



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO – UFMA
CENTRO DE CIÊNCIAS DE SÃO BERNARDO – CCSB
CIÊNCIAS NATURAIS/QUÍMICA

DÁLISON DA SILVA CARVALHO

**CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS NO SISTEMA GPS:
APLICAÇÕES DA RELATIVIDADE GERAL NA MEDIÇÃO DO
TEMPO E POSICIONAMENTO GLOBAL**

SÃO BERNARDO – MA

2026

DÁLISON DA SILVA CARVALHO

**CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS NO SISTEMA GPS:
APLICAÇÕES DA RELATIVIDADE GERAL NA MEDIÇÃO DO
TEMPO E POSICIONAMENTO GLOBAL**

Trabalho de Conclusão do Curso, como requisito obrigatório para a obtenção do título de licenciado em Ciências Naturais/Química pela da Universidade Federal do Maranhão (UFMA), Campus de São Bernardo, MA.

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Josberg Silva Rodrigues

São Bernardo – MA

2026

CARVALHO, Dálison da Silva

Correções relativísticas no sistema GPS: aplicações da relatividade geral na medição do tempo e posicionamento global/ Dálison da Silva Carvalho. – São Bernardo – MA, 2026-

42p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Josberg Silva Rodrigues

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Ciências Naturais/Química) – Universidade Federal do Maranhão, 2026.

1. Sistema de Posicionamento Global. 2. Relatividade Especial. 3. Relatividade Geral. 4. Dilatação Temporal. 5. Navegação por Satélites. I. Orientador. II. Universidade Federal do Maranhão. III. Centro de Ciências de São Bernardo. IV. Correções Relativísticas no Sistema GPS: Aplicações da Relatividade Geral na Medição do Tempo e Posicionamento Global.

DÁLISON DA SILVA CARVALHO

**CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS NO SISTEMA GPS:
APLICAÇÕES DA RELATIVIDADE GERAL NA MEDIÇÃO DO
TEMPO E POSICIONAMENTO GLOBAL**

Trabalho de Conclusão do Curso, como requisito obrigatório para a obtenção do título de licenciado em Ciências Naturais/Química pela da Universidade Federal do Maranhão (UFMA), Campus de São Bernardo, MA.

Trabalho aprovado. São Bernardo – MA, 15 de julho de 2026.



Documento assinado digitalmente

JOSBERG SILVA RODRIGUES

Data: 17/07/2026 22:11:27-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Josberg Silva Rodrigues

CCNQ/ Universidade Federal do Maranhão - UFMA



Documento assinado digitalmente

MARCELO OLIVEIRA RIBEIRO

Data: 18/07/2026 13:36:03-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Marcelo Oliveira Ribeiro

CCNQ/ Universidade Federal do Maranhão - UFMA



Documento assinado digitalmente

THIAGO TARGINO GURGEL

Data: 18/07/2026 12:52:23-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Thiago Targino Gurgel

CCNQ/ Universidade Federal do Maranhão - UFMA

São Bernardo – MA

2026

*Aos meus pais, pelo amor, incentivo e
apoio incondicional ao longo de toda a
minha caminhada.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me conceder saúde, força e perseverança para superar os desafios encontrados ao longo desta caminhada. Ao meu orientador Dr. Josberg Silva Rodrigues, expresso minha sincera gratidão pela orientação, disponibilidade, paciência e pelos valiosos ensinamentos compartilhados durante o desenvolvimento deste trabalho. Sua dedicação e confiança foram fundamentais para a concretização desta pesquisa. Aos meus pais e aos meus avós, agradeço por todo o amor, apoio, incentivo e pelos valores que me transmitiram ao longo da vida. Esta conquista também é de vocês, que sempre acreditaram no meu potencial e estiveram ao meu lado em todos os momentos. À minha companheira, Thais Pontes Aguiar, agradeço pelo carinho, pela compreensão, pela paciência e pelo incentivo constante. Obrigado por estar ao meu lado, especialmente nos momentos mais desafiadores, compartilhando comigo as dificuldades e as conquistas desta etapa. À minha amiga Kevilly Vieira Moraes, meu muito obrigado pela amizade, pelo companheirismo e pelo apoio durante essa jornada acadêmica. Sua presença tornou esse percurso mais leve e significativo. Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho e para a minha formação acadêmica e pessoal.

“Ainda há muito pelo que vale a pena lutar.”
(J. R. R. Tolkien)

RESUMO

O Sistema de Posicionamento Global (GPS) é amplamente utilizado em aplicações civis, militares e científicas, e sua precisão depende fundamentalmente da medição precisa de intervalos de tempo realizados por relógios atômicos de altíssima estabilidade embarcados nos satélites da constelação. Contudo, esses relógios estão sujeitos a efeitos relativísticos decorrentes tanto da alta velocidade orbital dos satélites quanto da menor intensidade do campo gravitacional na altitude em que se encontram. O presente trabalho teve como objetivo investigar, por meio de uma abordagem teórica e quantitativa, a influência das previsões da Relatividade Especial e da Relatividade Geral sobre os relógios atômicos do sistema GPS. Inicialmente, aplicou-se a Lei da Gravitação Universal de Newton para determinar a velocidade orbital média dos satélites, obtendo-se aproximadamente 3,87 km/s. Em seguida, empregaram-se as expressões da Relatividade Especial e da Relatividade Geral para calcular, respectivamente, os efeitos da dilatação temporal cinemática e gravitacional. Os resultados indicaram um atraso de $7,08 \mu\text{s}/\text{dia}$ devido à Relatividade Especial e um adiantamento de $45,7 \mu\text{s}/\text{dia}$ devido à Relatividade Geral, resultando em um efeito líquido de $+38,6 \mu\text{s}/\text{dia}$. Esse adiantamento, se não corrigido, produziria erros de posicionamento da ordem de 11,6 km por dia. Os valores obtidos apresentaram excelente concordância com os resultados reportados na literatura especializada, demonstrando que as correções relativísticas são indispensáveis para o funcionamento do GPS. O trabalho evidencia, assim, que a Relatividade possui aplicação prática direta em tecnologias cotidianas, constituindo um exemplo didático relevante para o ensino de Física Moderna.

Palavras-chave: GPS. Relatividade Especial. Relatividade Geral. Dilatação Temporal. Navegação por Satélites.

ABSTRACT

The Global Positioning System (GPS) is widely used in civil, military, and scientific applications, and its accuracy fundamentally depends on precise time interval measurements performed by highly stable atomic clocks onboard the constellation satellites. However, these clocks are subject to relativistic effects arising both from the high orbital speed of the satellites and from the lower intensity of the gravitational field at their altitude. This work aimed to investigate, through a theoretical and quantitative approach, the influence of the predictions of Special Relativity and General Relativity on the GPS atomic clocks. Initially, Newton's Law of Universal Gravitation was applied to determine the average orbital speed of the satellites, obtaining approximately 3.87 km/s. Subsequently, the expressions of Special Relativity and General Relativity were employed to calculate the kinematic and gravitational time dilation effects, respectively. The results indicated a delay of $7.08 \mu\text{s/day}$ due to Special Relativity and an advance of $45.7 \mu\text{s/day}$ due to General Relativity, resulting in a net effect of $+38.6 \mu\text{s/day}$. This advance, if uncorrected, would produce positioning errors on the order of 11.6 km per day. The values obtained showed excellent agreement with results reported in the specialized literature, demonstrating that relativistic corrections are indispensable for GPS operation. The work thus highlights that Relativity has direct practical application in everyday technologies, constituting a relevant didactic example for teaching Modern Physics.

