UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS
CURSO DE FILOSOFIA

LARISSA CASTRO CRUZ

UMA AXIOMATIZAÇÃO PARA O CÁLCULO PROPOSICIONAL CLÁSSICO A PARTIR DE ROSSER

São Luís

2014

LARISSA CASTRO CRUZ

UMA AXIOMATIZAÇÃO PARA O CÁLCULO PROPOSICIONAL CLÁSSICO A PARTIR DE ROSSER

Monografia apresentada ao Curso de Filosofia da Universidade Federal do Maranhão, para obtenção do grau de Licenciatura Plena em Filosofia.

Orientador: Prof. Esp. Rogério José de Ribamar da Silva Júnior.

São Luís

2014

Cruz, Larissa Castro

Uma axiomatização para o cálculo proposicional clássico a partir de Rosser / Larissa Castro Cruz. __São Luís, 2014.

62 f.

Impresso por computador (fotocópia).
Orientador: Rogério José de Ribamar da Silva Júnior.

Monografia(graduação) - Universidade Federal do Maranhão, Curso de Filosofia, 2014.

1. Axiomatizações. 2. Inferência - regras. 3. Validade. 4. Lógica proposicional. I. Título.

CDU 167.4

LARISSA CASTRO CRUZ

UMA AXIOMATIZAÇÃO PARA O CÁLCULO PROPOSICIONAL CLÁSSICO A PARTIR DE ROSSER

Monografia apresentada ao Curso de Filosofia da Universidade Federal do maranhão, para obtenção do grau de Licenciatura Plena em Filosofia.

Aprovada em / / Nota: (___________)

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Rogério José de Ribamar da Silva Júnior (Orientador)
Especialista em Filosofia
Universidade Federal do Maranhão

____

Prof. Raimundo Nonato Araújo Portela Filho
Mestre em Filosofia
Universidade Federal do Maranhão

____

Prof. César Frederico dos Santos
Mestre em Filosofia
Universidade Federal do Maranhão

Este trabalho é dedicado a todas as pessoas que buscam e acreditam na beleza dos seus sonhos.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe ***Maria Rita***, a minha vida, formação e o apoio incondicional; ao meu pai ***Valber Sarmento***; o amor e a proteção de todos os dias; à minha primeira irmã ***Katywcia Castro***; o ócio criativo; à minha segunda irmã ***Thalissia Maria***, o carinho, a acolhida e a ajuda constante; à minha madrinha ***Ildenê Sampaio***, minha segunda vida, a preocupação e a torcida; à minha tia: *Célia Sarmento*, o amor, a amizade e os momentos partilhados; a minha tia querida ***Marinalva Sampaio*** todo o respeito, a admiração, a zelo e aos meus primos: *Andréa Castro, Sarah Carolina, Beatriz Castro, Marcella Perotes, Michelle Rita, Yago Gabriel, Júnior, Fábio Oliveira*, aos meus primos de segundo grau: *Manuelle, Luiza e Michel*, pelos laços de amor; ao meu tio ***Benedito Filho*** pela inspiração inicial; auxílio e ajuda sempre; ao meu grande amor e companheiro ***Rogério Júnior***, a metamorfose, a paciência, a dedicação, o empenho e o conhecimento, bem como a força e a honra.

Aos meus verdadeiros amigos e filhotes: *Alice Barbosa* e *Erlik Quadros*, a dádiva de ser a família que eu escolhi, assim como o cultivo de uma enorme amizade e respeito das amigas: *Majú do Nascimento, Marcela Dehara* e *Nathalia Salazar*, que me permitiram conhecê-las e adotá-las.

Ao meu "irmão" *Júnior "Urso Branco"* a atenção, persistência e a ternura de todos os dias; à minha avó ***Rita Sampaio*** – à sua maneira – o apoio, as recomendações e a vigília; assim como os sentimentos, pensamentos, lembranças, o amor e o carinho eternos para a minha avó paterna *Clarisse*; ao *Jonas*, *Eunice, Kleber Perotes, Maria, Marise,* à tia *Marinete*, à minha tia *Marta Rocha*, à minha tia *Lenira*, à minha prima *Francinete*, o pequeno *Arthur,* ao Sr. *Domingos,* meu amigo *Erasmo*, *Marcelo,* bem como, cada membro de sua família, aos meus amigos do ensino médio, da igreja e da vida, das lidas de todos os dias, o meu muito obrigado.

Agradeço também à *Francisca,* ao *Padre Olívio Majdallani de Melo*, pelos cuidados e paciência; aos meus amigos e irmãos postiços também – *Maxsuel do*

Nascimento e *Magno Evangelista*. Dedico este trabalho também à todas as extensões das minhas amizades diárias, aos meus tios, primos, amigos da família que não foram citados mas que estão eternamente caminhando comigo em meu coração – aos meus amigos irmãos: *Mônika, Augusta* e *Marcos* pela acolhida contínua em suas vidas e nos trabalhos de vocês; ao meu especial amigo e irmão *Timóteo*, pela companhia, pelos conselhos e por toda a imensa lista que compõem a nossa lista de vida e de amizade; aos *Pe. Reginaldo* (pelos seus atributos de ensino e humanidade) e *Pe. Crizantonio*, à uma grande amiga *Audilene* que com o seu trabalho e sua lida diária de atividades sempre me proporcionou condições básicas de trabalho e estudo, muitas e muitos à outros que, por não terminaria a lista caso a continuasse.

Ao *Pe. Bernardo Muniz Rabelo Amaral*, que partiu desse mundo muito prematuramente, mas que me deixou um legado de sede e de busca pelo conhecimento. À ele os meus sentimentos profundos, sinceros e singelos de agradecimento por tanto tempo de carinho, empenho, amor, dedicação, atenção e cuidado comigo e com toda a minha família, por ter se inserido em nossa família e por fazer parte dela para sempre, de coração.

E em homenagem e agradecimentos póstumos, dedico também este trabalho, àquelas pessoas que estiveram comigo e que me acompanharam sempre, mas principalmente, àqueles que se foram deste plano, plantando em meu coração a certeza pela busca dos meus sonhos, pelo incentivo, pelo apoio e amor incomensuráveis. Pois estes foram aqueles que primeiro souberam e tiveram contato com estes sonhos.

Aos *clientes do café da manhã*, onde trabalho todos os domingos, pelas discussões e indagações calorosas. Enfim, a todos e a tantos que me apoiaram nessa trajetória, que sem perceber me conduziram e me formaram com seus gestos indiretos de apoio e de incentivo, sempre me indicando como devia me portar frente à busca incessante pelo conhecimento e cada um, a seu modo sempre me dizia: Avante, fica de modo sincero e eterno... ***Meu eterno, singelo e afetuoso, muito obrigado***.

“Ela [a Lógica] lhe dará clareza de pensamento, a habilidade de ver seu caminho através de um quebra-cabeça, o hábito de arranjar suas ideias numa forma acessível e ordenada, e, mais valioso que tudo, o poder de detectar falácias e despedaçar os argumentos ilógicos e inconsistentes que você encontrará tão facilmente nos livros, jornais, na linguagem quotidiana e mesmo nos sermões e que tão facilmente enganam aqueles que nunca tiveram o trabalho de instruir-se nesta fascinante arte.”

(Lewis Carroll)

“A maior habilidade de um líder é desenvolver habilidades extraordinárias em pessoas comuns.”

(Abraham Lincoln)

RESUMO

Apresenta o cálculo proposicional clássico, explorando suas principais definições sintáticas e semânticas. Aborda procedimentos de teste de validade para fórmulas, apresenta regras de inferência, e analisa o método de dedução natural em nível proposicional. Apresenta características fundamentais da noção de teorias formais. Exibe uma axiomatização para o cálculo proposicional clássico a partir dos axiomas de Rosser (1953) apresentados em Mendelson (1997). Examina os metateoremas de correção, completude e consistência para esta axiomatização.

Palavras-chave: Lógica proposicional. Validade. Regras de Inferência. Axiomatizações. Metateoremas.

ABSTRACT

Presents the classic propositional calculus, exploring its main syntactic and semantic definitions. Addresses validity of testing procedures for formulas, presents inference rules, and analyzes the natural deduction method in propositional level. Presents key features of the concept of formal theories. Displays an axiomatization for the classical propositional calculus from the axioms of Rosser (1953) presented in Mendelson (1997). Examines the metatheorems of soundness, completeness and consistency for this axiomatization.

Keywords: propositional logic. Validity. Inference rules. Axiomatizations. Metatheorems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentaremos uma axiomatização para o cálculo proposicional clássico, nos concentrando principalmente na demonstração de teoremas e de metateoremas a partir dos axiomas de Rosser(1953) sugeridos em Mendelson(1997).

O segundo capítulo será dedicado a uma descrição de seus princípios fundamentais a partir do ponto de vista sintático e semântico. Do ponto de vista sintático, faremos uma análise do método de dedução natural, e do ponto de vista semântico, uma abordagem por tablôs semânticos. No terceiro capítulo aprofundaremos a sintaxe do cálculo proposicional clássico da perspectiva de uma teoria formal, e será apresentada uma axiomatização da lógica clássica a partir dos axiomas de Rosser.

O último capítulo conterá considerações sobre o panorama e as aplicações da lógica simbólica e em particular, do método axiomático.

No apêndice estarão algumas demonstrações de consequências utilizadas e/ou mencionadas ao longo do trabalho.

1.1. UM BREVE HISTÓRICO DA LÓGICA

O surgimento da lógica é creditado a Aristóteles, no século IV a.C., a partir de seus Analíticos. Uma de suas principais contribuições é a teoria do silogismo, forma argumentativa que possui duas premissas e uma conclusão. O objetivo de sua teoria era fornecer critérios formais para determinar a validade de argumentos. Dentre os silogismos, os mais importantes eram os chamados categóricos, em referência aos tipos de proposição que os constituíam. Nestas proposições havia expressões que indicavam quantificações, além dos termos e elementos de cópula(a lógica aristotélica possuía características atributivas). Aristóteles também é creditado como tendo utilizado letras gregas para representar proposições, contribuindo para o uso de variáveis na lógica. No entanto, apesar da importância de seus trabalhos, os filósofos megáricos e estóicos também se ocuparam da lógica. Os últimos, na figura de Crísipo(cerca de 280-205 a.C.)

desenvolveram elementos que podemos reconhecer como sendo a base da lógica proposicional.

A lógica aristotélica dos silogismos permaneceu incólume e sendo considerada a lógica por excelência por toda a idade média e moderna, tendo o filósofo Kant(1724-1804) declarado inclusive que nada mais havia a ser feito na lógica. No século XIX, George Boole (1815-1864) publica *Investigação sobre as Leis do Pensamento* (1854), obra que inicia um tratamento simbólico e matemático para lógica aristotélica, propondo o cálculo lógico que ficou conhecido como *álgebra booleana*, o qual ampliava drasticamente as formas válidas de argumento. No entanto, foi a partir dos trabalhos do filósofo e matemático Gottlob Frege(1848-1925), que a lógica ganhou novo vigor e status de ciência, transformando-se radicalmente em uma disciplina matemática. O marco para isso foi a publicação em 1879 da obra *Conceitografia*.

Mais do que apenas identificar formas válidas de argumentos, a contribuição de Frege parte da tentativa de sistematizar o raciocínio matemático, mais precisamente formalizar a noção de *demonstração.* O resultado de seus esforços acabou por lançar as bases do *cálculo de predicados*, marco que distinguiu a nova lógica, agora chamada *simbólica* ou *matemática*, da teoria dos silogismos, agora conhecida como lógica *tradicional.* Assim, a introdução de uma linguagem formal para seu tratamento, a investigação sobre seus fundamentos e a utilização do método axiomático, transformaram a lógica em um campo fértil em desenvolvimentos, que vão desde considerações sobre os fundamentos da matemática até suas aplicações na área de inteligência artificial.

No entanto, a lógica tradicional e a lógica simbólica são ambas lógicas clássicas. O que as caracteriza enquanto tal é principalmente o fato de adotarem os chamados princípios lógicos clássicos, também conhecidos como princípios fundamentais do pensamento, a saber: o princípio de *identidade*(que enuncia que toda coisa é idêntica a si mesma), o princípio de *não-contradição*(que enuncia que não ocorre que algo seja e não seja ao mesmo tempo e sob o mesmo aspecto), e o princípio do *terceiro excluído*(que enuncia que dada uma coisa, ou ela ocorre ou não ocorre, não havendo uma terceira possibilidade). Alguns autores acrescentam um quarto princípio, de natureza semântica, a saber, o princípio de *bivalência*(o qual enuncia que dada uma proposição, ou ela é verdadeira ou é falsa).

