



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO/ CENTRO DE CIÊNCIAS DE  
BALSAS  
BACHARELADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**HAWLLINSSON GOMES DA SILVA**

**ALOCAÇÃO DE CAPACITORES EM SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO DE GRANDE  
PORTE: UM NOVO MÉTODO BASEADO EM ANÁLISE DE SENSIBILIDADE**

Balsas/MA

2026

**HAWLLINSSON GOMES DA SILVA**

**ALOCÇÃO DE CAPACITORES EM SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO DE GRANDE  
PORTE: UM NOVO MÉTODO BASEADO EM ANÁLISE DE SENSIBILIDADE**

Monografia apresentada ao curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Maranhão – Centro de Ciências de Balsas, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. João Eduardo Ribeiro  
Baptista

Balsas/MA

2026

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Silva, Hawllinsson Gomes da.

Alocação de capacitores em sistemas de distribuição de grande porte : um novo método baseado em análise de sensibilidade / Hawllinsson Gomes da Silva. - 2026.

56 p.

Orientador(a): João Eduardo Ribeiro Baptista.

Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Maranhão, Balsas-ma, 2026.

1. Alocação de Capacitores. 2. Programação Cônica de Segunda Ordem. 3. Multiplicadores de Lagrange. 4. Análise de Sensibilidade. 5. Sistemas de Distribuição de Grande Porte. I. Baptista, João Eduardo Ribeiro. II. Título.

**HAWLLINSSON GOMES DA SILVA**

**ALOCAÇÃO DE CAPACITORES EM SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO DE GRANDE  
PORTE: UM NOVO MÉTODO BASEADO EM ANÁLISE DE SENSIBILIDADE**

Aprovado em \_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Banca Examinadora

---

**Prof. Dr. João Eduardo Ribeiro Baptista**

Universidade Federal do Maranhão

(Orientador)

---

**Prof. Dr. Pedro Bezerra Leite Neto**

Universidade Federal do Maranhão

(1º Examinador)

---

**Prof. Dr. Raimundo Nonato Diniz Costa Filho**

Universidade Federal do Maranhão

(2º Examinador)

*“O mistério da vida não é um problema a ser resolvido, mas uma realidade a ser experimentada. Um processo que não pode ser compreendido parando-o. Devemos nos mover com o fluxo do processo. Devemos nos juntar a ele. Flutuar com ele. [...] O cientista busca um ponto de apoio para sua alavanca, a fim de mover o mundo. O místico busca um ponto de apoio na eternidade, para que o mundo não o mova!”*

**Frank Herbert** (Duna, Citação da Reverenda Madre Gaius)

## RESUMO

A eficiência operacional e a conformidade regulatória em sistemas de distribuição de energia elétrica dependem da otimização de diferentes condições operativas do sistema e de seus indicadores de desempenho, dos quais podem-se destacar a correção do fator de potência (FP) e o controle de perdas técnicas. A inserção de reativos via alocação ótima de capacitores apresenta-se como a solução clássica para estes desafios. Porém, a determinação da localização e dimensionamento destes equipamentos em redes de grande porte impõe uma complexidade combinatória que frequentemente inviabiliza o uso de métodos de otimização exatos tradicionais. Neste contexto, este trabalho propõe uma nova metodologia baseada em análise de sensibilidade para a solução do problema de alocação de capacitores em sistemas de grande porte. O método proposto converte o problema de fluxo de potência de distribuição em um problema de Programação Cônica de Segunda Ordem (PCSO), cujos multiplicadores de Lagrange permitem obter a sensibilidade das perdas ativas globais do sistema às variações nodais de potência reativa. Esta estratégia é combinada alternadamente com a utilização do Método de Soma de Potências (MSP) para garantir a exata determinação do estado do sistema frente às novas alocações de capacitores. A metodologia foi testada em um sistema real de distribuição contendo 2.313 nós. Os resultados demonstraram a viabilidade da abordagem, comprovando que o uso de sensibilidade baseada em otimização convexa permite garantir a correção do fator de potência (FP) para os limites regulatórios e a redução significativa de perdas, apresentando-se como uma ideia alternativa para o planejamento de redes de grande escala.

**Palavras chave - alocação de capacitores; sistemas de distribuição de grande porte; método de soma de potências; programação cônica de segunda ordem; multiplicadores de Lagrange; análise de sensibilidade.**

## ABSTRACT

Operational efficiency and regulatory compliance in electrical power distribution systems depend on optimizing a variety of operational conditions and their respective metrics, among which power factor correction (PF) and active loss control stand out. The insertion of reactive power via optimal capacitor allocation presents itself as a classic solution to these challenges. However, determining the siting and sizing of this equipment in large-scale networks imposes a combinatorial complexity that often makes the use of exact traditional optimization methods intractable. In this context, this work proposes a new methodology based on sensitivity analysis for solving the capacitor allocation problem in large-scale systems. The proposed method converts the distribution power flow problem into a Second-Order Conic Programming (SOCP) problem, whose Lagrange multipliers allow obtaining the sensitivity of the system's global active losses to nodal variations in reactive power. This strategy is alternately combined with the use of the Power Summation Method (PSM) to ensure the exact determination of the system state in the face of new capacitor allocations. The methodology was applied to a real distribution system containing 2,313 nodes. The results demonstrated the feasibility of the approach, proving that the use of sensitivity based on convex optimization allows for the correction of the power factor (PF) to regulatory limits and a significant reduction in losses, presenting itself as an alternative idea for the planning of large-scale networks.

**Keywords - capacitor allocation; large-scale distribution systems; power summation method; second-order cone programming; Lagrange multipliers; sensitivity analysis.**

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Sistema elétrico de potência - SEP.....	12
<b>Figura 2:</b> Topologias típicas de sistemas de distribuição. ....	13
<b>Figura 3:</b> Triângulo de potências para uma carga de distribuição típica.....	17
<b>Figura 4:</b> Uso de potência reativa capacitiva para correção do FP no triângulo de potências.....	19
<b>Figura 5:</b> Rede radial típica de distribuição ordenada em ramos e camadas. ....	30
<b>Figura 6:</b> Modelo de seção monofásico.....	31
<b>Figura 7:</b> Diagrama unifilar do sistema teste (subestações em vermelho).....	44

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1:</b> Comparativo dos trabalhos sobre alocação de capacitores .....	24
<b>Tabela 2:</b> Ramos normalmente abertos (configuração baseada no caso B1) .....	45
<b>Tabela 3:</b> Potências reativas nominais típicas de células capacitivas de média tensão (7,620 kV - 14,400 kV) .....	46
<b>Tabela 4:</b> Fator de potência (FP) base nas subestações do sistema sob estudo com base no estado da rede fornecido pelo MSP .....	46
<b>Tabela 5:</b> Localização dos capacitores e seus respectivos valores de potência em kVAr na alocação ótima .....	47
<b>Tabela 6:</b> Fator de potência (FP) nas subestações do sistema sob estudo .....	48

## LISTA DE SIGLAS

AG - Algoritmo Genético

AOC - Alocação Ótima de Capacitores

AT - Alta Tensão

BT - Baixa Tensão

CA – Corrente Alternada

EGA - *Enhanced Genetic Algorithm* (Algoritmo Genético Melhorado)

FAP - Filtro Ativo de Potência

FP - Fator de Potência

FPO - Fluxo de Potência Ótimo

HSA - *Harmony Search Algorithm* (Algoritmo da Busca Harmônica)

KKT - Karush-Kuhn-Tucker

LKC - Lei de Kirchhoff das Correntes

MSP - Método de Soma de Potências

MT - Média Tensão

PCSO - Programação Cônica de Segunda Ordem

PNL - Programação Não Linear

PNLIM - Programação Não Linear Inteira Mista

PSO - *Particle Swarm Optimization* (Otimização por Enxame de Partículas)

QGDA - *Quantum-Behaved and Gaussian Mutational Dragonfly Algorithm* (Algoritmo

Libélula com Mutação Gaussiana e Comportamento Quântico)

SEP - Sistema Elétrico de Potência

ZAO - Zona de Alocação Ótima

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
1.1	Sistemas de Distribuição de Energia Elétrica	11
1.2	Alocação de Capacitores Distribuídos para Correção do Fator de Potência	16
1.3	Métodos de Alocação de Capacitores em Sistemas de Potência	20
1.4	Objetivo Geral	26
1.5	Objetivos Específicos	27
1.6	Justificativa	27
<b>2</b>	<b>MÉTODO DE SOMA DE POTÊNCIAS</b>	<b>29</b>
2.1	Formulação Matemática em Variáveis Reais do MSP	30
2.2	Algoritmo do Método da Soma de Potências	34
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DE SENSIBILIDADE VIA PROGRAMAÇÃO CÔNICA DE SEGUNDA ORDEM</b>	<b>36</b>
3.1	Linearização e Convexidade dos Problemas de Fluxo de Potência Ótimo	36
3.2	Multiplicadores de Lagrange e Análise de Sensibilidade	39
<b>4</b>	<b>MÉTODO PROPOSTO DE ALOCAÇÃO DE CAPACITORES</b>	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>44</b>
5.1	Caracterização do Sistema Teste	44
5.2	Ambiente e Parâmetros da Simulação	45
5.3	Análise dos Resultados	46
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>50</b>
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>52</b>

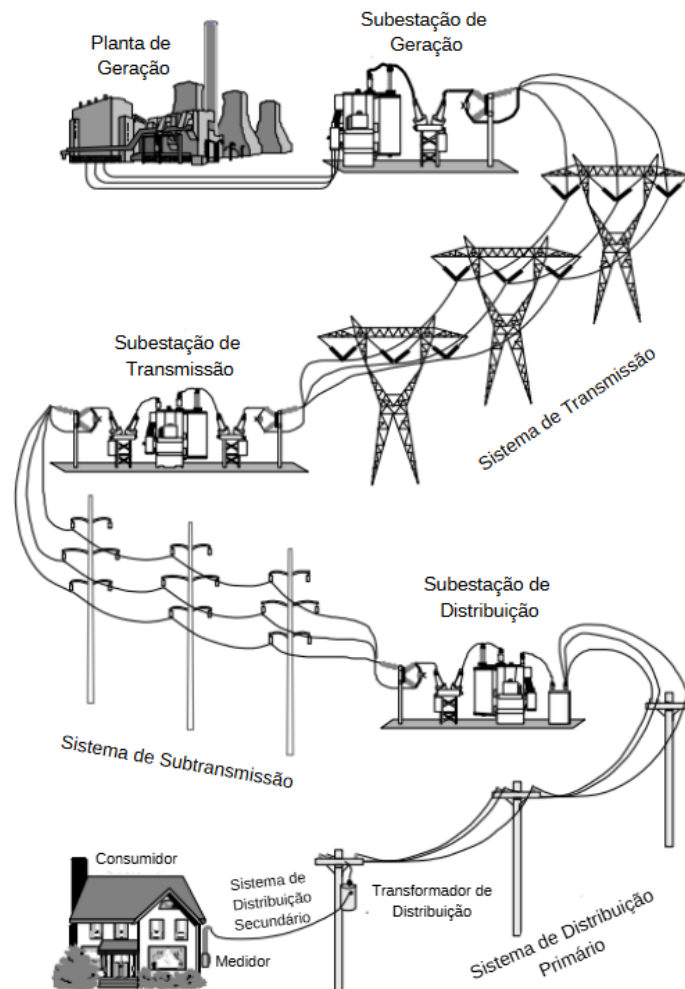
# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Sistemas de Distribuição de Energia Elétrica

O Sistema Elétrico de Potência (SEP) pode ser definido como um conjunto de equipamentos coordenados que trabalham para converter fontes de energia primária em eletricidade, a fim de transportá-la e oferecer energia elétrica suficiente aos consumidores no instante em que for demandada. Pode-se dizer que constitui uma das infraestruturas mais fundamentais da sociedade moderna, sendo responsável por sustentar o funcionamento de praticamente todas as atividades econômicas, industriais, comerciais e residências. Por conta da sua alta importância, exige elevados níveis de segurança, confiabilidade, qualidade e eficiência do suprimento, exigindo planejamento e operação eficazes (KAGAN; OLIVEIRA; ROBBA, 2005).