Keywords: GPS. Special Relativity. General Relativity. Time Dilation. Satellite Navigation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – Esquema ilustrativo do princípio da trilateração. A posição do receptor (ponto P) é determinada pela interseção de três circunferências, cujos centros representam satélites (ou pontos de acesso) e cujos raios correspondem às distâncias medidas entre cada satélite e o receptor. No sistema GPS, o problema é tridimensional, sendo representado pela interseção de esferas. Na prática, utiliza-se um quarto satélite para corrigir o erro do relógio do receptor e determinar de forma única sua posição no espaço-tempo. 15
- Figura 2 – Representação esquemática da constelação de satélites GPS. O sistema é composto por pelo menos 24 satélites distribuídos em seis planos orbitais, com quatro satélites em cada órbita. 16
- Figura 3 – Esquema de um corpo em movimento circular uniforme. A força centrípeta $\vec{F}_c$ aponta radialmente para o centro da trajetória, enquanto a velocidade $\vec{v}$ é tangencial à circunferência. 19
- Figura 4 – Representação da curvatura do espaço-tempo produzida pela presença da Terra. A Lua orbita a Terra seguindo uma geodésica nesse espaço-tempo curvo, ilustrando o conceito de que a gravidade é uma manifestação geométrica. 25
- Figura 5 – Representação do experimento mental do elevador de Einstein em queda livre. Durante a queda, um observador no interior do elevador experimenta um estado aparente de ausência de peso, pois tanto ele quanto os objetos ao seu redor aceleram igualmente sob a ação da gravidade. Localmente, esse cenário é indistinguível da ausência de campo gravitacional, ilustrando o Princípio da Equivalência, segundo o qual os efeitos de um campo gravitacional uniforme podem ser eliminados em um referencial em queda livre. 25

Figura 6 – Representação esquemática da dilatação temporal gravitacional prevista pela Relatividade Geral. Um relógio localizado em maior altitude, onde o potencial gravitacional é mais elevado, transcorre mais rapidamente do que um relógio situado na superfície terrestre. Esse efeito é uma das correções relativísticas aplicadas ao sistema GPS. . 27

LISTA DE SÍMBOLOS

G	Constante gravitacional universal ($6,674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$)
M	Massa da Terra ($5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$)
m	Massa do satélite
R	Distância do centro da Terra ao satélite
R_T	Raio médio da Terra ($6,37 \times 10^6 \text{ m}$)
h	Altitude orbital dos satélites GPS ($\approx 20.200 \text{ km}$)
V	Velocidade orbital do satélite
v_{sat}	Velocidade orbital do satélite GPS ($\approx 3,87 \text{ km/s}$)
v_{sup}	Velocidade linear da superfície terrestre no equador (465 m/s)
c	Velocidade da luz no vácuo ($3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$)
f	Frequência do relógio em movimento
f_0	Frequência própria do relógio (em repouso)
f_{sat}	Frequência do relógio embarcado no satélite
f_{sup}	Frequência do relógio na superfície terrestre
Δf	Variação da frequência
t	Tempo
τ	Tempo próprio (medido pelo relógio)
Δt	Diferença temporal acumulada
r	Distância radial ao centro da Terra (coordenada esférica)

θ	Latitude (coordenada esférica)
ϕ	Longitude (coordenada esférica)
$\hat{r}$	Versor radial
$\vec{F}_g$	Força gravitacional
$\vec{F}_c$	Força centrípeta
ds^2	Elemento de linha do espaço-tempo
$d\tau$	Intervalo de tempo próprio
μ	Micro (10^{-6})
μs	Microsegundo (10^{-6} s)
km	Quilômetro (10^3 m)
m	Metro
s	Segundo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
2.1	Gravitação Newtoniana	18
2.1.1	Valores Utilizados	20
2.1.2	Cálculo da Velocidade	20
2.2	Relatividade Especial (Restrita)	20
2.2.1	Valores Utilizados	21
2.2.2	Diferença Temporal Acumulada	22
2.3	Relógios Atômicos	22
2.4	Relatividade Geral	24
2.4.1	Princípio de Equivalência	24
2.4.2	Dilatação Temporal Gravitacional	26
2.4.3	Métrica de Schwarzschild	26
2.4.4	Aproximação para Campo Fraco	28
2.4.5	Cálculo da Dilatação Temporal Gravitacional para o GPS	29
2.5	Efeito Líquido (Correção Total)	31
3	METODOLOGIA	32
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	34
4.1	Velocidade Orbital dos Satélites GPS	34
4.2	Efeito da Relatividade Especial	34
4.3	Efeito da Relatividade Geral	35
4.4	Correção Relativística Total	36
4.5	Impacto das Correções Relativísticas no Funcionamento do GPS	36
4.6	Discussão dos Resultados	37
5	CONCLUSÃO	38
	REFERÊNCIAS	40

1 INTRODUÇÃO

O Sistema de Posicionamento Global (*Global Positioning System* – GPS) é, atualmente, uma das tecnologias mais amplamente utilizadas no cotidiano da sociedade moderna¹. Presente em smartphones, veículos, aeronaves, embarcações e em inúmeras aplicações científicas e militares, o sistema permite a determinação da posição de um receptor na superfície terrestre com precisão da ordem de metros², a partir da trilateração de sinais emitidos por uma constelação de satélites artificiais que orbitam a Terra (Kaplan; Hegarty, 2006).

O funcionamento do GPS depende fundamentalmente da medição precisa de intervalos de tempo. Cada satélite da constelação transporta um relógio atômico de altíssima estabilidade, e a posição do receptor é calculada com base no tempo que o sinal eletromagnético leva para percorrer a distância entre o satélite e o usuário. Como esse sinal se propaga à velocidade da luz, um erro de apenas alguns nanossegundos na medição do tempo já é suficiente para gerar um erro de posicionamento da ordem de metros³. Essa sensibilidade extrema torna a exatidão dos relógios embarcados um fator crítico para o funcionamento do sistema.

Ocorre que os relógios atômicos dos satélites GPS não estão sujeitos às mesmas condições físicas dos relógios situados na superfície da Terra. Por um lado, os satélites deslocam-se em alta velocidade orbital em relação a um observador terrestre, o que, segundo a Teoria da Relatividade Especial de Einstein, provoca uma dilatação temporal que faz com que esses relógios atrasem em relação aos relógios terrestres. Por outro lado, os satélites encontram-se em uma região onde o campo gravitacional terrestre é significativamente mais fraco do que na superfície, o que, de acordo com a Teoria

¹ Originalmente desenvolvido pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos para fins militares, o GPS foi disponibilizado para uso civil a partir da década de 1980. Atualmente, a constelação é composta por aproximadamente 31 satélites em órbita ativa (GPS.gov, 2023).

² Com técnicas diferenciais (DGPS) ou cinemáticas em tempo real (RTK), a precisão pode chegar à ordem de centímetros, embora tais métodos exijam estações de referência adicionais (Kaplan; Hegarty, 2006).

³ Considerando que a luz percorre aproximadamente 30 cm em 1 nanossegundo, um erro de 10 ns resulta em um desvio de cerca de 3 metros. Conforme destacado por Nord et al. (1997), um erro de 1 microssegundo (10^{-6} s) resulta em um erro de 300 metros.

