



Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Curso Bacharelado em Engenharia Mecânica

ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS DANIFICADAS ATRAVÉS DE VETORES DE ESTADO

Bolsista: Adriano Mitsuo Goto

Orientador: Vilson Souza Pereira

Número do Processo: BIC - 04565/17

Protocolo do Estado: 217841/2017

Local de Execução: UFMA - Campus Bacanga

Vigência: 01/09/2017 a 30/08/2018

São Luís / MA
2018



Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Curso Bacharelado em Engenharia Mecânica

ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS DANIFICADAS ATRAVÉS DE VETORES DE ESTADO

Relatório final apresentado Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) na modalidade FAPEMA.

Adriano Mitsuo Goto
Bolsista

Wilson Souza Pereira
Orientador

Resumo

A formulação do Método dos Elementos Espectrais (*Spectral Element Method* - SEM) por meio da metodologia dos vetores de estado fornece a análise exata do problema sem necessitar da existência da solução analítica. Tais características mostram-se promissoras em seu uso na área da dinâmica estrutural e monitoramento de falhas em detrimento das abordagens convencionais. No presente trabalho investiga-se a empregabilidade do SEM por meio dos vetores de estado na análise dinâmica de elementos estruturais danificados do tipo viga de *Euler-Bernoulli* em regime de média e alta frequência.

Palavras chave: Método dos Elementos Espectrais. Vetores de Estado. Vigas de *Euler-Bernoulli*. Dinâmica de estruturas. Detecção de falhas.

Nomenclatura

\hat{M}	Momento fletor no espectro da frequência
\hat{V}	Força cortante no espectro da frequência
[S]	Matriz de rigidez espectral
[T]	Matriz de transferência
ω_n	Frequência circular
ρ	Densidade
σ	Tensão
A	Área transversal
c_{ij}	Coefficiente de flexibilidade da trinca
E	Módulo de <i>Young</i>
I	Momento de inércia
K_I	Fator de concentração de tensão referente ao primeiro modo de falha
k_n	Número de onda
U	Energia de deformação
w	Deslocamento vertical

Lista de Figuras

3.1	Modelo para viga de <i>Euler-Bernoulli</i>	4
3.2	Esquemática de uma viga danificada.	5
3.3	Modelo via SEM para a viga danificada.	6
3.4	Modos de falhas de uma trinca.	8
3.5	Região transversal da trinca.	9
5.1	Comparação da FRF das vigas saudável e danificadas.	11
5.2	Comparação da transmitância da viga saudável e danificadas.	12
5.3	Deslocamento transversal.	13
5.4	Fluxo de energia ao longo da estrutura.	13
5.5	Densidade de energia ao longo da estrutura.	13
5.6	Comparação do vetor de estado e SEM.	14
5.7	Vista frontal da trinca.	14
5.8	Especificações do modelo por elementos finitos.	15
5.9	Comparação dos métodos de vetor de estado e elementos finitos.	15

Sumário

1	Introdução	1
2	Objetivos	2
2.1	Objetivo principal	2
2.2	Objetivos específicos	2
3	Formulação matemática	3
3.1	Método dos vetores de espaço-estado	3
3.2	Energia e fluxo de energia	7
3.3	Flexibilidade da trinca	8
4	Metodologia	10
5	Resultados e discussões	11
5.1	Análise da profundidade relativa da trinca na resposta dinâmica	11
5.2	Avaliação da resposta na variável espacial	12
5.3	Validação dos resultados	14
6	Conclusões	17
7	Cronograma e plano de atividades	18
8	Agradecimentos	20
	Referências	22

1 Introdução

Elementos estruturais do tipo barra e viga estão presentes em diversas aplicações nas mais diferentes áreas da engenharia, tais como: aeroespacial, civil, naval, automotiva, etc. A análise de integridade estrutural é comum a estas áreas e tem apresentado crescente atenção nas últimas duas décadas. O desafio de proporcionar métodos de diagnósticos mais rápidos e precisos tem motivado diversos pesquisadores (Chang, 1999; Krawczuk e Ostachowicz, 1996; Klikowicz *et al.*, 2016; Mohan *et al.*, 2014). Um dos principais objetivos está em desenvolver mecanismos capazes de avaliar a integridade de elementos estruturais típicos e identificar e localizar possíveis falhas baseados em métodos de análise não destrutivos. Possibilitando, assim, avaliar o componente sem alterar as suas propriedades mecânicas e características dimensionais (Krawczuk e Ostachowicz, 1996; Adams *et al.*, 1978).

O princípio básico na metodologia de detecção de danos e descontinuidades estruturais é, no âmbito da propagação de ondas, conhecer as características de transmissão da vibração no comportamento da resposta dinâmica quando sujeitos à fontes de excitação. Cawley e Adams (1979) e Messina *et al.* (1992) apresentam técnicas experimentais de percepção e localização de defeitos com base na mudança nas frequências naturais de vibração. Contudo, as mudanças são apenas significativas para danos visíveis. Para casos de falhas menores, a sua influência é obscurecida pela resposta do sistema e são apenas notáveis em regimes de frequências maiores.

Além da abordagem experimental, há diversos trabalhos investigando a eficácia de métodos numéricos para a predição de danos. Dentre os investigados, Mehl e Miles (1995) avaliaram a aplicabilidade do Método dos Elementos Finitos (*Finite Element Method* - FEM) para a análise da resposta transiente de vigas viscoelásticas. Entretanto, apesar de ser um método com um sólido embasamento matemático e com significativa capacidade de generalização, o FEM apresenta limitações em regimes de média e alta frequência devido ao custo computacional e às incertezas nos parâmetros (von Flotow, 1987).

Com o objetivo de superar as limitações do FEM, o Método dos Elementos Espectrais (*Spectral Element Method* - SEM) proposto por Doyle (1997) atende às necessidades de avaliação em faixas de alta frequência pelo fato de ser um método exato, visto que a sua formulação parte da solução analítica do problema. Com base nisso, Palacz e Krawczuk (2002) e Krawczuk (2002) apresentam aplicações do SEM no estudo da propagação de ondas em barras e vigas danificadas, respectivamente. De maneira complementar, a formulação do SEM pode ser modificada utilizando a técnica dos vetores de estado. Este procedimento baseia-se na readequação da equação diferencial resultante da transformada de Fourier em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Consequentemente, obtém-se um sistema matricial análogo à relação força-deslocamento, gerando resultados do comportamento dinâmico do elemento sem precisar conhecer a solução exata (Lee, 2000). O que permite a extensão do método para modelos estruturais mais complexos.

2 Objetivos

2.1 Objetivo principal

O principal objetivo do presente trabalho é realizar a formulação do SEM utilizando a metodologia do vetor de estado para avaliar a resposta dinâmica de uma viga de *Euler-Bernoulli* trincada, comparando os resultados com uma viga de saudável utilizando o FEM e o SEM.