1.2. LÓGICA E ARGUMENTOS

Contemporaneamente o escopo da lógica se concentra em investigar a noção de consequência lógica, mais precisamente em que condições determinada informação se segue de outra ou de outras. Este processo, no qual determinadas informações se seguem a partir de outras previamente fornecidas, é conhecido como processo de *inferência*, e seu resultado pode ser chamado simplesmente de inferência ou *raciocínio*.

Intuitivamente uma inferência típica pode ser representada pelo seguinte esquema:

$$\Gamma \longrightarrow \mathcal{B}$$

Figura 1: Esquema de um processo de inferência.
Fonte: Elaboração própria.

Neste esquema, o símbolo Γ representa um conjunto de informações iniciais e o símbolo $\mathcal{B}$ representa uma informação final, resultado do processo representado pela seta. As informações iniciais são classificadas como *premissas* ou *hipóteses*, e, por sua vez, a informação obtida a partir das anteriores é considerada a *conclusão* da inferência.

No entanto, como usualmente as inferências são caracterizadas como processos linguísticos formais, para que sejam investigadas de fato é necessário dispor dos *argumentos*. Um argumento pode ser caracterizado como uma representação ou reconstrução sensível do processo de inferência, ou seja, sua explicitação de modo oral ou escrito. Em outra perspectiva, porém, quando se evoca a noção de argumento, deseja-se que as informações que servem de premissas ou hipóteses para determinada conclusão forneçam *justificativa* ou *plausibilidade* para que a conclusão seja aceita, ou seja, que embasem ou fundamentem a conclusão. Deste modo, uma definição provisória que abrange as noções discutidas, pode ser apresentada de seguinte maneira:

Definição 1: *Um argumento é uma sequência de informações explicitadas de modo oral ou escrito, das quais uma é a conclusão e as outras são as premissas, e pretende-se que as premissas justifiquem a conclusão.*

As informações que constituem os argumentos são as *sentenças*, ou seja, expressões que apresentam sentido completo. Embora tenhamos muitos tipos de sentenças, as que são empregadas nos argumentos aqui descritos são as que podem ser identificadas como *frases declarativas*, ou seja, aquelas que afirmam ou asserem algo, de modo que são passíveis de serem verdadeiras ou falsas. Sentenças que expressam perguntas, ordens, pedidos ou interjeições, por não serem passíveis de verdade ou falsidade, não são partes dos argumentos investigados pelo tipo de lógica que abordaremos neste trabalho.

Neste ponto, é conveniente comentar que em algumas obras de lógica, o termo "*proposição*" é utilizado em lugar do termo "sentença", e de fato estas expressões são usadas de modo indistinto por alguns autores. Por esta razão, temos várias terminologias para o tipo de lógica que é escopo de nosso trabalho, sendo as principais: *cálculo proposicional clássico*, *cálculo sentencial clássico*, e *cálculo dos enunciados*.

Há, no entanto obras que apresentam uma distinção entre estas expressões, designando-as como noções diferentes. É o caso de Copi(1978, p. 22-23), que defende que uma proposição pode ser compreendida como o *significado* expresso por uma sentença. Assim, sentenças distintas como "*Os alienígenas utilizam a lógica.*" e "*A lógica é utilizada pelos alienígenas.*", por possuírem o mesmo significado, expressariam a mesma proposição, embora sejam diferentes na disposição de seus símbolos. Esta distinção é mais evidente em exemplos que envolvem idiomas distintos, onde as sentenças são radicalmente diferentes: a sentença "*The truth is out there.*" expressa a mesma proposição que a sentença "*A verdade está lá fora.*", embora não haja nem ao menos uma palavra em comum entre as duas. Uma discussão sobre esta questão também pode ser encontrada em Mortari (2001, p. 10-15).

Neste trabalho utilizaremos as duas expressões de forma semelhante, distinguindo-as apenas quando o contexto tornar necessário.

1.2.1. Classificação dos argumentos

Existem diferentes maneiras pelas quais a conclusão de um argumento pode ser relacionada à suas premissas, e estes modos acabam por delimitar o tipo de argumento em questão. Abordaremos brevemente algumas classificações úteis e usuais.

1.2.1.1. Argumentos indutivos

São argumentos nos quais a conclusão é obtida das premissas com base em uma probabilidade, uma analogia ou sugestão de algum tipo, sem, no entanto estar garantida por elas. Exemplos de argumentos indutivos são os seguintes:

(I) "*A ciência verificou a existência de ondas de rádio, indetectáveis aos nossos sentidos comuns. Também constatou a forma geóide da Terra, embora nos pareça plana. Portanto, provará em breve a existência de espíritos e fantasmas.*"

(II) "*A imensa maioria da população da América do Sul ao longo da história se mostrou praticante de algum tipo de culto religioso de matriz cristã. Assim, tendo sido de origem sul-americana, o médico guerrilheiro conhecido como Che Guevara, sem dúvida, era praticante da religião cristã.*"

No argumento (I), a partir de uma similaridade expressa em suas premissas, a conclusão afirma que a similaridade se repetirá para um próximo caso distinto dos anteriores. Mas, além de uma probabilidade, as premissas não constituem garantias suficientes de que o próximo caso descrito não possa ser diferente dos anteriores. Assim, não está adequadamente justificada pelas premissas.

No argumento (II), ainda que a premissa utilizada expresse uma generalização, esta representa apenas uma amostra, não abrangendo todos os casos. Assim, o caso particular afirmado na conclusão, embora plausível em virtude de forte sugestão, poderia constituir justamente uma das exceções não contempladas pela generalização da premissa.

1.2.1.2. Argumentos dedutivos

Os argumentos dedutivos se caracterizam pelo fato de que as premissas conduzem *necessariamente* à sua conclusão, de modo que há a pretensão de que a conclusão seja *consequência lógica* das premissas, mais do que apenas uma probabilidade. Exemplos de argumentos dedutivos são os seguintes:

(III) “*Todo lógico é demonstrador de teoremas. Por sua vez, todo demonstrador de teoremas é gastador compulsivo de papel e caneta. Portanto, todo lógico é gastador compulsivo de papel e caneta*.”

(IV) “*Se superar seu cansaço, então a aluna fará um bom trabalho de conclusão de curso. A aluna superou seu cansaço. Assim, fará um bom trabalho de conclusão de curso*.”

Tanto no argumento (III) como no argumento (IV), as conclusões são adequadamente justificadas pelas premissas, *caso as aceitemos*. De todo modo, negar as conclusões ou supor que elas não se seguem de suas premissas nestes exemplos seria entrar em contradição com as informações apresentadas nas mesmas. Outra característica que nos auxilia a delinear os argumentos dedutivos é o fato de que as premissas conduzem à conclusão em função de sua *forma* ou *estrutura*, independente do conteúdo que apresentem. O argumento (III), por exemplo, pode ser reformulado da seguinte maneira:

(III.I) “*Todo **X** é **Y**. Por sua vez, todo **Y** é **Z**. Portanto, todo **X** é **Z**.*”

Mesmo sem especificar as informações representadas pelos símbolos ***X***, ***Y*** e ***Z***, constatamos que as premissas ainda conduzem necessariamente à conclusão do argumento, em função de sua estrutura. O mesmo ocorre com o argumento (IV), cuja estrutura é como segue:

(IV.I) “*Se **X**, então **Y**. **X**. Assim, **Y**.*”

Uma boa parte da lógica contemporânea tem como escopo os argumentos dedutivos, por possibilitarem critérios mais precisos de verificação a partir de certos princípios fundamentais, conforme constataremos ao longo de nosso trabalho. No entanto, surgiram ao longo da história da lógica tentativas de aprofundamento em uma lógica cujo objeto fosse o conjunto dos argumentos indutivos. Estas iniciativas produziram alguns resultados interessantes, mas foram enfraquecidas por sérias dificuldades que inviabilizaram o mesmo nível de elaboração que alcançaram as lógicas dedutivas. Não aprofundaremos este tópico aqui.

1.2.1.3. Argumentos válidos e inválidos

Do ponto de vista intuitivo, um argumento é válido se, caso suas premissas sejam verdadeiras, a conclusão também é verdadeira. Uma definição mais estrita, embora provisória, é a seguinte:

Definição 2: *Um argumento é válido se qualquer circunstância que torna suas premissas verdadeiras faz com que sua conclusão seja automaticamente verdadeira.* (MORTARI, 2001, p. 19)

Note-se que a definição de argumento válido não estipula que as premissas devam ser verdadeiras, e sim que a conclusão será verdadeira *se* as premissas o forem. Assim, argumentos como o seguinte são considerados perfeitamente válidos:

(V) "*Todo coelho mutante possui escamas. O Sr. Trifônio é um coelho mutante. Portanto, o Sr. Trifônio possui escamas*."

Embora possamos de imediato considerar como falsas as premissas deste argumento, se houver alguma circunstância que as torne verdadeiras, a conclusão automaticamente será verdadeira, e por estas características, a conclusão é considerada *consequência lógica* das premissas.

Em virtude desta interdependência entre as premissas e a conclusão, somente podem ser considerados válidos os argumentos *dedutivos*. De fato, alguns autores consideram as noções de argumento válido e argumento dedutivo como equivalentes.

Caso as circunstâncias que tornem as premissas de um argumento verdadeiras não tornem necessariamente a sua conclusão verdadeira, teremos um caso de argumento *inválido*.

1.2.1.4. Argumentos corretos e incorretos

Esta é uma subclassificação dos argumentos válidos. Um argumento *correto* é um argumento válido cujas premissas são verdadeiras. Caso haja ao menos uma premissa falsa, se o argumento for válido, será incorreto.

Esta foi uma exposição superficial das noções de argumento, consequência lógica e validade. A partir do próximo capítulo tentaremos caracterizar de forma mais rigorosa estas noções com o auxílio de linguagens formais e procedimentos mais precisos para a determinação da validade de argumentos.

2. O CÁLCULO PROPOSICIONAL CLÁSSICO

Uma das grandes vantagens da lógica contemporânea sobre a tradicional foi a adoção de linguagens artificiais para o tratamento de inferências. Através deste instrumental foi possível sofisticar os procedimentos de verificação de validade, assim como lidar com inferências que possuem um grau de complexidade maior, como as que apresentam um número grande de sentenças.

Costumeiramente uma linguagem é caracterizada como possuindo uma *sintaxe* e uma *semântica*. A sintaxe de uma linguagem diz respeito à definição de seus símbolos básicos e o estabelecimento de regras para combiná-los de forma correta, de modo a obter expressões bem construídas da linguagem. A semântica por sua vez se refere aos significados atribuídos aos símbolos e expressões da linguagem, assim como à dinâmica entre estes significados.

Em uma linguagem artificial também é possível identificar estas dimensões, e a linguagem do cálculo proposicional clássico(o qual a partir de agora abreviaremos para CPC) aqui apresentada apresentará uma sintaxe e uma semântica. Estas dimensões irão determinar inclusive versões distintas para a noção de *validade*, assim como procedimentos distintos para determiná-la, ainda que possam ser equivalentes. As próximas seções serão dedicadas a explorar cada dimensão e seus respectivos métodos.

2.1. A SINTAXE DO CPC

A sintaxe do CPC é constituída pela especificação dos símbolos de sua linguagem e das regras de formação para combinar estes símbolos de modo a construir expressões bem formadas desta linguagem.

Os símbolos da linguagem do CPC serão especificados como segue:

- *variáveis proposicionais*: A, B, C,...,Z, A_1, B_1,... ;
- *operadores lógicos*: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;
- *símbolos auxiliares*: (,).

As variáveis proposicionais também são conhecidas por *variáveis sentenciais* ou simplesmente *letras sentenciais*, e representam sentenças simples de nossa linguagem natural, ou seja, sentenças que não podem ser decompostas em outras distintas que possuam também sentido completo. Exemplos disto seriam as sentenças:

“*Lucy atinge cem por cento de sua capacidade cerebral*.”, “*Sherlock Holmes é um grande detetive*.”, “*Há vida em Marte*.”..., dentre outras. Um dos elementos em comum nestes exemplos é que estas sentenças são frases *declarativas*, ou seja, estão afirmando ou asserindo algo, diferentemente de enunciados que expressam perguntas, interjeições, ordens ou pedidos. Conforme já dito em capítulo anterior, a linguagem do cálculo proposicional especificada aqui terá como objeto somente a classe de sentenças exemplificada (as declarativas), não abrangendo as outras categorias, que são normalmente contempladas por linguagens lógicas mais sofisticadas.

Uma linguagem lógica minimamente satisfatória deve poder lidar com infinitas sentenças, e assim, deveria possuir um conjunto infinito de símbolos sentenciais. Em nosso caso, indica-se o uso de subscritos numéricos para as letras que exercem a função de variáveis proposicionais, tornando assim o conjunto destas variáveis infinito.

Os operadores lógicos (também conhecidos como *conectivos lógicos*) correspondem a certas expressões de nossa linguagem natural que designam funções lógicas. Uma breve descrição desta correspondência é explicitada na tabela seguinte.