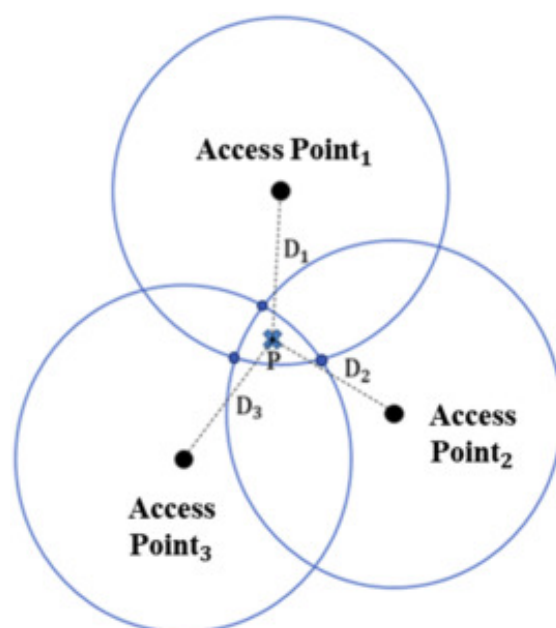


Figura 1 – Esquema ilustrativo do princípio da trilateração. A posição do receptor (ponto P) é determinada pela interseção de três circunferências, cujos centros representam satélites (ou pontos de acesso) e cujos raios correspondem às distâncias medidas entre cada satélite e o receptor. No sistema GPS, o problema é tridimensional, sendo representado pela interseção de esferas. Na prática, utiliza-se um quarto satélite para corrigir o erro do relógio do receptor e determinar de forma única sua posição no espaço-tempo.

Fonte: Adaptado de ScienceDirect (2026).

da Relatividade Geral, faz com que esses mesmos relógios adiantem-se em relação aos relógios na Terra. Esses dois efeitos relativísticos, de sinais opostos e magnitudes diferentes, resultam em uma diferença líquida que, se não fosse corrigida, comprometeria por completo a precisão do sistema, gerando erros de posicionamento acumulados da ordem de quilômetros por dia (Ashby, 2003).

Diante desse cenário, o presente trabalho tem como objetivo analisar, por meio de uma revisão bibliográfica e de cálculos fundamentados na literatura especializada, como as previsões da Relatividade Especial e da Relatividade Geral se manifestam nos relógios atômicos dos satélites do sistema GPS e de que forma essas previsões são incorporadas ao funcionamento do sistema.

Para tanto, estabelecem-se os seguintes objetivos específicos:



Figura 2 – Representação esquemática da constelação de satélites GPS. O sistema é composto por pelo menos 24 satélites distribuídos em seis planos orbitais, com quatro satélites em cada órbita.

Fonte: Adaptado de SEOS (2026).

- Calcular a velocidade orbital dos satélites GPS a partir da Lei da Gravitação Universal de Newton, demonstrando a independência da velocidade em relação à massa do satélite;
- Quantificar o efeito da dilatação temporal previsto pela Relatividade Especial, determinando o atraso diário dos relógios dos satélites em razão de sua alta velocidade orbital;
- Quantificar o efeito da dilatação temporal gravitacional previsto pela Relatividade Geral, determinando o adiantamento diário dos relógios em razão do menor campo gravitacional na altitude orbital;
- Calcular o efeito líquido resultante da combinação das duas correções e discutir como esse valor é compensado no projeto dos relógios atômicos do sistema GPS.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 2, apresenta-se a fundamentação teórica, dividida em três seções principais. A primeira aborda a mecânica orbital newtoniana e o cálculo da velocidade dos satélites. A segunda dedica-se à Relati-

vidade Especial e à dilatação temporal cinemática. A terceira trata da Relatividade Geral, com ênfase na dilatação temporal gravitacional e na aplicação da métrica de Schwarzschild para o campo terrestre. Por fim, na seção de cálculos, os efeitos são quantificados numericamente e o efeito líquido é analisado, destacando-se a importância prática dessas correções para o funcionamento do GPS.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Gravitação Newtoniana

A gravitação newtoniana constitui o alicerce clássico sobre o qual se apoia a mecânica orbital dos satélites artificiais. Formulada por Isaac Newton e publicada em *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), a Lei da Gravitação Universal estabelece que dois corpos de massas M e m , separados por uma distância R , exercem entre si uma força atrativa de caráter central, dada por Newton em 1687:

$$\vec{F}_g = \frac{GMm}{R^2} \hat{r}, \quad (2.1)$$

em que $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ é a constante gravitacional universal, M é a massa da Terra, m é a massa do satélite e $\hat{r}$ é o versor que aponta do centro atrativo para o corpo em órbita.

A força de caráter central implica que o momento angular orbital é conservado, de modo que corpos sujeitos à interação gravitacional descrevem trajetórias cônicas: elipses, parábolas ou hipérboles. Conforme demonstrado por Newton (1687), a solução das equações de movimento para uma força central inversamente proporcional ao quadrado da distância conduz exatamente a essas trajetórias, em concordância com as leis empíricas formuladas anteriormente por Kepler (1619). No caso particular de órbitas circulares, que representam uma boa aproximação para as órbitas dos satélites do GPS¹, o módulo da força gravitacional fornece exatamente a força centrípeta necessária para manter o satélite em movimento circular uniforme (Halliday; Resnick; Walker, 2016):

$$F_c = \frac{mV^2}{R} \quad (2.2)$$

Igualando os módulos dessas forças 2.1 e 2.2, obtém-se a seguinte cadeia de igualdades:

¹ Os satélites GPS descrevem órbitas quase circulares, com excentricidade tipicamente inferior a 0,01, o que justifica o tratamento circular adotado aqui (Kaplan; Hegarty, 2006).

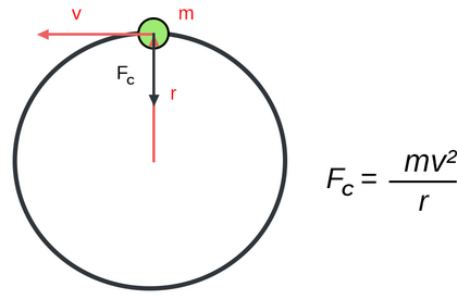


Figura 3 – Esquema de um corpo em movimento circular uniforme. A força centrípeta $\vec{F}_c$ aponta radialmente para o centro da trajetória, enquanto a velocidade $\vec{v}$ é tangencial à circunferência.

Fonte: Adaptado de Labster (2026).

$$\begin{aligned}
 \frac{GMm}{R^2} &= \frac{mV^2}{R}, \\
 \frac{GM}{R^2} &= \frac{V^2}{R}, \\
 V^2 &= \frac{GM}{R}, \\
 \therefore V &= \sqrt{\frac{GM}{R}}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Observa-se que a massa m do satélite pode ser cancelada, o que é uma manifestação do princípio da equivalência fraca². Isso mostra que a velocidade orbital independe da massa do satélite.

A equação (2.3) revela uma propriedade fundamental: a velocidade de órbita circular depende exclusivamente do parâmetro gravitacional GM e do raio orbital R , sendo completamente independente da massa do satélite.

² O princípio da equivalência fraca estabelece que a massa inercial e a massa gravitacional são equivalentes, de modo que todos os corpos sujeitos a um mesmo campo gravitacional, na ausência de forças dissipativas, experimentam a mesma aceleração, independentemente de sua massa ou composição. Esse princípio constitui um dos fundamentos da Relatividade Geral e foi posteriormente generalizado por Einstein ao formular o princípio da equivalência, segundo o qual, localmente, os efeitos de um campo gravitacional são indistinguíveis dos efeitos produzidos por um referencial acelerado (Einstein, 1916; Will, 2018).

2.1.1 Valores Utilizados

A constante gravitacional é $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$, a massa da Terra é $M = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, o raio da Terra é $R_T = 6371 \text{ km}$ e a altitude média dos satélites GPS é $h \approx 20200 \text{ km}$. Portanto, a distância do centro da Terra ao satélite é

$$R = R_T + h = 6371 + 20200 = 26571 \text{ km} = 2,6571 \times 10^7 \text{ m}.$$

2.1.2 Cálculo da Velocidade

Substituindo os valores na equação (2.3):

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{(6,67 \times 10^{-11})(5,97 \times 10^{24})}{2,6571 \times 10^7}} \\ &\approx 3870 \text{ m/s} \\ &\approx 3,87 \text{ km/s}. \end{aligned}$$

A velocidade orbital obtida para os satélites GPS é da ordem de 3,87 km/s. Embora muito inferior à velocidade da luz, esse valor é suficiente para produzir efeitos relativísticos mensuráveis nos relógios atômicos embarcados. Dessa forma, torna-se necessário considerar as previsões da Relatividade Restrita e da Relatividade Geral para garantir a precisão do sistema GPS.