2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos do presente trabalho são:

- Conhecer e implementar a descontinuidade geométrica (Trinca);
- Conhecer e implementar a metodologia do vetor de estado para aplicação em modelos de viga simples;
- Implementar o modelo de viga com descontinuidade do tipo trinca;
- Modelar uma viga com elemento de trinca utilizando um software comercial por elementos finitos;
- Implementar e analisar as relações de acoplamentos para análise de transmissão de potência na descontinuidade;

3 Formulação matemática

3.1 Método dos vetores de espaço-estado

A equação da vibração transversal de uma viga saudável para o caso de ausência de fonte externa de excitação é dada como:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1)$$

Considerando a rigidez à flexão constante ao longo do elemento estrutural e aplicando a transformada de *Fourier* na forma:

$$w(x, T) = \sum_{i=1}^n \hat{w}_i e^{i \cdot \omega_n t}, \quad (3.2)$$

onde \hat{w}_n e ω_n são o deslocamento transversal no domínio da frequência e a n-ésima frequência circular. Aplicando a transformada na Eq. (3.1), obtém-se:

$$EI \frac{d^4 \hat{w}}{dx^4} - \omega_n^2 \rho A \hat{w} = 0. \quad (3.3)$$

A Eq. (3.3) encontra-se no domínio da frequência. Assim, para cada valor de frequência calcula-se o deslocamento transversal associado. Além disso, as expressões de esforço cortante e momento fletor são expressos como:

$$\begin{aligned} \hat{M} &= EI \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2}, \\ \hat{V} &= -EI \frac{d^3 \hat{w}}{dx^3}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Com isso, aplicando a redução de ordem nas Eq. (3.3) e (3.4):

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \hat{w}, \\ \zeta_2 &= \frac{d\hat{w}}{dx} = \hat{\theta}, \\ \zeta_3 &= \hat{V}, \\ \zeta_4 &= \hat{M}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Derivando as expressões da Eq. (3.5) e organizando em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \zeta_1' \\ \zeta_2' \\ \zeta_3' \\ \zeta_4' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/EI \\ -EI k_n^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

com k_n indicando o número de onda, disposto da forma:

$$k_n = \sqrt{\omega_n} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (3.7)$$

Dispondo a Eq. (3.6) na forma compacta:

$$\frac{d\{\hat{\mathbf{y}}\}}{dx} = [\mathbf{A}]\{\hat{\mathbf{y}}\}, \quad (3.8)$$

com $\{\hat{\mathbf{y}}\}$ sendo o vetor de estado e é disposto da seguinte maneira:

$$\{\hat{\mathbf{y}}\} = \begin{Bmatrix} \{\hat{\mathbf{d}}\} \\ \{\hat{\mathbf{F}}\} \end{Bmatrix}, \quad (3.9)$$

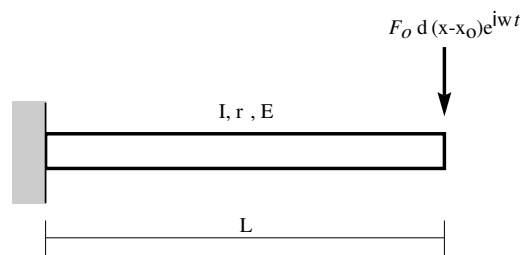
isto é, leva-se em consideração os termos de deslocamento e força no elemento.

A solução da Eq. (3.7) é dada como:

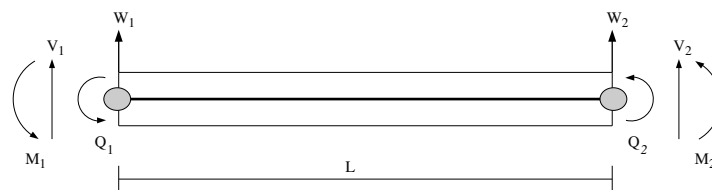
$$\{\hat{\mathbf{y}}(x)\} = e^{[\mathbf{A}]x} \{\hat{\mathbf{y}}(0)\}. \quad (3.10)$$

De acordo com esta expressão, é possível calcular os deslocamentos e as forças em um determinado ponto com base nos valores obtidos no início da viga.

Considerando uma viga engastada-livre com a aplicação de uma força cortante pontual em sua extremidade livre, Fig. 3.1(a), a formulação dos vetores de estado seguirá a abordagem do SEM. Portanto, o elemento de viga será representado por dois nós extremos com dois graus de liberdade e dois termos de força em cada nó, Fig. 3.1(b).



(a) Viga engastada-livre



(b) Modelo SEM para viga saudável

Figura 3.1: Modelo para viga de *Euler-Bernoulli*.

Fonte: Produzido pelo próprio autor.

Com base na Eq. (3.9), a resposta da extremidade livre é obtida a partir da resposta na outra extremidade e da matriz de transferência. A saber, esta matriz é disposta como:

$$[\mathbf{T}] = e^{[\mathbf{A}]L}. \quad (3.11)$$

E a relação do segundo nó com o primeiro é:

$$\{\hat{\mathbf{y}}_2\} = [\mathbf{T}] \{\hat{\mathbf{y}}_1\}. \quad (3.12)$$

A relação força-deslocamento tradicional pode ser obtido realizando manipulações algébricas. Dessa maneira, a matriz de rigidez é calculada conforme a seguinte expressão:

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}_{12}]^{-1} [\mathbf{T}_{11}] & -[\mathbf{T}_{12}]^{-1} \\ [\mathbf{T}_{21}] - [\mathbf{T}_{22}] [\mathbf{T}_{12}]^{-1} [\mathbf{T}_{11}] & [\mathbf{T}_{22}] [\mathbf{T}_{12}]^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

E a relação força-deslocamento fica da forma:

$$\{\hat{\mathbf{F}}\} = [\mathbf{S}] \{\hat{\mathbf{d}}\}. \quad (3.14)$$

De maneira similar, utiliza-se a formulação dos vetores de estado para uma viga danificada, como indicada na Fig. 3.2, onde a posição da trinca é representada por L_t .

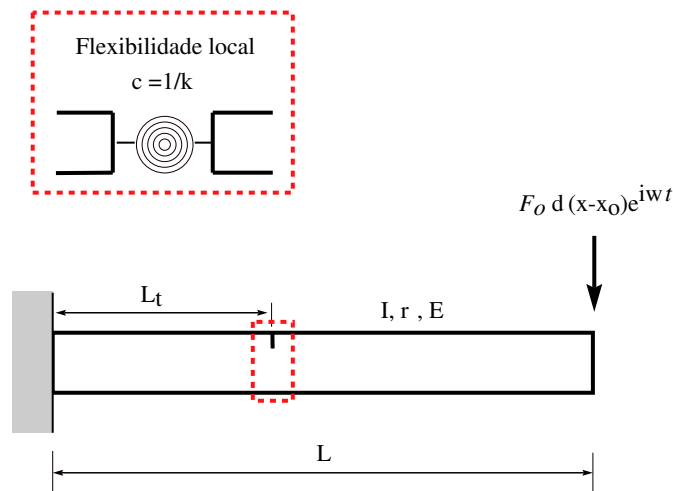


Figura 3.2: Esquematização de uma viga danificada.

Fonte: Produzido pelo próprio autor.

