

## ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA SUJEITA A CARGA MÓVEL

Victor Gustavo Ramos Costa dos Santos, victorgustavorcosta.santos@gmail.com<sup>1</sup>

Claudionor Ferreira Pereira Junior, claudionor.fpj@gmail.com<sup>1</sup>

Dalmo Inácio Galdez Costa, dalmodj@gmail.com<sup>1</sup>

Vilson Pereira Souza, vilsonps@gmail.com<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Maranhão - UFMA, Av. dos Portugueses, 1966 - Vila Bacanga, CEP 65065-545, São Luís - MA, Brasil

**Resumo:** Analisar estruturas apresenta-se como um passo primordial para o desenvolvimento básico de qualquer projeto, uma vez que, as condições inerentes ao mesmo implicam em alterações no seu comportamento. Tratando-se de estruturas, a variabilidade com a qual as mesmas se apresentam impulsiona diversos ramos de pesquisa. Deste modo, diversos tipos de análises foram surgindo ao longo dos anos: analítica, numérica, estática, dinâmica, transiente, harmônica, modal, dentre outras. Este trabalho é baseado na análise analítica de uma viga sujeita a ação de cargas móveis. Neste caso em especial, o carregamento do tipo pontual tem posição variável ao longo do tempo, enquanto sua intensidade permanece constante. Exemplos práticos nos quais pode-se observar este tipo de situação são: pontes rolantes, passarelas, pontes.

**Palavras-chave:** viga, análise dinâmica, carga móvel

### 1. INTRODUÇÃO

Estruturas que, em um âmbito geral, lidam com grandes cargas são amplamente empregadas em projetos de engenharia. Nesses projetos, os carregamentos não possuem a característica de estado estático permanente, ou seja, em alguns casos a estrutura é submetida a uma carga que tem intensidade variável e pontos de aplicação diferentes ao longo da estrutura. Este fenômeno, geralmente, é verificado em estruturas como pontes, sendo estas dos mais diversificados modelos e materiais, utilizadas por veículos ferroviários, automóveis ou pessoas (caso de passarelas), exemplos de aplicações podem ser observados na Fig. 1. Assim, a compreensão do comportamento da estrutura quando sujeita a este tipo de cargas dinâmicas permite a identificação dos pontos críticos e os possíveis efeitos devido às correlações vibratórias. Problemas envolvendo análise dinâmica transiente de estruturas sob a ação de forças móveis estão em uma variedade de estudos de projetos de engenharia (Santos, 2016). Análises do comportamento de vigas sob a ação de cargas móveis, há alguns anos vêm sendo uma área de pesquisa com grande relevância, visto que garantir a estabilidade estrutural é uma preocupação constante dos engenheiros e projetistas de pontes, principalmente quando estas são exigidas por carregamentos que apresentam velocidades elevadas (Kumar *et al.*, 2015).



Figura 1: Exemplos de estruturas sujeitas a cargas móveis: (a) ponte rolante - DEMAG Cranes; (b) ponte metálica - A2P Estudos e Projectos

Fonte: Adaptado de DEMAG (2018) e A2P (2018)

O trabalho de Frýba (2009) citado por Ouyang (2011) apresenta uma discussão acerca dos diversos estudos de casos e problemas, juntamente com algumas soluções, que envolvem estruturas sujeitas à ação de cargas que estão em movimento. O mesmo também apresenta o tratamento analítico em meios contínuos para barras, vigas, placas e cascas. Para estruturas de caráter mais complexo, o método dos elementos finitos é uma excelente alternativa.

A validação e constatação das análises de comportamento estrutural de estruturas deste tipo também é objeto de muitas pesquisas. Os métodos analíticos constituem de modo simplificado um rol de possíveis soluções para resolver os problemas de carga móvel. Entretanto, com o avanço tecnológico e as melhorias nos softwares e hardware de análises, os métodos numéricos apresentam-se de também como uma alternativa satisfatória (Olsson, 1991).

O problema vislumbrado por este trabalho é modelado em função da teoria de Euler-Bernoulli para deflexão de vigas.