2.2 Relatividade Especial (Restrita)

A Teoria da Relatividade Especial foi proposta por Albert Einstein em 1905 e baseia-se em dois postulados fundamentais (McMahon, 2006).

- As leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais;
- A velocidade da luz no vácuo é constante para todos os observadores.

Conforme McMahon (2006), uma das consequências mais importantes dessa teoria é a dilatação temporal, fenômeno segundo o qual relógios em movimento marcam

o tempo de forma diferente quando comparados a relógios em repouso. Para velocidades muito menores que a velocidade da luz ($v \ll c$), pode-se utilizar a aproximação binomial $(1 - x)^{1/2} \approx 1 - x/2$.

A frequência de um relógio em movimento pode ser expressa (McMahon, 2006) por

$$f = f_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

onde f_0 representa a frequência própria do relógio. Aplicando a aproximação binomial, obtém-se

$$f \approx f_0 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right).$$

Para um satélite GPS, a frequência do relógio embarcado é $f_{sat} \approx f_0(1 - v_{sat}^2/2c^2)$, enquanto para um relógio localizado na superfície terrestre tem-se $f_{sup} \approx f_0(1 - v_{sup}^2/2c^2)$.

A diferença relativa entre as frequências é obtida pela seguinte cadeia de igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} &= \frac{f_{sat} - f_{sup}}{f_{sup}} \\ &\approx \frac{\left(1 - \frac{v_{sat}^2}{2c^2}\right) - \left(1 - \frac{v_{sup}^2}{2c^2}\right)}{1 - \frac{v_{sup}^2}{2c^2}} \\ &\approx \frac{v_{sup}^2 - v_{sat}^2}{2c^2}. \end{aligned}$$

Em módulo, tem-se $\left| \frac{\Delta f}{f} \right| \approx \frac{v_{sat}^2 - v_{sup}^2}{2c^2}$.

2.2.1 Valores Utilizados

A velocidade orbital do satélite GPS é $v_{sat} = 3870$ m/s, a velocidade linear da superfície terrestre no equador é $v_{sup} = 465$ m/s e a velocidade da luz no vácuo é

$$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

Substituindo os valores na expressão da diferença relativa de frequência:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta f}{f} \right| &= \frac{3870^2 - 465^2}{2(3,0 \times 10^8)^2} \\ &= \frac{1,49769 \times 10^7 - 2,16225 \times 10^5}{1,8 \times 10^{17}} \\ &= \frac{1,47607 \times 10^7}{1,8 \times 10^{17}} \\ &\approx 8,2 \times 10^{-11}. \end{aligned}$$

2.2.2 Diferença Temporal Acumulada

Um dia possui 86400 segundos. Assim, a diferença temporal acumulada em um dia é

$$86400 \times (8,2 \times 10^{-11}) \approx 7,08 \times 10^{-6} \text{ s} = 7,08 \mu\text{s}.$$

Portanto, devido à elevada velocidade orbital dos satélites GPS, os relógios atômicos embarcados sofrem dilatação temporal prevista pela Relatividade Especial. Como consequência, esses relógios atrasam aproximadamente $7,08 \mu\text{s}$ por dia em relação aos relógios localizados na superfície terrestre. Embora essa diferença seja extremamente pequena, ela é significativa para a precisão do sistema GPS e deve ser compensada continuamente.

2.3 Relógios Atômicos

O funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) depende da medição extremamente precisa do tempo. Para isso, cada satélite da constelação transporta relógios atômicos de alta estabilidade, responsáveis por sincronizar a transmissão dos sinais utilizados no cálculo das posições dos receptores terrestres (Kaplan; Hegarty, 2006).

Diferentemente dos relógios mecânicos ou eletrônicos convencionais, os relógios atômicos utilizam a frequência natural das transições energéticas dos átomos como padrão de tempo. Essa frequência é extremamente estável, permitindo que a contagem do tempo seja realizada com elevada precisão e reprodutibilidade. Atualmente, o segundo do Sistema Internacional de Unidades (SI) é definido como a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio-133 (BIPM, 2019).

Nos satélites do sistema GPS são empregados, principalmente, relógios atômicos de césio e de rubídio. Os relógios de césio apresentam maior estabilidade em longo prazo, enquanto os de rubídio possuem menor massa, menor consumo de energia e maior resistência às condições do ambiente espacial. Em versões mais recentes da constelação também têm sido utilizados relógios atômicos de hidrogênio do tipo *Passive Hydrogen Maser* (PHM), que oferecem estabilidade ainda superior (Kaplan; Hegarty, 2006; Parkinson; Spilker, 1996).

A elevada precisão desses dispositivos é indispensável porque a determinação da posição do usuário é realizada a partir do tempo de propagação dos sinais eletromagnéticos entre o satélite e o receptor. Como esses sinais propagam-se aproximadamente à velocidade da luz, pequenos erros na medição do tempo produzem erros significativos na posição calculada. Um erro de apenas 1 microssegundo corresponde a aproximadamente 300 metros de erro na distância estimada entre o satélite e o receptor (Nord et al., 1997). Consequentemente, mesmo diferenças temporais da ordem de nanossegundos precisam ser consideradas durante a operação do sistema.

Embora os relógios atômicos apresentem elevada estabilidade, eles não estão imunes aos efeitos previstos pela Teoria da Relatividade. Devido à elevada velocidade orbital dos satélites, a Relatividade Especial prevê que seus relógios atrasem em relação aos relógios localizados na superfície terrestre. Em contrapartida, como os satélites encontram-se em uma região de menor potencial gravitacional, a Relatividade Geral prevê que esses mesmos relógios adiantem-se em relação aos relógios terrestres. A combinação desses dois efeitos produz um adiantamento líquido de aproximadamente $38,6 \mu\text{s}$ por dia, valor que precisa ser compensado previamente no projeto do sistema para garantir a precisão do posicionamento (Ashby, 2003).

Para compensar essa diferença, a frequência nominal dos relógios atômicos é ajustada ainda em solo antes do lançamento dos satélites. Dessa forma, quando entram em operação na órbita terrestre, os efeitos relativísticos fazem com que a frequência observada pelos usuários corresponda exatamente ao valor nominal esperado. Além dessa correção inicial, o segmento de controle do GPS monitora continuamente o comportamento dos relógios dos satélites e transmite parâmetros de correção que permitem eliminar pequenas derivações temporais ao longo da operação (Ashby, 2003; Parkinson; Spilker, 1996).

Assim, os relógios atômicos constituem um dos elementos fundamentais da infraestrutura do sistema GPS. Sua elevada estabilidade, aliada às correções relativísticas aplicadas continuamente, possibilita que o sistema alcance a precisão necessária para aplicações civis, científicas e militares.

2.4 Relatividade Geral

Diferentemente da teoria de Newton, que interpreta a gravidade como uma força de atração entre massas, a Relatividade Geral descreve a gravidade como uma consequência da curvatura do espaço-tempo produzida pela presença de matéria e energia. Assim, os corpos em queda livre movem-se ao longo de trajetórias determinadas pela geometria do espaço-tempo, denominadas geodésicas (McMahon, 2006).

2.4.1 Princípio de Equivalência

Um dos pilares conceituais da Relatividade Geral é o Princípio de Equivalência, segundo o qual os efeitos de um campo gravitacional são, localmente, indistinguíveis dos efeitos produzidos por um referencial acelerado (Einstein, 1916; Will, 2018). Einstein ilustrou esse princípio por meio do célebre experimento mental do elevador: um observador confinado em um elevador fechado, em repouso na superfície terrestre sob ação da gravidade g , vivencia exatamente as mesmas experiências mecânicas que um observador em um elevador acelerado com $a = g$ no espaço profundo, longe de qualquer massa. Nenhum experimento realizado no interior do elevador seria capaz de distinguir as duas situações (Schutz, 2009).