Operador lógico	***Símbolo***	***Expressões usuais em linguagem natural***
Negador	$\neg$	não, nem, não ocorre que, não é o caso que, nega-se que...
Conjuntor	$\wedge$	e, mas, também, conjuntamente...
Disjuntor	$\vee$	ou___ ou___, ou...
Implicador/ Condicional	$\Rightarrow$	se___ então__, caso___ então, ___é condição para___, __implica em___, ...
Bi-implicador/ Bicondicional/ Equivalência	$\Leftrightarrow$	__ se e somente se__, __equivale a__,...

Figura 2: Correspondência dos operadores lógicos.
Fonte: Elaboração própria.

Do ponto de vista sintático, um operador gera sentenças compostas a partir de sentenças mais elementares.

Os símbolos auxiliares consistem no par de parênteses. Estes exercem para a linguagem artificial a função de evitar ambiguidades.

As regras de formação para a sintaxe do CPC especificam que expressões da linguagem formal podem ser consideradas bem formadas, o que designaremos abreviadamente por *fbf's*(fórmulas-bem-formadas), e são descritas logo a seguir:

- *variáveis proposicionais* são fbf's, do tipo *atômicas*.
- se $\mathcal{B}$ é uma fbf, então $\neg\, \mathcal{B}$ é uma fbf, do tipo *molecular*.
- se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são fbf's, então $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$, $(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$, $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ e $(\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C})$ são fbf's, do tipo *molecular*.

Convencionaremos omitir o par de parênteses mais externo quando isto não ocasionar ambiguidades.

Observemos que os símbolos $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ ... não são símbolos definidos ou especificados na linguagem do CPC, que é a nossa linguagem objeto, mas sim *esquemas de fórmulas*, utilizados no nível da metalinguagem. Estes símbolos podem representar qualquer fórmula do CPC atômica ou molecular, e são conhecidos também como *variáveis metalinguísticas*. Utilizaremos este recurso ao longo de todo o trabalho.

2.1.1. O método de dedução natural

Conforme dito anteriormente, a dimensão sintática do CPC possui seus próprios procedimentos para determinar a validade de argumentos, e um de seus principais recursos é o método de *dedução natural*. A noção central deste método é a de *dedução*, definida como segue:

Definição 3 (Dedução): *Sejam* Γ *um conjunto qualquer de fórmulas e* $\mathcal{B}$ *uma fórmula. Uma dedução de* $\mathcal{B}$ *a partir de* Γ *é uma sequência finita* $\mathcal{C}_1,\ldots \mathcal{C}_n$ *de fórmulas, tal que* $\mathcal{C}_n = \mathcal{B}$ *e cada* $\mathcal{C}_i$, $1\leq i \leq n$, *é uma fórmula que pertence a* Γ *ou foi obtida a partir de fórmulas que aparecem antes na sequência, por meio da aplicação de alguma regra de inferência.*(MORTARI, 2001, p. 242)

Ou seja, trata-se de uma sequência finita e não vazia de fórmulas, das quais cada uma pertence a um conjunto de hipóteses ou é resultado de fórmulas anteriores na sequência por meio de alguma regra de inferência. A última fórmula da sequência é a *conclusão* da dedução ou *consequência lógica* do conjunto de hipóteses.

Por sua vez, a noção de *consequência lógica* do ponto de vista sintático pode ser definida como segue:

Definição 4 (Consequência lógica): *Sejam* Γ *um conjunto qualquer de fórmulas e* $\mathcal{B}$ *uma fórmula. Dizemos que* $\mathcal{B}$ *é consequência lógica (sintática) de* Γ, *o que denotamos por* '$\Gamma \vdash \mathcal{B}$', *se há uma dedução de* $\mathcal{B}$ *a partir de* Γ.

2.1.2. Regras de inferência

Como dito, uma dedução é efetuada com o auxílio de uma ou mais regras de inferência. As regras de inferência, também conhecidas como *regras de transformação* ou *regras de dedução*, são, grosso modo, esquemas formais de inferências, onde uma vez fornecidas as hipóteses da regra, obtém-se automaticamente a conclusão prevista pela mesma. De outro modo, as regras de inferência representam estruturas sempre válidas de argumento, aceitas como elementos primitivos em uma dedução para que deduções mais complexas sejam realizadas. O grupo de regras que apresentaremos como primitivas para esta abordagem livre do CPC é muito usual em vários manuais de lógica, e, embora possam ser demonstradas a partir de outras, persistir neste caminho nos levaria a um regresso ao infinito.

2.1.2.1. Regras de Implicação Lógica

As regras de implicação lógica tratam das conclusões que podem ser obtidas caso tenhamos determinadas sentenças como hipóteses. Aqui, listaremos um conjunto de dez:

a) *Modus Ponens* (MP)

$$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$$

Esta regra também é conhecida como *afirmação do antecedente* ou *regra de destacamento.* Se uma inferência possui uma fórmula condicional $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ como uma de suas premissas, e como sua outra premissa a fórmula $\mathcal{B}$, então pode-se concluir a fórmula $\mathcal{C}$. Intuitivamente, se uma fórmula é antecedente ou condição para outra, e esta condição é satisfeita, a fórmula consequente se segue necessariamente.

b) *Modus Tollens* (MT)

$$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \neg \mathcal{C} \vdash \neg \mathcal{B}$$

Também chamada de *negação do consequente*, esta regra afirma que, se uma inferência possui uma fórmula condicional $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ como uma de suas premissas, e como sua outra premissa a fórmula $\neg \mathcal{C}$, então pode-se concluir a fórmula $\neg \mathcal{B}$. De outra forma, podemos dizer que, se uma fbf $\mathcal{B}$ é condição para uma fbf $\mathcal{C}$, e o consequente $\mathcal{C}$ é negado, então a condição $\mathcal{B}$ não foi preenchida, ou seja, temos $\neg \mathcal{B}$.

c) *Simplificação* (Simp.)

$$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \vdash \mathcal{B} \quad \text{ou} \quad \mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \vdash \mathcal{C}$$

A partir de uma conjunção $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$, pode-se concluir alternativamente qualquer um de seus conjuntos, ou $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{C}$. De forma intuitiva, se duas informações são verdadeiras juntas, pode-se afirmar a ocorrência de cada uma delas.

d) *Dilema Construtivo* (DC)

$$(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}), \mathcal{B} \vee \mathcal{D} \vdash \mathcal{C} \vee \mathcal{E}$$

Esta regra pode ser interpretada como uma generalização da regra *modus ponens*. A partir de uma conjunção entre duas implicações, caso ocorra uma disjunção entre os antecedentes das mesmas, podemos concluir a disjunção entre seus consequentes.

e) *Dilema Destrutivo* (DD)

$$(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}), \neg \mathcal{C} \vee \neg \mathcal{E} \vdash \neg \mathcal{B} \vee \neg \mathcal{D}$$

Similar à regra anterior, esta regra pode ser interpretada como uma generalização da regra *modus tollens.* A partir de uma conjunção entre duas implicações, caso ocorra uma disjunção entre as negações dos consequentes das mesmas, podemos concluir a disjunção entre as negações dos antecedentes.

f) *Conjunção* (Conj.)

$$\mathcal{B}, \mathcal{C} \vdash \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$$

Aqui temos o inverso da regra de simplificação. Caso uma fbf $\mathcal{B}$ e uma fbf $\mathcal{C}$ sejam ambas premissas de um raciocínio, podemos concluir a conjunção entre $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

g) *Silogismo Hipotético* (SH)

$$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D} \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D}$$

Se uma fórmula $\mathcal{B}$ implica em uma fórmula $\mathcal{C}$, e, por sua vez, $\mathcal{C}$ implica em uma fórmula $\mathcal{D}$, conclui-se que $\mathcal{B}$ implica $\mathcal{D}$. Ou seja, se temos duas implicações em série, nas quais a fbf consequente da primeira ocorre como antecedente da segunda, então temos como conclusão uma implicação composta pelo antecedente da primeira e pelo consequente da segunda.

h) *Silogismo Disjuntivo* (SD)

$$\mathcal{B} \vee \mathcal{C}, \neg \mathcal{B} \vdash \mathcal{C} \quad \text{ou} \quad \mathcal{B} \vee \mathcal{C}, \neg \mathcal{C} \vdash \mathcal{B}$$

Caso tenhamos como uma das premissas em um raciocínio uma disjunção, e como outra a negação de um dos disjuntos anteriores, então pode-se concluir a afirmação do outro disjunto.

i) *Adição* (Ad.)

$$\mathcal{B} \vdash \mathcal{B} \vee \mathcal{C} \quad \text{ou} \quad \mathcal{C} \vdash \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$$

Tomando uma fbf qualquer como premissa, podemos concluir sua disjunção com qualquer outra fórmula. Dito de outro modo, se uma sentença é verdadeira, também é verdadeiro afirmar que ou ela ocorre ou ocorre qualquer outra sentença.

j) *Absorção* (Abs.)

$$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$$

Dado um condicional $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, obtém-se como conclusão que a fórmula $\mathcal{B}$ implica na conjunção entre $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Esta regra afirma uma noção que já estava presente na regra *modus ponens*, a saber, se $\mathcal{B}$ é condição para $\mathcal{C}$, então, uma vez que ocorra $\mathcal{B}$, teremos além de $\mathcal{B}$, a fórmula $\mathcal{C}$.

Como exemplo de aplicação deste primeiro conjunto de regras, vamos demonstrar que a fórmula $\neg \mathcal{B} \vee \neg \mathcal{F}$ é consequência lógica das fórmulas $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})$, $(\mathcal{B} \wedge (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})) \Rightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{F}$ e $\neg (\mathcal{B} \vee \mathcal{F})$:

1. $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})$	hipótese
2. $(\mathcal{B} \wedge (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})) \Rightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{F}$	hipótese
3. $\neg (\mathcal{B} \vee \mathcal{F})$	hipótese
4. $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}))$	1 Abs.
5. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{F}$	2, 4 SH
6. $\neg \mathcal{B}$	3,5 MT
7. $\neg \mathcal{B} \vee \neg \mathcal{F}$	6 Ad.
	Q.E.D.

2.1.2.2. Regras de Equivalência Lógica

As regras de equivalência lógica asserem uma equivalência entre a premissa da regra e sua conclusão. Enquanto que nas regras anteriores as premissas acarretavam logicamente suas conclusões sem que o inverso ocorresse, neste novo conjunto de regras, se tomarmos suas conclusões como premissas, teremos logicamente as premissas originais como conclusões. Para expressar a relação de dedutibilidade característica deste novo conjunto de regras, utilizaremos a notação "$\dashv \vdash$". Assim, se temos $\mathcal{B} \dashv \vdash \mathcal{C}$, então $\mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \vdash \mathcal{B}$.

Em nossa exposição, também faremos uso da expressão "vice-versa" quando designarmos a dupla direção da relação de dedutibilidade.

a) *Dupla Negação* (DN)

$$\neg \neg \mathcal{B} \dashv \vdash \mathcal{B}$$

Também identificada por alguns autores como *eliminação da negação*, assere que, da negação da negação de uma fbf, podemos concluir a afirmação da mesma fbf, e vice-versa.

b) *Comutatividade* (Com.)

$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \dashv\vdash \mathcal{C} \wedge \mathcal{B}$

$\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \dashv\vdash \mathcal{C} \vee \mathcal{B}$

Dada uma fbf $\mathcal{B}$ em conjunção com uma fbf $\mathcal{C}$, pode-se concluir a conjunção de $\mathcal{C}$ com $\mathcal{B}$, e vice-versa. De modo similar, de uma disjunção entre $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, podemos concluir a disjunção $\mathcal{C} \vee \mathcal{B}$, e vice-versa. Observamos assim que, esta regra assere que a ordem dos conjuntos em uma conjunção ou dos disjuntos em uma disjunção não altera a função lógica das referidas operações.

c) *Associatividade* (Assoc.)

