aplicado a um sistema de tanques acoplados mimo. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 66.
- RIGATOS, G. A nonlinear optimal control approach for unmanned surface vessels. *Marine Systems & Ocean Technology*, Springer, v. 18, n. 3, p. 89–110, 2023. Citado na página 18.
- ROSARIO, R. V. d. C. et al. Controle a estrutura variável de um barco empurrando uma carga flutuante subatuada. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2017. Citado na página 31.
- RUSCIO, D. D. Discrete lq optimal control with integral action: A simple controller on incremental form for mimo systems. 2012. Citado 4 vezes nas páginas 45, 46, 47 e 48.
- SETIAWAN, F.; KADIR, R.; GAMAYANTI, N.; SANTOSO, A.; BILFAQIH, Y.; HIDAYAT, Z. Dynamic modelling and controlling unmanned surface vehicle. In: IOP PUBLISHING. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. [S.l.], 2021. v. 649, n. 1, p. 012056. Citado na página 29.
- SILVA, L. R. C. d. *Desastre ambiental causado por derramamento de petróleo no litoral do Ceará: um estudo sobre o ambiente, a saúde e o trabalho de pescadores e pescadoras artesanais*. 131 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Desenvolvimento e Meio Ambiente)) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021. Citado na página 21.
- SILVA, P. L. da; LOPES, E. O.; CUNHA, G. C.; GOMES, A. S.; TAVARES, T. H. de C. Implementação de um controle pid para estabilização de nível em tanques de água. *REVISTA DE ENGENHARIA E TECNOLOGIA*, v. 17, n. 1, 2025. Citado na página 34.

- SNAME, T. Nomenclature for treating the motion of a submerged body through a fluid. *The Society of Naval Architects and Marine Engineers, Technical and Research Bulletin*, n. 1950, p. 1–5, 1950. Citado na página 26.
- SOTELO-TORRES, F.; ALVAREZ, L. V.; ROBERTS, R. C. An unmanned surface vehicle (usv): Development of an autonomous boat with a sensor integration system for bathymetric surveys. *Sensors*, MDPI, v. 23, n. 9, p. 4420, 2023. Citado na página 18.
- STRAND, J. P. *Nonlinear Position Control Systems Design for Marine Vessels*. Tese (Doutorado) — Citeseer, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 8, 52 e 53.
- TOMERA, M.; PODGÓRSKI, K. Control of dynamic positioning system with disturbance observer for autonomous marine surface vessels. *Sensors*, MDPI, v. 21, n. 20, p. 6723, 2021. Citado 4 vezes nas páginas 8, 29, 52 e 53.
- YANARATEŞ, C.; OKUR, S.; ALTAN, A. Performance analysis of digitally controlled nonlinear systems considering time delay issues. *Heliyon*, Elsevier, v. 9, n. 10, 2023. Citado na página 35.
- YUAN, S.; LI, Y.; BAO, F.; XU, H.; YANG, Y.; YAN, Q.; ZHONG, S.; YIN, H.; XU, J.; HUANG, Z. et al. Marine environmental monitoring with unmanned vehicle platforms: Present applications and future prospects. *Science of The Total Environment*, Elsevier, v. 858, p. 159741, 2023. Citado na página 18.
- ZHANG, Y.; SHI, G.; LIU, J. Dynamic energy-efficient path planning of unmanned surface vehicle under time-varying current and wind. *Journal of Marine Science and Engineering*, MDPI, v. 10, n. 6, p. 759, 2022. Citado na página 23.
- ZHONG, Y.; YU, C.; CAO, J.; LIU, C.; LIAN, L. Modeling and control of unmanned surface vehicles: An integrated approach. In: IEEE. *2023 8th International Conference on Automation, Control and Robotics Engineering (CACRE)*. [S.l.], 2023. p. 156–161. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 54.