Portanto, este problema será resolvido de forma analítica. Sabe-se que a literatura apresenta diversos métodos para resolução do problema e a determinação da(s) solução(ões), em vista disso, o método abordado para a solução da equação diferencial parcial será a separação de variáveis.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para entender o tratamento matemático do problema e apreciar os efeitos causados à estrutura em decorrência do movimento da carga, este trabalho tratará apenas de um problema simples para carga móvel. A determinação da solução é viabilizada e melhor representada a partir visualização dos deslocamentos transversais da viga em função da carga em movimento. A caracterização é embasada a partir de um “corpo”, de massa  $m$  que, conseqüentemente, exerce uma força (carga)  $P$  sobre a viga, deslocando-se em uma “ponte” a velocidade constante  $v$  (Ouyang, 2011).

Pela teoria de Euler-Bernoulli para viga, tem-se como condições de contorno geral a situação de uma viga simplesmente apoiada. Para o carregamento definiu-se que é uma carga concentrada de intensidade constante  $P$ , movimentando-se com velocidade constante  $v$ , o amortecimento estrutural é proporcional a função de vibração devido à velocidade de deslocamento da carga sobre a viga, conforme as reafirmações de Ismail (2011), o diagrama de corpo livre do problema em questão está representado na Fig. 2.

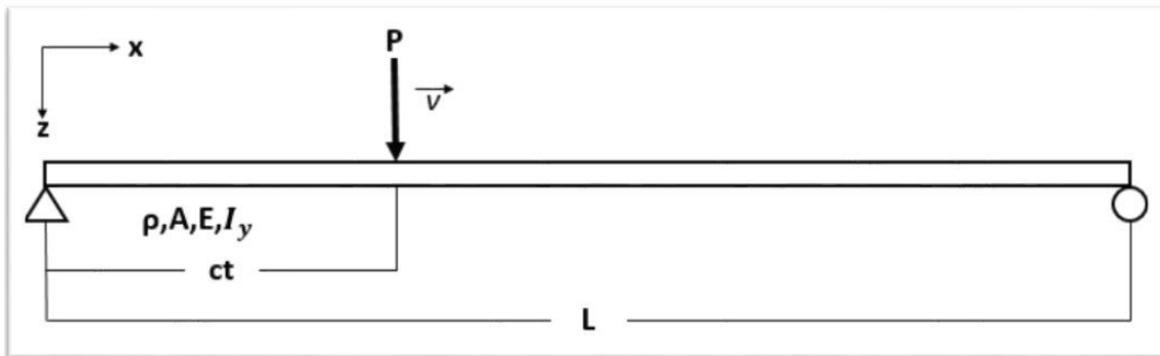


Figura 2: Representação do diagrama de corpo livre da viga sob a ação de carga móvel.

A Equação de movimento de Laplace para a viga é dada pela Eq. 1, com deslocamento transversal,  $u(z)$ , distribuído na direção do eixo- $z$ , determinando-se as primeiras condições  $u_z = u_z(x, t)$ , para  $0 \leq x \leq l$  e  $0 \leq t \leq \frac{l}{v}$ .

$$EI_y \frac{\partial^4 u_z(x, t)}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 u_z(x, t)}{\partial t^2} + 2\rho\omega_b \frac{\partial u_z(x, t)}{\partial t} = \delta(x - ct)P \quad (1)$$

Onde:  $L$  representa o comprimento total da viga,  $\rho$  é densidade específica do material da viga, aço,  $A$  é a área equivalente da seção transversal,  $E$  é o módulo de elasticidade,  $I_y$  é o momento de inércia da seção transversal da viga em relação ao eixo  $y$ ,  $t$  é o tempo percorrido pela carga e  $\omega_b$  é a frequência circular amortecida.