O SEP é usualmente um sistema de grande extensão e alta complexidade; por conta disso, é tradicionalmente dividido em três grandes zonas funcionais que trabalham em sincronia: geração, transmissão e distribuição. Enquanto a geração produz a energia, a transmissão se encarrega do transporte de grandes blocos de potência em extra alta tensão e ultra alta tensão por longas distâncias e a distribuição atua como o fornecedor direto de energia elétrica aos consumidores finais (BROWN, 2009). De forma mais específica, diz-se que os sistemas de distribuição são conjuntos de instalações e equipamentos elétricos que operam em tensões inferiores às da transmissão, conectando as subestações abaixadoras aos medidores dos clientes finais. É um segmento caracterizado por sua extensa ramificação geográfica e pela diversidade de cargas atendidas (SHORT, 2014). Todas as características supracitadas podem ser observadas na Figura 1 abaixo:

**Figura 1:** Sistema elétrico de potência - SEP



**Fonte:** Adaptado de Brown, 2009.

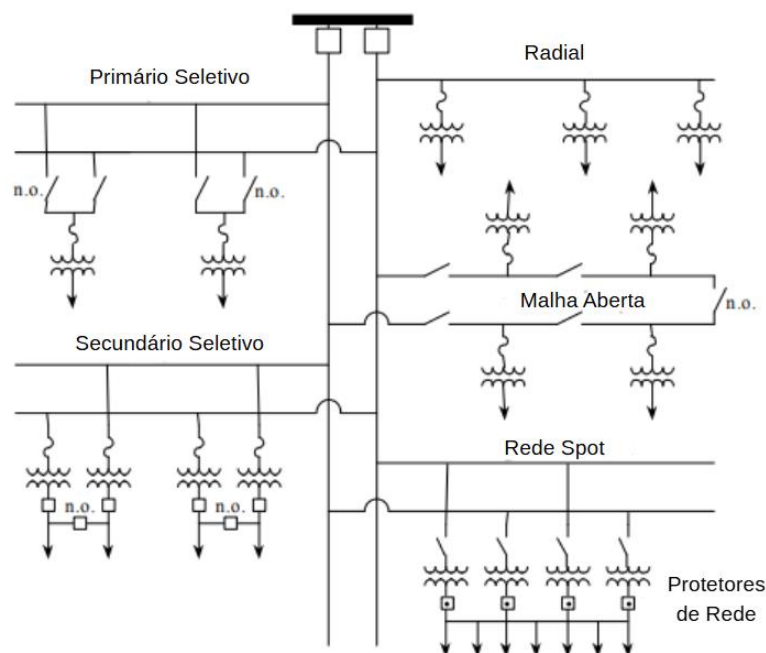
No Brasil, os níveis de tensão de todo o sistema de distribuição são padronizados e regulamentados pela Agência Nacional de Energia Elétrica - ANEEL, especificamente no Módulo 1 dos Procedimentos de Distribuição – PRODIST (ANEEL, 2018) e na resolução normativa nº 1.000/2021. Operacionalmente, a distribuição é dividida em:

- **Alta Tensão (AT):** Tensão igual ou superior a 69 kV e inferior a 230 kV. É usualmente associada aos sistemas de subtransmissão sendo empregada no suprimento de subestações de distribuição e de grandes consumidores industriais. No Brasil, as tensões padronizadas nesta faixa de operação são de 69 kV e 138 kV.

- **Média Tensão (MT):** Tensão superior a 1 kV e inferior a 69 kV. Corresponde à chamada rede primária de distribuição e é responsável pelo transporte de energia ao longo de vias urbanas e rurais até os transformadores de distribuição. As classes de tensão nominais mais comuns no cenário brasileiro são 13,8 kV e 34,5 kV.
- **Baixa Tensão (BT):** Tensão igual ou inferior a 1 kV. Conhecida como rede secundária, é derivada dos transformadores de distribuição para atender residências e pequenos comércios, tipicamente operando em 127/220 V ou 220/380 V.

Outra característica importante do sistema de distribuição é a sua topologia, pois ela exerce papel fundamental sobre o desempenho operacional, os níveis de confiabilidade, os custos de implantação e a qualidade do fornecimento. Existe uma variedade de formas de organizá-lo, mas ao longo do seu desenvolvimento consolidaram-se algumas configurações topológicas predominantes e amplamente empregadas na prática. A Figura 2 apresenta algumas das mais comuns (BROWN, 2009; GÖNEN, 2014).

**Figura 2:** Topologias típicas de sistemas de distribuição.



**Fonte:** Adaptado de Brown, 2009.

Em uma ordem crescente de complexidade, confiabilidade e custo, as topologias de distribuição apresentadas são radial, malha aberta, primário seletivo, secundário seletivo e rede *spot* (BROWN, 2009; GÖNEN, 2014; KAGAN; OLIVEIRA; ROBBA, 2005).

- **Sistema radial:** Cada consumidor é alimentado por um único caminho elétrico a partir da subestação, não existindo rotas alternativas em operação normal. A energia flui do alimentador até as cargas em um único sentido, o que simplifica o projeto, a coordenação da proteção, a operação do sistema e os custos de implantação.
- **Sistema em malha aberta:** Dois alimentadores primários alimentam uma mesma região, formando um anel elétrico que possui pelo menos um ponto normalmente aberto durante a operação normal. Em caso de falha em um dos trechos do alimentador, que funciona de forma radial, o segmento defeituoso pode ser isolado e o ponto normalmente aberto fechado, restabelecendo o fornecimento para a maior parte das cargas por um caminho alternativo.
- **Sistema com primário seletivo:** A alimentação de uma mesma carga ou grupo de cargas é feita por dois alimentadores primários independentes, provenientes, em geral, de barras ou circuitos distintos da subestação. Apenas um alimentador opera normalmente, enquanto o outro permanece em condição de reserva, sendo conectado automaticamente ou manualmente em caso de falha no alimentador principal.
- **Sistema com secundário seletivo:** Tem um conceito muito parecido com o do primário seletivo, com a diferença de que a redundância é implementada no nível da rede secundária, ou seja, após os transformadores de distribuição. Nessa configuração, dois transformadores independentes alimentam um mesmo barramento de baixa tensão, sendo que normalmente apenas um opera, enquanto o outro permanece em reserva. A comutação entre os transformadores pode ocorrer de forma automática ou manual, permitindo a continuidade do fornecimento mesmo diante de falhas no transformador principal ou no circuito primário associado.

- **Rede spot:** Dois ou mais transformadores alimentam simultaneamente um mesmo barramento de baixa tensão, operando em paralelo de forma contínua. Diferentemente do sistema com secundário seletivo, todos os transformadores estão energizados e compartilhando a carga, de modo que a falha de um deles não provoca interrupção perceptível no fornecimento, pois os demais assumem imediatamente a carga remanescente. Devido à operação em paralelo, é fundamental o uso de dispositivos de proteção contra um potencial fluxo reverso de energia. Equipamentos conhecidos como protetores de rede contêm relés de potência inversa que impedem o fluxo reverso de energia da baixa para a média tensão em caso de falhas no primário, isolando automaticamente o transformador defeituoso.

Todas essas topologias são possíveis sistemas de distribuição primários, sendo implementados conforme o nível de confiabilidade desejada, levando em consideração parâmetros como densidade de carga e presença de cargas críticas. Entretanto, os arranjos mais amplamente empregados são o radial e o primário em malha aberta, que também opera como um sistema radial (BROWN, 2009). Essa preferência por uma operação radial ocorre porque essa configuração oferece vantagens significativas, principalmente em relação a simplicidade de planejamento e operação, aliada a um custo de implementação reduzido. Além disso, a topologia radial facilita a coordenação da proteção em sistemas tradicionais, visto que a corrente de falta possui um caminho único da fonte para a carga. No entanto, vale ressaltar que a crescente inserção de geração distribuída tem desafiado essa simplicidade, introduzindo fluxos de potência bidirecionais que exigem novas estratégias de controle e proteção. Ainda assim, para fins de planejamento básico, a previsibilidade do sistema radial continua sendo uma vantagem, tornando o controle de tensão e fluxo de potência mais diretos e previsíveis (SHORT, 2014).

Para além da topologia, existem outras características intrínsecas aos sistemas de distribuição que adicionam complexidade ao planejamento e operação destes sistemas, como por exemplo, a dimensionalidade (GÖNEN, 2014). Um único alimentador de distribuição pode conter milhares de nós, enquanto uma concessionária opera simultaneamente centenas de alimentadores. Como consequência, o sistema pode alcançar centenas de milhares de barras,

caracterizando um problema de grande porte e elevada complexidade combinatória, o que impõe desafios significativos à modelagem e à análise computacional da rede (BROWN, 2009; KAGAN; OLIVEIRA; ROBBA, 2005). Não há uma classificação estrita para o porte das redes de distribuição, mas na literatura de otimização de sistemas de distribuição, comumente se considera redes de pequeno e médio porte aquelas análogas aos sistemas teste IEEE 33 e 69 barras, frequentemente utilizados para validação de algoritmos de alocação de reativos (REZAPOUR *et al*, 2024; RAJESH; SHAJIN, 2021; ALMABSOUT *et al*, 2020). Neste contexto, é razoável classificar qualquer sistema acima de 400 barras como sendo de grande porte.

Outra característica típica da distribuição e que a difere marcadamente da transmissão é sua elevada relação R/X, que impõe técnicas de modelagem e tratamento de naturezas diferentes. Enquanto nas linhas de transmissão a reatância indutiva é significativamente maior que a resistência, nos circuitos de distribuição, em razão das menores bitolas dos condutores e dos níveis de tensão mais baixos, a resistência assume papel relevante, sendo muitas vezes comparável ou até superior à reatância. Essa particularidade faz com que as perdas por efeito Joule sejam proporcionalmente mais significativas e que a regulação de tensão dependa fortemente dos dois tipos de fluxo de potência: ativo e reativo (GÖNEN, 2014; SHORT, 2014; MAMEDE FILHO, 2017).

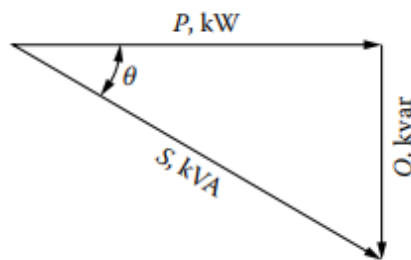
Todas estas características, mas especialmente a extensão da rede e a elevada resistência dos condutores, criam um cenário onde a eficiência no transporte da energia se torna crítica, exigindo monitoramento constante dos perfis de tensão e das perdas técnicas (SHORT, 2014).

## **1.2 Alocação de Capacitores Distribuídos para Correção do Fator de Potência**

Um dos parâmetros que afetam a eficiência operacional de sistemas de distribuição é a relação entre as diferentes formas de potência que circulam na rede. Fundamentalmente, diz-se que a energia elétrica manifesta-se de duas formas distintas: potência ativa ( $P$ ) e potência reativa ( $Q$ ). A potência ativa, medida em Watts ( $W$ ), é a taxa média de fluxo de energia que é convertida em trabalho útil ou em outras formas de energia física como energia térmica, energia luminosa e energia mecânica. Já a potência reativa, medida em Volt-Ampère reativo ( $VAr$ ), apesar de não realizar trabalho efetivo, é indispensável em sistemas de corrente alternada (CA) para a

formação e manutenção dos campos eletromagnéticos necessários ao funcionamento de equipamentos como transformadores, motores de indução e reatores. A soma vetorial dessas duas componentes resulta na potência complexa ( $S$ ), cujo módulo, chamado de potência aparente e medido em Volt-Amprère ( $VA$ ), representa a capacidade total de carregamento que os equipamentos do sistema devem suportar. Neste contexto, o fator de potência ( $FP$ ) é o indicador técnico que mensura a relação entre as potências fundamentais, sendo definido pela razão entre a potência ativa ( $P$ ) e a potência aparente ( $|S|$ ) e representando o quão eficientemente a energia total do sistema está sendo convertida em trabalho útil (GÖNEN, 2014). A relação entre essas grandezas pode ser expressa pelo triângulo de potências mostrado na Figura 3.

**Figura 3:** Triângulo de potências para uma carga de distribuição típica.



**Fonte:** Gönen, 2014.

Matematicamente, o FP também pode ser expresso pelo cosseno do ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente quando a potência do sistema é majoritariamente resultante de cargas lineares (MAMEDE FILHO, 2017).

$$FP = \frac{P(kW)}{|S|(kVA)} = \cos(\varphi_v - \varphi_a) \quad (1)$$

Na Equação 1, a subtração do ângulo de fase da tensão ( $\varphi_v$ ) pelo ângulo de fase da corrente ( $\varphi_a$ ), resulta no chamado ângulo de defasagem entre tensão e corrente.