O elemento estrutural danificado pode ser modelado como a junção de dois elementos saudáveis conectados por uma mola de flexibilidade equivalente ao da trinca, conforme apresentado na literatura (Palacz e Krawczuk, 2002; Krawczuk, 2002; Krawczuk *et al.*, 2006, 2003; Izadifard *et al.*, 2014; Singh e Srinivas, 2018). No caso da viga, a mola apresenta o comportamento de torção e a aplicação de forças cortantes e/ou momentos fletores contribuem no

primeiro modo de falha da trinca. O modelo SEM para a viga danificada é exibida na Fig. 3.3.

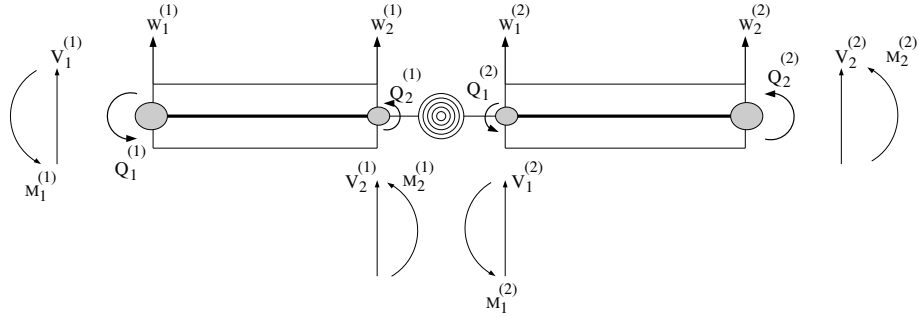


Figura 3.3: Modelo via SEM para a viga danificada.

Fonte: Produzido pelo próprio autor.

As relações descritas nas Eq. (3.10) e (3.11) são avaliadas para cada viga conforme a posição da trinca no elemento estrutural:

$$\{\hat{\mathbf{y}}_2^{(1)}\} = [\mathbf{T}^{(1)}] \{\hat{\mathbf{y}}_1^{(1)}\}, \quad (3.15)$$

$$\{\hat{\mathbf{y}}_2^{(2)}\} = [\mathbf{T}^{(2)}] \{\hat{\mathbf{y}}_1^{(2)}\}, \quad (3.16)$$

onde as matrizes de transferência são dadas como:

$$\begin{cases} [\mathbf{T}^{(1)}] = e^{[\mathbf{A}]L_1}, \\ [\mathbf{T}^{(2)}] = e^{[\mathbf{A}](L-L_1)}. \end{cases} \quad (3.17)$$

De acordo com as Eq. (3.15) e (3.16), obtêm-se os deslocamentos e as forças no segundo nó conforme os valores apresentados no primeiro nó de cada viga. O próximo objetivo está em estabelecer uma relação entre o último e o primeiro nó global do conjunto.

Para a região da trinca, as seguintes relações de acoplamento são válidas:

$$\begin{cases} w_1^{(2)} = w_2^{(1)}, \\ \theta_1^{(2)} - \theta_2^{(1)} = c_{ij}M_2^{(1)}, \\ V_1^{(2)} = V_2^{(1)}, \\ M_1^{(2)} = M_2^{(1)}, \end{cases} \quad (3.18)$$

onde c_{ij} indica a flexibilidade da trinca.

Reorganizando a Eq. (3.18) e substituindo em (3.15), têm-se:

$$\{\hat{\mathbf{y}}_1^{(2)}\} = [\mathbf{T}_{\text{mod}}] \{\hat{\mathbf{y}}_1^{(1)}\}, \quad (3.19)$$

com a matriz de transferência modificada expressa da forma:

$$[\mathbf{T}_{\text{mod}}] = \begin{bmatrix} T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(1)} & T_{13}^{(1)} & T_{14}^{(1)} \\ T_{21}^{(1)} + c_{ij}T_{41}^{(1)} & T_{22}^{(1)} + c_{ij}T_{42}^{(1)} & T_{23}^{(1)} + c_{ij}T_{43}^{(1)} & T_{24}^{(1)} + c_{ij}T_{44}^{(1)} \\ T_{31}^{(1)} & T_{32}^{(1)} & T_{33}^{(1)} & T_{34}^{(1)} \\ T_{41}^{(1)} & T_{42}^{(1)} & T_{43}^{(1)} & T_{44}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Por fim, substituindo a Eq. (3.19) em (3.16):

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{y}}_2^{(2)}\} &= [\mathbf{T}^{(2)}] [\mathbf{T}_{\text{mod}}] \{\hat{\mathbf{y}}_1^{(1)}\}, \\ \{\hat{\mathbf{y}}_2^{(2)}\} &= [\mathbf{T}_c] \{\hat{\mathbf{y}}_1^{(1)}\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A matriz de transferência da viga trincada pode ser vista como uma generalização da Eq. (3.11) onde os efeitos da trinca na resposta dinâmica são levados em conta. Além disso:

$$\lim_{c_{ij} \rightarrow 0} [\mathbf{T}_c] = [\mathbf{T}]. \quad (3.22)$$

E a matriz de rigidez do elemento trincado é obtida de acordo com a Eq. (3.13).

3.2 Energia e fluxo de energia

A solução do deslocamento transversal e dos termos de força em relação a variável espacial pode ser obtida de acordo com a Eq. (3.10).

A visualização dos efeitos da descontinuidade na resposta dinâmica pode ser complementada com os métodos de energia. Nessa abordagem, a densidade e o fluxo de energia são avaliadas ao longo do comprimento da viga. Por simplificação, os termos de energia são analisados na média do tempo (Lase *et al.*, 1996). Considerando uma entrada de excitação harmônica, a densidade de energia mecânica reescrita nos termos de forças, conforme apresentado por Wohlever e Bernhard (1992), é dado como:

$$\langle e \rangle = \frac{1}{4} \Re \left\{ \hat{M} \frac{\hat{M}^*}{EI} \right\} + \frac{1}{4} \rho A \omega_n^2 \Re \{ \hat{w} \hat{w}^* \}, \quad (3.23)$$

onde $\langle \rangle$ indica a média no tempo, \Re a parte real e $\hat{M}^*/EI = d^2 \hat{w}/dx^2$. O primeiro termo a direita da Eq. (3.23) indica a energia potencial e o segundo a energia cinética.

O fluxo de energia ao longo da estrutura é dado como:

$$\langle q \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ -\mathbf{i} \cdot \omega_n \hat{M} \hat{\theta}^* \} + \frac{1}{2} \Re \{ \hat{V} \hat{w}^* \}. \quad (3.24)$$

3.3 Flexibilidade da trinca

Conforme apresentado por Krawczuk (2002), a trinca apresenta o comportamento análogo ao de uma mola rotacional e, com isso, o seu efeito na resposta dinâmica é referente ao primeiro modo de falha, Fig. 3.4. Além disso, são realizadas algumas considerações adicionais a respeito da trinca:

- A trinca é transversal e seu modo dominante é o de abertura.
- Não há propagação da falha.

