

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

João Luís Brandão Andrade

*Algumas aplicações da Relatividade Restrita*

SÃO LUÍS, AGOSTO DE 2017

João Luís Brandão Andrade

*Algumas aplicações da Relatividade Restrita*

Monografia apresentada ao curso de Física da  
Universidade Federal do Maranhão como requisito  
parcial para a obtenção dos graus de Licenciatura  
em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

SÃO LUÍS, AGOSTO DE 2017

## FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca Setorial - CCET/UFMA

Andrade, João Luís Brandão.

57 f.

Impresso por computador (fotocópia)

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes.

Monografia (Graduação) - Universidade Federal do Maranhão, Curso de Física,  
2015.

1. Colisões Relativísticas. 2. Dinâmica relativística. 3. Partículas elementares. I. Título.

João Luís Brandão Andrade

## *Algumas aplicações da Relatividade Restrita*

Monografia apresentada ao curso de Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção dos graus de Licenciatura em Física.

Aprovado em: 21/08/2017 .

**Comissão Examinadora**

---

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes. - UFMA (Orientador)

---

Prof. Dr. Frederico Elias Passos dos Santos. - UFMA

---

Prof. Dr. Paulo Rogério Dias Pinheiro. - UFMA

## *Agradecimentos*

Agradeço a Deus por ter me dado capacidade de superar mais este grande desafio.

A minha mãe Cecília e meu pai Luís Carlos, que me criaram e desde de cedo me ensinaram a batalhar pelos meus objetivos, e sempre se fazendo presentes em todos os momentos da minha vida.

A minha esposa Rosangela, uma mulher muito admirável e virtuosa, que sempre me dá conselhos quando preciso.

A toda a minha família, Avós, Tios, Tias, Primos e Primas, que sempre estão por perto quando preciso, nas horas boas e tristes. E que sempre acreditaram na minha capacidade.

Aos meus amigos do curso, Joelson Reis Prado, Marcos Vinícius, Andrey Borges, Carlos Eduardo, Railson Oliveira, Rayanne França, Daniel França, Joel Félix, Joel Anderson, Kayman Jhosef, Wellington Luís, Lucas Franco, Ticiania Franco, Sâmara Barros, George Bruno, Charles Duarte, Marcell Marciel, Uadson Pereira, Cássio Diego, Moizés Filho, Diego Aguiar, Emerson Chaves (Barba), Neyver Henry, Cesar Antonio, Marcelo Feitosa, Alexsandro Lucena, Letícia Lisboa, João Alfíeres, Andressa Macêdo, Andressa Leão, Ruana Lima, Joyce Pinto, Luziane Diniz, André Cavalcante, Elivaldo Ribeiro e aos demais cujos nomes não citei.

Ao Prof. Antônio Pinto Neto, que foi meu professor e tutor, e me ajudou com seus ensinamentos.

Ao Prof. Rodolfo Alván Casana Sifuentes, por ter sido meu tutor na iniciação científica e orientador neste trabalho, pelos seus ensinamentos que contribuíram em muito para minha formação.

Ao Prof. Raimundo Aires, pelas em suas aulas de física no ensino médio que serviram para me incentivar a ingressar no curso de física.

A Universidade Federal do Maranhão, em particular, PIBIC-Física e ao PET-Física, por terem cedido espaço para os meus estudos.

*“ Eu imagino Deus como a fonte de toda a energia que criou e mantém o equilíbrio do Universo.*

*Eu vejo Deus na flor e na abelha que suga o néctar para produzir o mel.*

*Eu vejo Deus no pássaro que devora a abelha; e no homem que devora o pássaro; e no verme que devora o homem.*

*Eu vejo Deus em cada estrela no céu, nas minhas noites nas pousadas; e nos olhos tristes de cada boi, ruminando na invernada.*

*Eu só não vejo Deus é no homem que devora o homem; e por isso acho que ainda tenho muito o que aprender nesses caminhos da vida...”*

(Palavras de um peão boiadeiro, conhecido como o filho do Diabo, que se casou com uma santa, em uma roda de viola, numa dessas pousadas da vida...)

## Resumo

Neste trabalho, através da Teoria da Relatividade Restrita, investigamos as Colisões Relativísticas entre partículas subatômicas. Tais colisões ocorrem no regime de altas energias, onde somente a Dinâmica Relativística fornece uma descrição adequada do processo ainda no nível clássico. Muito do que conhecemos sobre os entes que constituem a matéria vem do estudo das colisões entre partículas elementares.

PALAVRAS-CHAVE: Colisões Relativísticas; Dinâmica Relativística; Partículas Elementares.

## **Abstract**

In this manuscript, the Special Relativity theory is used to investigate the Relativistic Collisions between subatomic particles. Such collisions occurring at high energies, where only the Relativistic Dynamics provides (still at classical level) an adequate description of the process. Almost all the knowledge about the entities composing matter comes from the study of collisions between elementary particles.