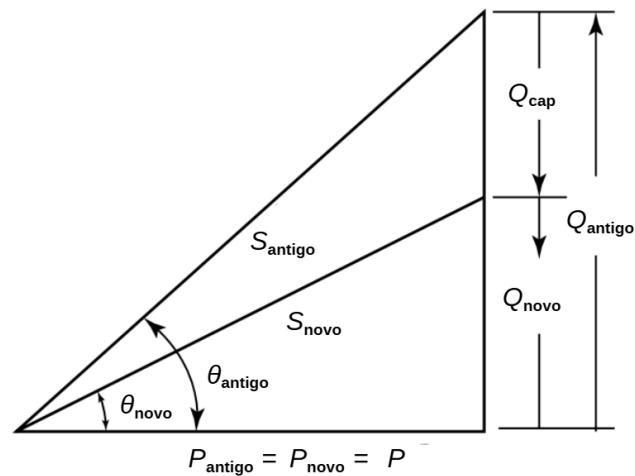
Um baixo FP, grandeza que varia entre 0 e 1 e pode assumir caráter indutivo e capacitivo, indica que uma parcela significativa da corrente elétrica está sendo utilizada apenas para o transporte de potência reativa. Embora a potência reativa não realize trabalho efetivo, sua circulação eleva a corrente total nos condutores. Como

as redes de distribuição possuem resistência elétrica considerável, esse aumento de corrente intensifica diretamente as perdas técnicas por efeito Joule e acentua as quedas de tensão ao longo dos alimentadores (GÖNEN, 2014; SHORT, 2014).

Diante dos impactos negativos do baixo FP na capacidade do sistema, a regulação do setor elétrico impõe limites estritos para este parâmetro, diferenciando as exigências conforme o nível de conexão. No Brasil, a ANEEL, através do Módulo 8 do PRODIST, estabelece que o fator de potência de referência deve ser mantido o mais próximo possível da unidade, com um limite mínimo permitido de 0,92 indutivo ou capacitivo para as unidades consumidoras. Nos pontos de conexão entre as distribuidoras e a rede de transmissão a regulação é ainda mais restrita, exigindo-se que o FP seja mantido indutivo, vetando a injeção de reativos capacitivos pela distribuidora na rede de transmissão. Essa diferenciação ocorre porque as redes de transmissão naturalmente funcionam como grandes capacitores que em momentos de carga leve geram muita potência reativa, elevando sua tensão. Uma eventual injeção capacitiva por parte da distribuidora se somaria a esse fenômeno, provocando sobretensões perigosas ao sistema de transmissão (ANEEL, 2021; MAMEDE FILHO, 2017). Neste sentido, a regulação impõe penalidades financeiras caso a operação ocorra fora da faixa determinada no ponto de conexão, o que exige das concessionárias a implementação de estratégias de compensação de reativos para adequar-se a essas normas e mitigar ineficiências, como é o caso da instalação de bancos de capacitores (MAMEDE FILHO, 2017).

A adição de capacitores pode reduzir parcial ou totalmente a componente imaginária da potência aparente sem alterar a componente real, o que resulta na diminuição do ângulo de defasagem ( $\theta$ ) e o consequente aumento no FP conforme ilustra a Figura 4 (GÖNEN, 2014).

**Figura 4:** Uso de potência reativa capacitiva para correção do FP no triângulo de potências.



**Fonte:** Adaptado de Gönen, 2014.

Na Figura 4 a potência complexa original ( $S_{\text{antigo}}$ ) juntamente com seu valor de fase ( $\theta_{\text{antigo}}$ ) são diminuídos para novos valores ( $S_{\text{novo}} \angle \theta_{\text{novo}}$ ) ao adicionar potência capacitiva ( $Q_{\text{cap}}$ ) a potência reativa indutiva original ( $Q_{\text{antigo}}$ ) e então obter um valor menor de potência reativa indutiva ( $Q_{\text{novo}}$ ). Sabendo que a redução de reativos é possível por meio da instalação de capacitores, a indagação lógica a ser feita a seguir diz respeito a quais pontos do sistema esses equipamentos devem ser instalados.

Existem basicamente duas possibilidades de alocação para bancos de capacitores em sistemas de distribuição. A primeira é que sejam alocados diretamente na subestação de distribuição, visando somente a correção do FP e a prevenção de muitas regulatórias. As vantagens dessa configuração estão na considerável facilidade de supervisão, na centralização da manutenção e no baixo custo por kVAr instalado (GÖNEN, 2014). No entanto, o banco de capacitores não consegue aliviar o fluxo de corrente reativa nos alimentadores, não tendo qualquer efeito sobre os níveis de perdas técnicas e sobre as quedas tensão nos circuitos. A outra forma de alocação é localizar os capacitores ao longo dos alimentadores e próximos aos centros de carga. Ao gerar a potência reativa próxima do seu local de consumo, o fluxo de reativos é suprimido a montante do capacitor. Isso diminui efetivamente a corrente que circula pelos condutores desde a subestação até o ponto de instalação, resultando em uma redução significativa das perdas ativas e na liberação de capacidade dos cabos, além de melhorar o perfil de tensão localmente (SHORT, 2014; GÖNEN, 2014).

Para a otimização de sistemas de grande porte, a abordagem distribuída apresenta-se superior do ponto de vista da eficiência energética. No entanto, ela introduz um problema de planejamento significativamente mais complexo, que envolve não apenas definir a quantidade de potência reativa necessária, mas também as localizações ótimas que maximizam a redução de perdas técnicas. A resolução desse problema demanda a aplicação de métodos matemáticos robustos de alocação e otimização, especialmente em razão da elevada dimensão e do caráter não linear do sistema elétrico de distribuição (KAGAN; OLIVEIRA; ROBBA, 2005; BROWN, 2009).

### 1.3 Métodos de Alocação de Capacitores em Sistemas de Potência

O problema de Alocação Ótima de Capacitores (AOC) é classificado na literatura como um problema de Programação Não Linear Inteira Mista (PNLIM). Ele é misto e inteiro porque envolve variáveis discretas (número de bancos, localização nas barras) e não linear devido às equações de fluxo de potência que regem o comportamento da rede. Sendo assim, trata-se de um problema demasiadamente complexo, cuja não trivialidade se deve a uma alta natureza combinatória e probabilística (MARTINS; ARAUJO; PENIDO, 2022). Diversos autores propuseram uma série de soluções para a resolução do problema de alocação de capacitores envolvendo principalmente métodos baseados em otimização matemática, metaheurísticas e métodos heurísticos exemplificados a seguir.

O trabalho realizado por REZAPOUR *et al.* (2024) utiliza otimização por enxame de partículas (PSO, do inglês *particle swarm optimization*) em uma estrutura de duas partes: a primeira determina o tamanho e localização dos capacitores e a segunda a injeção de corrente e localização dos filtros ativos de potência FPA. O objetivo é otimizar a alocação e o tamanho dos capacitores para a redução de perdas e o incremento no perfil de tensão, enquanto utiliza os FPA para compensar as correntes harmônicas e reduzir a poluição harmônica. Três casos de estudos foram conduzidos no sistema teste IEEE 18.

RAJESH e SHAJIN (2021) propuseram alterações no algoritmo libélula (DA) com diferentes combinações de comportamento quântico (Q) e estratégias de mutações gaussianas (G) para melhorar sua performance. Essa combinação resultou em um método chamado de QGDA (do inglês, *Quantum-Behaved and Gaussian*

*Mutational Dragonfly Algorithm*) que foi utilizado para determinar a alocação ótima de capacitores e de estações de carregamento de veículos elétricos ao longo de uma rede de distribuição do sistema teste IEEE 34.

O trabalho de MARTINS, ARAUJO e PENIDO (2022) fez uso conjunto do algoritmo genético (AG) e análise de sensibilidade para mapear zonas de alocação ótima (ZAO), regiões no sistema mais sensíveis a alocação de equipamento para redução de perdas. Foi aplicado algoritmo genético em quatro sistemas de redes de distribuição trifásicas desbalanceadas diferentes: IEEE 4, IEEE 13, IEEE 37 e IEEE 123. As simulações foram rodadas em uma curva de carga de 24 h, onde demanda e geração foram selecionadas de forma aleatória de acordo com a hora do dia. A análise de sensibilidade demonstrou que estatisticamente as melhores regiões do sistema coincidem de forma independente das condições de demanda e geração.

PARVANEH, MORADI e AZIMI (2023) trouxeram uma abordagem para o cálculo da alocação e dimensionamento de capacitores em derivação em microrredes ilhadas utilizando o algoritmo de busca harmônica (HSA, do inglês *Harmonic Search Algorithm*). A finalidade foi de melhorar o perfil de tensão e diminuir as perdas do sistema. O algoritmo foi aplicado a uma rede de 69 barras e os resultados foram comparados a uma implementação com otimização por enxame de partículas (PSO, do inglês *Particle Swarm Optimization*), o que demonstrou que a abordagem proposta é efetiva na compensação de potência reativa.

Uma abordagem utilizando três níveis de otimização foi proposta por MARTINS, COSTA, ARAUJO e PENIDO (2021) para alocação ótima de capacitores em sistemas de distribuição desbalanceados. Foram aplicados o método dos pontos interiores, algoritmo genético e otimização binária em cinco sistemas testes baseados nos IEEE 4, IEEE 13, IEEE 37 e IEEE 123. A primeira parte da implementação visa evitar que o sistema trabalhe em subtensão e sobretensão, a segunda busca determinar onde e quais (fixo ou chaveado) capacitores precisam ser conectados nos nós do sistema e a terceira otimiza o estado dos capacitores chaveados. A aplicação deste método mostrou uma melhora no perfil de tensão e redução nas perdas de energia em todos os sistemas testes.

Uma proposta que faz uso de algoritmo genético melhorado (EGA, do inglês *Enhanced Genetic Algorithm*) por esquema de busca local para a correta alocação de capacitores em derivação, afim de reduzir as perdas de potência e o desvio de tensão foi feita por ALMABSOUT *et al* (2020). A combinação do algoritmo genético com a

busca local aumenta tanto a capacidade do espaço de busca quanto a taxa de exploração para encontrar a solução global. O método foi aplicado em três sistemas de teste IEEE 33-barras, 69-barras e 119-barras de forma bem-sucedida e submetido a uma análise de custo baseada em economia que revelou as vantagens técnicas e econômicas da proposta.

No trabalho de MAHDAVI *et al.* (2024), foi proposto um método que otimiza a redução das perdas de potência baseado simultaneamente na reconfiguração da rede, na alocação de capacitores e na alocação da geração distribuída. A proposta incorpora as variações de carga e as incertezas na coordenação complexa desses elementos, característica negligenciada por diversos trabalhos. O método faz uso de solucionadores lineares que levam a soluções exatas em pouco tempo através de uma estrutura equivalente probabilística. O estudo comparou uma abordagem de nível de carga média, com padrão de pico de carga e padrão de carga completa e concluiu que a abordagem ótima em termos de precisão e custo computacional deve levar em conta o nível de carga média.

AGUILA, GONZÁLEZ e ORTIZ (2020) implementaram em seu trabalho um modelo matemático chamado de otimização por enxame de partículas (PSO) para alocar e dimensionar bancos de capacitores em microrredes de distribuição. O método, baseado na metaheurística homônima foi implementado no MATLAB® e calcula a solução ótima que satisfaz os requisitos para o adequado funcionamento da rede. Foi aplicado em uma sistema malhado de 5 barras e os resultados geraram melhora nos perfis de tensão, minimização das perdas, melhora no fator de potência e diminuição no desvio de tensão.

CETCOVIC e KOMEN (2023) demonstraram em seu trabalho uma redução efetiva nas perdas de potência e melhoramento no perfil de tensão por meio da aplicação simultânea de alocação e dimensionamento de unidades de geração distribuída e banco de capacitores. A proposta foi realizada ao modificar o algoritmo genético e aplicar o método em um sistema teste IEEE 33-barras. Foram obtidos melhores resultados ao usar modelos mais detalhados que incluem elementos com níveis baixos e médios de tensão.