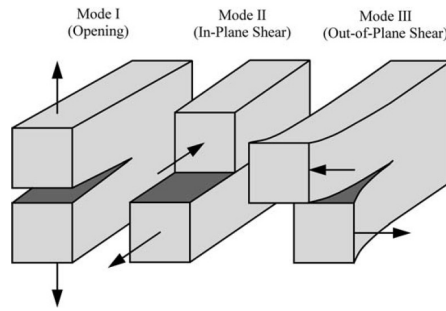


Figura 3.4: Modos de falhas de uma trinca.

Fonte: Retirado de Anderson (2005, p. 43).

Logo, em analogia à relação força-deslocamento de uma mola linear, têm-se:

$$M = k_{\theta}\Delta\theta, \quad (3.25)$$

observando que a flexibilidade c_{ij} é o inverso da rigidez da mola k_{θ} .

A flexibilidade da trinca pode ser calculada de acordo com o teorema de Castigliano (Przemieniecki, 1968):

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial F_i \partial F_j}, \quad (3.26)$$

onde U denota a energia de deformação elástica. Para um elemento de viga, a sua expressão é dada como (Tada *et al.*, 1973, p. 12):

$$U = \frac{1}{E} \int_{A_c} K_I^2 dA_c, \quad (3.27)$$

com A_c indicando a área transversal na região da falha. Enquanto K_I indica o fator de concentração de tensão, escrita na forma:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi\alpha} f\left(\frac{\alpha}{h}\right). \quad (3.28)$$

A região transversal da falha é esquematizada na Fig. 3.5. O termo α indica a variável de integração ao longo da profundidade da trinca e $f\left(\frac{\alpha}{h}\right)$ simboliza o fator de correção.

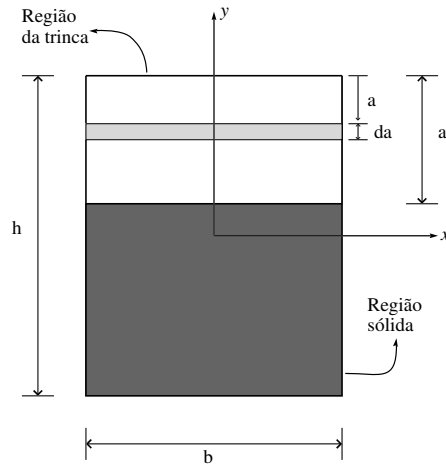


Figura 3.5: Região transversal da trinca.

Fonte: Produzido pelo próprio autor.

O fator de correção f é obtido por correlações experimentais e para o modo de esforço vertical cisalhante, de acordo com (Tada *et al.*, 1973, p. 55), é dado como:

$$f(\bar{\alpha}) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\tan\left(\frac{\pi\bar{\alpha}}{2}\right)}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{0.923 + 0.199 \left[1 - \sin\left(\frac{\pi\bar{\alpha}}{2}\right)\right]^4}{\cos\left(\frac{\pi\bar{\alpha}}{2}\right)}}, \quad (3.29)$$

com $\bar{\alpha} = \alpha/h$ indicando a profundidade relativa a altura da seção transversal.

A tensão σ submetida a uma viga devido a ação de um momento puro é expresso da forma:

$$\sigma = \frac{Mh}{2I}. \quad (3.30)$$

Logo, o fator de concentração pode ser reescrito em termos da tensão devido a um momento puro substituindo a Eq. (3.30) em (3.28). E a expressão resultante é utilizada na Eq. (3.27), fornecendo:

$$U = \frac{M^2 h^4 b \pi}{4EI^2} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} f^2(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha}. \quad (3.31)$$

Com os termos da integral escritos em termos de profundidade relativa da trinca. Aplicando o processo de derivação em relação ao momento fletor e lembrando que $I = \frac{h^3 b}{12}$, obtém-se:

$$c_{ij} = \frac{72\pi}{Eh^2 b} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} f^2(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha}. \quad (3.32)$$

4 Metodologia

A metodologia da pesquisa foi de caráter bibliográfica e descritiva. Objetivou-se realizar o estudo da teoria de vibrações de meios contínuos, da dinâmica de estruturas e dos métodos matemáticos utilizados para avaliar tais tipos de problemas. Dentre essas técnicas, destacam-se o FEM e o SEM. Além disso, foi realizada a análise comparativa dos trabalhos disponíveis em literatura empregando tais métodos na investigação da resposta dinâmica de estruturas com e sem falhas geométricas. Além disso, formulou-se a abordagem matemática do SEM pela metodologia dos vetores de estado para estruturas saudáveis e danificadas do tipo viga de *Euler-Bernoulli*. Por fim, validou-se o modelo por meio da comparação dos resultados mediante do uso da versão acadêmica do *software* comercial ANSYS.

Obteve-se os resultados exclusivamente por meio de simulações computacionais. E, para a execução da pesquisa, os seguintes *softwares* foram empregados:

- MATHEMATICA: Emprego na formulação de expressões matemáticas analíticas e simbólicas.
- MATLAB: Avaliação numérica e plotagem de curvas de respostas em frequência para diversos exemplos.
- ANSYS: Simulação do comportamento dinâmico por elementos finitos de geometrias tridimensionais para viga saudável e danificada para fins de validação.

5 Resultados e discussões

A formulação baseado nos vetores de estado têm por objetivo realizar a análise da Função de Resposta em Frequência (*Frequency Response Function* - FRF). A FRF consiste em uma representação matemática que relaciona o sinal de entrada com o de saída através de uma função de transferência. Isso permite a avaliação do comportamento dinâmico de uma determinada posição i devido à excitação harmônica na posição j (Craig e Kurdila, 2006). Quando a FRF avalia o deslocamento em relação a entrada de excitação chama-se receptância. Enquanto denomina-se transmitância quando analisa-se a força de reação provocada na estrutura.

Diante disso, propôs-se alguns exemplos numéricos para examinar o comportamento dinâmico de uma viga saudável e danificada. Considerou-se uma viga de comprimento $L = 4$ m e seção transversal retangular com altura de $h = 160$ mm e largura $b = 20$ mm. A posição da trinca foi fixada em $L_t = 0.6L$ e o material utilizado foi o alumínio comercial ($E = 71$ GPa, $\rho = 2770$ kg m⁻³ e $\eta = 0.01$).

5.1 Análise da profundidade relativa da trinca na resposta dinâmica

Inicialmente realizou-se o estudo da resposta dinâmica da viga variando o valor da profundidade relativa da trinca. Os valores considerados foram de 5, 10 e 15%.

A Fig. 5.1 exibe as FRF's das vigas saudável e das danificadas avaliando o ponto de excitação. Conforme aumenta-se o valor da frequência de análise, a influência da trinca se torna mais perceptível. O mesmo comportamento é observado à medida que a profundidade da trinca aumenta.