Esse princípio tem uma consequência profunda: se a gravidade e a aceleração

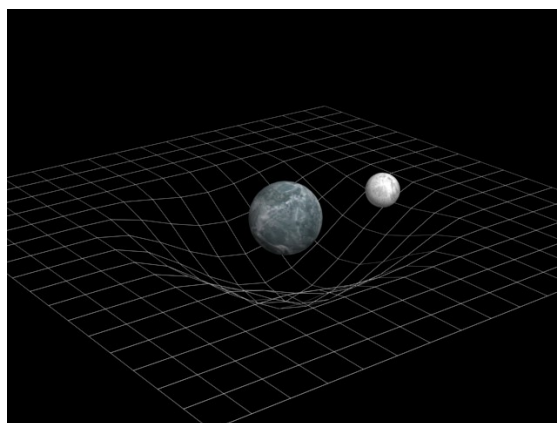


Figura 4 – Representação da curvatura do espaço-tempo produzida pela presença da Terra. A Lua orbita a Terra seguindo uma geodésica nesse espaço-tempo curvo, ilustrando o conceito de que a gravidade é uma manifestação geométrica.

Fonte: Adaptado de Idelfonço (2019).



Figura 5 – Representação do experimento mental do elevador de Einstein em queda livre. Durante a queda, um observador no interior do elevador experimenta um estado aparente de ausência de peso, pois tanto ele quanto os objetos ao seu redor aceleram igualmente sob a ação da gravidade. Localmente, esse cenário é indistinguível da ausência de campo gravitacional, ilustrando o Princípio da Equivalência, segundo o qual os efeitos de um campo gravitacional uniforme podem ser eliminados em um referencial em queda livre.

Fonte: Adaptado de Einstein Online (2026).

são fisicamente equivalentes, e se a Relatividade Restrita prevê que a aceleração afeta a passagem do tempo, então a gravidade também deve afetar o ritmo dos relógios. Essa conclusão conduz diretamente à previsão da dilatação temporal gravitacional (Hartle, 2003).

2.4.2 Dilatação Temporal Gravitacional

Uma das previsões mais importantes da Relatividade Geral é a dilatação temporal gravitacional. De acordo com esse efeito, a passagem do tempo depende da intensidade do campo gravitacional local. Relógios posicionados em regiões onde o campo gravitacional é mais intenso transcorrem mais lentamente do que relógios localizados em regiões de menor intensidade gravitacional (McMahon, 2006).

Esse fenômeno foi confirmado experimentalmente pela primeira vez por Pound e Rebka (1960), que mediram o desvio gravitacional para o vermelho de raios gama do ^{57}Fe emitidos na base e detectados no topo de uma torre de 22,6 m na Universidade de Harvard, utilizando o efeito Mössbauer³. Posteriormente, Hafele e Keating (1972a) realizaram uma verificação direta da dilatação temporal, transportando relógios atômicos de césio em voos comerciais ao redor do globo e comparando-os com relógios de referência no Observatório Naval dos Estados Unidos. Os resultados confirmaram quantitativamente tanto a dilatação temporal cinemática prevista pela Relatividade Especial quanto a dilatação gravitacional prevista pela Relatividade Geral (Hafele e Keating, 1972b).

A dilatação temporal gravitacional constitui um dos princípios fundamentais aplicados no funcionamento do sistema GPS, cuja precisão depende da correta compensação desses efeitos relativísticos (Ashby, 2003).

2.4.3 Métrica de Schwarzschild

O espaço-tempo ao redor de um corpo aproximadamente esférico, estático e sem carga elétrica, como a Terra, é descrito pela solução obtida por Karl Schwarzschild em

³ O efeito Mössbauer consiste na emissão e absorção ressonante de raios gama por núcleos atômicos em redes cristalinas, sem perda de energia por recuo. Descoberto por Rudolf Mössbauer em 1958 (Mössbauer, 1958), essa técnica espectroscópica é amplamente utilizada em Química e em Física do estado sólido. Ela permitiu a Pound e Rebka medir uma variação fracional de frequência da ordem de $2,46 \times 10^{-15}$, confirmando a previsão da Relatividade Geral com precisão de 1%.

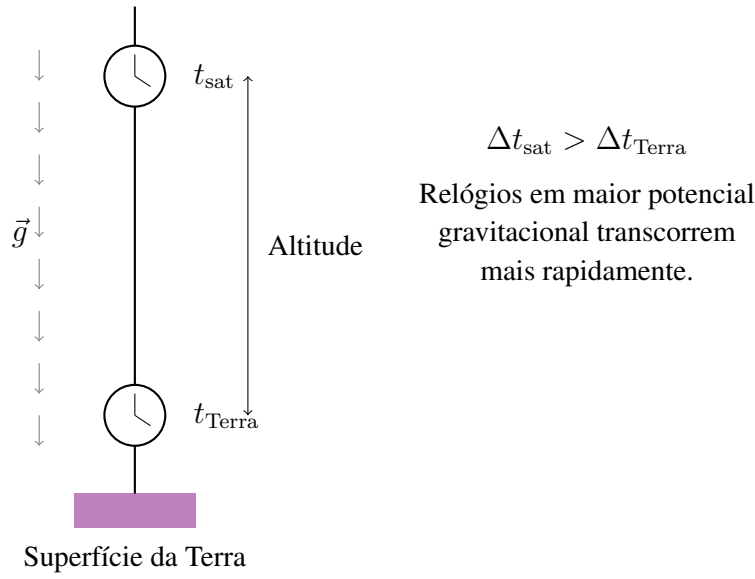


Figura 6 – Representação esquemática da dilatação temporal gravitacional prevista pela Relatividade Geral. Um relógio localizado em maior altitude, onde o potencial gravitacional é mais elevado, transcorre mais rapidamente do que um relógio situado na superfície terrestre. Esse efeito é uma das correções relativísticas aplicadas ao sistema GPS.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

1916 (Schwarzschild, 1916). Essa foi a primeira solução exata das equações de campo de Einstein, e sua derivação completa envolve cálculo tensorial e geometria diferencial (Schutz, 2009; Hartle, 2003). Contudo, o resultado pode ser apresentado e utilizado sem esse formalismo. A métrica de Schwarzschild é escrita como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \quad (2.4)$$

em que ds^2 é o intervalo espaço-temporal, G é a constante gravitacional universal, M é a massa do corpo central (neste caso, a Terra), r é a distância radial ao centro da massa, c é a velocidade da luz no vácuo, dt é o intervalo de tempo coordenado (medido por um observador infinitamente distante), e dr , $d\theta$ e $d\varphi$ são os diferenciais das coordenadas espaciais esféricas (Schutz, 2009).

O fator $\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$, que multiplica o termo temporal, é o responsável pela

dilatação temporal gravitacional. Ele depende de r : quanto menor a distância ao centro da massa, menor esse fator e mais lentamente o tempo transcorre (Hartle, 2003).

Para um relógio estacionário em relação à Terra, não há variações nas coordenadas espaciais durante a medida do tempo. Portanto, $dr = d\theta = d\varphi = 0$. Substituindo essa condição na Equação (2.4), obtém-se

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2. \quad (2.5)$$

Na Relatividade Geral, o intervalo espaço-temporal está relacionado ao tempo próprio do relógio pela expressão (McMahon, 2006) $ds = c d\tau$, em que $d\tau$ representa o intervalo de tempo medido pelo próprio relógio. Elevando ambos os lados ao quadrado e substituindo na Equação (2.5), resulta

$$\boxed{d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}. \quad (2.6)$$

A Equação (2.6) descreve a dilatação temporal gravitacional prevista pela Relatividade Geral. Ela mostra que o intervalo de tempo próprio $d\tau$, medido por um relógio a uma distância r do centro da Terra, é sempre menor ou igual ao tempo coordenado dt . Quanto menor for r , maior será o efeito gravitacional e mais lentamente transcorrerá o tempo em relação a um observador situado em uma região de campo gravitacional menos intenso (McMahon, 2006; Schutz, 2009).