Todos os trabalhos apresentados acima enquadram-se em um das três metodologias já mencionadas ou uma forma híbrida delas. Cada método tem suas vantagens e desvantagens, que se acentuam conforme o aumento do porte do sistema. Segue que:

- A otimização matemática funciona muito bem em problemas lineares e convexos, pois garante a melhor solução possível dentro das restrições. Por serem baseadas em modelos matemáticos, as soluções obtidas são precisas, acuradas e confiáveis. Sua desvantagem está no fato de tornar-se rapidamente custosa de um ponto de vista computacional conforme a complexidade do problema aumenta. Em sistemas de distribuição reais de grande porte, com milhares de nós, esses métodos podem se tornar computacionalmente inviáveis ou exigir tempos de processamento proibitivos para o planejamento operacional (MARTINS; ARAUJO; PENIDO, 2022).
- As metaheurísticas conseguem lidar com problemas bastante complexos e não lineares. Graças a combinação de elementos aleatórios e determinísticos esses métodos são úteis na resolução de problemas com múltiplos ótimos locais. A sua alta versatilidade a torna vantajosa em um contexto que seja preciso lidar com tipos de problemas e restrições diversas. Suas principais desvantagens estão no fato de não garantir uma solução ótima global, visto que o método pode convergir para um local sub ótimo e portanto não satisfazer o problema. Outra questão a ser ponderada está no seu habitual grande número de parâmetros a serem ajustados e a sensibilidade destes em relação a reposta. Além disso, geralmente requerem a execução de milhares de cálculos de fluxo de potência para avaliar cada indivíduo da população, o que também eleva o custo computacional em redes muito extensas. (GALLEGO; LÓPEZ-LEZAMA; CARMONA, 2022).
- Os métodos heurísticos são geralmente baseados em conhecimento empírico e intuição, o que os torna de fácil compreensão. São simples de entender, implementar e fornecem soluções rápidas. Frequentemente, apoiam-se em índices de sensibilidade, que indicam quais barras do sistema são mais sensíveis à injeção de potência reativa para reduzir as perdas totais. A exemplo das metaheurísticas, os métodos heurísticos também não garantem uma solução ótima global, além de seu desenvolvimento ser demorado para sistemas grandes, com muitas variáveis e restrições probabilísticas. Apesar disso, os métodos heurísticos têm um baixo custo computacional, fornecendo soluções de alta qualidade em uma fração do tempo exigido pelos métodos matemáticos ou metaheurísticos. Para concessionárias que operam sistemas com topologias complexas e milhares de barras, a rapidez e a simplicidade de

implementação das heurísticas são vitais. Elas permitem que o planejamento seja reavaliado dinamicamente sem a necessidade de supercomputadores. (MARTINS; ARAUJO; PENIDO, 2022).

A Tabela 1 resume os elementos principais referentes a cada um dos trabalhos apresentados e fornece uma melhor comparação entre os mesmos.

**Tabela 1:** Comparativo dos trabalhos sobre alocação de capacitores

<b>Autores/Ano</b>	<b>Método de Solução</b>	<b>Escopo da Aplicação</b>	<b>Sistema Teste</b>	<b>Contribuição Principal</b>
Rezapour et al. (2024)	PSO (Enxame de Partículas)	Capacitores + Filtros Ativos (FPA)	IEEE 18	Abordagem em duas partes: alocação de reativos e mitigação de poluição harmônica.
Rajesh e Shajin (2021)	QGDA (Libélula Quântico-Gaussiano)	Capacitores + Estações de Recarga de Veículos Elétricos	IEEE 34	Algoritmo híbrido para cenário com veículos elétricos.
Martins, Araujo e Penido (2022)	AG (Algoritmo Genético) + Análise de Sensibilidade	Redes Trifásicas Desbalanceadas (Foco em Zonas Ótimas)	IEEE 4, 13, 37 e 123	Uso de curvas de carga de 24h e mapeamento de zonas ótimas (ZAO) independentes da demanda.

Parvaneh, Moradi e Azimi (2023)	HSA (Busca Harmônica)	Microrredes Ilhadas	69 Barras	Validação em operação ilhada comparada ao PSO, focando em compensação efetiva.
Martins et al. (2021)	Híbrido (Pontos Interiores + AG + Otimização Binária)	Redes Desbalanceadas (Capacitores fixos e chaveados)	IEEE 4, 13, 37 e 123	Otimização em três níveis: restrições de tensão, localização/tipo e despacho dos chaveados.
Almabsout et al. (2020)	EGA (AG Melhorado com Busca Local)	Redução de perdas e desvio de tensão	IEEE 33, 69 e 119	Combinação de AG com busca local para aumentar a taxa de exploração da solução global.
Mahdavi et al. (2024)	Solucionadores Lineares (Probabilístico)	Reconfiguração + Capacitores + GD	Não especificado	Considera incertezas e variações de carga simultaneamente; propõe uso de carga média para eficiência.

Aguila, González e Ortiz (2020)	PSO (Modelo Matemático)	Microrredes de Distribuição	5 Barras (Malhado)	Implementação em Matlab focada no cumprimento estrito dos requisitos de funcionamento da rede.
Cetcovic e Komen (2023)	AG Modificado	GD + Capacitores (Simultâneo)	IEEE 33	Uso de modelos detalhados que incluem elementos de média e baixa tensão.

**Fonte:** Desenvolvido pelo autor.

A análise da Tabela 1 revela que, embora existam diversas abordagens para a alocação de capacitores, a maioria utiliza metaheurísticas clássicas como PSO e AG ou uma versão modificada destas e concentra-se em sistemas testes clássicos do IEEE com relativamente poucas barras. Nota-se que poucos trabalhos usam heurísticas refinadas com análises de sensibilidade sofisticadas e/ou aplicam suas propostas em cenários reais, onde a dimensionalidade da rede é consideravelmente maior. A proposta deste trabalho preenche uma lacuna ao usar os multiplicadores de Lagrange como um mapa de sensibilidade e ao aplicar o método em um cenário real, onde o sistema excede 2000 barras.

#### 1.4 Objetivo Geral

Desenvolver um método computacional baseado em análise de sensibilidade para a alocação ótima de capacitores em sistemas de distribuição de energia elétrica de grande porte.

## 1.5 Objetivos Específicos

Adicionalmente, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Investigar a eficácia dos multiplicadores de Lagrange oriundos da relaxação cônica (PCSO) como indicadores de sensibilidade para a alocação de capacitores, verificando sua correlação com a redução efetiva de perdas técnicas na rede.
- Validar a aplicabilidade da metodologia proposta em cenários reais, demonstrando a capacidade do algoritmo em processar topologias complexas e extensas em tempos computacionais competitivos quando comparado ao estado da rede.

## 1.6 Justificativa

A complexidade operacional das redes de distribuição está intrinsecamente ligada à necessidade de manutenção da estabilidade, do fator de potência e das perdas dentro de limites aceitáveis. O controle preciso dessas grandezas é indispensável para garantir a eficiência do sistema e a conformidade regulatória, visto que indicadores inadequados degradam a qualidade da energia entregue e elevam os custos operacionais.

Em virtude disso, a alocação de bancos de capacitores apresenta-se como uma solução clássica e eficaz para este tipo de rede, já que lida diretamente com desafios inerentes a sua natureza, tais como a alta relação R/X nos condutores e a extensão geográfica dos alimentadores. A injeção estratégica de potência reativa reduz a circulação de corrente nos alimentadores, o que mitiga as perdas técnicas e libera capacidade de potência do sistema. Entretanto, determinar a localização e o dimensionamento ótimos desses equipamentos constitui um problema de otimização combinatória complexa, classificado como Não Linear Inteiro Misto (PNLIM).

Embora existam abordagens clássicas de otimização exata para a localização de capacitores ao longo de uma rede, elas frequentemente falham em convergir ou exigem tempos computacionais proibitivos quando aplicadas a sistemas reais, que possuem topologias extensas e milhares de barras. Por outro lado, as metaheurísticas, apesar de populares, demandam um ajuste complexo de parâmetros

e um alto número de avaliações de fluxo de potência o que também onera o processamento em redes de grande porte.

Dessa forma, este trabalho justifica-se pela necessidade de ferramentas que unam a rapidez das heurísticas com o rigor teórico da otimização matemática. Ao utilizar a sensibilidade proveniente da relaxação convexa (um problema cônico de resolução rápida e garantida), a metodologia proposta busca oferecer uma solução funcional capaz de tratar sistemas de grande porte com precisão e velocidade, aplicável à realidade das redes elétricas modernas.

## 2 MÉTODO DE SOMA DE POTÊNCIAS

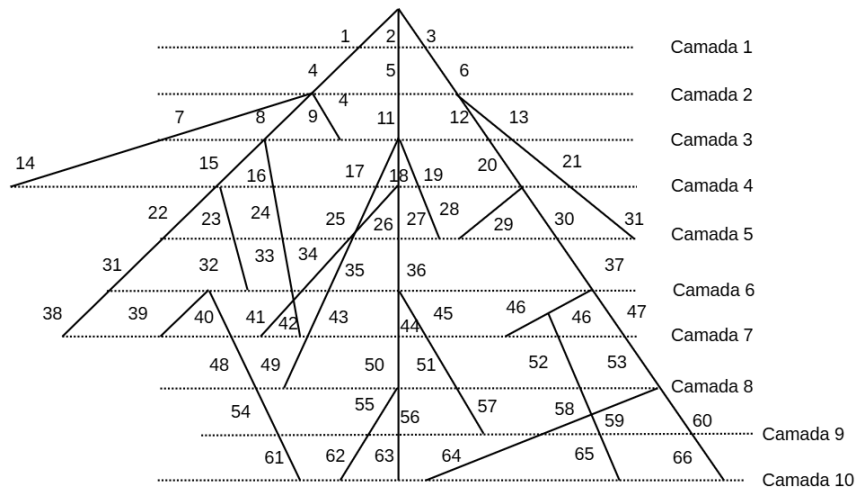
O cálculo do fluxo de potência envolve a determinação do estado de um sistema elétrico a partir de variáveis conhecidas. A descrição e as restrições desse sistema são representadas por conjuntos de equações e inequações algébricas não lineares que, em geral, são resolvidas utilizando-se métodos computacionais (MONTICELLI, 1983). Em sistemas de distribuição este processo apresenta desafios distintos daqueles encontrados em sistemas de transmissão, na medida em que métodos clássicos baseados em matrizes e derivadas, como o Newton-Raphson, frequentemente apresentam problemas de convergência. Esse fenômeno ocorre devido à alta relação R/X dos alimentadores e à topologia radial, que tornam a matriz Jacobiana, o índice que mede a sensibilidade da potência em relação às variáveis de estado, mal condicionada (TRIPATHY *et al*, 1982).

Neste cenário, os métodos de varredura (*Backward and Forward Sweep*) destacam-se pela sua robustez e eficiência computacional, já que percorrem a rede de acordo com o fluxo físico real da energia e realizam cálculos algébricos bem mais simples do que o processo reiterado de montagem e fatoração da matriz Jacobiana dos métodos de Newton. Os ganhos são ainda maiores quando se trata de sistemas topologicamente grandes, visto que o custo computacional cresce quase que linearmente com o número de barras nos métodos de varredura, ao passo que estão relacionados à solução de sistemas lineares cada vez maiores nos métodos de Newton (CESPEDES, 1990; MONTICELLI, 1983; TRIPATHY *et al*, 1982).

Nos métodos de varredura é imprescindível o ordenamento dos ramos em camadas, pois a indexação dos nós em níveis de profundidade a partir da subestação estabelece a hierarquia de dependência necessária para as iterações. No passo de varredura *Backward* (cálculo de correntes), o processamento deve ocorrer estritamente da camada mais profunda para a camada fonte, assegurando que, ao aplicar a Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC) em um determinado nó, todas as correntes de carga a jusante já tenham sido devidamente acumuladas. Reciprocamente, na etapa *Forward* (cálculo de tensões), a varredura deve proceder da fonte para as camadas finais, garantindo que a tensão atualizada do nó antecessor esteja disponível para o cálculo da queda de tensão no ramo subsequente. Sem essa ordenação prévia, o processamento dos ramos nas varreduras progressiva e

regressiva não seguiriam a ordem correta (SHIRMOHAMMADI *et al*, 1988). A Figura 5 descreve um rede radial típica de distribuição ordenada em ramos e camadas.