A partir da Fig. 2, a solução do problema necessita de algumas hipóteses que serão assumidas, sendo elas (Frýba, 2009):

1. O comportamento descrito pela viga é regido pela teoria de Euler-Bernoulli, conforme mencionado anteriormente, e a equação diferencial deduzida, Eq. (1), é convencionada para pequenos valores de deformação pela lei de Hooke, o princípio de Saint-Venant também é aplicado ao caso;
2. A viga possui massa e seção transversal constante em todo seu comprimento;
3. A carga concentrada se movimenta apenas na direção do eixo  $x$ , portanto, desloca-se para direita e esquerda;
4. Para efeitos de cálculos será considerada a condição de viga simplesmente apoiada, isto é, com valores de momento e deflexão nulos nas extremidades ( $x = 0$  e  $x = L$ );
5. O amortecimento estrutural é proporcional à vibração provocada pela velocidade de deslocamento da carga sobre a viga;

A carga se move de  $x = 0$  em  $t = 0$ , posição e tempo iniciais, respectivamente, até  $x = L$  que é a condição final para o deslocamento longitudinal. Portanto, as condições de contorno, representadas na Eq. (2), são:

$$u_z(0, t) = 0; \quad u_z(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u_z(0, t)}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u_z(L, t)}{\partial x^2} = 0; \quad (2)$$

E as condições iniciais, Eq. (3), são:

$$u_z(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial u_z(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (3)$$

A máxima deflexão apresentada no caso estático pela viga pode ser determinada pela Eq. (4), a técnica para resolução utilizada foi o método de integração de Macaulay. Sabe-se que o ponto crítico é situado no ponto médio de coordenada  $x = \frac{L}{2}$ , portanto, tem-se:

$$u_o(L/2) = \frac{PL^3}{48EI_y} \quad (4)$$

A solução para determinar a deflexão para o caso de uma carga dinâmica atuando sobre uma viga, Eq. (6), é derivada a partir da resolução da equação diferencial de movimento de Laplace, Eq. (1), aplicando as condições iniciais e de contorno Eq. (2) e (3) e utilizando-se do método de separação de variáveis, obtém-se representativamente a Eq. (5) (Frýba, 2009).

$$u(x, t) = U(x)T(t) \quad (5)$$

$$u(x, t) = u_o \sum_{n=1}^{\infty} X[n^2(n^2 - \alpha^2)\sin(n\omega t) - Y\sin(\omega'_{(n)}t) - Z]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (6)$$

$X$ ,  $Y$  e  $Z$  são dados em termos de:

$$X = \frac{1}{n^2[n^2(n^2 - \alpha^2)^2 + 4(\alpha\beta)^2]} \quad (7)$$

$$Y = \frac{n\alpha[n^2(n^2 - \alpha) - 2\beta^2]}{\sqrt{n^4 - \beta^2}} e^{-\omega_b t} \quad (8)$$

$$Z = 2n\alpha\beta(\cos(n\omega t) - e^{-\omega_b t}\cos(\omega'_{(n)}t)) \quad (9)$$

Onde:  $\alpha$  é um parâmetro adimensional da razão de velocidades, velocidade normal desenvolvida pela carga,  $v$ , sobre a velocidade crítica,  $c$ ,  $\beta$  é o coeficiente de amortecimento e  $\omega$  é a frequência natural.

Para o caso onde o coeficiente de amortecimento é desprezado, tem-se  $\alpha \neq 0$  e  $\beta = 0$ , portanto a Eq. (6) fica:

$$u(x, t) = u_o \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{1}{n^2(n^2 - \alpha^2)} \left(\sin(n\omega t) - \frac{\alpha}{n} \sin(\omega_{(n)}t)\right) \quad (10)$$

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Diversos tipos de problemas envolvendo carga em movimento são estudados e revisados com afincos por muitos pesquisadores (Clark, 1986; Lin and Trethewey, 1990; Olsson, 1991; Ismail, 2011; Ouyang, 2011; Sudhansu, 2012; Frýba, 2009; Kumar *et al.*, 2015; Santos, 2016), estas são referências úteis para cada tipo de problema. A resolução computacional associada a problemas de carga em movimento e alguns métodos numéricos para validar essas questões são implementados em softwares dedicados como MIDAS Gen (2018), BEDAS (2018), MIDAS Civil (2018), dentre outros, onde o problema pode ser simulado com variações nas condições iniciais e de contorno.