$\mathcal{B} \wedge (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \dashv\vdash (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \wedge \mathcal{D}$

$\mathcal{B} \vee (\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \dashv\vdash (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \vee \mathcal{D}$

Esta regra permite que modifiquemos o agrupamento dos parênteses em fórmulas que apresentam conjunções ou disjunções sucessivas. Caso uma fbf $\mathcal{B}$ esteja em conjunção com uma fbf $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$, podemos obter como conclusão a conjunção entre uma fbf $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ e uma fbf $\mathcal{D}$, e vice-versa. Do mesmo modo, a partir de uma disjunção entre uma fbf $\mathcal{B}$ e uma fbf $\mathcal{C} \vee \mathcal{D}$, podemos concluir a disjunção entre a fbf $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ e a fbf $\mathcal{D}$. Intuitivamente, a regra nos autoriza a realizar qualquer agrupamento conveniente em operadores de conjunção em série ou disjunção em série, para preservar sua característica binária(ou seja, de operar exatamente duas fórmulas por vez).

d) *De Morgan* (DM)

$\neg (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \dashv\vdash \neg \mathcal{B} \vee \neg \mathcal{C}$

$\neg (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \dashv\vdash \neg \mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{C}$

Nomeada em homenagem ao lógico Auguste De Morgan, esta regra possui duas formulações. Na primeira, afirma que da negação de uma conjunção, obtém-se a disjunção da negação de cada um de seus conjuntos, e vice-versa. A segunda afirma que, da negação de uma disjunção, podemos concluir a conjunção da negação de seus disjuntos, e vice-versa. Caracterizando de forma intuitiva a primeira formulação, podemos dizer que se não ocorre que duas fbf's $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ estejam em conjunção, é porque ou não ocorre a fbf $\mathcal{B}$, ou não ocorre a fbf $\mathcal{C}$. Na segunda formulação, podemos dizer que, se não é possível uma disjunção entre $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, é porque não ocorre a fbf $\mathcal{B}$ e não ocorre a fbf $\mathcal{C}$.

e) *Contraposição* (Contrap.)

$$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \dashv\vdash \neg \mathcal{C} \Rightarrow \neg \mathcal{B}$$

Também chamada de *transposição*, esta regra enuncia que, caso tenhamos um condicional como premissa, teremos como conclusão outro condicional, constituído pela inversão das fórmulas antecedente e consequente, ambas acrescidas de operadores de negação. O contrário também é válido. Esta regra pode ser interpretada como uma versão da regra *modus tollens*, pois, dado um condicional qualquer, uma vez que o consequente é negado, temos a negação do antecedente como consequência.

f) *Distribuição* (Distr.)

$$\mathcal{B} \wedge (\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \dashv\vdash (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{D})$$

$$\mathcal{B} \vee (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \dashv\vdash (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{D})$$

A principal aplicação desta regra é transformar conjunções em disjunções e vice-versa. Se uma fbf $\mathcal{B}$ está em conjunção com uma fbf $\mathcal{C} \vee \mathcal{D}$, então conclui-se que $\mathcal{B}$ está em conjunção com $\mathcal{C}$ ou que está em conjunção com $\mathcal{D}$. Visualmente, houve uma distribuição da fbf $\mathcal{B}$ em conjunção com as fbf's que estavam dentro do par de parênteses. Analogamente, se uma fbf $\mathcal{B}$ está em disjunção com uma fbf $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$, a distribuição mencionada funciona de forma similar, ou seja, pode-se concluir que $\mathcal{B}$ está em disjunção com $\mathcal{C}$ e que está em disjunção com $\mathcal{D}$.

g) *Exportação* (Exp.)

$$(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{D} \dashv\vdash \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})$$

A depender do sentido da derivação também pode ser chamada de *importação.* Esta regra permite que uma das fórmulas que constituem o antecedente de um condicional (desde que este antecedente seja uma conjunção), seja alocada para o consequente, bastando eliminar a conjunção e introduzir outro operador condicional na fbf resultante, e vice-versa. Intuitivamente, se as fbf's $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são simultaneamente condições para a fbf consequente $\mathcal{D}$, pode-se expressar esta situação agrupando-as em uma conjunção que será o antecedente do referido condicional, ou, alternativamente, expressá-las ambas como antecedentes de condicionais em série cujo consequente final é a fbf $\mathcal{D}$.

g) *Tautologia* (Taut.)

$$\mathcal{B} \dashv\vdash \mathcal{B} \wedge \mathcal{B}$$

$$\mathcal{B} \dashv\vdash \mathcal{B} \vee \mathcal{B}$$

Apresentada por alguns autores também como *regra de idempotência*, esta regra possui uma versão para a conjunção e uma para a disjunção. Em sua versão para o operador de conjunção, ela expressa que a partir de uma fbf qualquer, pode-se concluir a conjunção desta fbf consigo mesmo, e vice-versa. De forma similar para o operador de disjunção, de uma fbf qualquer pode-se concluir a disjunção desta fbf consigo mesma, e vice-versa.

i) *Implicação Material* (IM)

$$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \dashv\vdash \neg\, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$$

Esta regra permite que tratemos uma implicação em termos dos operadores de negação e disjunção, e vice-versa, desde que a estrutura lógica seja respeitada. Se uma fbf $\mathcal{B}$ implica em uma fbf $\mathcal{C}$, pode-se concluir a negação da fbf $\mathcal{B}$ em disjunção com a fbf $\mathcal{C}$, e vice-versa. Esta regra pode ser intuitivamente associada ao funcionamento da tabela de verdade da implicação, onde se verifica que, para que uma implicação se mantenha, basta que o antecedente seja falso ou que o consequente seja verdadeiro.

j) *Equivalência Material* (EM)

$$\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C} \dashv\vdash (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B})$$

Se uma fbf $\mathcal{B}$ equivale a uma fbf $\mathcal{C}$, conclui-se que a primeira implica na segunda, e, a segunda implica na primeira. Por sua vez, dada uma conjunção onde os conjuntos componentes são, respectivamente, $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$, conclui-se que as fbf's $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ se equivalem.

As regras de inferência abordadas nos auxiliam a demonstrar definições que afirmam a equivalência entre duas fórmulas, as quais normalmente são introduzidas sem demonstração em sistemas formais. Ainda que não se possa muitas vezes provar estas definições com recursos do próprio sistema, é útil compreender como elas se originam.

Como exemplo, demonstraremos a equivalência entre as fórmulas $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ e $\neg (\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{C})$, a qual será adotada como definição no sistema axiomático investigado mais à frente neste trabalho.

$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \dashv\vdash \neg (\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{C})$

1ª parte:

1. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	hipótese
2. $\neg \mathcal{C} \Rightarrow \neg \mathcal{B}$	1 Contrap.
3. $\neg \neg \mathcal{C} \vee \neg \mathcal{B}$	2 IM
4. $\neg (\neg \mathcal{C} \wedge \mathcal{B})$	3 DM
5. $\neg (\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{C})$	4 Com.

Q. E. D.

2ª parte:

1. $\neg (\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{C})$	hipótese
2. $\neg \mathcal{B} \vee \neg \neg \mathcal{C}$	1 DM
3. $\mathcal{B} \Rightarrow \neg \neg \mathcal{C}$	2 IM
4. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	3 DN[1]

Q. E. D.

Constatamos que ao tomar $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ como hipótese, obtemos como conclusão $\neg (\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{C})$, e, por sua vez, quando tomamos $\neg (\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{C})$ como a hipótese, temos $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ como resultado. Assim, as fórmulas $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ e $\neg (\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{C})$ se equivalem.

2.2. A SEMÂNTICA DO CPC

Tradicionalmente, a dimensão semântica de uma linguagem trata do significado ou interpretação dada aos símbolos desta linguagem e das regras para a manipulação destes significados. Isto também ocorre para uma linguagem artificial

[1] Estamos pressupondo aqui uma regra de substituição de fórmulas equivalentes.

como a do CPC, porém, de forma simplificada em nosso caso: a dimensão semântica do CPC é baseada somente nas noções de *verdade* e *falsidade*. Embora estas noções sejam objeto de debates profundos do ponto de vista filosófico, para fins de tratamento do CPC, elas devem ser tomadas como *valores lógicos*, os quais denominaremos de *valores de verdade*. Assim, pode-se dizer que a semântica do CPC possui os seguintes valores lógicos: o valor *verdadeiro*(o qual representaremos por *V*) e o valor *falso*(o qual representaremos por *F*).

Formalmente, a semântica do CPC é uma função, a qual denominaremos por *valoração* (V), que atribui os valores *V* ou *F* às fórmulas atômicas de sua linguagem, e estabelece regras para calcular o valor de verdade para as fórmulas moleculares. Assim, sendo $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ fórmulas quaisquer, temos:

Definição 5(valoração): Uma valoração V é um função do conjunto de todas as fórmulas de uma linguagem proposicional no conjunto de valores de verdade $\{V, F\}$, tal que:

- $\mathrm{V}(\mathcal{B}) = V$ ou $\mathrm{V}(\mathcal{B}) = F$;
- $\mathrm{V}(\neg\mathcal{B}) = V$ sse* $\mathrm{V}(\mathcal{B}) = F$;
- $\mathrm{V}(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) = V$ sse $\mathrm{V}(\mathcal{B}) = \mathrm{V}(\mathcal{C}) = V$;
- $\mathrm{V}(\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = V$ sse $\mathrm{V}(\mathcal{B})= V$ ou $\mathrm{V}(\mathcal{C}) = V$;
- $\mathrm{V}(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) = V$ sse $\mathrm{V}(\mathcal{B})= F$ ou $\mathrm{V}(\mathcal{C}) = V$;
- $\mathrm{V}(\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) = V$ sse $\mathrm{V}(\mathcal{B})= \mathrm{V}(\mathcal{C})$.

Estas cláusulas/definições podem ser representadas de outra forma, em disposições conhecidas como *tabelas de verdade*, as quais exibiremos a seguir:

Negação

$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{B}$
V	*F*
F	*V*

Conjunção

$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*F*

Disjunção

$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$
V	*V*	*V*
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*
F	*F*	*F*

Bicondicional

$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*V*

Implicação

$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*V*
F	*F*	*V*

Figura 3: Tabelas de verdade.
Fonte: Elaboração própria.

Abaixo estão alguns exemplos que mostram como calcular o valor de verdade de fórmulas moleculares com base nas noções apresentadas:

Seja V($\mathcal{B}$)= *V*, V($\mathcal{C}$)= *F* e V($\mathcal{D}$)= *V*. Calculemos então o valor de

(a) $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{D}$, (b) $\neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ e (c) $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})$.

Para a letra (a), segundo as atribuições estipuladas, teríamos:

$\mathcal{B}$	$\wedge$	$\mathcal{C}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{D}$
V	*F*	*F*	***V***	*V*

Para a letra (b):

$\neg$	($\mathcal{B}$	$\wedge$	$\mathcal{C}$)
V	*V*	*F*	*F*

E para (c):

$\mathcal{B}$	$\Rightarrow$	($\mathcal{C}$	$\Rightarrow$	$\mathcal{D}$)
V	*V*	*F*	*V*	*V*

Fórmulas cujo valor de verdade é sempre o verdadeiro para qualquer atribuição de valores às suas subfórmulas são conhecidas como *tautologias*. Assim:

Definição 6(Tautologia): *Uma fórmula* $\mathcal{B}$ *é uma tautologia se, para toda* V, V($\mathcal{B}$)= *V*.

Para denotar que uma fórmula é tautologia utilizaremos o símbolo '$\models$' prefixado à fórmula em questão. Deste modo, $\models \mathcal{B}$ pode ser lido como "$\mathcal{B}$ é uma tautologia".

Fórmulas cujo valor de verdade é sempre o falso para qualquer valoração de suas subfórmulas são denominadas de *contradições.* Assim:

Definição 7(Contradição): *Uma fórmula $\mathcal{B}$ é uma contradição se, para toda* V, V($\mathcal{B}$)= *F*.

Por sua vez, fórmulas que são verdadeiras em certas valorações mas falsas em outras, são chamadas de *contingências*. Segue a definição:

Definição 8(Contingência): *Uma fórmula $\mathcal{B}$* é *uma contingência se, há ao menos uma valoração* V_1, *tal que* V($\mathcal{B}$)= *V*, *e ao menos uma valoração* V_2 t*al que* V($\mathcal{B}$)= *F*.

Uma vez estabelecida a noção de valoração e seus principais conceitos relacionados, definiremos agora a noção de *consequência lógica* do ponto de vista semântico.

Definição 9(Consequência lógica fraca): *Uma fórmula $\mathcal{B}$ implica logicamente uma fórmula $\mathcal{C}$* (*ou $\mathcal{C}$ é uma consequência lógica de $\mathcal{B}$*) *se, para toda valoração* V t*al que* V($\mathcal{B}$) = *V*, *temos que* V($\mathcal{C}$) = *V*.

Ou seja, uma fórmula implica logicamente outra(do ponto de vista semântico) se, para toda valoração que torna a primeira verdadeira, a segunda também é verdadeira. Observemos que esta definição é muito similar à definição intuitiva de argumento válido que foi afirmada no capítulo anterior. Para designar o caso em que uma fórmula é consequência lógica de outra, utilizaremos o símbolo '$\models$', o qual usamos anteriormente para designar uma fórmula tautológica, da seguinte forma:

$$\mathcal{B} \models \mathcal{C}.$$

Esta expressão pode ser lida como "$\mathcal{B}$ implica logicamente $\mathcal{C}$", ou "$\mathcal{C}$ é uma consequência lógica d*e* $\mathcal{B}$".