2.4.4 Aproximação para Campo Fraco

No caso dos satélites do sistema GPS, o campo gravitacional terrestre é relativamente fraco. Para verificar essa condição, calcula-se o chamado raio de Schwarzschild da Terra (Hartle, 2003):

$$\begin{aligned}
\frac{2GM}{c^2} &= \frac{2 \times (6,674 \times 10^{-11}) \times (5,972 \times 10^{24})}{(2,998 \times 10^8)^2} \\
&= \frac{7,972 \times 10^{14}}{8,988 \times 10^{16}} \\
&\approx 8,87 \times 10^{-3} \text{ m}.
\end{aligned}$$

Como o raio da Terra é $R_T = 6,371 \times 10^6 \text{ m}$, tem-se

$$\frac{2GM}{R_T c^2} \approx \frac{8,87 \times 10^{-3}}{6,371 \times 10^6} \approx 1,39 \times 10^{-9} \ll 1,$$

o que confirma que o regime de campo fraco é plenamente satisfeito (Ashby, 2003). Nessas condições, pode-se utilizar a aproximação binomial $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$, tomando $x = 2GM/rc^2$, o que conduz à expressão aproximada

$$d\tau \approx dt \left(1 - \frac{GM}{rc^2} \right). \quad (2.7)$$

Essa aproximação é amplamente utilizada na literatura para descrever os efeitos relativísticos em campos gravitacionais fracos, sendo suficientemente precisa para a análise dos relógios atômicos embarcados nos satélites do sistema GPS (Ashby, 2003; Kaplan e Hegarty, 2006).

2.4.5 Cálculo da Dilatação Temporal Gravitacional para o GPS

A partir da Equação (2.7), pode-se determinar a diferença na passagem do tempo entre um relógio localizado na superfície terrestre (a uma distância $r_A = R_T$ do centro da Terra) e outro embarcado em um satélite GPS (a uma distância $r_B = R_T + h$). Aplicando a expressão para cada relógio e calculando a razão entre os tempos próprios no limite de campo fraco, a diferença relativa entre os ritmos dos relógios é dada por (Ashby, 2003)

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} \approx \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R} \right), \quad (2.8)$$

em que R_T é o raio médio da Terra e $R = R_T + h$ é a distância do centro da Terra ao satélite.

Essa expressão pode ser reescrita em termos do potencial gravitacional newtoniano $\Phi(r) = -GM/r$, resultando na forma compacta (Schutz, 2009)

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Phi_B - \Phi_A}{c^2} = \frac{\Delta\Phi}{c^2},$$

a qual expressa que a diferença fracional na taxa dos relógios é igual à diferença de potencial gravitacional dividida por c^2 . Como o satélite encontra-se em um potencial gravitacional menos negativo ($\Phi_B > \Phi_A$), a diferença é positiva: o relógio do satélite adianta em relação ao da superfície (Ashby, 2003).

Substituindo os parâmetros do sistema GPS na Equação (2.8), com $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$, $M = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$, $c = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$, $R_T = 6,371 \times 10^6 \text{ m}$ e $R = 2,6571 \times 10^7 \text{ m}$ (Kaplan e Hegarty, 2006), tem-se, inicialmente, o fator gravitacional:

$$\begin{aligned} \frac{GM}{c^2} &= \frac{6,674 \times 10^{-11} \times 5,972 \times 10^{24}}{(2,998 \times 10^8)^2} \\ &= \frac{3,986 \times 10^{14}}{8,988 \times 10^{16}} \\ &= 4,434 \times 10^{-3} \text{ m}. \end{aligned}$$

Em seguida, calcula-se a diferença entre os inversos das distâncias radiais:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_T} &= \frac{1}{6,371 \times 10^6} = 1,570 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}, \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{2,6571 \times 10^7} = 3,764 \times 10^{-8} \text{ m}^{-1}, \\ \frac{1}{R_T} - \frac{1}{R} &= 1,570 \times 10^{-7} - 0,3764 \times 10^{-7} = 1,193 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, a diferença relativa na taxa dos relógios resulta em

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = 4,434 \times 10^{-3} \times 1,193 \times 10^{-7} = 5,29 \times 10^{-10}.$$

Como um dia possui 86 400 s, a diferença acumulada em um dia é

$$\Delta t_{\text{RG}} = 5,29 \times 10^{-10} \times 86\,400 = 4,57 \times 10^{-5} \text{ s} \approx \mathbf{45,7 \mu\text{s/dia}}. \quad (2.9)$$

Portanto, devido ao fato de os satélites GPS estarem submetidos a um campo gravitacional menos intenso do que o existente na superfície terrestre, seus relógios atômicos transcorrem mais rapidamente. A Relatividade Geral prevê, assim, um adiantamento de aproximadamente 45,7 μs por dia em relação aos relógios localizados na Terra. Esse valor apresenta excelente concordância com os resultados reportados por Ashby (2003), que estima um adiantamento de aproximadamente 45,9 $\mu\text{s/dia}$. Se não corrigido, esse adiantamento produziria um erro de posicionamento da ordem de

$$\varepsilon = c \times \Delta t_{\text{RG}} = 2,998 \times 10^8 \times 4,57 \times 10^{-5} \approx 13,7 \text{ km/dia},$$

o que seria desastroso para a navegação (Kaplan e Hegarty, 2006). Esse resultado, juntamente com a correção decorrente da Relatividade Especial, é indispensável para garantir a precisão do sistema GPS.

2.5 Efeito Líquido (Correção Total)

Combinando os efeitos da Relatividade Restrita ($-7,08 \mu\text{s/dia}$) e da Relatividade Geral ($+45,7 \mu\text{s/dia}$), o efeito líquido sobre os relógios dos satélites é:

$$\Delta t_{\text{total}} = +45,7 - 7,08 = +38,62 \mu\text{s/dia}.$$

Ou seja, os relógios atômicos embarcados nos satélites GPS adiantam-se, em média, 38,6 μs por dia em relação aos relógios na superfície terrestre. Para compensar esse efeito, a frequência dos relógios é ajustada para um valor ligeiramente inferior ao nominal (10,22999999543 MHz em vez de 10,23 MHz), conforme preconizado por Ashby (2003). Sem essa correção, os erros de posicionamento acumulados seriam da ordem de quilômetros por dia, inviabilizando o sistema.

3 METODOLOGIA

Este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa de natureza básica, com abordagem quantitativa e objetivo explicativo, desenvolvida por meio de pesquisa bibliográfica. Segundo Gil (2008), a pesquisa bibliográfica é elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente por livros e artigos científicos, permitindo a construção do referencial teórico e a análise crítica de conhecimentos previamente estabelecidos.

A investigação fundamenta-se nas teorias da Gravitação Newtoniana, da Relatividade Especial e da Relatividade Geral, empregando deduções matemáticas e cálculos numéricos para analisar os efeitos relativísticos sobre os relógios atômicos embarcados nos satélites do Sistema de Posicionamento Global (GPS). A utilização da modelagem matemática como instrumento de análise possibilita descrever quantitativamente fenômenos físicos e comparar previsões teóricas com resultados consolidados na literatura científica (Tipler; Mosca, 2009). Os parâmetros físicos empregados (constantes G , M , c e parâmetros orbitais) foram extraídos das recomendações do CODATA e da literatura especializada (Kaplan; Hegarty, 2006).