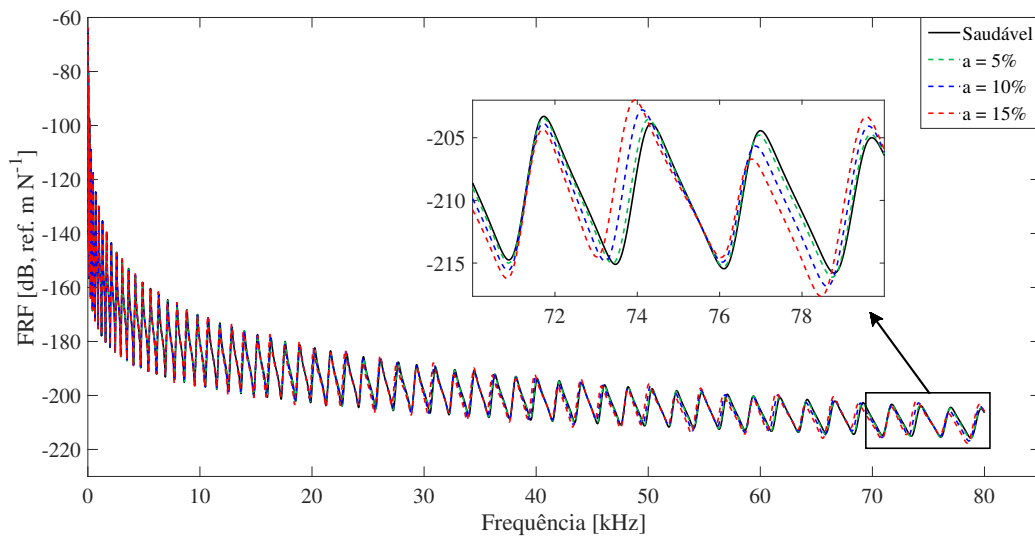


Figura 5.1: Comparação da FRF das vigas saudável e danificadas.

Fonte: Produzido pelo próprio autor.

Além disso, a presença da descontinuidade promove o deslocamento da curva à esquerda. Isto é, os picos de deslocamentos são observados a valores de frequência menores, como co-

mentado por Krawczuk e Ostachowicz (1996).

Uma outra forma de visualizar este comportamento é por meio da transmitância, onde se avalia a razão da força de reação pela de excitação, Fig. 5.2.

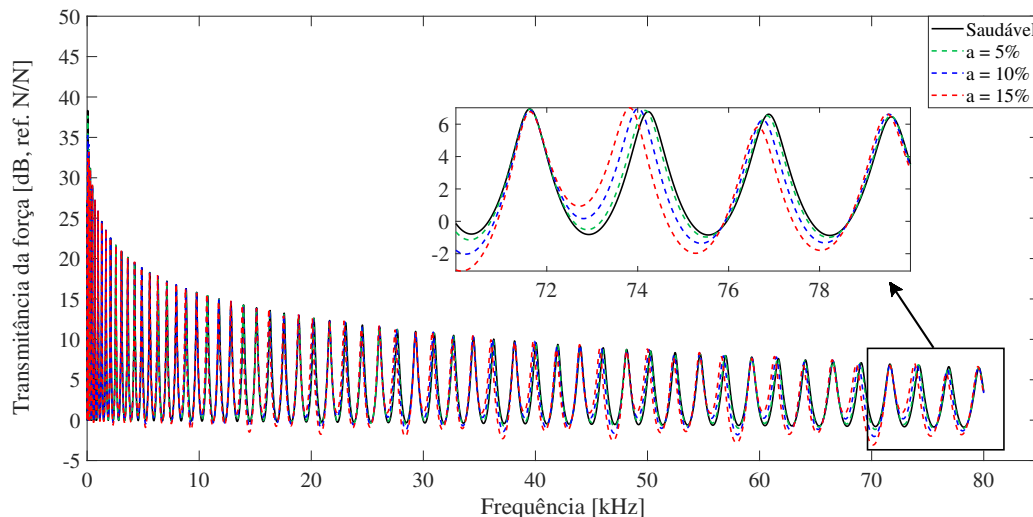


Figura 5.2: Comparação da transmitância da viga saudável e danificadas.

Fonte: Produzido pelo próprio autor.

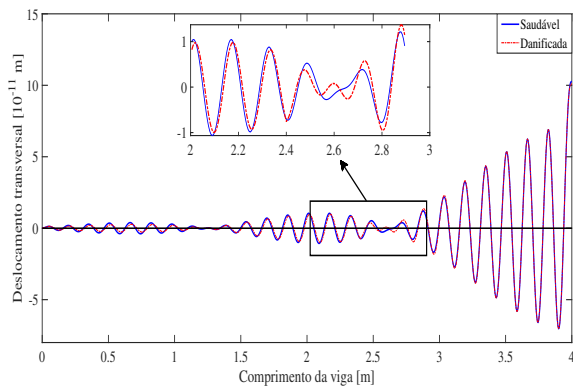
5.2 Avaliação da resposta na variável espacial

A análise pela receptância e transmitância é interessante devido a sua similaridade com a avaliação experimental, onde é observada a resposta em um único ponto. De maneira complementar, é avaliada a dinâmica estrutural em função da variável espacial, ou seja, ao longo do comprimento da viga. Esta resposta é obtida em uma determinada faixa de frequência e realizada uma média. Para as avaliações, escolheu-se as frequências centrais de 60 e 120 kHz e a faixa de 1/3 de oitava. Além disso, foi fixada a profundidade relativa da trinca em 15%.

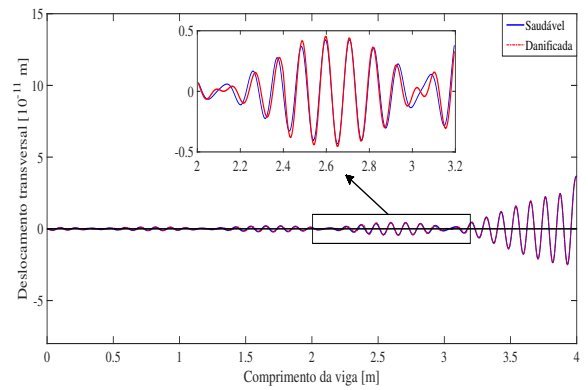
A Fig. 5.3 exibe os deslocamentos transversais médios. Os efeitos do dano ainda se encontram sutis nos valores de deslocamento. A divergência entre as curvas se mostra mais nítida na região próxima da trinca, em torno de $x = 2.4$ m. O aumento da frequência de avaliação tende a facilitar a identificação das alterações, como observado na figura. A curva de deslocamento apresenta-se mais compacta sob a frequência mais alta.

Uma outra maneira de visualizar o problema é por meio da energia presente na estrutura. Pelas Eq. (3.23) e (3.24), é possível observar a densidade e fluxo de energia, respectivamente. A Fig. 5.4 apresenta o fluxo de energia em escala decibel para os dois valores de frequência. A taxa temporal de propagação de energia ao longo da viga exibiu mudança perceptível com a adição do dano e/ou com o aumento da frequência de observação.

Por outro lado, a densidade de energia exibe uma melhor maneira de identificar a presença de uma trinca e a sua localização, como demonstrado na Fig. 5.5. No gráfico da Fig. 5.5 (b), o regime de frequência de 120 kHz possibilita a visualização da descontinuidade na curva.