Apêndices

APÊNDICE A

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE SCHUR NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE RICCATI

Neste apêndice apresenta-se o desenvolvimento matemático empregado na determinação da matriz P por meio do método de Schur.

A.1 Determinação da Matriz Estendida \tilde{P} pelo Método de Schur - Modelo xg_0

A matriz estendida \tilde{P} para o modelo xg_0 , considerando o controlador DLQT-I apresentado na Seção 4.1.2, é calculada neste Apêndice. São adotados os mesmos procedimentos descritos na Seção 2.5.5, entretanto aplicados às matrizes estendidas do sistema, com o objetivo de obter a solução da equação de Riccati associada.

Substituindo as matrizes estendidas dadas nas Equações (4.14), (4.15), (4.16) e (4.17) na Equação (3.28), obtém-se a matriz simplética dada por

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{11} & \tilde{Z}_{12} \\ \tilde{Z}_{21} & \tilde{Z}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad (\text{A.1})$$

sendo:

$$\tilde{Z}_{11} = \begin{bmatrix} 0,9792 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9831 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9507 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$\tilde{Z}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0026 & 0 & 0 & 0,0026 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$\tilde{Z}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$\tilde{Z}_{22} = \begin{bmatrix} 1,0213 & 0 & 0 & -1,0213 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0172 & 0 & 0 & -1,0172 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0518 & 0 & 0 & -1,0518 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Determina-se uma transformação ortogonal U que coloca \tilde{Z} na forma real de Schur descrita pela Equação (3.18), logo tem-se

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}, \quad U_{ij} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad (\text{A.6})$$

sendo:

$$U_{11} = \begin{bmatrix} 0,0003 & -0,0033 & 0 & 0 & 0,0304 & -0,9995 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0085 & -0,0314 & 0 & 0 \\ 0,0009 & -0,0801 & 0 & 0 & 0,9963 & 0,0306 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0059 & -0,2333 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$$U_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0001 & 0,0017 & 0 & 0 \\ -0,1014 & 0,9943 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0005 & 0,0584 & 0 & 0 \\ -0,9666 & -0,1060 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$U_{21} = \begin{bmatrix} -0,9995 & 0,0304 & 0 & 0 & 0,0033 & -0,0003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,9943 & 0,1014 & 0 & 0 \\ 0,0306 & 0,9963 & 0 & 0 & 0,0801 & -0,0009 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1060 & 0,9666 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

$$U_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,9998 & -0,0211 & 0 & 0 \\ -0,0314 & 0,0085 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0212 & 0,9981 & 0 & 0 \\ -0,2333 & 0,0059 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

A matriz quasi-triangular correspondente, é dada por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad S_{ij} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad (\text{A.11})$$

sendo:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 1,0524 & 1,0189 & 0 & 0 & 0,0503 & 0,0279 \\ -0,0027 & 1,0524 & 0 & 0 & -1,0279 & 1,0454 \\ 0 & 0 & 1,1606 & 1,0336 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0325 & 1,1606 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9478 & -0,9176 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0025 & 0,9478 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1298 & -0,0831 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,0805 & -1,0897 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

$$S_{22} = \begin{bmatrix} 0,8407 & -0,7487 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0235 & 0,8407 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0387 & -1,0159 & 0,0197 & 0,0378 \\ 0 & 0 & 0,0014 & 1,0387 & -1,0351 & 1,0197 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9614 & 0,0013 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,9403 & 0,9614 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