Inicialmente, foi utilizada a Lei da Gravitação Universal de Newton para determinar a velocidade orbital média dos satélites do sistema GPS, considerando uma órbita circular de raio correspondente à altitude média da constelação. Em seguida, empregaram-se as expressões da Relatividade Especial para calcular a dilatação temporal decorrente da velocidade orbital dos satélites, utilizando a aproximação binomial válida para velocidades muito inferiores à velocidade da luz ($v \ll c$) (Einstein, 1905; McMahon, 2006).

Posteriormente, foi aplicada a solução de Schwarzschild para um campo gravitacional aproximadamente esférico e estático, obtendo-se a expressão da dilatação temporal gravitacional em sua forma aproximada para campos gravitacionais fracos, condição satisfeita pelo campo gravitacional terrestre (Einstein, 1916; Schutz, 2009; Hartle, 2003).

Os resultados obtidos para a Relatividade Especial e para a Relatividade Geral foram analisados separadamente e, posteriormente, combinados para determinar o efeito

relativístico líquido sobre os relógios atômicos dos satélites. Por fim, esse resultado foi comparado com os valores amplamente reportados na literatura especializada, especialmente aqueles apresentados por Ashby (2003), verificando-se a consistência dos cálculos desenvolvidos. Adicionalmente, discute-se a compensação prática desse efeito líquido por meio do ajuste da frequência de oscilação dos relógios atômicos antes do lançamento dos satélites, conforme descrito na literatura (Ashby, 2003; Kaplan; Hegarty, 2006).

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Velocidade Orbital dos Satélites GPS

Conforme demonstrado na fundamentação teórica, a aplicação da Lei da Gravitação Universal de Newton permitiu determinar a velocidade orbital dos satélites do sistema GPS. A partir dos parâmetros gravitacionais da Terra e do raio orbital médio da constelação, obteve-se uma velocidade aproximada de

$$V \approx 3,87 \text{ km/s.} \quad (4.1)$$

Esse resultado está em concordância com os valores encontrados na literatura especializada, que indicam velocidades orbitais próximas de 3,9 km/s para satélites da constelação GPS (Kaplan; Hegarty, 2006).

Embora essa velocidade corresponda a apenas cerca de $1,3 \times 10^{-5}$ da velocidade da luz, ela é suficientemente elevada para produzir efeitos relativísticos mensuráveis nos relógios atômicos embarcados. Esse fato evidencia que, mesmo em situações nas quais as velocidades envolvidas são muito inferiores à velocidade da luz, as previsões da Relatividade Especial tornam-se relevantes quando se exige elevada precisão temporal.

Além disso, o resultado confirma que a determinação da órbita dos satélites pode ser realizada com excelente aproximação por meio da mecânica newtoniana. Entretanto, conforme será discutido nas seções seguintes, a descrição clássica não é suficiente para explicar o comportamento dos relógios atômicos utilizados pelo sistema GPS.

4.2 Efeito da Relatividade Especial

A aplicação da Relatividade Especial permitiu determinar a influência da velocidade orbital dos satélites sobre a passagem do tempo. Os cálculos realizados indicaram que os relógios atômicos embarcados sofrem um atraso diário de aproximadamente

$$\Delta t_{RE} \approx -7,08 \text{ } \mu\text{s/dia.} \quad (4.2)$$

Esse resultado decorre diretamente da dilatação temporal prevista por Einstein, segundo a qual relógios em movimento transcorrem mais lentamente quando comparados a relógios em repouso em relação ao observador.

Embora o atraso calculado seja extremamente pequeno quando considerado isoladamente, sua importância prática é significativa. Como os sinais emitidos pelos satélites propagam-se à velocidade da luz, pequenas diferenças na sincronização dos relógios produzem erros crescentes na determinação das distâncias entre os satélites e os receptores terrestres.

O valor obtido neste trabalho apresenta boa concordância com os resultados encontrados por Ashby (2003), que estima um atraso de aproximadamente $7,2 \mu\text{s}$ por dia devido exclusivamente aos efeitos da Relatividade Especial. Essa proximidade demonstra que as aproximações adotadas neste estudo são adequadas para descrever o comportamento relativístico dos relógios do sistema GPS.

4.3 Efeito da Relatividade Geral

A análise realizada com base na Relatividade Geral mostrou que o campo gravitacional exerce influência ainda mais significativa sobre a passagem do tempo.

Utilizando a aproximação para campos gravitacionais fracos, foi obtido um adiantamento diário de aproximadamente

$$\Delta t_{RG} \approx +45,7 \mu\text{s}/\text{dia}. \quad (4.3)$$

Esse resultado evidencia que os relógios posicionados em órbitas elevadas transcorrem mais rapidamente do que aqueles localizados na superfície terrestre, pois os satélites encontram-se submetidos a um potencial gravitacional menos intenso.

Observa-se que esse efeito possui sinal oposto ao previsto pela Relatividade Especial. Enquanto o movimento orbital provoca um atraso nos relógios dos satélites, a menor intensidade do campo gravitacional produz um adiantamento de magnitude significativamente superior.

Os resultados obtidos concordam com aqueles apresentados por Ashby (2003) e Kaplan e Hegarty (2006), confirmando que a contribuição da Relatividade Geral

representa a maior parcela da correção relativística aplicada aos relógios do sistema GPS.

4.4 Correção Relativística Total

A combinação dos efeitos previstos pelas duas teorias resulta em uma correção líquida correspondente à soma algébrica das contribuições da Relatividade Especial e da Relatividade Geral.

Os valores obtidos neste trabalho são: um atraso de $-7,08 \mu\text{s}$ por dia devido à Relatividade Especial, um adiantamento de $+45,7 \mu\text{s}$ por dia devido à Relatividade Geral, resultando em uma correção total de $+38,6 \mu\text{s}$ por dia. A contribuição gravitacional, portanto, supera significativamente o efeito cinemático, de modo que os relógios embarcados nos satélites adiantam-se aproximadamente $38,6 \mu\text{s}$ por dia em relação aos relógios situados na superfície terrestre.

Esse resultado demonstra que a Relatividade Geral exerce influência predominante no comportamento temporal dos satélites GPS, enquanto a Relatividade Especial atua reduzindo parcialmente essa diferença.

4.5 Impacto das Correções Relativísticas no Funcionamento do GPS

Os resultados obtidos evidenciam que as correções relativísticas não constituem apenas uma previsão teórica, mas representam um requisito indispensável para o funcionamento adequado do sistema GPS.

Considerando que os sinais eletromagnéticos propagam-se à velocidade da luz, uma diferença acumulada de aproximadamente $38,6 \mu\text{s}$ corresponde a um erro de posicionamento da ordem de

$$3,0 \times 10^8 \times 38,6 \times 10^{-6} \approx 1,16 \times 10^4 \text{ m},$$

ou seja, aproximadamente 11,6 km por dia.

Esse resultado demonstra que, caso os efeitos relativísticos fossem ignorados, o erro na determinação das posições cresceria continuamente, tornando o sistema inadequado para aplicações de navegação, georreferenciamento e sincronização temporal.

Por essa razão, a frequência dos relógios atômicos instalados nos satélites é previamente ajustada antes do lançamento, de modo que, após a atuação conjunta dos efeitos relativísticos, sua frequência observada por um receptor localizado na superfície terrestre corresponda exatamente ao valor nominal especificado para o sistema GPS (Ashby, 2003).

4.6 Discussão dos Resultados

Os resultados obtidos neste trabalho evidenciam que o funcionamento do sistema GPS depende da aplicação conjunta da Mecânica Newtoniana, da Relatividade Especial e da Relatividade Geral.

A teoria de Newton fornece uma descrição adequada da dinâmica orbital dos satélites, permitindo determinar sua velocidade e sua trajetória com excelente aproximação. Entretanto, essa teoria não contempla os efeitos da gravidade sobre a passagem do tempo, tampouco a influência das altas velocidades sobre os relógios atômicos.