**Figura 5:** Rede radial típica de distribuição ordenada em ramos e camadas.



**Fonte:** Desenvolvido pelo autor.

Dentro da família dos métodos de varredura existe o método de Soma de Potências (MSP), cuja formulação está diretamente fundamentada no modelo de fluxo de ramos. Ao contrário de outras abordagens de varredura que manipulam vetores de corrente ou admitância, o MSP estrutura suas iterações no balanço de potências nodais. Na etapa de varredura *Backward*, o algoritmo calcula o fluxo de potência complexa em cada trecho somando as injeções de carga nodais e as perdas de potência ativa e reativa do ramo a jusante, propagando esses valores das extremidades para a fonte. Subsequentemente, as tensões são atualizadas na varredura *Forward* utilizando as quedas de tensão calculadas a partir desses fluxos de potência acumulados (CESPEDES, 1990; BROADWATER *et al*, 1988).

## 2.1 Formulação Matemática em Variáveis Reais do MSP

No contexto de fluxo de potência considera-se que uma variável é real quando pode ser representada por uma escalar. Variáveis de interesse como tensão, corrente e potência complexa são naturalmente grandezas fasoriais, entretanto para a descrição do fenômeno físico de interesse (balanço de potência, perdas e perfil de

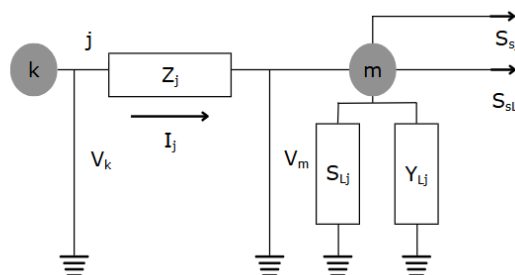
tensão) pode-se fazer uso apenas dos termos escalares, já que o ângulo não é uma variável de estado central do método (CESPEDES, 1990; BROADWATER *et al*, 1988).

Tornar as fases uma informação implícita diminui a complexidade algébrica do problema e traz diversas vantagens: redução do custo computacional ao evitar os múltiplos cálculos fasoriais de tensões e correntes a cada iteração que não acrescentariam informação física relevante ao método; eliminação de erros de propagação associados à fase da tensão que teriam impacto significativo em redes com grandes quedas de tensão; facilitação da incorporação de elementos típicos que são habitualmente descritos em termos de potência ativa, reativa e tensão, tais como bancos de capacitores, reguladores de tensão e geração distribuída (CESPEDES, 1990; BROADWATER *et al*, 1988; MAMEDE FILHO, 2013).

O MSP opera em dois passos principais a cada iteração: a varredura regressiva, na qual se acumulam as potências das últimas camadas até a subestação, e a varredura progressiva, na qual se atualizam as tensões da subestação até as pontas. Na varredura regressiva o cálculo da potência que flui em cada ramo é realizado assumindo que as tensões nas barras são conhecidas da iteração anterior ou da inicialização e que em uma estrutura radial, a potência que chega à barra  $m$  deve suprir a carga local e o fluxo de potência que segue para as barras a jusante, considerando as perdas no próprio trecho. Já na varredura progressiva o cálculo da tensão na barra  $m$  ( $V_m$ ) é feito conhecendo-se a tensão na barra anterior  $k$  ( $V_k$ ) e os fluxos de potência que percorrem o ramo (CESPEDES, 1990; BROADWATER *et al*, 1988).

Considere um trecho genérico de um alimentador de distribuição conectando uma barra emissora  $k$  a uma barra receptora  $m$ , conforme ilustrado na Figura 5.

**Figura 6:** Modelo de seção monofásico.



**Fonte:** Adaptado de Broadwater *et al*, 1988.

Levando em conta que os valores estão em p.u., definem-se as seguintes variáveis:

$k, m$ : índices das barras (nós) de envio e recebimento, respectivamente.

$j$ : índice da linha (ramo) que conecta os nós  $k$  e  $m$ .

$V_k, V_m$ : magnitudes das tensões nas barras  $k$  e  $m$ .

$I_j$ : corrente no ramo  $j$ .

$Z_j$ : impedância no ramo  $j$ .

$S_{Lj}$ : potência da carga conectada ao ramo  $j$ .

$Y_{Lj}$ : admitância da carga conectada no ramo  $j$ .

$S_{sj}$ : somatório de todas as perdas no sistema a jusante do ramo  $j$  representados como potência.

$S_{sLj}$ : somatório de todas as cargas no sistema a jusante do ramo  $j$  representados como potência.

Fixando a potência equivalente no nó  $m$  como  $S_m$  obtêm-se:

$$S_m = S_{Lj} + S_{sLj} + S_{sj} \quad (2)$$

$S_m$  é a potência equivalente vista pelo nó  $m$ .

Separando a eq. 2 em parte real e imaginária chega-se nas equações de varredura regressiva do MSP:

$$Peq_m = P_{Lj} + \sum_{sLj \in \Omega Fj} Peq_{sLj} + \sum_{Ssj \in \Omega Fj} R_j * \frac{Peq_{ssj}^2 + Qeq_{ssj}^2}{V_m^2} \quad (3)$$

$$Qeq_m = Q_{Lj} + \sum_{sLj \in \Omega Fj} Qeq_{sLj} + \sum_{Ssj \in \Omega Fj} X_j * \frac{Peq_{ssj}^2 + Qeq_{ssj}^2}{V_m^2} \quad (4)$$

Onde  $\Omega Fj$  representa o conjunto de ramos a jusante conectados ao ramo  $j$ .

Para obter as equações de varredura progressiva usa-se (5) e (6).

$$V_m * I_j^* = S_m + |V_m|^2 * Y_{Lj}^* \quad (5)$$

$$I_j = Y_j * (V_k - V_m) \quad (6)$$

Manipulando-se (5) e (6), obtém-se a equação biquadrada em (7).

$$V_m^4 + [2(R_j Peq_m + X_j Qeq_m) - V_k^2]V_m^2 + (R_j^2 + X_j^2)[Peq_m^2 + Qeq_m^2] = 0 \quad (7)$$

Equações biquadradas podem ser postas na forma descrita em (8).

$$A|V_m|^4 + B|V_m|^2 + C = 0 \quad (8)$$

Em que:

$$A = 1$$

$$B = [2(R_j Peq_m + X_j Qeq_m) - V_k^2]$$

$$C = (R_j^2 + X_j^2)[Peq_m^2 + Qeq_m^2]$$

A solução analítica da Eq. 8 é dada pela Eq.9 que corresponde a equação da varredura progressiva do MSP:

$$|V_m| = \sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}} \quad (9)$$

Para o cálculo de fase das tensões ( $\theta_m$ ) pode-se fazer uso da equação abaixo:

$$\theta_m = \theta_k - \text{atan}\left(\frac{R_j * Qeq_m - X_j * Peq_m}{V_m^2 + R_j Peq_m + X_j Qeq_m}\right) \quad (10)$$

Nota-se que para resolver as equação de fluxo em (3), (4) e (8) não é necessário o uso dos ângulos de fase das barras, apenas os módulos. Os ângulos podem ser determinados posteriormente ao processo iterativo fazendo uso de (10) em uma única varredura progressiva.

## 2.2 Algoritmo do Método da Soma de Potências

A solução do fluxo de potência é obtida alternando-se as equações de balanço de potência e de queda de tensão até que o erro entre iterações sucessivas seja menor que uma tolerância pré-estabelecida. O procedimento computacional pode ser descrito pelo algoritmo a seguir:

### Algoritmo 1: Fluxo de Potência (Soma de Potências)

1. **Leitura de Dados:** carregar dados de ramos (linhas, impedâncias) e de barra (potências de carga, tensões e fases).
2. **Inicialização (Flat Start):**
  - Definir tensão na subestação (barra raiz) como fixa (ex: 1.0 p.u.).
  - Inicializar todas as outras tensões com  $V = 1.0$  p.u.
  - Definir tolerância de convergência  $\varepsilon$  (ex:  $10^{-9}$ ).
  - Contador de iterações  $iter = 0$ .
3. **Loop Iterativo (enquanto erro  $> \varepsilon$ ):**
  - $iter \leftarrow iter + 1$
  - **Passo 1: Varredura Regressiva (Folhas  $\rightarrow$  Raiz)**  
 Para cada ramo, começando dos nós finais até a subestação:
    - Calcular cargas nodais e somar fluxos dos ramos a jusante.
    - Calcular perdas no ramo atual usando  $V_k$  da iteração anterior.
    - Determinar  $P_j$  e  $Q_j$  (potência total fluindo no ramo) por meio de (3) e (4).
  - **Passo 2: Varredura Progressiva (Raiz  $\rightarrow$  Folhas)**  
 Para cada ramo, começando da subestação até os nós finais:
    - Calcular  $V_m^2$  usando a equação de queda de tensão com base em  $V_k$  e nos fluxos  $P_j, Q_j$  recém calculados.

- Atualizar  $V_m$
  - **Passo 3: Verificação de Convergência**
    - Calcular o erro máximo de tensão:  $Max(|V_m^{iter} - V_m^{iter-1}|)$ .
    - Se erro  $< \varepsilon$ , encerrar o loop.
  - **Passo 4: Calcular ângulo de fase**
    - Com as informações obtidas realizar outra varredura progressiva e determinar os ângulos de fase  $\theta_m$  de cada barra com (10).
- 

Este método é particularmente vantajoso para o problema de alocação de capacitores proposto neste trabalho, pois permite reavaliar as perdas totais do sistema de forma extremamente rápida a cada nova configuração de capacitores testada pelo algoritmo heurístico.

### 3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE VIA PROGRAMAÇÃO CÔNICA DE SEGUNDA ORDEM

#### 3.1 Linearização e Convexidade dos Problemas de Fluxo de Potência Ótimo

O problema de fluxo de potência ótimo (FPO) é tradicionalmente formulado como um problema de Programação Não Linear (PNL). Devido à natureza quadrática das equações de fluxo de potência apresentadas na seção anterior, o espaço de busca é não convexo, o que significa que algoritmos de otimização tradicionais podem ficar presos em mínimos locais, sem garantir a solução ótima global (BOYD; VANDENBERGHE, 2009). Essa dificuldade pode ser contornada se a rede elétrica puder ser descrita apenas em termos de equações lineares e restrições convexas de desigualdade, já que um problema de otimização com estas características de região factível e com função objetivo convexa se configura como um problema convexo. De forma análoga, diz-se que um problema de programação convexa só admite funções lineares para suas restrições de igualdade, funções convexas para suas restrições de desigualdade e funções convexas para sua função objetivo (BOYD; VANDENBERGHE, 2009). Esse tipo de problema tem uma propriedade valiosa chamada de teorema do mínimo global, que enuncia que qualquer mínimo local encontrado é necessariamente o mínimo global. Isso acontece porque a convexidade assegura que, ao traçar uma reta de um ponto qualquer até a solução ideal, o caminho é sempre uma descida. Portanto, em um problema de programação convexa, se um algoritmo para de descer, é matematicamente garantido que se chegou no melhor resultado possível, e não apenas em um bom resultado local. (NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

Para fazer tal descrição recorre-se as equações do MSP em variáveis reais descritas anteriormente. As equações (3) e (4) podem ser simplificadas para:

$$Peq_m = P_{Lj} + \sum_{sLj \in \Omega Fj} (Peq_{sLj} + R_j * |I_j|^2) \quad (11)$$

$$Qeq_m = Q_{Lj} + \sum_{sLj \in \Omega Fj} (Qeq_{sLj} + X_j * |I_j|^2) \quad (12)$$

Além dessas, a equação biquadrada (7) que origina a equação de queda de tensão (9) também pode ser simplificada dividindo ambos os membros por  $V_m^2$  e posteriormente substituindo  $I_j^2$ , como se segue:

$$V_m^2 + [2(R_j P_{eq_m} + X_j Q_{eq_m}) - V_k^2] V_m^2 + (R_j^2 + X_j^2) \left[ \frac{P_{eq_m}^2 + Q_{eq_m}^2}{V_m^2} \right] \quad (13)$$

$$V_k^2 - 2(R_j P_{eq_m} + X_j Q_{eq_m}) - |Z_j|^2 |I_j|^2 - V_m^2 \quad (14)$$

Tendo (11), (12) e (14) neste formato pode-se realizar uma mudança de variável e então linearizar as equações de fluxo. Segue-se que:

Se

$$I_j^{qdr} = |I_j|^2, \quad \forall j \quad (15)$$

$$V_m^{qdr} = V_m^2, \quad \forall m \quad (16)$$

Então

$$P_{eq_m} = P_{Lj} + \sum_{sLj \in \Omega Fj} (P_{eq_{sLj}} + R_j * I_j^{qdr}) \quad (17)$$

$$Q_{eq_m} = Q_{Lj} + \sum_{sLj \in \Omega Fj} (Q_{eq_{sLj}} + X_j * I_j^{qdr}) \quad (18)$$

$$V_k^{qdr} - 2(R_j P_{eq_m} + X_j Q_{eq_m}) - |Z_j|^2 I_j^{qdr} - V_m^{qdr} = 0 \quad (19)$$

$$I_j^{qdr} V_m^{qdr} = P_{eq_m}^2 + Q_{eq_m}^2 \quad (20)$$

Como partiu-se das equações de fluxo que descrevem de forma exata o circuito, conclui-se que o conjunto de equações (17)-(20) também o fazem. Porém, apesar de mitigado, o problema ainda persiste, já que (20) é uma equação não linear e, portanto, torna o problema não convexo. Para resolver isto basta que se faça uma relaxação para uma desigualdade, como segue:

$$I_j^{qdr} V_m^{qdr} \geq P_{eq_m}^2 + Q_{eq_m}^2, \quad \forall j \quad (21)$$

A expressão em (21) é o que se chama de restrição cônica de segunda ordem, pois descreve um cone de segunda ordem rotacionado, que é convexo (BOYD; VANDENBERGHE, 2009). Sendo assim, o problema de fluxo de potência partido do MSP em variáveis reais, pode ser reescrito por restrições convexas.