A decomposição de Schur é reordenada por meio de uma transformação ortogonal, de modo que o bloco quase-triangular S_{11} contenha apenas autovalores com parte real negativa. Assim, obtém-se

$$S_{\text{ord}} = \begin{bmatrix} S_{\text{ord},11} & S_{\text{ord},12} \\ S_{\text{ord},21} & S_{\text{ord},22} \end{bmatrix}, \quad S_{\text{ord},ij} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad (\text{A.16})$$

$$S_{\text{ord},11} = \begin{bmatrix} 0,9478 & 1,0174 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0022 & 0,9478 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8407 & 0,9921 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0177 & 0,8407 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9614 & -1,0153 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0012 & 0,9614 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

$$S_{\text{ord},12} = \begin{bmatrix} 0,0697 & 0,0743 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,9257 & -0,9242 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2905 & -0,2154 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,7820 & 0,6369 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0561 & 0,0487 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9481 & -0,9439 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

$$S_{\text{ord},21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

$$S_{\text{ord},22} = \begin{bmatrix} 1,0524 & -1,1298 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0025 & 1,0524 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1606 & -1,3696 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0245 & 1,1606 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0387 & 0,0013 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,0969 & 1,0387 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

A matriz U é atualizada para manter a ortogonalidade. Logo, tem-se

$$U_{\text{ord}} = \begin{bmatrix} U_{\text{ord},11} & U_{\text{ord},12} \\ U_{\text{ord},21} & U_{\text{ord},22} \end{bmatrix}, \quad U_{\text{ord},ij} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad (\text{A.21})$$

sendo:

$$U_{\text{ord},11} = \begin{bmatrix} 0,0002 & 0,0083 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0001 & -0,0046 \\ 0 & 0 & -0,0057 & -0,0766 & 0 & 0 \\ 0,0013 & -0,1331 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0008 & 0,0985 \\ 0 & 0 & -0,0103 & 0,4161 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

$$U_{\text{ord},12} = \begin{bmatrix} -0,0715 & -0,9974 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1848 & -0,9798 & 0 & 0 \\ 0,9885 & -0,0719 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8871 & -0,1998 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

$$U_{\text{ord},21} = \begin{bmatrix} 0,9974 & 0,0715 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9985 & -0,0546 \\ 0 & 0 & -0,9798 & -0,1848 & 0 & 0 \\ 0,0719 & -0,9885 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0548 & 0,9936 \\ 0 & 0 & -0,1998 & 0,8871 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

$$U_{\text{ord},22} = \begin{bmatrix} 0,0083 & 0,0002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0001 & 0,0046 \\ 0 & 0 & 0,0766 & 0,0057 & 0 & 0 \\ -0,1331 & 0,0013 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0008 & -0,0985 \\ 0 & 0 & -0,4161 & 0,0103 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Para calcular a matriz \tilde{P} , substitui-se as matrizes (A.22) e (A.24) em (2.81). Logo, tem-se:

$$\tilde{P} = 10^3 \begin{bmatrix} 3,2188 & 0 & 0 & 0,2002 & 0 & 0 \\ 0 & 7,8260 & 0 & 0 & 0,3659 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1288 & 0 & 0 & 0,0233 \\ 0,2002 & 0 & 0 & 0,0199 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3659 & 0 & 0 & 0,0272 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0233 & 0 & 0 & 0,0064 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

A.2 Determinação da Matriz P pelo Método de Schur - Modelo Completo

A matriz simplética Z para o controlador DQLR aplicado ao modelo completo, apresentado na Seção 4.1.3, é calculada substituindo-se as matrizes apresentadas na Equação (4.21) na Equação (3.17), considerando-se as matrizes de ponderação Q e R definidas como matrizes identidade. Assim, obtém-se:

$$Z = \begin{bmatrix} 0,9792 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9830 & -0,0009 & 0 & 0 & -0,0001 \\ 0 & -0,0058 & 0,9530 & 0 & -0,0001 & -0,0026 \\ -1,0213 & 0 & 0 & 1,0213 & 0 & 0 \\ 0 & -1,0173 & -0,0063 & 0 & 1,0173 & 0,0063 \\ 0 & -0,0011 & -1,0522 & 0 & 0,0011 & 1,0522 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