Os dados de entrada do problema com relação as condições de material e geométricas da viga são: Aço estrutural ASTM A572, um aço de alta resistência mecânica e baixa liga, com limite de resistência última de 450 MPa, limite de escoamento de 345 MPa, módulo de elasticidade 77 GPa, densidade específica de 7850 kg/m<sup>3</sup>. Seção transversal retangular com altura  $h = 0,20$  m e largura  $b = 0,10$  m. Viga com comprimento  $L = 10$  m. Carga com intensidade  $P = 7,5$  kN e velocidade de deslocamento  $v = 1,0$  m/s.

A Tab. 1 representa os valores de deflexão da linha elástica para cada instante de tempo analisado. Sendo estes os valores anteriormente plotados na Fig. 3, a relação entre o posicionamento da carga  $P$  e o instante de tempo é dada por  $x_c = v \cdot t$ , onde  $x_c$  é a posição de atuação na viga,  $v$  é a velocidade desenvolvida pela carga e  $t$  é o tempo.  $T_f$  equivale ao tempo final, ou seja, o tempo que a carga levou para se deslocar da origem ( $x = 0$ ) até a extremidade final ( $x = L$ ). A viga foi discretizada em cinco (5) pontos de amostragem para a deflexão, estes caracterizados em função do tempo de passagem da carga móvel.

Tabela 1: Deflexões apresentadas para cada posição de aplicação da carga.

Tempo	Pto 1 ( $x_c = 2m$ )	Pto 2 ( $x_c = 4m$ )	Pto 3 ( $x_c = 6m$ )	Pto 4 ( $x_c = 8m$ )	Pto 5 ( $x_c = 10m$ )
0	0	0	0	0	0
$0,2 \cdot T_f$	-0,00113	-0,00358	-0,00381	-0,00278	-0,00101
$0,4 \cdot T_f$	-0,00154	-0,00641	-0,00763	-0,00583	-0,00216
$0,6 \cdot T_f$	-0,00214	-0,00551	-0,00722	-0,00605	-0,00230
$0,8 \cdot T_f$	-0,00244	-0,00274	-0,00381	-0,00359	-0,00156
$T_f$	-0,00204	-0,00036	-0,00044	-0,00034	-0,00013