No formato do problema em questão, uma solução exata é garantida se a função objetivo for estritamente crescente em relação a  $I_j^{qdr}$ ,  $\forall j$  e se não houver limite mínimo de inserção de potências (LOW, 2014). Felizmente, o problema de redução de perdas ativas é restrito pelas equações convexas já postas e cumpre todos os critérios de exatidão, o que o configura como um problema de programação cônica de segunda ordem (PCSO). Segue o seu modelo, no qual  $V_s^{esp}$  corresponde à tensão especificada na subestação:

Função objetivo (minimizar perdas totais):

$$\text{Min} \sum_{j \in \Omega_l} R_j I_j^{qdr}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} Peq_m - \sum_{sLj \in \Omega Fj} (Peq_{sLj} + R_j * I_j^{qdr}) &= P_{Lj}, \quad \forall m \\ Qeq_m - \sum_{sLj \in \Omega Fj} (Qeq_{sLj} + X_j * I_j^{qdr}) &= Q_{Lj}, \quad \forall m \\ V_k^{qdr} - 2(R_j Peq_m + X_j Qeq_m) - |Z_j|^2 I_j^{qdr} - V_m^{qdr} &= 0, \quad \forall j \\ I_j^{qdr} V_m^{qdr} - Peq_m^2 - Qeq_m^2 &\geq 0, \quad \forall j \\ V_s^{qdr} &= (V_s^{esp})^2 \\ I_j^{qdr} &\geq 0, \quad \forall j \\ V_m^{qdr} &\geq 0, \quad \forall m \end{aligned} \quad (22)$$

### 3.2 Multiplicadores de Lagrange e Análise de Sensibilidade

A determinação dos locais ótimos para a instalação de capacitores requer uma métrica que quantifique o impacto da injeção de potência reativa nas perdas totais do sistema. Em métodos de otimização clássicos, essa métrica é frequentemente obtida através da linearização das equações de fluxo de potência e análise da matriz Jacobiana invertida (WOOD; WOLLENBERG; SHEBLÉ, 2013). No entanto, este trabalho utiliza uma abordagem fundamentada na teoria da dualidade da otimização convexa, especificamente através dos Multiplicadores de Lagrange, cujos fundamentos teóricos e propriedades de otimalidade global são amplamente estabelecidos (BOYD; VANDENBERGHE, 2009).

O objetivo ao utilizar a formulação PCSO neste trabalho vai além de calcular o fluxo de potência, o que o método MSP já faz, o mais importante é extrair informações sobre a sensibilidade do sistema. Ao resolver o problema de otimização PCSO, obtêm-se o estado do sistema por meio das chamadas variáveis primais ( $P$ ,  $Q$ ,  $V^{qdr}$ ,  $I^{qdr}$ ), mas além destas obtêm-se também as chamadas variáveis duais ( $\lambda_Q$ ,  $\mu_i$ ), conhecidas como Multiplicadores de Lagrange (LOW, 2014; BAZARAA; SHERALI; SHETTY, 2006).

A teoria da dualidade diz que em problemas de otimização não linear, o Método dos Multiplicadores de Lagrange permite transformar um problema com restrições em um problema sem restrições, penalizando as violações, quando a função objetivo está estritamente sujeita a restrições de igualdade. Quando o problema também estiver sujeito a restrições de desigualdade, pode-se generalizar esta formulação, fazendo uso dos critérios de otimalidade de primeira ordem conhecidos como condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Conforme estabelecido na literatura, para um problema de minimização de uma função objetivo  $f(x)$ , sujeita a restrições de igualdade  $h_i(x) = 0$  e desigualdade  $g_j(x) \leq 0$ , define-se a expansão da função Lagrangiana  $\mathcal{L}$  como (BERTSEKAS, 1999; BAZARAA; SHERALI; SHETTY, 2006):

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_i \lambda_i h_i(x) + \sum_j \mu_j g_j(x) \quad (23)$$

Onde  $\lambda_i, \mu_i$  são os vetores de multiplicadores duais associados a cada restrição. As condições de otimalidade de KKT estabelecem que, no ponto ótimo  $x^*$ , quatro requisitos devem ser satisfeitos simultaneamente: estacionariedade, viabilidade primal, viabilidade dual e folga complementar (NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

Matematicamente:

**Estacionariedade:** o gradiente da Lagrangiana em relação às variáveis primais deve ser nulo.

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \sum_i \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_j \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0 \quad (24)$$

**Viabilidade Primal:** a solução deve respeitar as restrições físicas originais.

$$h_i(x^*) = 0 \quad e \quad g_j(x^*) \leq 0 \quad (25)$$

**Viabilidade Dual:** os multiplicadores relacionados às desigualdades devem ser não negativos.

$$\mu_j^* \geq 0 \quad (26)$$

**Folga Complementar:** se a restrição de desigualdade está ativa ( $g_j(x^*) = 0$ ) o multiplicador é positivo ( $\mu_j^* > 0$ ), se a restrição está folgada ( $g_j(x^*) < 0$ ) o multiplicador é nulo ( $\mu_j^* = 0$ ).

$$\mu_j^* g_j(x^*) = 0 \quad (27)$$

No contexto específico deste trabalho, a função objetivo  $f(x)$  representa as perdas totais de potência ativa do sistema de distribuição, as restrições  $h_i$  representam as equações de balanço de potência ativa e reativa em cada barra e  $g_j$  estabelece os limites operacionais de tensão, corrente e as restrições cônicas da relaxação convexa, conforme modelado na formulação PCSO apresentada anteriormente.

A propriedade mais valiosa dos multiplicadores de Lagrange é sua interpretação como a sensibilidade marginal da função objetivo em relação a uma restrição, isto é, o quanto a função objetivo deve variar para um ajuste incremental de uma restrição específica. Em sistemas de potência, uma aplicação comum desta propriedade é a sua interpretação como custo marginal nos problemas de despacho econômico, ou seja, o custo incremental de se atender a uma unidade adicional de carga em determinada barra (WOOD; WOLLENBERG; SHEBLÉ, 2013). No contexto do problema de alocação de capacitores neste trabalho, a interpretação é análoga, porém inversa, já que  $\lambda_{Q,k}$  indica o quanto as perdas totais do sistema diminuiriam se uma unidade infinitesimal de potência reativa fosse injetada na barra  $k$ . Esta sensibilidade é global para o problema convexo, diferentemente de sensibilidades baseadas na Jacobiana do Newton-Raphson, que são válidas apenas na vizinhança imediata do ponto de operação atual. Os multiplicadores do PCSO consideram o espaço de busca convexo, fornecendo uma direção de descida mais robusta para a função objetivo (FARIVAR; LOW, 2013)

Com base na fundamentação teórica exposta, o vetor de multiplicadores de Lagrange associado ao balanço de reativos,  $\lambda_Q$ , constitui um mapa de sensibilidade direto da rede (BERTSEKAS, 1999). A magnitude e o sinal de  $\lambda_{Q,k}$  fornecem o critério de decisão para a heurística de alocação, na medida em que um valor negativo indica que o aumento da injeção de reativos  $Q_c$  reduz o valor da função objetivo (perdas) e um grande valor absoluto está relacionado a um maior impacto de injeção naquela barra específica sobre a redução global de perdas (WOOD; WOLLENBERG; SHEBLÉ, 2013).

Portanto, a estratégia de alocação proposta neste trabalho consiste em ordenar as barras do sistema de acordo com seus multiplicadores  $\lambda_{Q,k}$ . A barra candidata  $k^*$  a receber o próximo banco de capacitores é aquela com o menor valor de  $\lambda_{Q,k}$ .

## 4 MÉTODO PROPOSTO DE ALOCAÇÃO DE CAPACITORES

A metodologia desenvolvida neste trabalho consiste em um algoritmo iterativo e construtivo para a alocação de bancos de capacitores. A estratégia central se baseia na utilização combinada de duas ferramentas matemáticas distintas: Programação Cônica de Segunda Ordem (PCSO) e Método da Soma de Potências (MSP). Enquanto os multiplicadores de Lagrange advindos do PCSO guiam a busca pelas barras ótimas para instalação dos capacitores, o MSP determina o estado real da rede (fluxo de carga exato) e o cumprimento da meta pré-estabelecida. Nesse caso, o fator de potência na subestação é utilizado como o critério de otimalidade da rede.

No que se refere aos capacitores e aos seus valores de potência reativa, a formulação com valores contínuos, que permitiria um dimensionamento ótimo, foi deliberadamente preterida por um conjunto discreto, compatível com as faixas de média tensão em que esses equipamentos são fabricados, visando maior aderência à realidade industrial.

Na modelagem matemática do problema os capacitores são representados como potência reativa constante, devido as necessidades de preservar as propriedades de convexidade e garantir a exatidão cônica. Entretanto, assumir que a tensão no capacitor é sempre 1 p.u. trata-se de uma simplificação matemática que introduz uma discrepância entre o modelo de otimização e a física real do sistema elétrico. Na realidade, a potência reativa injetada pelo capacitor varia proporcionalmente com o quadrado da tensão, valor este que sofre mudanças ao longo da rede. Essa divergência resulta em fluxos ligeiramente diferentes que no fim resultarão em um FP mais otimista do que ele realmente é. Nesse sentido, o algoritmo proposto integra o MSP dentro do laço de repetição para garantir que o FP monitorado seja o valor exato da rede, eliminando erros de aproximação da relaxação cônica. O procedimento é descrito no algoritmo 2:

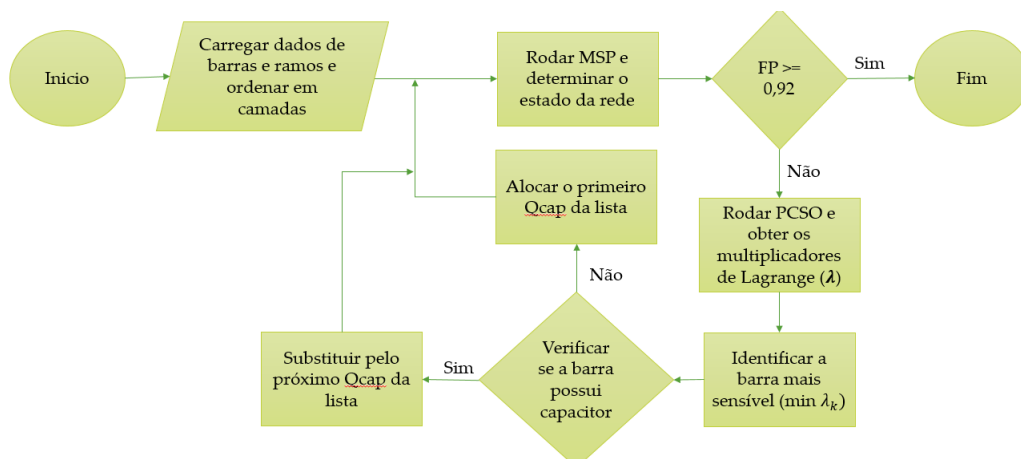
### Algoritmo 2: Método de Alocação Proposto

1. **Inicialização:** Lê-se os dados de linhas e de barras do sistema, assim como o conjunto de capacitores disponíveis. É escolhido o alvo do Fator de Potência (Ex:  $FP_{alvo} = 0,92$ ).