A matriz ortogonal U que coloca Z na forma real de Schur é dada por

$$U = \begin{bmatrix} -0,0418 & 0,9991 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0004 & -0,0172 & -0,0181 & -0,9997 \\ 0 & 0 & 0,0211 & -0,6816 & -0,7310 & 0,0250 \\ -0,9991 & -0,0418 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1184 & 0,7245 & -0,6790 & -0,0002 \\ 0 & 0 & -0,9927 & -0,1009 & 0,0654 & 0,0002 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

com a matriz quasi-triangular dada por:

$$S = \begin{bmatrix} 0,9785 & 1,0212 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0219 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0747 & -0,7108 & -0,7669 & -0,0952 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9305 & -0,0928 & 0,7358 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0174 & -0,6958 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9829 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

Reordenando a decomposição de Schur de modo que o bloco quasi-triangular S_{11} contenha apenas autovalores com parte real negativa, obtém-se a seguinte forma ordenada das matrizes S e U :

$$S_{\text{ord}} = \begin{bmatrix} 0,9785 & 0 & 0 & 1,0212 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9305 & 0,0047 & 0 & 1,0453 & -0,0911 \\ 0 & 0 & 0,9829 & 0 & -0,0981 & -1,0129 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0219 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0747 & -0,0051 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0174 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

$$U_{\text{ord}} = \begin{bmatrix} -0,0418 & 0 & 0 & 0,9991 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0031 & -0,0338 & 0 & -0,0610 & -0,9976 \\ 0 & 0,1148 & -0,0072 & 0 & -0,9915 & 0,0612 \\ -0,9991 & 0 & 0 & -0,0418 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0281 & -0,9990 & 0 & 0,0060 & 0,0334 \\ 0 & 0,9930 & -0,0273 & 0 & 0,1150 & -0,0031 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

Os blocos da matriz U para determinar a matriz P são dados por:

$$U_{\text{ord},11} = \begin{bmatrix} -0,0418 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0031 & -0,0338 \\ 0 & 0,1148 & -0,0072 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.32})$$

$$U_{\text{ord},21} = \begin{bmatrix} -0,9991 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0281 & -0,9990 \\ 0 & 0,9930 & -0,0273 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.33})$$

Portanto, calcula-se a matriz P , substituindo as matrizes das Equações (A.32) e (A.33) na Equação (2.81). Logo, tem-se:

$$P = \begin{bmatrix} 23,8936 & 0 & 0 \\ 0 & 29,7817 & -1,0364 \\ 0 & -1,0364 & 8,6744 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

A.3 Determinação da Matriz Estendida \tilde{P} pelo Método de Schur - Modelo Completo

A matriz estendida \tilde{P} para o modelo completo, com o controlador DLQT-I apresentado na Seção 4.1.4, é calculada substituindo-se as matrizes estendidas dadas nas Equações (4.26), (4.27), (4.28) e (4.29) na Equação (3.28). Obtém-se, assim, a matriz simplética dada por

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{11} & \tilde{Z}_{12} \\ \tilde{Z}_{21} & \tilde{Z}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Z}_{ij} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad (\text{A.35})$$

sendo:

$$\tilde{Z}_{11} = \begin{bmatrix} 0,9792 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,983 & -0,001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0059 & 0,9504 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.36})$$

$$\tilde{Z}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 & 0,0001 \\ 0 & -0,0001 & -0,0026 & 0 & 0,0001 & 0,0026 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.37})$$

$$\tilde{Z}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,0213 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0063 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,0522 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.38})$$

$$\tilde{Z}_{22} = \begin{bmatrix} 1,0213 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0011 & 1,0173 & 0,0063 & 0 & -1,0173 & -0,0063 \\ -0,0011 & 0 & 1,0522 & 0 & -0,0011 & -1,0522 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.39})$$

A transformação ortogonal U que coloca \tilde{Z} na forma real de Schur é determinada. Logo, tem-se:

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}, \quad U_{ij} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad (\text{A.40})$$

sendo:

$$U_{11} = \begin{bmatrix} -0,0003 & -0,0033 & 0 & 0 & 0,0304 & -0,9995 \\ 0 & 0 & -0,0002 & -0,0006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0086 & -0,0314 & 0 & 0 \\ -0,0009 & -0,0801 & 0 & 0 & 0,9963 & 0,0306 \\ 0 & 0 & -0,0002 & -0,0047 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0059 & -0,2327 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.41})$$

$$U_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0021 & -0,0091 & 0,0010 & 0,0186 & -0,0212 & -0,9996 \\ -0,1140 & -0,4277 & -0,0352 & 0,8952 & -0,0025 & 0,0208 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0191 & 0,0081 & 0,0584 & 0,0003 & -0,9978 & 0,0212 \\ -0,8906 & 0,3852 & -0,0040 & 0,0623 & 0,0210 & -0,0008 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.42})$$

$$U_{21} = \begin{bmatrix} 0,9995 & 0,0304 & 0 & 0 & 0,0033 & -0,0003 \\ 0 & 0 & 0,0393 & 0,1017 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9935 & 0,0969 & 0 & 0 \\ -0,0306 & 0,9963 & 0 & 0 & 0,0801 & -0,0009 \\ 0 & 0 & -0,0020 & 0,0200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1060 & 0,9616 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.43})$$

$$U_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3572 & 0,8169 & -0,0212 & 0,4389 & -0,0017 & -0,0001 \\ -0,0473 & -0,0341 & 0,0007 & -0,0093 & 0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0065 & -0,0034 & -0,9972 & -0,0412 & -0,0584 & -0,0005 \\ -0,2522 & -0,0037 & 0,0210 & -0,0003 & 0,0015 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.44})$$

A matriz quasi-triangular correspondente, é dada por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad S_{ij} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad (\text{A.45})$$

sendo:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 1,0524 & -1,0189 & 0 & 0 & -0,0503 & -0,0279 \\ 0,0027 & 1,0524 & 0 & 0 & -1,0279 & 1,0454 \\ 0 & 0 & 1,1612 & -1,0289 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0329 & 1,1612 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9478 & -0,9176 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0025 & 0,9478 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.46})$$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1562 & 0,0015 & 0,0150 & 0,0988 & 0,0007 & 0,0002 \\ 1,0198 & 0,1419 & 0,1458 & -1,1230 & 0,0090 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.47})$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.48})$$

$$S_{22} = \begin{bmatrix} 0,8401 & 0,3740 & 0,3849 & -0,5333 & 0,0220 & -0,0011 \\ -0,0474 & 0,8401 & 0,8148 & 0,4079 & 0,0439 & -0,0052 \\ 0 & 0 & 1,0387 & -0,0033 & -1,0191 & -1,0347 \\ 0 & 0 & 0,4471 & 1,0387 & -0,0158 & -0,0344 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9615 & 0,9403 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0013 & 0,9615 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.49})$$

A reordenação da decomposição de Schur, realizada por uma transformação ortogonal, assegura que o bloco quase-triangular S_{11} contenha somente autovalores com parte real negativa, resultando em

$$S_{\text{ord}} = \begin{bmatrix} S_{\text{ord},11} & S_{\text{ord},12} \\ S_{\text{ord},21} & S_{\text{ord},22} \end{bmatrix}, \quad S_{\text{ord},ij} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad (\text{A.50})$$

$$S_{\text{ord},11} = \begin{bmatrix} 0,9478 & -1,0174 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0022 & 0,9478 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8401 & 0,9870 & 0,0978 & -0,0068 \\ 0 & 0 & -0,0179 & 0,8401 & -0,0124 & -0,1027 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9615 & 1,0101 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0012 & 0,9615 \end{bmatrix} \quad (\text{A.51})$$