Podemos estender as definições anteriores para casos em que estejamos lidando com um conjunto de fórmulas como hipóteses. Neste caso precisaremos definir a noção de *modelo*, e adequar a definição de consequência lógica para incluir um conjunto de fórmulas. Segue então a definição de modelo:

Definição 10(modelo): *Uma valoração* V *é modelo de um conjunto de fórmulas* Γ *se, para toda* $\gamma \in \Gamma$, V(γ)= *V*. (MORTARI, 2001, p.148)

Ou seja, uma valoração é modelo de um conjunto de fórmulas se ela torna verdadeiras todas as fórmulas do conjunto. Para indicar que uma valoração V é modelo de um conjunto Γ, escrevemos ‘$V \models \Gamma$’.

Definição 11(consequência lógica forte): *Seja* Γ *um conjunto de fórmulas*, *e* $\mathcal{B}$ *uma fórmula*. *Dizemos que* $\mathcal{B}$ *é uma consequência lógica de* Γ (*ou que* Γ *implica logicamente* $\mathcal{B}$ *) se, para toda valoração* V *tal que* $V \models \Gamma$, $V(\mathcal{B}) = F$.

As tautologias, por serem fórmulas sempre verdadeiras (e portanto válidas no CPC), são consideradas do ponto de vista semântico como "leis lógicas", e existem recursos no CPC para identificar ou testar se uma determinada fórmula é ou não uma tautologia. Embora haja outros, os principais mecanismos para este fim são as próprias tabelas de verdade, e também os chamados *tablôs semânticos*. As tabelas de verdade são um procedimento de prova *direto*, ou seja, constroem passo a passo o resultado que se deseja obter, e através delas é possível determinar não apenas se uma fórmula é uma tautologia, mas também se é uma contradição ou contingência. Embora largamente explanadas em muitas obras sobre lógica, optaremos por utilizar em nosso trabalho um procedimento de prova *indireto*, a saber, os tablôs semânticos.

2.2.1. Tablôs semânticos

Os tablôs semânticos são conhecidos também como *árvores de refutação*, em decorrência de seu aspecto ramificado e são utilizados principalmente como procedimentos de teste de validade de fbf’s. Há muitas versões disponíveis dos tablôs, a depender do tipo de lógica a ser tratada. Apresentaremos aqui uma versão para o CPC.

O teste de validade por tablôs semânticos é baseada no *princípio de redução ao absurdo*. A redução ao absurdo pode ser utilizada como procedimento de prova indireto, e consiste em supor a negação do que se quer demonstrar, calculando em seguida as consequências desta suposição. Caso as consequências levem a uma contradição(absurdo lógico), verifica-se que a suposição inicial estava incorreta, provando-se assim o que realmente se queria demonstrar.

Aplicando este princípio ao teste de validade por tablôs, iniciamos supondo primeiramente a falsidade da fórmula que será testada. A partir da decomposição dos valores de verdade de suas fórmulas moleculares utilizando as regras de construção dos tablôs, chegamos aos valores de verdade de suas fórmulas mais elementares. Caso haja alguma contradição entre os valores de verdade de suas fórmulas atômicas, conclui-se que a suposição inicial de falsidade está incorreta. Isto quer dizer que não há nenhuma circunstância em que a fórmula em questão seja falsa, ou seja, ela é uma tautologia, e portanto, válida no CPC. Por outro lado, caso não tenha havido contradições entre os valores das fórmulas atômicas, encontramos uma circunstância em que a fórmula realmente pode ser falsa, o que nos diz que ela não é válida.

Os tablôs também podem ser utilizados para testar a validade de argumentos. Para isto, basta que suponhamos inicialmente que o argumento em questão possa ser inválido em alguma circunstância, ou seja, que sua premissa ou premissas sejam verdadeiras, porém levem a uma conclusão falsa. Daí procedemos do mesmo modo mencionado anteriormente, decompondo as fórmulas moleculares até chegarmos aos valores de verdade das fórmulas atômicas. Novamente, a presença ou ausência de contradições indicarão a validade ou invalidade do argumento.

2.2.1.1. Regras de construção

a) Negação:

$$\frac{V\,\neg\mathcal{B}}{F\,\mathcal{B}} \qquad\qquad \frac{F\,\neg\mathcal{B}}{V\,\mathcal{B}}$$

b) Conjunção:

$$\frac{V\,\mathcal{B}\wedge\mathcal{C}}{\begin{array}{c}V\,\mathcal{B}\\ V\,\mathcal{C}\end{array}} \qquad\qquad \frac{F\,\mathcal{B}\wedge\mathcal{C}}{\begin{array}{ccc} & / \quad \backslash & \\ F\mathcal{B} & & F\mathcal{C}\end{array}}$$

c) Disjunção:

$$\begin{array}{c} V\,\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \\ \hline / \qquad \backslash \\ V\mathcal{B} \qquad V\mathcal{C} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} F\,\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \\ \hline F\,\mathcal{B} \\ F\,\mathcal{C} \end{array}$$

d) Implicação:

$$\begin{array}{c} V\,\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \\ \hline / \qquad \backslash \\ F\mathcal{B} \qquad V\,\mathcal{C} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} F\,\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \\ \hline V\,\mathcal{B} \\ F\,\mathcal{C} \end{array}$$

e) Bicondicional:

$$\begin{array}{c} V\,\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C} \\ \hline / \qquad \backslash \\ \begin{array}{cc} V\mathcal{B} & F\,\mathcal{B} \\ V\,\mathcal{C} & F\,\mathcal{C} \end{array} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} F\,\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C} \\ \hline / \qquad \backslash \\ \begin{array}{cc} V\,\mathcal{B} & F\,\mathcal{B} \\ F\,\mathcal{C} & V\,\mathcal{C} \end{array} \end{array}$$

Figura 4: Regras de construção para tablôs semânticos.
Fonte: Mortari, 2001, p.204.

As regras de construção dos tablôs também são chamadas de *regras de expansão*, pois visualmente expandem o tablô de modo a dotá-lo do aspecto de uma árvore invertida. Cada uma das fórmulas que compõem o tablô são chamadas de *nodos* ou *nós*, e cada fórmula molecular decomposta segundo as regras acima, é dita como sendo *processada.* Caso haja mais de uma possibilidade de análise na decomposição de uma fórmula molecular, será aberta uma bifurcação no tablô conhecida como *ramo*. Um ramo será considerado *aberto*, caso não haja mais fórmulas a decompor e nenhuma contradição for encontrada entre os valores de verdade das fórmulas atômicas presentes no ramo. Um ramo será considerado *fechado* se for verificada alguma contradição entre os valores de verdade das fórmulas atômicas presentes no mesmo. Quando todas as fórmulas moleculares do tablô são decompostas, considera-se o tablô *terminado*.

Uma vez terminado o tablô, caso ainda haja algum ramo aberto, verifica-se que a suposição inicial de falsidade estava correta, e a fórmula é de fato inválida. Entretanto, se todos os ramos estiverem fechados, a fórmula em questão não pode ser falsa, sendo portanto válida. Com poucas adaptações, o mesmo princípio é aplicado a testes de validade de argumentos, conforme já descrito anteriormente.

Como exemplo, testaremos a validade da fórmula $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B})$, por tablôs:

$$
\begin{array}{c}
\checkmark\ F\ \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}) \\
V\ \mathcal{B} \\
\checkmark\ F\ \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \\
V\ \mathcal{C} \\
F\ \mathcal{B} \\
\text{x}
\end{array}
$$

Começamos supondo inicialmente a invalidade da fórmula, ou seja, que há uma circunstância em que a fórmula $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B})$ é falsa, o que é representado na primeira linha. Para que isto ocorra, pelas regras de construção, é necessário que o antecedente $\mathcal{B}$ seja *V* e o consequente $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$ seja *F*, situação contemplada na segunda e terceira linhas do tablô. Assinalamos a fórmula da primeira linha, indicando que a mesma já foi processada. Na terceira linha obtivemos que $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$ é *F*. Pelas regras de construção do operador de implicação, para que isto ocorra, é preciso que o antecedente $\mathcal{C}$ seja *V* e o consequente $\mathcal{B}$ seja *F*, condição satisfeita na quarta e quinta linhas. Assinalamos a fórmula $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$, indicando que a mesma foi processada. Não foi necessário abrir ramos neste tablô, e encontramos uma contradição entre os valores de verdade da fórmula $\mathcal{B}$. Assim, assinalamos o final do tablô com um ‘x’, indicando que o mesmo está fechado, o que decorre que a fórmula em questão é válida.

3. SISTEMAS FORMAIS

Um sistema formal é constituído quando três condições elementares são satisfeitas: a especificação de sua *linguagem formal*, a presença de um conjunto de fórmulas desta linguagem que servirão como *axiomas* desta teoria, e um conjunto de *regras de inferência*.

No sistema formal apresentado, a *linguagem formal* é especificada do mesmo modo que especificamos a linguagem do CPC, ou seja, é um conjunto contável de símbolos que inclui símbolos para variáveis proposicionais, símbolos para operadores lógicos e sinais auxiliares. No entanto, em um sistema formal normalmente são escolhidos alguns operadores como "primitivos" do sistema, e os outros são obtidos através de definições.

Os *axiomas* são fórmulas escolhidas a partir das quais serão derivados os teoremas do sistema. Embora normalmente as fórmulas escolhidas como axiomas de um sistema sejam válidas, basta apenas que sejam fórmulas da linguagem formal especificada.

As *regras de inferência* são relações entre fbf's que já foram discutidas no capítulo anterior. Acrescenta-se neste capítulo o fato de que a maioria dos sistemas formais adota o *modus ponens* como regra primitiva, obtendo outras regras auxiliares por definição ou por derivação a partir das regras e definições primitivas.

Em um sistema formal é necessário estabelecer a definição de algumas noções importantes, em particular as noções de *prova*, *dedução*, *teorema e consequência lógica*.

Definição 12(prova): *Uma prova(ou demonstração) em um sistema formal é uma sequência de fbf's, na qual, cada fbf é um axioma, ou é obtida a partir dos axiomas por meio de regras de inferência.*

Dada uma fórmula $\mathcal{B}$, se $\mathcal{B}$ é a última fórmula da sequência mencionada acima, diz-se que há uma prova de $\mathcal{B}$ no sistema formal especificado.

Definição 13(teorema): *Um teorema em um sistema formal é uma fórmula para a qual existe uma prova no referido sistema.*

Definição 14(dedução): *Uma dedução em um sistema formal é uma sequência de fbf's, na qual, cada fbf é um axioma, ou pertence a um conjunto Γ de fórmulas, ou é obtida a partir de um dos elementos anteriores por meio de regras de inferência.*

Se uma fórmula $\mathscr{B}$ é obtida a partir de um conjunto Γ de fórmulas do modo descrito acima, diz-se que há uma dedução de $\mathscr{B}$ a partir de Γ no sistema formal.

Uma prova também pode ser caracterizada como um subcaso de uma dedução, a saber, o caso em que $\Gamma = \varnothing$. Assim uma prova seria uma dedução a partir de um conjunto vazio de fórmulas.

Definição 15(consequência lógica sintática): *Uma fórmula $\mathscr{B}$ é consequência lógica em um sistema formal de um conjunto de fórmulas Γ, se existe uma dedução de $\mathscr{B}$ a partir de Γ neste sistema formal.*

Assim, $\Gamma \vdash \mathscr{B}$ pode ser lido como "$\mathscr{B}$ é consequência lógica de Γ", ou "Γ acarreta logicamente $\mathscr{B}$".

Um teorema também pode ser caracterizado como um caso particular da definição de consequência lógica, a saber, o caso em que $\Gamma = \varnothing$. Assim, um teorema será uma consequência lógica de um conjunto vazio de fórmulas. Assim, $\varnothing \vdash \mathscr{B}$ pode ser lido como "$\mathscr{B}$ é teorema", e a notação pode ser abreviada simplesmente para $\vdash \mathscr{B}$.

Caso estejamos tratando com sistemas formais distintos, é comum especificar o sistema com o qual estamos lidando através de um subscrito localizado na base do símbolo utilizado para a consequência lógica sintática. Assim, se tratamos no momento de um sistema formal *F*, a expressão $\vdash_F \mathscr{B}$ indica que a fórmula $\mathscr{B}$ é teorema do sistema *F*. Por sua vez, a expressão $\Gamma \vdash_F \mathscr{B}$ indica que a fórmula $\mathscr{B}$ é consequência lógica do conjunto Γ de fórmulas no sistema *F*.

Outras noções importantes são as de *lema* e *corolário*:

a) Lema: proposição derivada para facilitar a demonstração de uma proposição subsequente e em geral mais importante, como a demonstração de um teorema;
b) Corolário: consequência lógica ou aplicação imediata de um teorema demonstrado na teoria formal.