A incorporação das previsões da Relatividade Especial e da Relatividade Geral permite explicar quantitativamente as diferenças observadas entre os ritmos dos relógios localizados em órbita e na superfície terrestre. Os valores obtidos neste estudo mostram excelente concordância com aqueles apresentados na literatura especializada, reforçando a consistência das aproximações adotadas.

Assim, verifica-se que o GPS constitui um dos exemplos tecnológicos mais importantes da aplicação prática da Relatividade. Diferentemente da ideia frequentemente difundida de que os efeitos relativísticos possuem interesse apenas em estudos teóricos ou astronômicos, os resultados demonstram que essas previsões são indispensáveis para garantir a precisão de um sistema de navegação utilizado diariamente por milhões de pessoas em todo o mundo. Dessa forma, a operação do GPS representa uma confirmação experimental contínua das teorias propostas por Einstein, evidenciando sua importância tanto para a Física Moderna quanto para o desenvolvimento de tecnologias de posicionamento e sincronização temporal.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo analisar a influência dos efeitos relativísticos no funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS), demonstrando, por meio de uma abordagem teórica e quantitativa, que a precisão desse sistema depende diretamente das previsões da Relatividade Especial e da Relatividade Geral propostas por Albert Einstein.

Inicialmente, a partir da Lei da Gravitação Universal de Newton, foi determinada a velocidade orbital média dos satélites do sistema GPS, obtendo-se um valor aproximado de 3,87 km/s. Esse resultado mostrou-se compatível com os valores encontrados na literatura e evidenciou que a mecânica newtoniana continua sendo uma ferramenta adequada para a descrição da dinâmica orbital dos satélites artificiais.

Em seguida, foram analisados os efeitos relativísticos que atuam sobre os relógios atômicos embarcados nos satélites. A aplicação da Relatividade Especial permitiu determinar um atraso aproximado de $7,08 \mu\text{s}$ por dia, decorrente da elevada velocidade orbital dos satélites. Por outro lado, a Relatividade Geral indicou um adiantamento aproximado de $45,7 \mu\text{s}$ por dia, consequência da menor intensidade do campo gravitacional na altitude em que os satélites operam.

A combinação desses dois efeitos resultou em um adiantamento líquido de aproximadamente $38,6 \mu\text{s}$ por dia em relação aos relógios localizados na superfície terrestre. Embora esse intervalo de tempo seja extremamente pequeno, sua acumulação produziria erros de posicionamento da ordem de quilômetros por dia caso não fossem aplicadas as devidas correções relativísticas. Esse resultado evidencia que a teoria da relatividade possui aplicação prática indispensável no funcionamento do GPS, constituindo um dos exemplos mais importantes da utilização de conceitos da Física Moderna em tecnologias presentes no cotidiano.

Os valores obtidos ao longo deste trabalho apresentaram boa concordância com aqueles descritos na literatura especializada, particularmente nos estudos de Ashby (2003) e Kaplan e Hegarty (2006), demonstrando que as aproximações adotadas foram adequadas para a análise proposta. Dessa forma, os objetivos estabelecidos na introdução

foram plenamente alcançados, permitindo compreender tanto os fundamentos físicos envolvidos quanto sua aplicação no contexto do sistema GPS.

Além de contribuir para a compreensão da relação entre a Mecânica Clássica e a Física Moderna, este trabalho evidencia a importância do ensino da Relatividade em cursos de graduação, mostrando que conceitos frequentemente considerados abstratos possuem aplicações diretas em tecnologias amplamente utilizadas pela sociedade. Nesse sentido, o GPS constitui um excelente exemplo didático para aproximar conteúdos teóricos da realidade tecnológica contemporânea.

Como perspectiva para trabalhos futuros, sugere-se ampliar a análise por meio da consideração de órbitas elípticas, da influência da rotação terrestre sobre os referenciais não inerciais, do efeito Sagnac e de outras correções relativísticas empregadas pelos sistemas globais de navegação por satélite (GNSS), como o GPS, o GLONASS, o Galileo e o BeiDou. Tais estudos permitiriam uma descrição ainda mais completa dos fenômenos físicos envolvidos e reforçariam a importância da Relatividade na ciência e na engenharia modernas.

REFERÊNCIAS

ALVES, Sérgio. O GPS e a geometria da esfera. In: II BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2004, Salvador. **Anais...** Salvador: SBM, 2004. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br>. Acesso em: 5 jul. 2026.

ASHBY, Neil. Relativity in the Global Positioning System. **Living Reviews in Relativity**, v. 6, p. 1, 2003. DOI: 10.12942/lrr-2003-1. Disponível em: <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-1>. Acesso em: 4 jul. 2026.

EINSTEIN, Albert. **Relativity: The Special and General Theory**. New York: Methuen & Co, 1916.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

GPS.GOV. **Space Segment**. Disponível em: <https://www.gps.gov/systems/gps/space/>. Acesso em: 5 jul. 2026.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 2.

HAFELE, Joseph C.; KEATING, Richard E. Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains. **Science**, Washington, v. 177, n. 4044, p. 166-168, jul. 1972. DOI: 10.1126/science.177.4044.166.

HARTLE, James B. **Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity**. San Francisco: Addison-Wesley, 2003.

IDELFONÇO, Carolina M. Relatividade no cotidiano. **ComCiência**, 8 maio 2019. Disponível em: <https://www.comciencia.br/relatividade-no-cotidiano/>. Acesso em: 4 jul. 2026.

KAPLAN, Elliott D.; HEGARTY, Christopher J. (ed.). **Understanding GPS: Principles and Applications**. 2. ed. Boston: Artech House, 2006.

KEPLER, Johannes. **Harmonices Mundi Libri V**. Linz: Johann Planck for Gottfried Tampach, 1619.

LABSTER. Centripetal force. Disponível em: <https://theory.labster.com/centripetal_force/>. Acesso em: 4 jul. 2026.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2021.

MCMAHON, David. **Relativity Demystified**. New York: McGraw-Hill, 2006.

MÖSSBAUER, Rudolf L. Kernresonanzfluoreszenz von Gammastrahlung in Ir¹⁹¹. **Zeitschrift für Physik**, v. 151, n. 2, p. 124-143, 1958. DOI: 10.1007/BF01344210.

NEWTON, Isaac. **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**. London: Jussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater, 1687.

NORD, G. D.; JABON, D.; NORD, J. The mathematics of the Global Positioning System. **The Mathematics Teacher**, Reston, v. 90, n. 6, p. 456-463, set. 1997.

POUND, Robert V.; REBKA, Glen A. Apparent Weight of Photons. **Physical Review Letters**, v. 4, n. 7, p. 337-341, abr. 1960. DOI: 10.1103/PhysRevLett.4.337.

SCHUTZ, Bernard F. **A First Course in General Relativity**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

SCHWARZSCHILD, Karl. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 189-196, 1916.

SCIENCEDIRECT. Trilateration. In: ScienceDirect Topics, 2020. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/trilateration>>. Acesso em: 4 jul. 2026.

SEOS. Satellite Navigation with GPS: 1. Global Positioning through Trilateration. Disponível em: <<https://seos-project.eu/GPS/GPS-c01-p03.html>>. Acesso em: 8 jul. 2026.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. **Física para Cientistas e Engenheiros**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. v. 2.

WILL, Clifford M. **Theory and Experiment in Gravitational Physics**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.

WILL, Clifford M. **Theory and Experiment in Gravitational Physics**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.

BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES (BIPM). *The International System of Units (SI)*. 9. ed. Sèvres: BIPM, 2019.

PARKINSON, Bradford W.; SPILKER JUNIOR, James J. (ed.). *Global Positioning System: Theory and Applications*. Washington, DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.