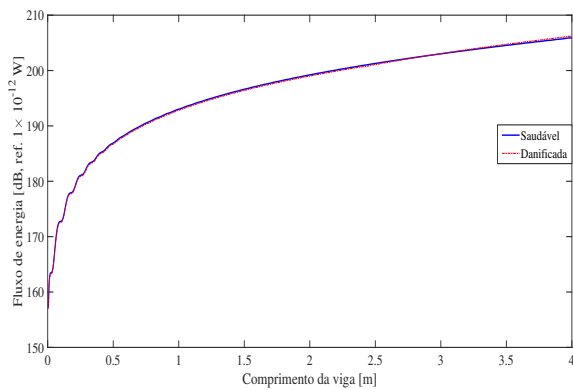
(a) $f_c = 60\text{kHz}$



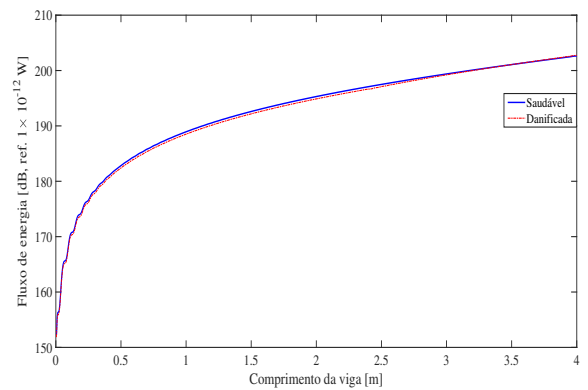
(b) $f_c = 120\text{kHz}$

Figura 5.3: Deslocamento transversal.

Fonte: Produzido pelo próprio autor.



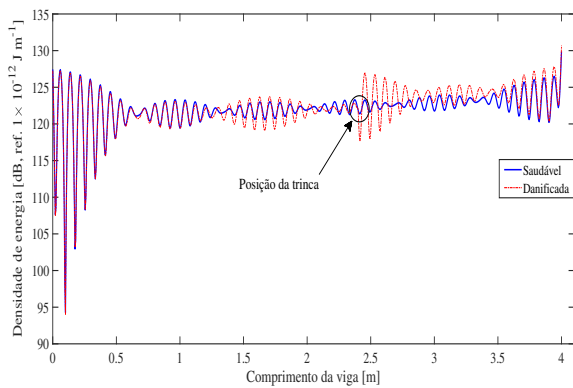
(a) $f_c = 60\text{kHz}$



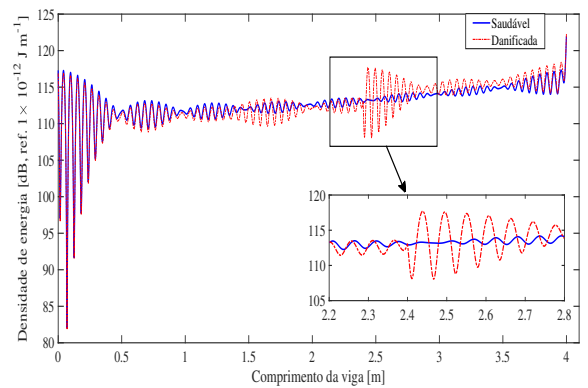
(b) $f_c = 120\text{kHz}$

Figura 5.4: Fluxo de energia ao longo da estrutura.

Fonte: Produzido pelo próprio autor.



(a) $f_c = 60\text{kHz}$



(b) $f_c = 120\text{kHz}$

Figura 5.5: Densidade de energia ao longo da estrutura.

Fonte: Produzido pelo próprio autor.

5.3 Validação dos resultados

A última etapa realizada durante a pesquisa foi a validação da metodologia e dos resultados propostos. Considerou-se uma nova geometria da viga com seção transversal retangular ($h = 45\text{mm}$ e $b = 30\text{mm}$), comprimento $L = 1\text{m}$ e a posição da trinca foi fixada em $L_t = 0.5L$. A comparação foi realizada com o SEM mediante a formulação proposta por Krawczuk (2002) e com o MEF por meio do *software* ANSYS.

A Fig. 5.6 exibe a comparação do vetor de estado e do SEM. Observa-se que as duas formulações resultam em soluções idênticas, portanto, indicando que a formulação proposta esta coerente com a metodologia usual.

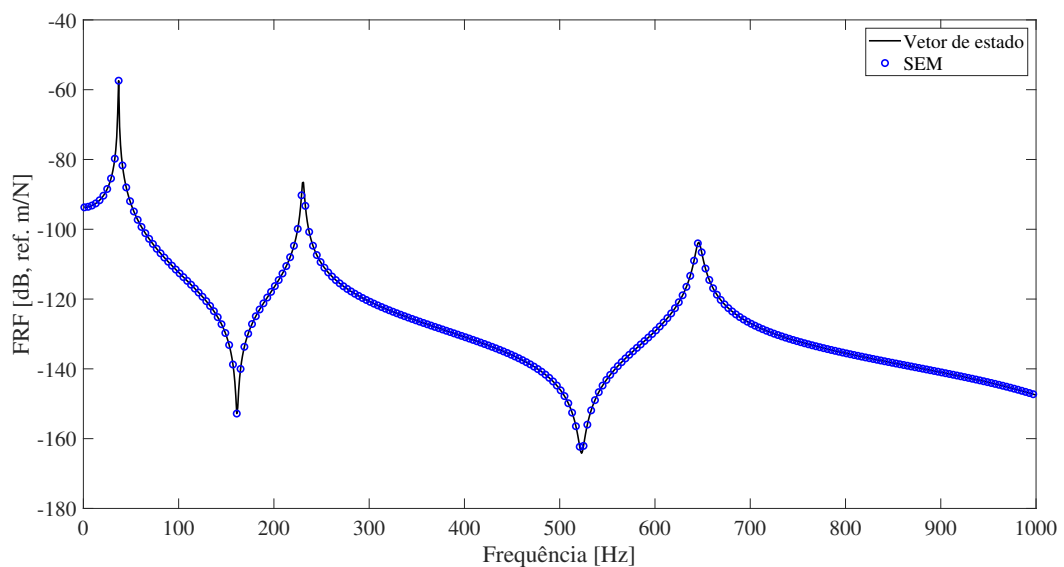


Figura 5.6: Comparação do vetor de estado e SEM.

Fonte: Produzido pelo próprio autor.

Para simular a dinâmica estrutural de uma viga danificada utilizando o MEF, construiu-se um modelo tridimensional com uma descontinuidade na superfície superior do corpo com profundidade 1.5 mm. Considerou-se o perfil triangular do dano com ângulo de 10° , Fig. 5.6.

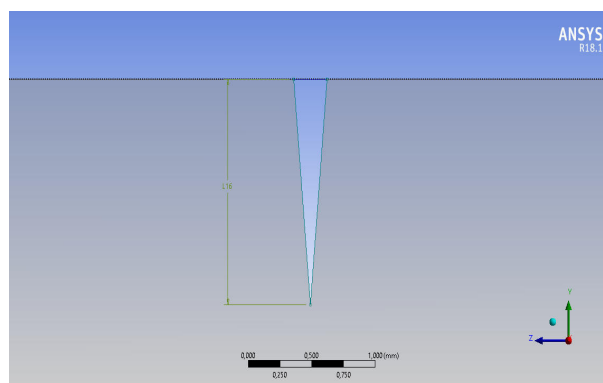


Figura 5.7: Vista frontal da trinca.