Uma teoria é decidível se existe um algoritmo, ou procedimento efetivo que permita determinar se uma fórmula é um teorema da teoria formal; caso contrário é indecidível. Um procedimento efetivo se constitui de um método mecânico para teste das fbf’s, como por exemplo tabelas-de-verdade ou tablôs semânticos.

Correção e *completude* são propriedades importantes de uma teoria formal, também chamadas de *metateoremas.* Um metateorema é uma consequência que afirma propriedades importantes para o sistema formal, sendo demonstrada fora do próprio sistema. O metateorema da correção enuncia que, se uma fbf $\mathcal{B}$ é um teorema de uma teoria formal, então é também uma fórmula válida desta teoria. E o metateorema da completude enuncia que, se uma fbf $\mathcal{B}$ é uma fórmula válida de uma teoria formal, então é também um teorema desta teoria.

Vejamos agora algumas propriedades da noção de consequência lógica.

Propriedades da noção de consequência

P1: Se $\mathcal{B} \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \mathcal{B}$;

P2: Se $\models \mathcal{B}$, então $\Gamma \vdash \mathcal{B}$;

P3: Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \vdash \mathcal{B}$, então $\Delta \vdash \mathcal{B}$;

P4: $\Gamma \vdash \mathcal{B}$ se e somente se há um subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vdash \mathcal{B}$;

P5: Se $\Delta \vdash \mathcal{B}$, e, para cada $\mathcal{C}$ em Δ, $\Gamma \vdash \mathcal{C}$, então $\Gamma \vdash \mathcal{B}$.

Abordaremos agora forma mais detalhada o método axiomático, exibindo como exemplo uma axiomatização do cálculo proposicional clássico baseada nos axiomas propostos por Rosser (1953).

3.1 AXIOMATIZAÇÃO DO CPC

A axiomatização que iremos exibir é baseada nos axiomas propostos por Rosser(1953) para o cálculo proposicional, os quais estão indicados em Mendelson (1997, p.45-47) e constituem nesta obra o *sistema* $\mathcal{L}2$. Neste trabalho optamos por preservar a forma como o sistema é identificado em Mendelson, o referenciando também como sistema $\mathcal{L}2$.

Seguem as principais definições do sistema $\mathcal{L}2$.

- A linguagem de $\mathcal{L}2$ utiliza os seguintes símbolos:
    - A, B, C,...Z, A_1, B_1... como variáveis proposicionais;
    - os símbolos $\neg$ e $\wedge$, como operadores primitivos;
    - parênteses como símbolos auxiliares.
- A linguagem de $\mathcal{L}2$ utiliza as seguintes definições de fórmula bem formada:
    - toda variável proposicional é uma fbf;
    - se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são fbf's, então também o são $\neg\mathcal{B}$ e $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$.
- O operador $\Rightarrow$ é introduzido por definição:

    Def.1: $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ é definido por $\neg(\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{C})$. Assim, $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ é uma abreviação para $\neg (\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{C})$.

- Sendo $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ fbf's de $\mathcal{L}2$, então temos os seguintes esquemas de axiomas em $\mathcal{L}2$:

    (**1**): $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{B})$

    (**2**): $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B}$

    (**3**): $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \Rightarrow \neg (\mathcal{D} \wedge \mathcal{B}))$

- A regra de inferência primitiva é o *Modus Ponens* (MP).

Ilustraremos a aplicação das noções expostas demonstrando a prova do lema (*a*) no sistema $\mathcal{L}2$:

(*a*) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D} \vdash_{\mathcal{L}2} \neg (\neg \mathcal{D} \wedge \mathcal{B})$

1. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	hipótese
2. $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}$	hipótese
3. $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg (\mathcal{C} \wedge \neg \mathcal{D}) \Rightarrow \neg (\neg \mathcal{D} \wedge \mathcal{B}))$	instância de (**3**)
4. $\neg (\mathcal{C} \wedge \neg \mathcal{D}) \Rightarrow \neg (\neg \mathcal{D} \wedge \mathcal{B})$	1, 3 MP
5. $\neg (\mathcal{C} \wedge \neg \mathcal{D})$	2 Def. 1
6. $\neg (\neg \mathcal{D} \wedge \mathcal{B})$	4, 5 MP

Q. E. D.

Uma vez demonstrado o lema (*a*), o mesmo pode ser utilizado na demonstração de outras consequências no sistema $\mathcal{L}2$. A seguir, mais lemas do sistema, dentre deduções e teoremas. Suas respectivas demonstrações encontram-se no apêndice:

(*b*) $\vdash_{\mathcal{L}2} \neg(\neg \mathcal{B} \wedge \mathcal{B})$

(*c*) $\vdash_{\mathcal{L}2} \neg\neg \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$

(*d*) $\vdash_{\mathcal{L}2} \neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \neg \mathcal{B})$

(*e*) $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \neg\neg \mathcal{B}$

(*f*) $\vdash_{\mathcal{L}2} (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg \mathcal{C} \Rightarrow \neg \mathcal{B})$

(*g*) $\neg \mathcal{B} \Rightarrow \neg \mathcal{C} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$

(*h*) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{D} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$

(*i*) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}, \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{E}$

(*j*) $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$

(*k*) $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{B}$

(*l*) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D}$

(*m*) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \wedge \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{E}$

(*n*) $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{D}$

(*o*) $\vdash_{\mathcal{L}2} (\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})) \Rightarrow ((\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{D})$

(*p*) $\vdash_{\mathcal{L}2} ((\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{D}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}))$

(*q*) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}) \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D}$

(*r*) $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$

(*s*) $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B})$

3.1.1. Metateorema da dedução (TD)

(t) Se $\Gamma, \mathcal{B} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{C}$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$.

Como caso particular temos que, se $\mathcal{B} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{C}$, então $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ (HERBRAND, 1930 apud MENDELSON, 1997, p. 37). De outro modo, se uma fórmula $\mathcal{C}$ é demonstrável a partir de premissas $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$, então é possível demonstrar a fórmula $\mathcal{C}_n \Rightarrow \mathcal{C}$, a partir de premissas $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{n-1}$.

Para demonstrar o Teorema da Dedução, utilizaremos o método da *indução matemática*, cujo esquema simplificado é representado a seguir:

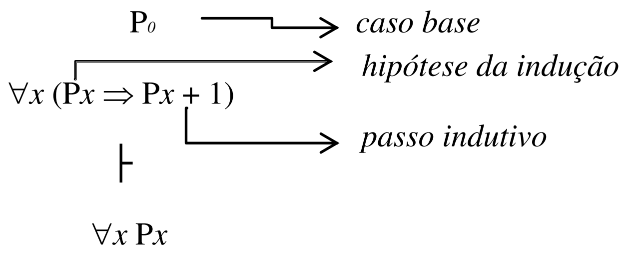

Figura 5: Esquema do princípio de indução matemática.
Fonte: Elaboração própria.

Na premissa designada como *caso base*, demonstra-se que o primeiro elemento de uma sequência apresenta uma determinada propriedade P. Na segunda premissa demonstra-se que, caso um elemento qualquer da sequência apresente a referida propriedade(*hipótese da indução*), o seguinte também a apresentará(*passo indutivo*). Segue-se daí que todos os elementos da sequência apresentarão a propriedade em questão. Na prova a seguir, o método de indução matemática será aplicado sobre a sequência de passos que constituem a prova de uma fórmula $\mathcal{C}$ qualquer.

Prova: Seja $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n$ uma prova de $\mathcal{C}$ a partir de $\Gamma \cup \{\mathcal{B}\}$, onde $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}$. Por indução matemática sobre *i*(nº de passos da demonstração de $\mathcal{C}$) , será provado que $\Gamma \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Base da indução: $i = 1$.

Como caso base, tomaremos a situação de haver apenas um passo na demonstração. Assim, há três possibilidades para $\mathcal{C}_i$:

a) $\mathcal{C}_1 \in \Gamma$

b) $\mathcal{C}_1$ é axioma

c) $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}$

No caso (a) temos:

1. $\Gamma \vdash \mathcal{C}_1$ P1

2. $\vdash \mathcal{C}_1 \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_1)$ instância de (*s*)

3. $\Gamma \vdash \mathcal{C}_1 \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_1)$ 2 P2

4. $\Gamma \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_1$ 3,1MP

Temos no caso (b):

1. $\vdash \mathcal{C}_1$ axioma de $\mathcal{L}2$

2. $\Gamma \vdash \mathcal{C}_1$ 1 P2

3. $\vdash \mathcal{C}_1 \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_1)$ instância de (*s*)

4. $\Gamma \vdash \mathcal{C}_1 \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_1)$ 3 P2

5. $\Gamma \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_1$ 4, 2 MP

Para o caso (c) temos:

1. $\vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ (*j*)

2. $\Gamma \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ 1 P2

3. $\Gamma \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_1$ 2 caso (c) $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_1)$

Hipótese da indução (HI): se $\Gamma, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}_k$, então $\Gamma \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_k$ (para todo $k <$ i, ou seja, se trata de qualquer fbf anterior a $\mathcal{C}_i$ na sequência).

Passo Indutivo: se $\Gamma, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}_i$, então $\Gamma \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_i$, havendo quatro possibilidades para $\mathcal{C}_i$:

a) $\mathcal{C}_i \in \Gamma$

b) $\mathcal{C}_i$ é axioma

c) $\mathcal{C}_i$ é $\mathcal{B}$

d) $\mathcal{C}_i$ é obtido por Modus Ponens de $\mathcal{C}_j$ e $\mathcal{C}_m$, sendo que $\mathcal{C}_m = (\mathcal{C}_j \Rightarrow \mathcal{C}_i)$, e $j < i$ e $m < i$, ou seja, são passos anteriores a *i.*

(a), (b) e (c) são demonstrados como no *caso base*. Na letra (d), pela hipótese da indução, assumiremos:

$\Gamma \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_j$ e $\Gamma \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_m$

Assim:

1. $\Gamma \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_j$ hipótese da indução

2. $\Gamma \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_m$ hipótese da indução

3. $\Gamma \vdash \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C}_j \Rightarrow \mathcal{C}_i)$ 2 ($\mathcal{C}_m = \mathcal{C}_j \Rightarrow \mathcal{C}_i$)

4. $\Gamma \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_i$ 1,3 (*q*)

O caso no qual i = n é o resultado desejado: $\Gamma \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}_n$.

Q. E. D.

Seguem outras consequências do sistema $\mathcal{L}2$:

(*u*) $\vdash_{\mathcal{L}2} (\neg \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$

(*v*) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \neg \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{C}$

3.1.2. Metateorema da adequação

(*w*) $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B}$ se e somente se $\models_{\mathcal{L}2} \mathcal{B}$.

O metateorema da adequação é uma abreviação da conjunção de dois outros metateoremas, a saber:

- se $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B}$ então $\models_{\mathcal{L}2} \mathcal{B}$ (*metateorema da correção*)
- se $\models_{\mathcal{L}2} \mathcal{B}$ então $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B}$ (*metateorema da completude*)

Assim, a prova do metateorema da adequação implica em obtermos as provas de seus metateoremas constituintes.

3.1.2.1. Metateorema da correção

O metateorema da correção enuncia que, se uma fórmula $\mathcal{B}$ é teorema de $\mathcal{L}2$, então é também uma tautologia. Sua prova consiste em:

- demonstrar que os axiomas de $\mathcal{L}2$ são tautologias.
- demonstrar que a regra de inferência *modus ponens* leva de tautologias a outras tautologias.

Segue a prova por tablôs semânticos de que os esquemas de axiomas de $\mathcal{L}2$ são tautologias.

(1) $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{B})$:

$$\checkmark \quad F\ \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{B})$$

$$V\ \mathcal{B}$$

$$\checkmark \quad F\ \mathcal{B} \wedge \mathcal{B}$$

$$F\ \mathcal{B} \qquad\qquad F\ \mathcal{B}$$

$$\text{x} \qquad\qquad\quad \text{x}$$

O esquema de axioma (**1**) é uma tautologia.

(**2**) $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$:

$$\checkmark \quad F\ \mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$$

$$\checkmark \quad V\ \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$$

$$F\ \mathcal{B}$$

$$V\ \mathcal{B}$$

$$V\ \mathcal{C}$$

$$\text{x}$$

O esquema de axioma (**2**) é uma tautologia.