## 2. Laço Iterativo (Do-While: $FP_{MSP} < FP_{alvo}$ ):

- **Cálculo do Estado da Rede:** Executa-se o MSP e obtêm-se o Fator de Potência na subestação da rede ( $FP_{MSP}$ ).
- **Cálculo de Sensibilidade (PCSO):** Resolve-se o modelo PCSO com a configuração atual de capacitores. Extraem-se os multiplicadores de Lagrange.
- **Seleção da Barra:** Identifica-se a barra candidata com a maior sensibilidade.
- **Alocação Provisória:** Seleciona-se um banco de capacitores do conjunto discreto e adiciona-se seu valor como injeção de potência reativa na barra candidata.
- **Verificação:** Executa-se o MSP considerando o novo capacitor e calcula-se o novo  $FP_{MSP}$  com base nos seus resultados exatos.
- **Atualização do Modelo:**
  - Se  $FP_{MSP} \geq FP_{alvo}$ : O critério foi atingido. A alocação é confirmada e o algoritmo encerra.
  - Se  $FP_{MSP} < FP_{alvo}$ : O capacitor é confirmado na rede. O modelo SOCP é atualizado para a próxima iteração.

A sequência lógica apresentada, garante que o algoritmo só pare quando a rede fisicamente atenda à norma, pois o critério de parada é verificado por um método de fluxo de carga exato. O mesmo procedimento pode ser observado através do fluxograma abaixo:



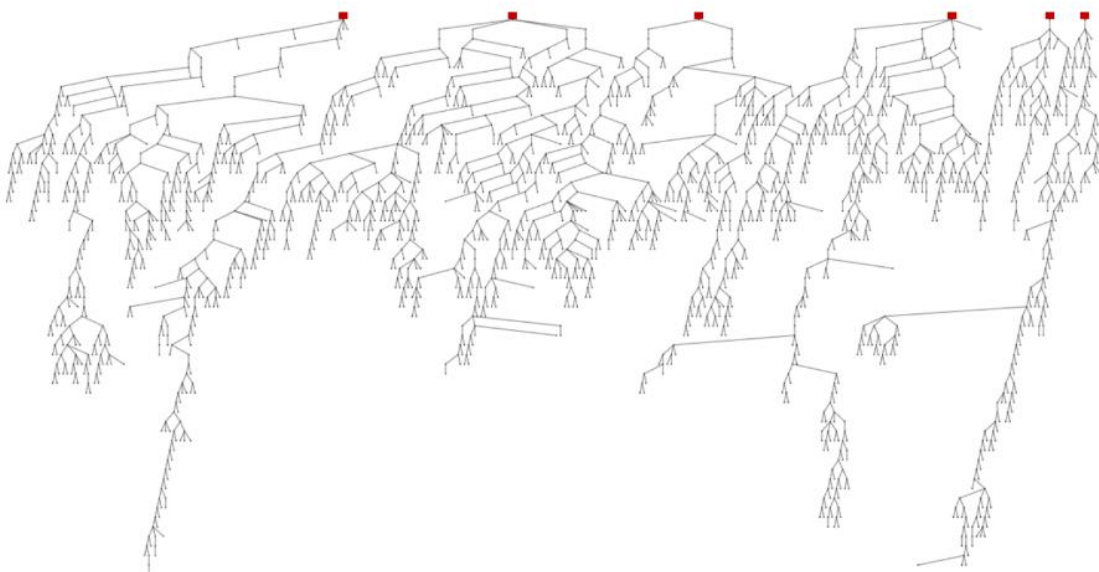
## 5 RESULTADOS

Para validar a metodologia proposta, foram realizados testes computacionais utilizando dados de um sistema de distribuição real. O objetivo desta etapa é avaliar não apenas a eficácia do algoritmo na correção do fator de potência, a redução das perdas e seu desempenho computacional.

### 5.1 Caracterização do Sistema Teste

O sistema utilizado neste trabalho corresponde a uma rede de distribuição real pertencente a uma companhia petrolífera da Colômbia. Os seus dados foram descritos a partir do trabalho de HOME-ORTIZ *et al.* (2018) e obtidos a partir de um banco de dados do departamento de engenharia elétrica da Universidade Estadual Paulista – UNESP (UNESP). O sistema opera em uma tensão nominal de 14,4 kV e frequência de 60 Hz, com uma carga total instalada no cenário base de aproximadamente 59,579 MW de potência ativa e 28,855 MVar de potência reativa. Ele foi selecionado devido à sua dimensão elevada, tornando-o ideal para testar a escalabilidade do método proposto. A Figura 6 apresenta o diagrama topológico do sistema, gerado através do MATLAB®, evidenciando a conectividade entre os nós.

**Figura 7:** Diagrama unifilar do sistema teste (subestações em vermelho).



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

No sistema em questão, foi necessário realizar um ajuste em relação as unidades de geração distribuída mencionadas na literatura original HOME-ORTIZ *et al.* (2018), que neste trabalho foram desconsideradas, tratando-se a rede como puramente passiva. Esse ajuste foi realizado porque a inclusão de geração distribuída introduziria fluxos de potência bidirecionais que aumentaria a complexidade do problema ao interferir em sua radialidade. Sendo assim, é uma opção que preferiu-se desconsiderar por agora, para ser explorada em trabalhos futuros. Em relação a adaptação, ela fez com que o sistema modelado passasse a comportar 2.313 nós e 2.307 ramos, mantendo uma topologia estritamente radial e permitindo a execução simultânea do fluxo de carga para toda a rede industrial.

Durante a análise preliminar dos dados do sistema original (caso base do artigo de referência), identificou-se uma inconsistência na definição dos ramos abertos, que resultava na formação indesejada de malhas e impedia a utilização de métodos para redes radiais. Para garantir a radialidade da rede, adotou-se como configuração inicial a topologia descrita no caso de estudo B1 do artigo de referência HOME-ORTIZ *et al.* (2018), cujos ramos normalmente abertos estão devidamente destacados na Tabela 1.

**Tabela 2:** Ramos normalmente abertos (configuração baseada no caso B1)

1301-1279	192-961	393-1046	658-802	505-2297	650-741	940-2297
149-146	646-816	1308-644	110-122	225-346	366-272	746-1853
799-800	919-853	989-1052	962-966	1079-1136	1261-2297	1284-1185
1299-586	1300-349	1303-396	186-71	655-572	725-606	1307-615

**Fonte:** Adaptado de HOME-ORTIZ *et al.*, 2018.

## 5.2 Ambiente e Parâmetros da Simulação

Os algoritmos foram implementados na linguagem MATLAB e executados através da plataforma MATLAB ® Online, utilizando a infraestrutura de nuvem da *MathWorks*. Além disso, para resolver o problema de PCSO fez-se uso da função interna do *software* chamada de *coneprog*, usada para resolver problemas de programação cônica.

No processo de alocação, consideraram-se bancos de capacitores discretos com valores padronizados pela indústria que operam em uma faixa de tensão de 7,620 kV a 14,400 kV com as seguintes potências disponíveis (MAMEDE FILHO, 2013):

**Tabela 3:** Potências reativas nominais típicas de células capacitivas de média tensão (7,620 kV - 14,400 kV)

<b>kVAr</b>	25	50	100	150	200	400
-------------	----	----	-----	-----	-----	-----

**Fonte:** Adaptado de MAMEDE FILHO, 2013.

O critério de sucesso para a alocação foi definido como a obtenção de um FP indutivo mínimo de 0,92 medido na pior subestação. Valor este que está em conformidade com os limites regulatórios típicos (ANEEL, 2021; MAMEDE FILHO, 2017).

### 5.3 Análise dos Resultados

Inicialmente executou-se a simulação do fluxo de potência (MSP) na topologia B1, sem a inserção de capacitores, para averiguar o estado base do sistema. Verificaram-se os FP nas 6 subestações da rede e os valores estão apresentados na Tabela 3 a seguir:

**Tabela 4:** Fator de potência (FP) base nas subestações do sistema sob estudo com base no estado da rede fornecido pelo MSP

<b>FP (original)</b>	0,9000	0,9000	0,9000	0,9000	0,9000	0,8999
--------------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

**Fonte:** Desenvolvido pelo autor.

Este cenário base evidencia a ineficiência energética típica de sistemas industriais extensos não compensados, servindo de referência para o cálculo dos ganhos obtidos.

O algoritmo proposto foi executado com um  $FP_{alvo} = 0,92$ , partindo do cenário base da topologia B1. O método convergiu com precisão, alocando bancos de capacitores até que o  $FP_{MSP}$  atingisse 0,92 na pior subestação. A localização dos nós onde esses capacitores foram alocados na configuração ótima, assim como seus valores de potência nominal estão apresentados na Tabela 4 a seguir. Além disso, para melhor visualização, uma comparação entre os valores de FP antes e após a alocação estão descritos na Tabela 5.

**Tabela 5:** Localização dos capacitores e seus respectivos valores de potência em kVAr na alocação ótima

Nó	Qcap	Nó	Qcap	Nó	Qcap	Nó	Qcap	Nó	Qcap
132	200	1381	50	1523	50	1782	100	2102	25
144	50	1385	25	1524	50	1795	25	2181	50
167	25	1408	25	1525	25	1797	25	2183	25
273	50	1424	25	1528	50	1798	25	2228	25
284	25	1444	50	1532	25	1799	25	2230	50
298	25	1446	25	1533	25	1828	50	2254	50
301	50	1447	25	1539	50	1869	25	2260	25
304	25	1450	25	1540	50	1872	50	2265	50
306	50	1451	25	1549	25	1874	50	2270	50
319	50	1457	50	1550	50	1880	50	2280	25
649	100	1458	25	1551	50	1920	50	2282	25
760	50	1459	25	1552	25	1921	25	2290	25
807	25	1462	25	1583	50	1923	50	2292	100
1254	25	1498	400	1591	50	1924	50	2294	25
1258	25	1503	25	1593	25	2064	25	2295	25
1283	25	1505	25	1730	50	2088	25		

**Fonte:** Desenvolvido pelo autor.

**Tabela 6:** Fator de potência (FP) nas subestações do sistema sob estudo

<b>FP (original)</b>	<i>0,9000</i>	<i>0,9000</i>	<i>0,9000</i>	<i>0,9000</i>	<i>0,9000</i>	<i>0,8999</i>
<b>FP (alocação)</b>	<i>0,9208</i>	<i>0,9208</i>	<i>0,9201</i>	<i>0,9213</i>	<i>0,9202</i>	<i>0,9207</i>

**Fonte:** Desenvolvido pelo autor.

Como pode ser observado na Tabela 4, foram alocados um total de 79 capacitores ao longo dos 2.313 nós totais do sistema. Essa quantidade de capacitores alocados foi decidida pelo próprio algoritmo, tendo como único objetivo atingir um FP = 0,92.

A Tabela 5 demonstra que o algoritmo fez as alocações de forma correta, já que o fator de potência de todas as subestações foram elevados acima dos níveis normativos brasileiros. As perdas por potência ativa no cenário original foram

calculadas como sendo 7,700 kW e caíram para 7,200 kW após a alocação, resultando em uma diminuição de cerca de 6,49%. Nominalmente, pode-se dizer que é um valor de redução de perdas baixo para um sistema de distribuição, mas ao levar em conta que o sistema em questão já está compensando para operar legalmente em na Colômbia, seu país de origem, conclui-se que o algoritmo funciona mesmo em ambientes mais exigentes, onde necessitam de ajustes mais finos.

Ressalta-se o tempo de execução de 1.945,8 segundos ou 32 minutos e 25 segundos, gasto majoritariamente na etapa de resolver o PCSO, onde os cálculos vão ficando mais lentos à medida que O FP vai ficando maior. Levando em conta o porte do sistema em questão, o tempo de execução pode ser considerado aceitável para o contexto de problemas de planejamento de sistemas de distribuição de energia.