$$S_{\text{ord},12} = \begin{bmatrix} 0,0697 & 0,0743 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,9257 & 0,9242 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2163 & 0,2924 & -0,0032 & -0,0003 \\ 0 & 0 & -0,6316 & 0,7763 & -0,0055 & -0,0013 \\ 0 & 0 & -0,0600 & 0,0853 & 0,0483 & -0,0565 \\ 0 & 0 & 0,0069 & 0,0060 & 0,9439 & 0,9481 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.52})$$

$$S_{\text{ord},21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.53})$$

$$S_{\text{ord},22} = \begin{bmatrix} 1,0524 & -1,1298 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0025 & 1,0524 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1612 & 0,0247 & -0,0015 & 0,0160 \\ 0 & 0 & -1,3710 & 1,1612 & 0,0142 & 0,0032 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0387 & 1,0967 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0013 & 1,0387 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.54})$$

A matriz U é atualizada para manter a ortogonalidade. Logo, tem-se

$$U_{\text{ord}} = \begin{bmatrix} U_{\text{ord},11} & U_{\text{ord},12} \\ U_{\text{ord},21} & U_{\text{ord},22} \end{bmatrix}, \quad U_{\text{ord},ij} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad (\text{A.55})$$

sendo:

$$U_{\text{ord},11} = \begin{bmatrix} -0,0002 & 0,0083 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0001 & -0,0017 & -0,0003 & -0,0046 \\ 0 & 0 & -0,0058 & -0,0769 & -0,0078 & -0,0006 \\ -0,0013 & -0,1331 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0003 & 0,0091 & 0,0001 & 0,0986 \\ 0 & 0 & -0,0105 & 0,4159 & 0,0417 & 0,0012 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.56})$$

$$U_{\text{ord},12} = \begin{bmatrix} 0,0715 & 0,9974 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0213 & 0,0042 & 0,0544 & -0,9983 \\ 0 & 0 & 0,9793 & 0,1855 & -0,0112 & 0,0212 \\ -0,9885 & 0,0719 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0056 & -0,0199 & -0,9934 & -0,0548 \\ 0 & 0 & 0,2009 & -0,8857 & 0,0205 & 0,0009 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.57})$$

$$\begin{bmatrix} -0,9974 & 0,0715 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0081 & 0,0962 & -0,9938 & -0,0546 \\ 0 & 0 & -0,9795 & -0,1854 & -0,0098 & -0,0009 \\ -0,0719 & -0,9885 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0046 & 0,0180 & -0,0533 & 0,9935 \\ 0 & 0 & -0,2006 & 0,8815 & 0,0871 & -0,0161 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.58})$$

$$\begin{bmatrix} -0,0083 & -0,0002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0002 & -0,0018 & -0,0046 & 0,0001 \\ 0 & 0 & -0,0058 & -0,0772 & 0,0001 & 0 \\ 0,1331 & -0,0013 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0008 & 0,0098 & 0,0985 & 0,0008 \\ 0 & 0 & -0,0105 & 0,4179 & -0,0018 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.59})$$

Para calcular a matriz \tilde{P} , substitui-se as matrizes das Equações (A.56) e (A.58) na Equação (2.81). Logo, tem-se:

$$\tilde{P} = 10^3 \begin{bmatrix} 3,2188 & 0 & 0 & 0,2002 & 0 & 0 \\ 0 & 7,8283 & -0,1655 & 0 & 0,3659 & -0,0056 \\ 0 & -0,1655 & 0,1309 & 0 & -0,0073 & 0,0232 \\ 0,2002 & 0 & 0 & 0,0199 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3659 & -0,0073 & 0 & 0,0272 & -0,0004 \\ 0 & -0,0056 & 0,0232 & 0 & -0,0004 & 0,0064 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.60})$$

APÊNDICE B

SINTONIA CONTROLADOR PI

B.1 Sintonia do Controlador PI pelo Método do Lugar das Raízes

Os controladores PI são projetados de forma independente, uma vez que, no modelo xg_0 , não há acoplamento entre as velocidades. A sintonia dos controladores é realizada por meio do método do Lugar Geométrico das Raízes (LGR), considerando as especificações de projetos estabelecidas.