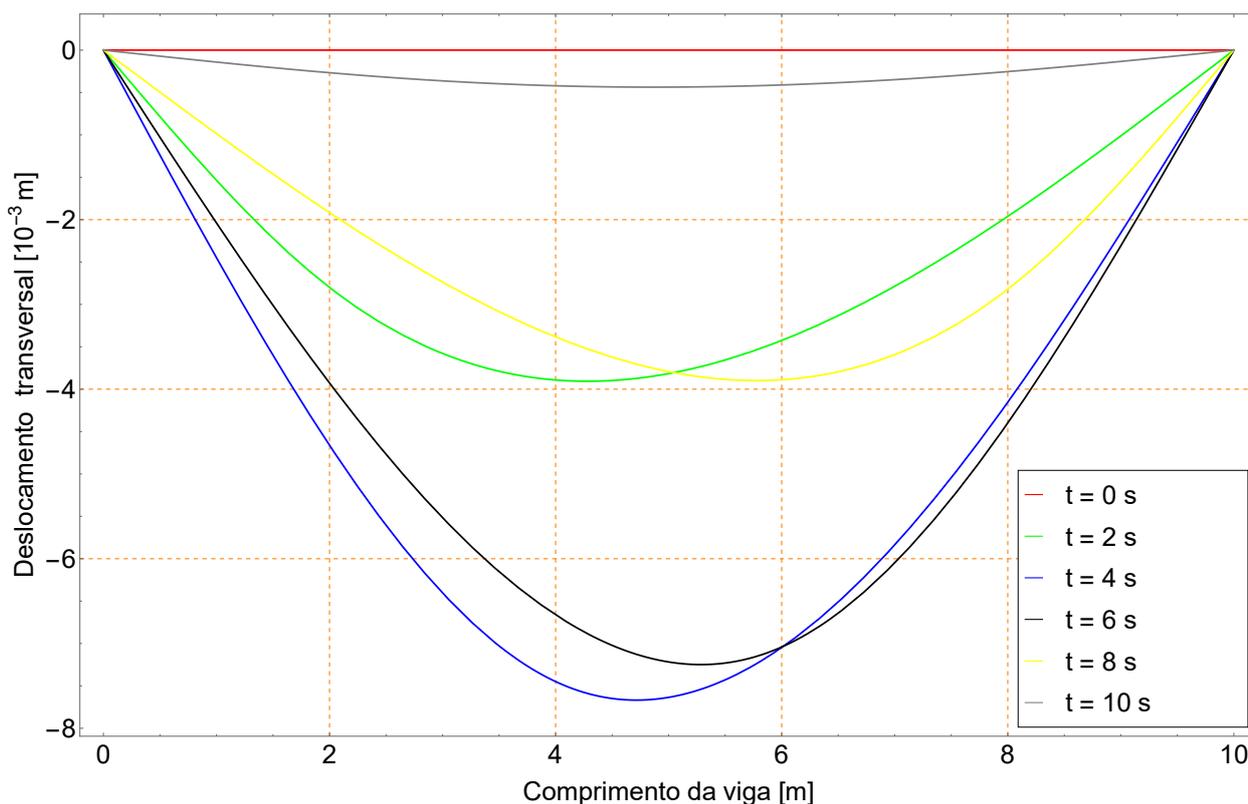


Figura 3: Representação da deflexão da viga para  $v = 1,0 \text{ m/s}$

Da Tab. 1 pode-se inferir que os maiores valores apresentados para a deflexão da viga foram na região mais próxima do ponto médio, deixando claro que o sistema é rígido pela condição de viga simplesmente apoiada.

Para fins de análise da viga, os parâmetros são delimitados com relação ao deslocamento da viga para quaisquer instantes de tempo obtidos por meio da Eq. (10), o comportamento da viga está representado na Fig. 3. Para o caso da viga simplesmente apoiada, na medida que a velocidade da carga móvel aumenta, a deflexão máxima da linha elástica da viga sofre influência da velocidade e também aumenta, por conseguinte, a posição do máximo valor de deflexão se desvia para ponto médio. Tal fenômeno acontece por causa da inércia desenvolvida pela carga móvel (Sudhansu, 2012).

#### 4. CONCLUSÕES

Analisar o comportamento de estruturas de tipologia mais simplificada quando sujeitas a cargas móveis permite uma compreensão inicial das variáveis envolvidas, estimula novas pesquisas em engenharia e implica diretamente em melhorias na etapa de concepção do projeto. Tal fato, também corrobora para o desenvolvimento de trabalhos que auxiliam e implementam novas modelagens e, ocasionalmente, melhores técnicas para resolução de problemas reais. Notou-se que, para o valor de velocidade ( $v = 1,0 \text{ m/s}$ ), os efeitos dinâmicos do problema são causados, apenas, em função da condição da posição variável do carregamento, uma vez que sua magnitude, por hipótese inicial, é assumida como constante.

Outro fator de extrema relevância apresenta-se justamente nos deslocamentos observados, cada ponto de aplicação da carga discretizado implica na determinação de um conjunto de esforços, visto que o método para agrupamento das solução torna-se um procedimento de baixa praticidade e eficiência, no entanto, como este problema mostrou-se simplificado, não houve ônus no tempo computacional. No entanto, encontra-se obstáculo quando o problema envolve condições e contorno mais complexas e múltiplos carregamentos combinados. Deste modo, as posições de atuação da carga provocam valores extremos para os instantes de tempo  $0, 4 \cdot T_f$  e  $0,6 \cdot T_f$  s, estes responsáveis pela discretização nos extremos do intervalo referente ao ponto médio da viga ( $x = \frac{L}{2}$ ), verificou-se que o ponto de máximo deslocamento da linha elástica da viga não é exatamente sobre o ponto intermediário.

O próximo passo deste trabalho é reanalisar vigas de diferentes seções transversais e condições de contorno genéricas e abrangido maiores situações usando o método de elementos finitos, assim como, a comparação com o modelo resolvido analiticamente e implementação posterior em um software.

## 5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, FAPEMA, UFMA e FAPEMIG pelo incentivo, acesso à estrutura, apoio e o financiamento da pesquisa.