Fonte: Produzido pelo próprio autor.

A malha gerada apresenta 1600 elementos e 32000 nós formado exclusivamente por elementos hexaédricos de segunda ordem. As condições de contorno são de viga engastada-livre com uma força de excitação unitária aplicada na extremidade livre.

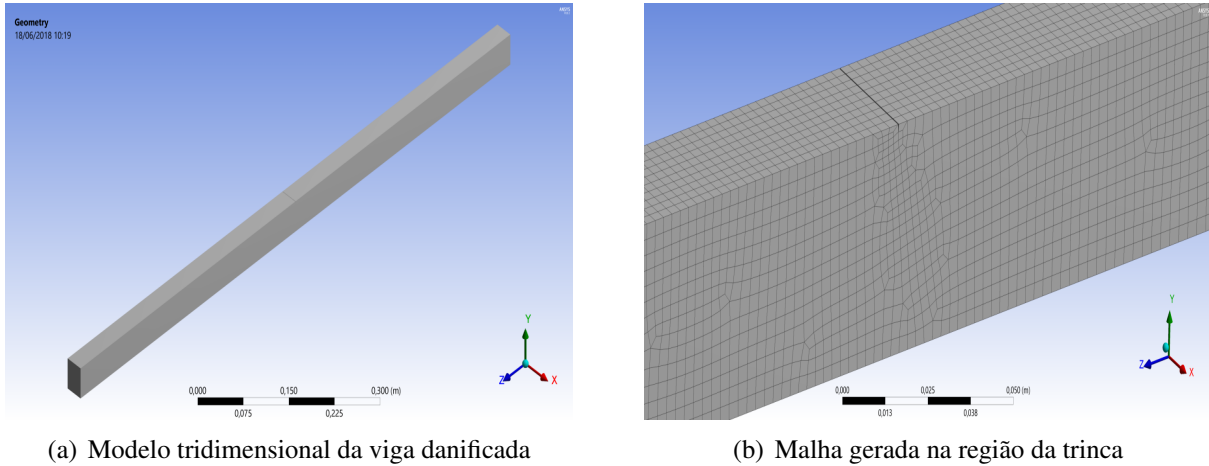


Figura 5.8: Especificações do modelo por elementos finitos.

Fonte: Produzido pelo próprio autor.

A resposta harmônica foi obtida na aresta superior da face livre da viga na faixa de 1 a 1000 Hz com incremento da frequência de 1 Hz. A Fig. 5.9 exibe a comparação das receptâncias obtidas pelo modelo por vetor de estado e elementos finitos.

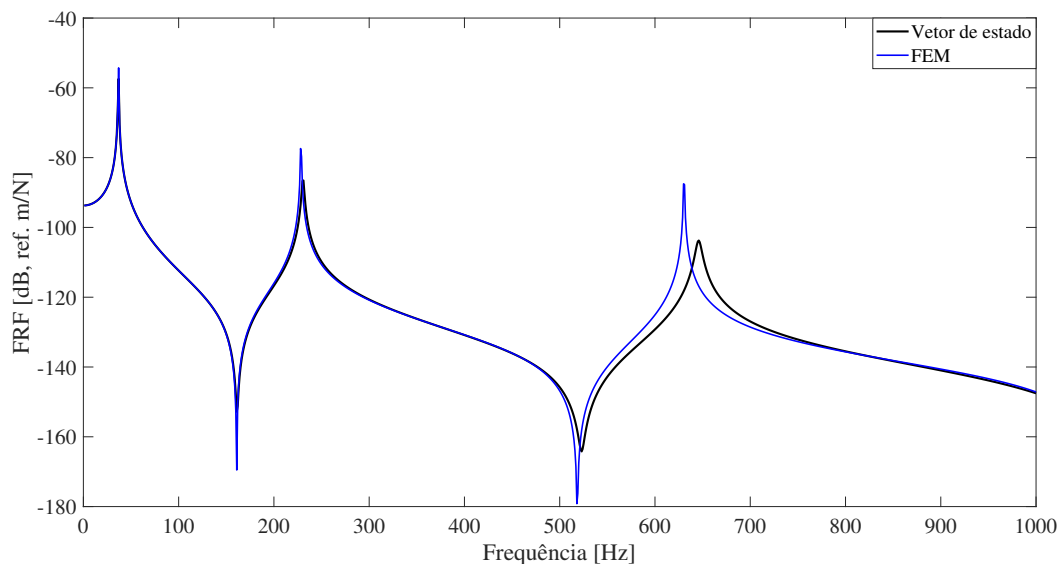


Figura 5.9: Comparação dos métodos de vetor de estado e elementos finitos.

Fonte: Produzido pelo próprio autor.

Pelo gráfico, é possível observar significativa concordância entre as curvas. Nota-se que a partir da frequência de 500 Hz as curvas começam a se distanciar. Os picos de deslocamento obtidos pelo MEF ocorrem a valores de frequência menores que os previstos pelo vetor de estado. Isto indica que os efeitos da trinca são maiores no MEF que comparados no vetor de

estado. Tal resultado é coerente com o esperado pois o modelo foi construído por elementos tridimensionais do tipo hexaédrico de vinte nós com três graus de liberdade em cada. Portanto, indicando picos de deslocamentos em valores de frequência ligeiramente diferentes a partir de 500 Hz. É importante destacar que o modelo por vetor de estado assume dois graus de liberdade - deslocamento transversal e rotação - por nó.

Apesar da notável diferença entre os métodos, as soluções obtidas apresentam valores próximos indicando que a metodologia de inserção da trinca e obtenção da matriz de rigidez da viga danificada estão adequados. Observa-se também que a formulação unidimensional pelo vetor de estado fornece a resposta dinâmica da estrutura com o nível de precisão aceitável e com o custo computacional substancialmente menor - levando aproximadamente 0,71% do tempo utilizado pelo MEF.

6 Conclusões

A formulação do método dos elementos espectrais pela metodologia dos vetores de estado fornece resposta exata da dinâmica estrutural no domínio da frequência sem trabalhar com a solução harmônica do problema de propagação de onda. Esta nova abordagem permite a avaliação em regime de média e alta frequência com o custo computacional menor comparado aos métodos usuais. Além disso, proporciona a obtenção de todos os parâmetros estruturais de um elemento de viga, ou seja, o deslocamento transversal, rotação, momento fletor e força cortante. Por esta razão, mostra-se adequado na avaliação de membros estruturais danificados e na identificação de falhas geométricas. No presente trabalho, considerou-se o primeiro modo de ruptura, referente ao modo de abertura da trinca, em uma estrutura do tipo viga de *Euler-Bernoulli*. Os resultados obtidos mostram que a avaliação em regimes de média e alta frequência auxiliam na identificação de alterações no comportamento dinâmico provocado por uma pequena trinca. Além disso, a obtenção da solução do problema em termos de deslocamento e força possibilita a utilização dos métodos de energia como forma complementar de observar os efeitos de descontinuidade, onde as alterações se tornam mais evidentes.