(**3**) $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg\, (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \Rightarrow \neg\, (\mathcal{D} \wedge \mathcal{B}))$:

$$\checkmark \quad F\ (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg\, (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \Rightarrow \neg\, (\mathcal{D} \wedge \mathcal{B}))$$

$$\checkmark \quad V\ \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$$

$$\checkmark \quad F\ \neg\, (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \Rightarrow \neg\, (\mathcal{D} \wedge \mathcal{B})$$

$$\checkmark \quad V\ \neg\, (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D})$$

$$\checkmark \quad F\ \neg\, (\mathcal{D} \wedge \mathcal{B})$$

$$\checkmark \quad F\ \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$$

$$\checkmark \quad V\ \mathcal{D} \wedge \mathcal{B}$$

$$V\ \mathcal{D}$$

$$V\ \mathcal{B}$$

$$F\ \mathcal{C} \qquad\qquad F\ \mathcal{D}$$

$$\qquad\qquad\qquad \text{x}$$

$F\,\mathcal{B}$	$V\,\mathcal{C}$
x	x

O esquema de axioma (**3**) é uma tautologia.

Q. E. D.

Proposição 1: Se $\models \mathcal{B}$ e $\models \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, então $\models \mathcal{C}$.

Segue a prova por *redução ao absurdo* de que a regra de inferência *modus ponens* leva de tautologias a outras tautologias.

Prova: Consideremos por suposição que as fórmulas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ sejam tautologias, e a fórmula $\mathcal{C}$ receba o valor *F* para ao menos uma atribuição de valores. Recebendo a fórmula $\mathcal{B}$ sempre o valor *V*, e a fórmula $\mathcal{C}$ o valor *F*, a fórmula $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ receberá para aquela atribuição o valor *F*. Isto contradiz a afirmação inicial de que $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ seja uma tautologia. Deste modo, não é possível que a fórmula $\mathcal{C}$ assuma o valor *F*. Com isto prova-se que a regra de inferência *modus ponens* gera tautologias a partir de tautologias.

Segue agora o enunciado do metateorema da correção.

Proposição 2: Se $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B}$, então $\models_{\mathcal{L}2} \mathcal{B}$.

Prova*:* Uma vez provado que os axiomas de $\mathcal{L}2$ são tautologias, e que a regra MP preserva tautologias, e por sua vez, se todos os teoremas de $\mathcal{L}2$ são obtidos a partir dos axiomas ou consequências destes através da regra MP, segue-se que todos os teoremas de $\mathcal{L}2$ são tautologias.

Q. E. D.

3.1.2.2. Metateorema da completude

O metateorema da completude enuncia que, se uma fórmula $\mathcal{B}$ é tautologia, então é também teorema de $\mathcal{L}2$. Para obter sua prova é necessário provar primeiramente uma consequência que designaremos como Lema da Relação de Dedutibilidade Correspondente.

Relação de Dedutibilidade Correspondente

Consideremos que:

- $\mathcal{B}$ é uma fbf ;
- $\mathcal{C}_1$, ..., $\mathcal{C}_k$ são variáveis proposicionais que ocorrem em $\mathcal{B}$;
- $\mathcal{C}_i$ é qualquer variável proposicional entre $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_k$;
- $\mathcal{C}'_i$ é uma representação arbitrária para atribuições de valores de verdade à $\mathcal{C}_i$;
- $\mathcal{B}'_i$ é uma representação arbitrária para atribuições de valores de verdade a $\mathcal{B}$.

Assim, para uma determinada atribuição de valores de verdade para $\mathcal{C}_1$, ..., $\mathcal{C}_k$, temos:

- se $\mathcal{C}_i = V$ então $\mathcal{C}'_i = \mathcal{C}_i$;
- se $\mathcal{C}_i = F$ então $\mathcal{C}'_i = \neg\mathcal{C}_i$.

E também:

- se $\mathcal{B} = V$ então $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$;
- se $\mathcal{B} = F$ então $\mathcal{B}' = \neg\, \mathcal{B}$.

Pela hipótese da indução, $\mathcal{C}_1,..., \mathcal{C}_k \vdash \mathcal{B}$. Portanto:

Se $\mathcal{C}_1,..., \mathcal{C}_k \vdash \mathcal{B}$, então $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{B}'$.

Para exemplificar esta relação, assumamos que a fbf $\mathcal{B}$ seja $\neg(\mathcal{C}_1 \Rightarrow \neg\mathcal{C}_2)$. Se aplicarmos o lema a esta fórmula, então cada linha de sua tabela de verdade pode ser expressa em uma relação de dedutibilidade correspondente.

$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\neg\,(\mathcal{C}_1 \Rightarrow \neg\,\mathcal{C}_2)$
V	*V*	*V V F F V*
V	*F*	*F V V V F*
F	*V*	*F F V F V*

F	*F*	*F F V V F*

Figura 6: Relação de dedutibilidade correspondente.
Fonte: Elaboração própria.

1ª linha: $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \vdash \neg (\mathcal{C}_1 \Rightarrow \neg\mathcal{C}_2)$

2ª linha: $\mathcal{C}_1, \neg \mathcal{C}_2 \vdash \neg\neg (\mathcal{C}_1 \Rightarrow \neg\mathcal{C}_2)$

3ª linha: $\neg \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \vdash \neg\neg (\mathcal{C}_1 \Rightarrow \neg \mathcal{C}_2)$

4ª linha: $\neg \mathcal{C}_1, \neg \mathcal{C}_2 \vdash \neg\neg (\mathcal{C}_1 \Rightarrow \neg \mathcal{C}_2)$

Prova: A prova deste lema utilizará o método de indução matemática sobre o número *n* de ocorrências de operadores ¬ e ∧ em $\mathcal{B}$.

Base da indução: $n = 0$. Neste caso, não há nenhuma ocorrência de operadores em $\mathcal{B}$, ou seja, $\mathcal{B}$ é só uma letra sentencial $\mathcal{C}_1$. Assim, o lema assere:

Se $\mathcal{C}_1 = V$, então $\mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}_1$. Daí $\mathcal{C}_1 \vdash \mathcal{C}_1$.

Se $\mathcal{C}_1 = F$, então $\mathcal{C}'_1 = \neg \mathcal{C}_1$. Daí $\neg\mathcal{C}_1 \vdash \neg \mathcal{C}_1$.

Hipótese da indução (HI): Assumamos que esse lema se mantém para todo $j < n$.

Caso 1: $\mathcal{B} = \neg \mathcal{C}$. Isto significa que $\mathcal{C}$ tem menos do que *n* ocorrências de ¬ e ∧.

Subcaso 1a: $\mathcal{C} = V$. Então $\mathcal{B} = F$. Nesse caso, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ e $\mathcal{B}' = \neg\mathcal{B}$. Aplicando a hipótese da indução a $\mathcal{C}'$, temos $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C}'$. Assim:

1. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C}'$	hipótese da indução
2. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C}$	1 (Subcaso 1a)
3. $\vdash \mathcal{C} \Rightarrow \neg \neg \mathcal{C}$	instância de (*e*)
4. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C} \Rightarrow \neg \neg \mathcal{C}$	3 P2
5. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \neg \neg \mathcal{C}$	2, 4 MP
6. $\mathcal{C}'_1, ... , \mathcal{C}'_k \vdash \neg \mathcal{B}$	5 (Caso 1)
7. $\mathcal{C}'_1,... , \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{B}'$	6 (Subcaso 1a)

Subcaso 1b: $\mathcal{C} = F$. Então $\mathcal{B} = V$. Nesse caso, $\mathcal{C}' = \neg\, \mathcal{C}$ e $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. Aplicando novamente a hipótese da indução a $\mathcal{C}'$, temos $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C}'$. Assim:

1. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C}'$ hipótese da indução
2. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \neg\, \mathcal{C}$ 1 (Subcaso 1b)
3. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{B}$ 2 (Caso 1)
4. $\mathcal{C}'_1, ... , \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{B}'$ 3 (Subcaso 1b)

Caso 2: $\mathcal{B} = \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$. Isto significa que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ terão menos ocorrências de $\neg$ e $\wedge$ do que $\mathcal{B}$.

Subcaso 2a: $\mathcal{C} = V$ e $\mathcal{D} = V$. Logo, $\mathcal{B} = V$. Assim, temos que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$ e $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. Aplicando novamente a hipótese da indução a $\mathcal{C}'$ e a $\mathcal{D}'$ obtemos $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{D}'$. A derivação ficará como segue:

1. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C}'$ hipótese da indução
2. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C}$ 1 (Subcaso 2a)
3. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{D}'$ hipótese da indução
4. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{D}$ (3 Subcaso 2a)
5. $\vdash \mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{D} \Rightarrow (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}))$ instância de (*r*)
6. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{D} \Rightarrow (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}))$ 5 P2
7. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash (\mathcal{D} \Rightarrow (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}))$ 2, 6 MP
8. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$ 4, 7 MP
9. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{B}$ 8 (Caso 2)
10. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{B}'$ 9 (Subcaso 2a)

Subcaso 2b: $\mathcal{C}$ assume o valor *F*, do que decorre que $\mathcal{B} = F$. Portanto, $\mathcal{C} = \neg\, \mathcal{C}$ e $\mathcal{B}' = \neg\, \mathcal{B}$. Por hipótese da indução sobre $\mathcal{C}'$, temos $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C}'$. Assim:

1. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C}'$ hipótese da indução
2. $\mathcal{C}'_1,..., \mathcal{C}'_k \vdash \neg\mathcal{C}$ 1 (Subcaso 2b)
3. $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C}$ instância de (**2**)

4. $\mathcal{C}'_1,\ldots,\mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C}$ 3 P2

5. $((\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg\, \mathcal{C} \Rightarrow \neg\, (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}))$ instância de (*f*)

6. $\mathcal{C}'_1,\ldots,\mathcal{C}'_k \vdash ((\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg\, \mathcal{C} \Rightarrow \neg\, (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}))$ 5 P2

7. $\mathcal{C}'_1,\ldots,\mathcal{C}'_k \vdash \neg\, \mathcal{C} \Rightarrow \neg\, (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D})$ 4, 6 MP

8. $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash \neg\, (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D})$ 2, 7 MP

9. $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash \neg\, \mathcal{B}$ 8 (Caso 2)

10. $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{B}'$ 9 (Subcaso 2b)

Subcaso 2c: $\mathcal{D} = F$. Portanto, $\mathcal{D}' = \neg\, \mathcal{D}$ e $\mathcal{B}' = \neg\, \mathcal{B}$. Aplicando a hipótese da indução a $\mathcal{D}'$, obtemos $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{D}'$. Assim:

1. $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{D}'$ hipótese da indução

2. $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash \neg\, \mathcal{D}$ 1 (Subcaso 2c)

3. $\mathcal{D} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}$ instância de (**2**)

4. $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{D} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}$ 3 P2

5. $(\mathcal{D} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}) \Rightarrow (\neg\, \mathcal{D} \Rightarrow \neg\, (\mathcal{D} \wedge \mathcal{C}))$ instância de (*f*)

6. $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash (\mathcal{D} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}) \Rightarrow (\neg\, \mathcal{D} \Rightarrow \neg\, (\mathcal{D} \wedge \mathcal{C}))$ 5 P2

7. $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash \neg\, \mathcal{D} \Rightarrow \neg\, (\mathcal{D} \wedge \mathcal{C})$ 4, 6 MP

8. $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash \neg\, (\mathcal{D} \wedge \mathcal{C})$ 2, 7 MP

9. $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} \wedge \mathcal{C}$ instância de (*k*)

10. $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} \wedge \mathcal{C}$ 9 C2

11. $(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg\, (\mathcal{D} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \neg\, (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}))$ instância de (*f*)

12. $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg\, (\mathcal{D} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \neg\, (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}))$ 11 P2

13. $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash \neg\, (\mathcal{D} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \neg\, (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D})$ 10, 12 MP

14. $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash \neg\, (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D})$ 8, 13 MP

15. $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_k \vdash \neg\, \mathcal{B}$ 14 (Caso 2)

16. $\mathcal{C}'1, \ldots, \mathcal{C}'k \vdash \mathcal{B}'$ 15 (Subcaso 2c)

Q. E. D.

Segue agora o enunciado do metateorema da completude.

Proposição 3: Se $\models_{\mathcal{L}2} \mathcal{B}$, então $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B}$.

Prova (KALMAR, 1935 apud MENDELSON, 1997): Consideremos que,

- $\mathcal{B}$ é uma tautologia em $\mathcal{L}2$;
- $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ são variáveis proposicionais em $\mathcal{B}$.

Pelo lema da relação de dedutibilidade correspondente, temos que $\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{B}'$. Ainda pelo mesmo lema temos:

- $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. Assim, $\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_k \vdash \mathcal{B}$.
- Se $\mathcal{C}_k = V$, então $\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_{k-1}, \mathcal{C}_k \vdash \mathcal{B}$.
- Se $\mathcal{C}_k = F$, então $\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_{k-1}, \neg\mathcal{C}_k \vdash \mathcal{B}$.