O método de sintonia pelo LGR é realizado a partir de uma análise gráfica do lugar das raízes do sistema, com o objetivo de determinar o ganho associado ao amortecimento especificado no projeto. Por meio desse método, é possível avaliar os efeitos da variação do ganho a partir da localização dos polos de malha fechada (OGATA, 2011).

A sintonia dos ganhos por esse método requer o cálculo de uma função de transferência em malha aberta sem o ganho proporcional do controlador PI em série. Essa função de transferência é denominada G_{pu} para a velocidade u e, a partir da análise do seu lugar das raízes, determina-se o ganho proporcional K_i . Em seguida, o ganho integral K_p é calculado utilizando a constante de tempo integrativa T_i .

A função de transferência da velocidade u é dada por

$$g_{11}(s) = \frac{0,0526}{s + 0,2105}, \quad (\text{B.1})$$

e a função de transferência do controlador PI é dada por

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right), \quad (\text{B.2})$$

sendo

$$K_i = \frac{K_p}{T_i s}. \quad (\text{B.3})$$

A função de transferência G_{pu} é dada por

$$G_{pu}(s) = \frac{0,0526T_i s + 0,0526}{T_i s^2 + 0,2105T_i s}. \quad (\text{B.4})$$

O sobressinal apresentado pelo controlador DLQT-I para o modelo x_{g0} , considerando a velocidade u , é de aproximadamente 3,77%. Para o projeto do controlador PI da velocidade u , adota-se esse mesmo valor de sobressinal. Assim, tem-se que

$$M_p = e^{-\left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi} \rightarrow 0,0377 = e^{-\left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi} \rightarrow \zeta = 0,72. \quad (\text{B.5})$$

O valor do ganho proporcional K_p correspondente a esse coeficiente é determinado por meio da análise gráfica do LGR. Para um $T_i = 2,2$, o LGR da Equação (B.11) é apresentado na Figura 62.

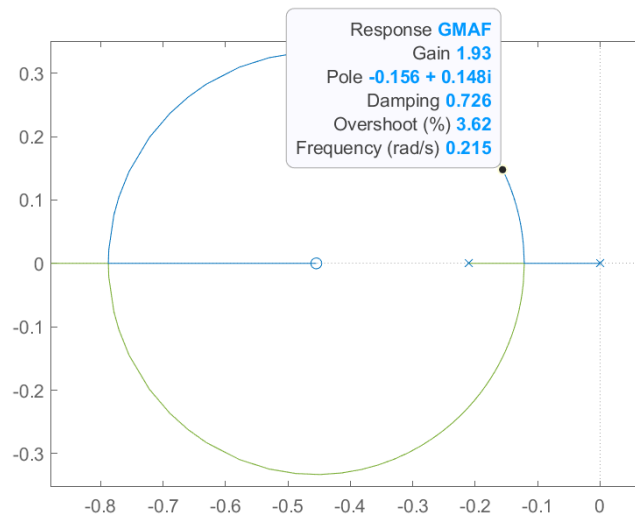


Figura 62 – Lugar das raízes da velocidade u - Sintonia LGR.

A partir do LGR, exibido na Figura 62, o ganho K_p é definido como 1,93. Logo, os ganhos do controlador PI para velocidade u , são dados por

$$K_p = 1,93, \quad K_i = 0,87. \quad (\text{B.6})$$

É realizada a sintonia do controlador PI para a velocidade v pelo método LGR. A função de transferência de u é dada por

$$g_{22}(s) = \frac{0,0284}{s + 0,1705}, \quad (\text{B.7})$$

sendo a função de transferência G_{pv} dada por

$$G_{pv}(s) = \frac{0,0284T_i s + 0,0284}{T_i s^2 + 0,1705T_i s}. \quad (\text{B.8})$$

O sobressinal apresentado pelo controlador DLQT-I para a velocidade v , é de aproximadamente 3,66%. Para o projeto do controlador PI, adota-se também esse sobressinal, logo $\zeta = 0,73$.