7 Cronograma e plano de atividades

A execução da pesquisa foi subdividida em fases com o intuito de dispor maior organização e controle nas metas e no cronograma de atividades. As etapas desenvolvidas são:

1. Primeira etapa: Estudo do modelo de descontinuidade formulado pela literatura para análise em médias e altas frequências, visando um maior conhecimento dos mesmos para a aplicação em estruturas do tipo viga.
2. Segunda etapa: Implementação dos modelos estudados para a avaliação de estruturas do tipo viga. Esta implementação será feita através de programação numérica usando os programas MATLAB e MATHEMATICA utilizando os conceitos do método de vetor de estado.
3. Terceira etapa: Abordagem de estruturas com descontinuidades, iniciando um estudo de forma a conhecer como inserir a descontinuidade geométrica nos modelos numéricos usando uma abordagem analítica, descrita pela literatura.
4. Quarta etapa: A análise de transmissão de potência em estrutura tipo viga será estudada e aplicada para obter as relações de acoplamento na posição da descontinuidade. Para o modelo de estrutural de viga, a descontinuidade será representada por um elemento de junta que descreve o comportamento da energia vibracional na posição da descontinuidade.
5. Quinta etapa: Implementação do modelo de viga com e sem descontinuidade. A condição de trinca será adicionada através das relações de acoplamento.
6. Sexta etapa: Avaliação dos resultados das análises do modelo estrutural de viga com e sem descontinuidade geométrica e o modelo de viga com e sem descontinuidade serão comparados utilizando o ANSYS, como forma de validação dos resultados.
7. Sétima etapa: Elaboração de artigos científicos para publicação em revistas e congressos.

As atividades descritas na seção anterior são organizadas no cronograma abaixo para um período de pesquisa de um ano.

1. Pesquisa bibliográfica
2. Implementação dos modelos estudados em literatura
3. Implementação do modelo elementar de descontinuidade
4. Desenvolvimento do modelo SEM através de vetores estado juntamente com as relações de acoplamento para elementos estruturais danificados

5. Implementação do modelo desenvolvido

6. Avaliação dos resultados

7. Elaboração de artigos

Tabela 7.1: Cronograma das atividades.

Atividades	Bimestre					
	1°	2°	3°	4°	5°	6°
1	X	X	X	X	X	
2	X	X	X			
3		X	X			
4			X	X		
5			X	X	X	
6				X	X	
7						X

8 Agradecimentos

- À FAPEMA pelo apoio, incentivo e financiamento do projeto.
- Ao Prof. Dr. Wilson Souza Pereira pela dedicada orientação e auxílio na construção dos códigos e rotinas para a avaliação do problema.
- Aos Prof. Dr. Dalmo Inácio Galdez Costa e Prof. Me. Edilson Dantas Nóbrega pelas sugestões e discussões a respeito do trabalho.

Referências

- ADAMS, R.D.; CAWLEY, P.; PYE, C.J. e STONE, B.J. A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures. **Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 20, n. 2, 93–100, 1978. 1
- ANDERSON, T.L. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**. CRC Press, 3 ed., 2005. 8
- CAWLEY, P. e ADAMS, R.D. The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. **Journal of Strain Analysis**, v. 14, n. 2, 49–57, 1979. 1
- CHANG, F.K. **Structural Health Monitoring: Current Status and Perspectives**. CRC Press, 1999. 1
- CRAIG, R.R. e KURDILA, A.J. **Fundamentals of Structural Dynamics**. John Wiley & Sons, 2 ed., 2006. 11
- DOYLE, J.F. **Wave Propagation in Structures - Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms**. Springer, 2 ed., 1997. 1
- IZADIFARD, R.A.; RANJBAR, R.K. e MOHEBI, B. Wave propagation in cracked frame structures by the spectral element method. **International Journal of Advances in Structures Engineering**, v. 59, 2014. 5
- KLIKOWICZ, P.; SALAMAK, M. e POPRAWA, G. Structural health monitoring of urban structures. **Procedia Engineering**, v. 161, 958–962, 2016. 1
- KRAWCZUK, M. Application of spectral beam finite element with a crack and iterative search technique for damage detection. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 38, 537–548, 2002. 1, 5, 8, 14
- KRAWCZUK, M.; GRABOWSKA, J. e PALACZ, M. Longitudinal wave propagation. part ii - analysis of crack influence. **Journal of Sound and Vibration**, v. 295, 479–490, 2006. 5
- KRAWCZUK, M. e OSTACHOWICZ, W. Damage indicators for diagnostic of fatigue cracks in structures by vibration measurements - a survey. **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, v. 2, n. 34, 307–327, 1996. 1, 12
- KRAWCZUK, M.; PALACZ, M. e OSTACHOWICZ, W. The dynamic analysis of a cracked timoshenko beam by the spectral element method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 264, 1139–1153, 2003. 5
- LASE, Y.; ICHCHOU, M. e JEZEQUEL, L. Energy flow analysis of bars and beams: Theoretical formulations. **Journal of Sound and Vibration**, v. 192, n. 1, 281 – 305, 1996. 7

- LEE, U. Vibration analysis of one-dimensional structures using the spectral transfer matrix method. **Engineering Structures**, v. 22, 681–690, 2000. 1
- MEHL, J.D. e MILES, R.N. Finite element modeling of transient response of viscoelastic beams. *Proceedings of Smart Structures Mater*, 1995. 1
- MESSINA, A.; JONES, I.A. e WILLIAMS, E.J. Damage detection and localisation using natural frequency changes. pp. 67–76. *Proceedings of the 1st Conference on Structure Identification*, 1992. 1
- MOHAN, V.; PARIVALLAL, S.; KESAVEN, K.; ARUNSUNDARAM, B.; FARVAZE, A.K. e RAVISANKAR, K. Studies on damage detection using frequency change correlation approach for health assessment. **Procedia Engineering**, v. 86, 503–510, 2014. 1
- PALACZ, M. e KRAWCZUK, M. Analysis of longitudinal wave propagation in a cracked rod by the spectral element method. **Computers and Structures**, v. 80, 1809–1816, 2002. 1, 5
- PRZEMIENIECKI, J.S. **Theory of matrix structural analysis**. McGraw-Hill, 1 ed., 1968. 8
- SINGH, V.P. e SRINIVAS, J. Crack effect on rotors using mode-i failure model with transfer matrix approach. In **Lecture Notes in Mechanical Engineering**, pp. 153–165. *Proceedings of Fatigue, Durability and Fracture Mechanics*, 01 2018. ISBN 978-981-10-6001-4. 5
- TADA, H.; PARIS, P.C. e IRWIN, G.R. **The Stress Analysis of Cracks Handbook**. Del Research Corporation, 1 ed., 1973. 8, 9
- VON FLOTOW, A.H. The acoustic limit of control of structural dynamics. **Large Space Structures: Dynamics and Controls**, pp. 213–237, 1987. 1
- WOHLEVER, J.C. e BERNHARD, R.J. Mechanical energy flow models of rods and beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 153, n. 1, 1 – 15, 1992. 7