Pelo teorema da dedução temos:

(I) $\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_{k-1} \vdash \mathcal{C}_k \Rightarrow \mathcal{B}$

(II) $\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_{k-1} \vdash \neg\, \mathcal{C}_k \Rightarrow \mathcal{B}$

A derivação será como segue:

1. $\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_{k-1} \vdash \mathcal{C}_k \Rightarrow \mathcal{B}$	(I)
2. $\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_{k-1} \vdash \neg\, \mathcal{C}_k \Rightarrow \mathcal{B}$	(II)
3. $\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_{k-1} \vdash \mathcal{B}$	1, 2 (*v*)

$\mathcal{C}_{k-1}$ também pode receber como atribuição o valor *V* ou o valor *F*. Uma nova aplicação do Metateorema da Dedução, juntamente com a consequência (*v*) nos permitirá eliminar também $\mathcal{C}'_{k-1}$. Após *k* passos, eliminaremos todas as premissas do conjunto e obtemos $\vdash \mathcal{B}$, provando que todas as tautologias de $\mathcal{L}2$ também são teoremas do referido sistema.

Q. E. D.

3.1.3. Metateorema da consistência

Proposição 4: O sistema ***ℒ2*** é consistente; ou seja, não há nenhuma fbf ***ℬ*** tal que ambas ***ℬ*** e ¬ ***ℬ*** sejam teoremas de ***ℒ2.***

.

Prova: Pela proposição do Teorema da Correção(1), todo teorema de ***ℒ2*** é uma tautologia. A negação de uma tautologia não pode ser uma tautologia, e, desse modo, é impossível para qualquer fbf ***ℬ*** de ***ℒ2*** , que tanto ***ℬ*** como ¬ ***ℬ*** sejam ao mesmo tempo teoremas de ***ℒ2***.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo do método axiomático é indispensável para cientistas que desejam investigar os fundamentos lógico-matemáticos de sua área de conhecimento. As axiomatizações podem ser aplicadas para sistematizar partes de teorias científicas, habilitando as teorias a partir de pressupostos fundamentais e extrair as suas leis mais importantes por meio de inferências previamente aceitas. Isto, além de proporcionar economia de recursos, proporciona um maior rigor teórico e continua desde sempre a incentivar a discussão pela consistência dos fundamentos que servem de sustentação para as mais diversas áreas de conhecimento.

REFERÊNCIAS

COPI, Irving M. **Introdução à Lógica**. Tradução de Álvaro Cabral. 2. ed. São Paulo: Mestre Jou, 1978.

GOMES, Nelson Gonçalves; BRANQUINHO, João; MURCHO, Desiderio. **Enciclopédia de termos lógico-filosóficos**. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

HAACK, Susan. **Filosofia das lógicas**. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

HOTTOIS, Gilbert. **Pensar a lógica**: uma introdução técnica-teórica da lógica e da linguagem. Lisboa: Instituto Piaget, 2004.

KELLER, Vicente; BASTOS, Cleverson Leite. **Aprendendo lógica.** 18. ed. Petrópolis: Vozes, 2009.

KNEALE, William; KNEALE, Martha. **O desenvolvimento da lógica**. 3.ed. Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian, 1991.

MENDELSON, Elliot. **Introduction to mathematical logic**. 4th ed. London: Chapman & Hall, 1997.

MORTARI, Cezar A. **Introdução à lógica**. São Paulo: Editora UNESP, 2001.

NAHRA, Cinara; WEBER, Ivan Hingo. **Através da lógica**. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 1999.

ROSSER, J. Barkley. **Logic for Mathematicians**. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953.

APÊNDICE

DEMONSTRAÇÕES

Abaixo seguem demonstrações de consequências lógicas utilizadas e/ou mencionadas neste trabalho.

(b) $\vdash_{\mathcal{L}2} \neg (\neg \mathcal{B} \wedge \mathcal{B})$

1. $(\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{B})) \Rightarrow (\neg ((\mathcal{B} \wedge \mathcal{B}) \wedge \neg \mathcal{B}) \Rightarrow \neg (\neg \mathcal{B} \wedge \mathcal{B}))$ instância de (**3**)
2. $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{B})$ (**1**)
3. $\neg ((\mathcal{B} \wedge \mathcal{B}) \wedge \neg \mathcal{B}) \Rightarrow \neg (\neg \mathcal{B} \wedge \mathcal{B})$ 1,2 MP
4. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ instância de (**2**)
5. $\neg ((\mathcal{B} \wedge \mathcal{B}) \wedge \neg \mathcal{B})$ 4 Def. 1
6. $\neg (\neg \mathcal{B} \wedge \mathcal{B})$ 3, 5 MP

Q. E. D.

(c) $\vdash_{\mathcal{L}2} \neg \neg \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$

1. $\neg (\neg \neg \mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{B})$ instância de (b)
2. $\neg \neg \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ 1 Def. 1

Q. E. D.

(d) $\vdash_{\mathcal{L}2} \neg (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \neg \mathcal{B})$

1. $(\neg \neg \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\neg (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \neg (\mathcal{C} \wedge \neg \neg \mathcal{B})$ instância de (**3**)
2. $\neg \neg \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ (c)
3. $\neg (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \neg (\mathcal{C} \wedge \neg \neg \mathcal{B})$ 1, 2 MP
4. $\neg (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \neg \mathcal{B})$ 3 Def. 1

Q. E. D.

(e) $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \neg \neg \mathcal{B}$

1. $\neg (\neg \mathcal{B} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \neg \neg \mathcal{B})$ instância de (d)

2. $\neg(\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{B})$	(*b*)
3. $\mathcal{B} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B}$	1, 2 MP
	$\mathcal{Q}.\ \mathcal{E}.\ \mathcal{D}.$

(*f*) $\vdash_{\mathcal{L}2} (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg\mathcal{C} \Rightarrow \neg\mathcal{B})$

1. $\neg(\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{C}) \Rightarrow (\neg\mathcal{C} \Rightarrow \neg\mathcal{B})$	instância de (*d*)
2. $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg\mathcal{C} \Rightarrow \neg\mathcal{B})$	1 Def. 1
	$\mathcal{Q}.\ \mathcal{E}.\ \mathcal{D}.$

(*g*) $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{C} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$

1. $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{C}$	hipótese
2. $(\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{C}) \Rightarrow (\neg(\neg\mathcal{C} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \neg(\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{B}))$	instância de (**3**)
3. $\neg(\neg\mathcal{C} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \neg(\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{B})$	1,2 MP
4. $\neg(\neg\mathcal{C} \wedge \mathcal{C})$	instância de (*b*)
5. $\neg(\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{B})$	3,4 MP
6. $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$	5 Def. 1
7. $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{C} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$	1–6
	$\mathcal{Q}.\ \mathcal{E}.\ \mathcal{D}.$

(*h*) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{D} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$

1. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	hipótese
2. $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \Rightarrow \neg(\mathcal{D} \wedge \mathcal{B}))$	(**3**)
3. $\neg(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \Rightarrow \neg(\mathcal{D} \wedge \mathcal{B})$	1, 2 MP
4. $\mathcal{D} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$	3 (*g*)
5. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{D} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$	1–4
	$\mathcal{Q}.\ \mathcal{E}.\ \mathcal{D}.$

(*i*) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}, \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{E}$

1. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	hipótese
2. $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}$	hipótese
3. $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}$	hipótese
4. $\neg(\neg\mathcal{D} \wedge \mathcal{B})$	1, 2 (*a*)
5. $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}) \Rightarrow (\neg\mathcal{E} \Rightarrow \neg\mathcal{D})$	instância de (*f*)

6. $\neg \mathcal{E} \Rightarrow \neg \mathcal{D}$ 3, 5 MP

7. $(\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{E}) \Rightarrow (\neg \mathcal{D} \wedge \mathcal{B})$ 6 (*h*)

8. $((\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{E}) \Rightarrow (\neg \mathcal{D} \wedge \mathcal{B})) \Rightarrow \neg (\neg \mathcal{D} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \neg (\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{E}))$ instância de (*f*)

9. $\neg (\neg \mathcal{D} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \neg (\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{E})$ 7, 8 MP

10. $\neg (\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{E})$ 4, 9 MP

11. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{E}$ 10 Def. 1

12. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}, \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{E}$ 1–11

Q. E. D.

(*j*) $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$

1. $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{B})$ (**1**)
2. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{B}$ 1 (*h*)
3. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ instância de (**2**)
4. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ 1, 2, 3 (*i*)

Q. E. D.

(*k*) $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{B}$

1. $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}$ instância de (*j*)
2. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{B}$ 1 (*h*)

Q. E. D.

(*l*) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D}$

1. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ hipótese
2. $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}$ hipótese
3. $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}$ instância de (*j*)
4. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D}$ 1, 2, 3 (*i*)
5. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D}$ 1–4

Q. E. D.

(*m*) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \wedge \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{E}$

1. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ hipótese
2. $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}$ hipótese

3. $\mathcal{E} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{E}$ 1 (h)

4. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E} \wedge \mathcal{B}$ 2 (h)

5. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{E}$ 4,3 (l)

6. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \wedge \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{E}$ 1–5

Q. E. D.

(n) $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{D}$

1. $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}$ hipótese

2. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D} \wedge \mathcal{B}$ 1 (h)

3. $\mathcal{D} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{D}$ instância de (k)

4. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{D}$ 2,3 (l)

5. $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{D}$ 1–4

Q. E. D.

(o) $\vdash_{\mathcal{L}2} (\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})) \Rightarrow ((\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{D})$

1. $\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D} \Rightarrow \neg\neg (\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D})$ instância de (e)

2. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \neg\neg (\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D})$ 1 (n)

3. $((\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D}) \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \neg\neg (\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D}))) \Rightarrow (\neg (\mathcal{B} \wedge \neg\neg (\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D})) \Rightarrow$
$\neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D}))$ instância de (f)

4. $\neg (\mathcal{B} \wedge \neg\neg (\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D})) \Rightarrow \neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D})$ 2, 3 MP

5. $\neg (\mathcal{B} \wedge \neg (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})) \Rightarrow ((\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{D})$ 4 Def. 1

6. $(\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})) \Rightarrow ((\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{D})$ 5 Def. 1

Q. E. D.

(p) $\vdash_{\mathcal{L}2} ((\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{D}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}))$

1. $\neg\neg (\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D}) \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D}$ instância de (c)

2. $\mathcal{B} \wedge \neg\neg (\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D}) \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D}$ 1 (n)

3. $((\mathcal{B} \wedge \neg\neg (\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D})) \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D})) \Rightarrow (\neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D}) \Rightarrow \neg (\mathcal{B} \wedge \neg$
$\neg (\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D})))$ instância de (f)

4. $\neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D}) \Rightarrow \neg (\mathcal{B} \wedge \neg\neg (\mathcal{C} \wedge \neg\mathcal{D}))$ 2, 3 MP

5. $((\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{D}) \Rightarrow \neg (\mathcal{B} \wedge \neg(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}))$ 4 Def. 1

6. $((\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{D}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}))$	5 Def. 1

Q. E. D.

(q) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}) \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D}$

1. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	hipótese
2. $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})$	hipótese
3. $(\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})) \Rightarrow ((\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{D})$	(o)
4. $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{D}$	2,3 MP
5. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \wedge \mathcal{B}$	1 (h)
6. $\mathcal{C} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$	instância de (k)
7. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$	5,6 (l)
8. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D}$	7,4 (l)
9. $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{B})$	(**1**)
10. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D}$	9,8 (l)
11. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}) \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D}$	1–10

Q. E. D.

(r) $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$

1. $((\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}))$	instância de (p)
2. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$	instância de (j)
3. $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$	1, 2 MP

Q. E. D.

(s) $\vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B})$

1. $((\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}))$	instância de (p)
2. $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$	(**2**)
3. $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B})$	1,2 MP

Q. E. D.

(u) $\vdash_{\mathcal{L}2} (\neg \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$

1. $\neg \mathcal{B} \Rightarrow (\neg \mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{B})$	instância de (**1**)
2. $(\neg \mathcal{B} \Rightarrow (\neg \mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{B})) \Rightarrow (\neg (\neg \mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{B}) \Rightarrow \neg \neg \mathcal{B})$	instância de (f)
3. $\neg (\neg \mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{B}) \Rightarrow \neg \neg \mathcal{B}$	1, 2 MP

4. $\neg\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ (*c*)

5. $\neg(\neg\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$ 3, 4 (*l*)

6. $(\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$ 5 Def. 1

Q. E. D.

(*v*) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{C}$

1. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ hipótese

2. $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ hipótese

3. $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg\mathcal{C} \Rightarrow \neg\mathcal{B})$ (*f*)

4. $\neg\mathcal{C} \Rightarrow \neg\mathcal{B}$ 3,1 MP

5. $\neg\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}$ 2, 4 (*l*)

6. $(\neg\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{C}$ instância de (*u*)

7. $\mathcal{C}$ 5, 6 MP

8. $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}, \neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash_{\mathcal{L}2} \mathcal{C}$ 1-7

Q. E. D.