Em suma, esses resultados demonstram a assertividade na estratégia de convergência e no tratamento da modelagem da carga. A aplicação do método no sistema da companhia petrolífera e a obtenção de resultados aceitáveis validou a estratégia de usar a análise de sensibilidade via multiplicadores de Lagrange, já que o algoritmo foi capaz de identificar cirurgicamente os locais ótimos para instalação. O modelo proposto é robusto e exato, pois ao recalculando o fluxo via MSP a cada inserção, ajusta a trajetória da alocação de acordo com a física real do sistema.

## 6 CONCLUSÕES

O presente trabalho abordou o desafio da alocação ótima de capacitores em sistemas de distribuição de energia elétrica de grande porte, propondo uma metodologia híbrida que combina análise de sensibilidade a partir de um modelo exato de fluxo de potência ótimo convexo com a precisão dos métodos de fluxo de potência clássicos. A motivação central residiu na necessidade de ferramentas computacionais capazes de lidar com a complexidade combinatória de redes reais, para os quais métodos exatos tradicionais (PNLIM) frequentemente falham devido ao elevado custo computacional.

A estratégia desenvolvida fundamentou-se na utilização da Programação Cônica de Segunda Ordem (PCSO) para a obtenção de índices de sensibilidade global (Multiplicadores de Lagrange). Diferentemente de heurísticas baseadas em sensibilidades locais linearizadas, essa abordagem permitiu identificar as barras mais promissoras para a compensação reativa do sistema.

Ressalta-se que a necessidade de modelar os capacitores como potência reativa constante para manter a exatidão do modelo cônico gera discrepâncias em relação ao comportamento físico real (impedância constante dependente de  $V^2$ ). Por este motivo, o resultado dos fluxos de um PCSO tende a ser otimista quanto à injeção de reativos em cenários de tensão abaixo da nominal. Para ajustar essas imprecisões, o algoritmo proposto fez uma integração do MSP dentro do laço, que incorreu em um método preciso que garante o cumprimento estrito das normas (fator de potência de 0,92), pois valida fisicamente o sistema a cada passo da alocação.

A aplicação da metodologia foi realizada em um sistema de distribuição real de uma companhia petrolífera colombiana com mais 2.300 nós, o que demonstrou a escalabilidade da proposta. Os resultados obtidos comprovaram que é possível atingir as metas regulatórias de fator de potência e obter redução significativa de perdas técnicas utilizando algoritmos executados em nuvem (MATLAB® Online).

É importante salientar que este trabalho se configurou em caráter de prova de modelo conceitual, visando demonstrar a viabilidade técnica e a funcionalidade do algoritmo proposto. Embora a eficácia da análise de sensibilidade via PCSO tenha sido comprovada, o método encontra-se em um estágio de validação fundamental. Para desenvolvimentos futuros, pretende-se integrar técnicas de otimização

complementares à estrutura atual, visando refinar a etapa de busca e seleção de capacitores tais como: a realização de estudos comparativos contra métodos baseados em metaheurísticas e programação matemática; a incorporação dos limites físicos de tensão e corrente da rede no modelo; a substituição da função *coneprog* por *solvers* que permitam inicialização, possibilitando utilizar a solução prévia do MSP para acelerar a resolução do PCSO, cujo objetivo é apenas a obtenção das variáveis duais, evitando assim o custo computacional de reiniciar a otimização a cada passo. Dessa forma, espera-se que o algoritmo evolua para se tornar plenamente competitivo em termos de precisão e performance com os métodos clássicos e comerciais já utilizados para a alocação de capacitores em sistemas de distribuição de grande porte.

Em suma, este trabalho pretende contribuir para a área de sistemas de potência ao demonstrar que a análise de sensibilidade via relaxação convexa é um caminho tecnicamente viável para modernizar o planejamento de redes de distribuição reais, unindo teoria matemática avançada com a prática da engenharia.

## 7 REFERÊNCIAS

**AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA (ANEEL).** Procedimentos de Distribuição de Energia Elétrica no Sistema Elétrico Nacional – PRODIST: Módulo 1 – Introdução: ANEEL, 2018.

**AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA (ANEEL).** Procedimentos de Distribuição de Energia Elétrica no Sistema Elétrico Nacional – PRODIST: Módulo 8 – Qualidade da Energia Elétrica. Brasília: ANEEL, 2021.

**AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA (ANEEL).** Resolução Normativa nº 1.000, de 7 de dezembro de 2021. Estabelece as Regras de Prestação do Serviço Público de Distribuição de Energia Elétrica. Brasília, DF: Diário Oficial da União, 20 dez. 2021.

AGUILA, G. G. A.; GONZÁLEZ, D.; ORTIZ, L. **Optimum Location and Sizing of Capacitor Banks Using VOLT VAR Compensation in Micro-Grids.** IEEE Latin America Transactions, v. 18, n. 3, p. 1599-1607, Set. 2021.  
Disponível em: <https://www.reveng.com.br/artigo>.

ALMABSOUT, E. A.; EL-SEHIEMY, R. A.; UÇ AN, O. N.; BAYAT, O. **A Hybrid Local Search-Genetic Algorithm for Simultaneous Placement of DG Units and Shunt Capacitors in Radial Distribution Systems.** IEEE Access, Istanbul, Mar. 2020.  
Disponível em: <https://ieeexplore-ieee-org.ez14.periodicos.capes.gov.br/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=9039670>.

BAZARAA, S. M.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. **Nonlinear Programming - Theory and Algorithms.** 3ª ed. Hoboken(Nova Jérsei): John Wiley & Sons, 2006.

BERTSEKAS, D. P. **Nonlinear Programming.** 2. ed. Belmont: Athena Scientific, 1999.

BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex Optimization**. 7<sup>a</sup> ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

BROWN, R. E. **ELECTRIC POWER DISTRIBUTION RELIABILITY**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2009.

BROADWATER, R. P.; CHANDRASEKARAN, A.; HUDDLESTON, C. T.; KHAN, A. H. **Power Flow Analysis of Unbalanced Multiphase Radial Distribution Systems**. Electric Power Systems Research, 14, p. 23 – 33, 1988

CESPEDES, R. G. **NEW METHOD FOR THE ANALYSIS OF DISTRIBUTION NETWORKS**. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 5, No. 1, 1990.

CETKOVIC, D.; KOMEN, V. **Optimal Distributed Generation and Capacitor Bank Allocation and Sizing at Two Voltage Leves**. IEEE Systems Journal, v. 17, n. 4, p. 5831-5841, Dez. 2023.

Disponível em: <https://ieeexplore-ieee-org.ez14.periodicos.capes.gov.br/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=10149140>.

FARIVAR, M.; LOW, S. H. **Branch flow model: Relaxations and convexification**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 28, n. 3, p. 2554-2564, 2013.

GALLEGO, L. A.; LÓPEZ-LEZAMA, J. M.; CARMONA, O. G.; **A Mixed-Integer Linear Programming Model for Simultaneous Optimal Reconfiguration and Optimal Placement of Capacitor Banks in Distribution Networks**. IEEE Access, Londrina, Mai. 2022.

Disponível em: <https://ieeexplore-ieee-org.ez14.periodicos.capes.gov.br/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=9776582>.

GÖNEN, T. **ELECTRIC POWER DISTRIBUTION ENGINEERING**. 3. ed. Boca Raton: CRC Press, 2014.

HOME-ORTIZ, J. M.; VARGAS, R.; MACEDO, L. H.; ROMERO, R. **Joint reconfiguration of feeders and allocation of capacitor banks in radial**

**distribution systems considering voltage-dependent models.** Electrical Power and Energy Systems, São Paulo, Dec. 2018.

Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2018.11.035>.

KAGAN, N.; OLIVEIRA, C. C. B.; ROBBA, E. J. **INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA.** São Paulo: Blucher, 2005.

LOW, S. H. **Convex Relaxation of Optimal Power Flow - Part I: Formulation and Equivalence.** IEEE Transactions on Control of Network Systems, 1(1), pp. 15-27, 2014.

LOW, S. H. **Convex Relaxation of Optimal Power Flow - Part II: Exactness.** IEEE Transactions on Control of Network Systems, 1(2), pp. 177-189, 2014

MAMEDE FILHO, J. **INSTALAÇÕES ELÉTRICAS INDUSTRIAIS.** 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

MAMEDE FILHO, J. **MANUAL DE EQUIPAMENTOS ELÉTRICOS.** 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

MAHDAVI, M.; AWAAFO, A.; DJOKIC, S. Z.; JURADO, F. **An Innovative Power Loss and Cost Minimization Framework for Distribution Networks With Uncertain Variable Loads by Coordinating Reconfiguration, Capacitor Installation and Renewable Generators Placement.** IEEE Transactions on Industry Applications, v. 60, n. 5, p. 7500-7510, Set. 2024.

Disponível em: <https://ieeexplore-ieee-org.ez14.periodicos.capes.gov.br/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=10536597>.

MARTINS, A. S. C.; ARAUJO, L. R.; PENIDO, D. R. R. **Sensibility Analysis with Genetic Algorithm to Allocate Distributed Generation and Capacitor Banks in Unbalanced Distribution Systems.** Eletric Power Systems Research, Minas Gerais, Mar. 2022.

Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2022.107962>.

MARTINS, A. S. C.; COSTA, F. R. M. S.; ARAUJO, L. R.; PENIDO, D. R. R. **Capacitor Allocation in Unbalanced Systems using a Three-Level Optimization Framework.**

IEEE Latin America Transactions, Minas Gerais, v. 15, n. 2, p. 45-60, Mar. 2023.

Disponível em: <https://ieeexplore-ieee-org.ez14.periodicos.capes.gov.br/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=9468614>.

MATHWORKS. MATLAB: version R2024a. Natick, MA: The MathWorks Inc., 2024.

Disponível em: <https://www.mathworks.com>. Acesso em: 23 dez. 2025.

MONTICELLI, A. J. **Fluxo de carga em redes de energia elétrica.** São Paulo: Edgard Blicher, 1983.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical Optimization.** Nova Iorque: Springer, 1999.

PARVANEH, M. H.; MORADI, M. H.; AZIMI, S.M. **The advantages of capacitor bank placement and demand response program execution on the optimal operation of isolated microgrids.** Electric Power Systems Research, Jul. 2023.

Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2023.109345>

RAJESH, P.; SHAJIN, F. H. **Optimal allocation of EV charging spots and capacitors in distribution network improving voltage and power loss by Quantum-Behaved and Gaussian Mutational Dragonfly Algorithm (QGDA).** Electric Power Systems Research, India, Jan. 2021.

Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2021.107049>.

REZAPOUR, H.; FATHNIA, F.; FIUZY, M.; FALAGHI, H.; LOPES, A. M. **Sensitivity Enhancing power quality and loss optimization in distorted distribution networks utilizing capacitors and active power filters: A simultaneous approach.**

Electric Power Systems Research, Tehran, Oct. 2023.

Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2023.109590>.

SHIRMOHAMMADI, D.; HONG, H. W.; SEMLYEN, A.; LUO, G. X. **A compensation-based power flow method for weakly meshed distribution and transmission networks.** IEEE Transactions on Power Systems, v. 3, n. 2, p. 753-762, maio 1988.

Disponível em: <https://doi.org/10.1109/59.192932>

SHORT, T. A. **ELECTRIC POWER DISTRIBUTION HANDBOOK**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2014.

TRIPATHY, S. C.; PRASAD, G. D.; MALIK, O. P.; HOPE, G. S. **Load-Flow Solutions for Ill-Conditioned Power Systems by a Newton-Like Method**. IEEE Power Engineering Review, vol. PER-2, no. 10, pp. 25-26, 1982.

Disponível em: [10.1109/MPER.1982.5519878](https://doi.org/10.1109/MPER.1982.5519878).

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA (UNESP). 2313 Buses Distribution System for Reconfiguration and Capacitor Allocation (AMPL).

Disponível em: <https://www.feis.unesp.br/#!/departamentos/engenharia-eletrica/pesquisas-e-projetos/lapsee/downloads/materiais-de-cursos1193/>

WOOD, A. J.; WOLLENBERG, B. F.; SHEBLÉ, G. B. **Power Generation, Operation, and Control**. 3. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2013.