## 6. REFERÊNCIAS

- A2P, E.P., 2018. *Integrated Solution System for Bridge and Civil Engineering*. URL Disponível em: <http://www.a2p.pt/portfolio/projectos/ponte-met-lica-te-filo-trindade>. Acesso em: 30 Mar. 2018.
- BEDAS, 2018. *BEDAS - Dynamic Analysis of Bridges Subject to Moving Loads Software*. URL Disponível em: <http://www.mechatools.com/en/bedas.html>. Acesso em: 30 Mar. 2018.
- Clark, J.A., 1986. Private communication, University of Michigan, Ann Harbor.
- DEMAG, 2018. *Pontes rolantes universal Demag*. URL Disponível em: <http://www.demagcranes.com.br/page102103.html>. Acesso em: 30 Mar. 2018.
- Frýba, L., 2009. *Vibration of solids and structures under moving loads*. Springer Science & Business Media. 45 p.
- Ismail, E., 2011. "Dynamic response of a beam due to an accelerating moving mass using moving finite element approximation". *Mathematical and Computational Applications*, , No. 1, pp. 171–182.
- Kumar, C.P.S., Sujatha, C. and Shankar, K., 2015. "Vibration of simply supported beams under a single moving load: a detailed study of cancellation phenomenon". *International Journal of Mechanical Sciences*, pp. 40–47.
- Lin, Y.H. and Trethewey, M.W., 1990. "Finite element analysis of elastic beams subjected to moving dynamic loads". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, No. 2, pp. 323 – 342. ISSN 0022-460X.
- MIDAS Civil, E.S., 2018. *Integrated Solution System for Bridge and Civil Engineering*. URL Disponível em: [http://en.midasuser.com/product/civil\\_overview.asp](http://en.midasuser.com/product/civil_overview.asp). Acesso em: 30 Mar. 2018.
- MIDAS Gen, E.S., 2018. *Integrated Solution System for Building and General Structures*. URL Disponível em: [http://en.midasuser.com/product/gen\\_overview.asp](http://en.midasuser.com/product/gen_overview.asp). Acesso em: 05 Mar. 2018.
- Olsson, M., 1991. "On the fundamental moving load problem". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 145, pp. 299 – 307.
- Ouyang, H., 2011. "Moving-load dynamic problems: A tutorial (with a brief overview)". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 25, No. 6, pp. 2039 – 2060. ISSN 0888-3270. Interdisciplinary Aspects of Vehicle Dynamics.
- Santos, V.G.R.C., 2016. "Análise transiente de uma viga de rolamento sujeita a cargas móveis". In *Universidade Federal do Maranhão*. UFMA, São Luís, Maranhão, Brazil, Vol. 1.
- Sudhansu, M., 2012. *Dynamic Response of a Beam Structure to a Moving Mass Using Green's Function*. Ph.D. thesis.

## 7. RESPONSABILIDADE AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

## DYNAMIC ANALYSIS OF A BEAM SUBJECTED TO MOVING LOAD

Victor Gustavo Ramos Costa dos Santos, [victorgustavorcosta.santos@gmail.com](mailto:victorgustavorcosta.santos@gmail.com)<sup>1</sup>

Claudionor Ferreira Pereira Junior, [claudionor.fpj@gmail.com](mailto:claudionor.fpj@gmail.com)<sup>1</sup>

Dalmo Inácio Galdez Costa, [dalmodj@gmail.com](mailto:dalmodj@gmail.com)<sup>1</sup>

Vilson Pereira Souza, [vilsonps@gmail.com](mailto:vilsonps@gmail.com)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Federal University of Maranhão - UFMA, Av. dos Portugueses, 1966 - Vila Bacanga, CEP 65065-545, São Luís - MA, Brazil

**Abstract:** *The analysis structures are essential for the basic project monitoring project, since, as the inherent conditions of the project imply in non-changes. In the case of structures, a variability with the same configurations of search engine booster. This method, type of analytical to arise the long of analytical, numerical, static, dynamic, transient, harmonic, modal, the others. This work is based on analytical analysis of an eg. In this particular case, the loading of the point type varies the position over time, while the wave intensity is constant. They can be found in this type of point of view: cranes, catwalks, bridges.*

**Keywords:** *beam, dynamic analysis, moving load*