O LQR da velocidade v , para $T_i = 2,2$ é apresentado na Figura 63.

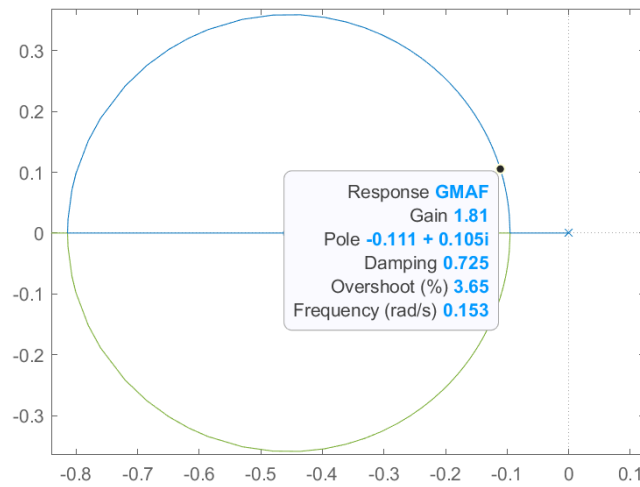


Figura 63 – Lugar das raízes da velocidade v - Sintonia LGR.

A partir do LGR, exibido na Figura 62, o ganho K_p é definido como 1,81. Logo, os ganhos do controlador PI para velocidade v , são dados por

$$K_p = 1,81, \quad K_i = 0,82. \quad (\text{B.9})$$

A sintonia do controlador PI para velocidade r é realizada pelo LQR. A função de transferência de u é dada por

$$g_{11}(s) = \frac{0,5051}{s + 0,5051}, \quad (\text{B.10})$$

sendo a função de transferência G_{pr} dada por

$$G_{pr}(s) = \frac{0,5051T_i s + 0,5051}{T_i s^2 + 0,5051T_i s}. \quad (\text{B.11})$$

O controlador DLQT-I aplicado à velocidade r apresenta um sobressinal de aproximadamente 3,94%. No projeto do controlador PI, estabelece-se esse mesmo sobressinal, o que corresponde a um coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,718$.

O lugar das raízes associado à velocidade r , considerando $T_i = 0,85$, é exibido na Figura 63.

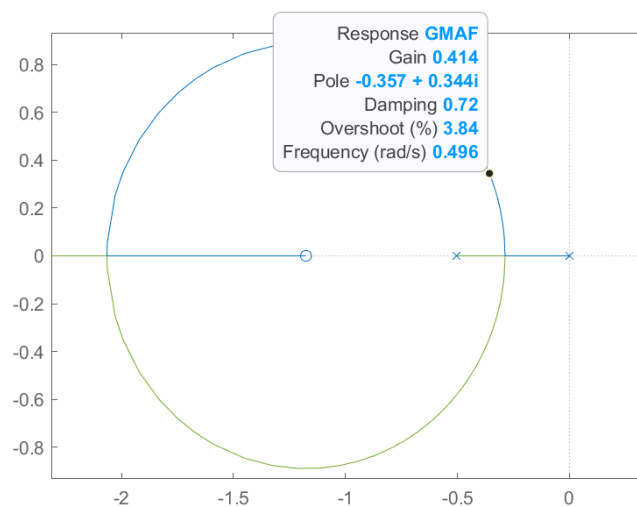


Figura 64 – Lugar das raízes da velocidade r - Sintonia LGR.

A partir do LGR, exibido na Figura 64, o ganho K_p é definido como 0,41. Logo, os ganhos do controlador PI para velocidade r , são dados por

$$K_p = 0,41, \quad K_i = 0,0,48. \quad (\text{B.12})$$