**KEYWORDS:** relativistic collisions; high energies; relativistic dynamics; elementary particles.

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Sumário</b>   | <b>7</b>  |
| <b>Lista de Tabelas</b>  | <b>9</b>  |
| <b>1 Introdução</b>  | <b>10</b> |
| <b>2 Origens da Teoria da Relatividade Restrita</b>                                      | <b>12</b> |
| 2.1 Princípio da Relatividade de Galileu: Definição de um referencial inercial . . . . . | 12        |
| 2.2 O eletromagnetismo e as Transformações de Galileu . . . . .                          | 16        |
| 2.3 Experimento de Michelson e Morley . . . . .  | 18        |
| 2.3.1 Introdução . . . . .   | 18        |
| 2.3.2 A experiência . . . . .  | 18        |
| 2.4 Os postulados da Teoria da Relatividade Restrita . . . . .                           | 22        |
| 2.5 Transformações de Lorentz: Significado e suas as consequências. . . . .              | 23        |
| 2.5.1 Dilatação temporal . . . . .   | 24        |
| 2.5.2 Contração de comprimento . . . . .   | 25        |
| 2.5.3 Adição de velocidades . . . . .  | 26        |
| <b>3 Espaço de Minkowski</b>   | <b>29</b> |
| 3.0.1 O espaço-tempo de Minkowski . . . . .  | 30        |
| 3.0.2 Quadrivetores, Métrica e Tensores . . . . .  | 30        |
| 3.0.3 Métrica . . . . .  | 32        |
| 3.0.4 Tensores . . . . .   | 36        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>4</b> | <b>Dinâmica Relativística.</b>                                | <b>37</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .  | 37        |
| 4.2      | Quadrivetor Energia-Momento. . . . .                          | 37        |
| <b>5</b> | <b>Colisões Relativísticas</b>                                | <b>41</b> |
| 5.1      | Introdução . . . . .  | 41        |
| 5.2      | Aplicações . . . . .  | 42        |
| 5.2.1    | Partículas geradas através das colisões. . . . .              | 42        |
| 5.2.2    | Cálculo do Limiar de Energia . . . . .                        | 45        |
| 5.2.3    | Decaimento e criação de novas partículas. . . . .             | 48        |
| 5.2.4    | Decaimento e cálculo da energia das novas partículas. . . . . | 50        |
| <b>6</b> | <b>Conclusões</b>   | <b>54</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                             | <b>55</b> |

# Lista de Tabelas

# Capítulo 1

## Introdução

No primeiro capítulo trataremos de descrever como surgiu na comunidade científica, a necessidade de reformular a física afim de estender o princípio da relatividade para toda a física. Uma vez que até esse ponto ( final do século XIX e início do século XX) a Mecânica Clássica reinava absoluta como uma teoria sólida e incontestável. Ela parecia ser a única mecânica que descrevia todos os possíveis tipos de movimento, desde o movimento de partículas até o de planetas Outra teoria já bem estabelecida na época era a Eletromagnetismo Clássico, formulado por James Clerk Maxwell (1831-1879), que através de quatro equações unificou os fenômenos elétricos e magnéticos em um só: os fenômenos eletromagnéticos. As equações mostraram que os campos elétricos variáveis geram campos magnéticos variáveis e vice-versa. Tais campos e podem se sustentar mutuamente formando uma onda eletromagnética que se propaga no espaço. Uma onda eletromagnética se propaga no vácuo com uma velocidade  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ , e é constante.

Porém, com a não-invariância do eletromagnetismo clássico perante as transformações de Galileu, que eram a lei que descreve o movimento dos corpos, ou seja, as equações do eletromagnetismo não preservavam sua forma padrão quando mudamos de referencial. Logo, o princípio da relatividade de Galileu não valia o eletromagnetismo. Foi nesse contexto que a Teoria da Relatividade Restrita lançada em 1905 por Albert Einstein nasceu, ela solucionou o problema da não invariância do eletromagnetismo clássico perante as transformações de Galileu, através da introdução de novas equações de transformação, as Transformações de Lorentz que resolveu o problema da não-invariância das equações da eletrodinâmica. Trataremos também de analisar alguns efeitos cinemáticos ocasionados pela imposição das transformações de Lorentz como

novas equações de transformação.

No segundo capítulo estudaremos o espaço físico no qual a Teoria da relatividade foi estabelecida e desenvolvida. O espaço-tempo de Minkowski, que tem natureza distinta do espaço Euclidiano possui características que o fazem ser o espaço no qual os fenômenos relativísticos ocorrem.

No terceiro capítulo trataremos de estudar a Dinâmica Relativística, que foi a nova Mecânica desenvolvida a partir dos postulados da teoria da relatividade e assim descrever todos os fenômenos dinâmicos-relativísticos.

No ultimo capítulo aplicaremos os conceitos de conservação de Energia e Momento relativístico, desenvolvidos no terceiro capítulo, para o estudo dos processos de Colisões Relativísticas.

## Capítulo 2

# Origens da Teoria da Relatividade Restrita

### 2.1 Princípio da Relatividade de Galileu: Definição de um referencial inercial

Para descrever um fenômeno físico. Por exemplo, uma partícula  $P$  movendo-se livremente o espaço. A primeira coisa a ser tomada é adotar um sistema de referência, pois a descrição do movimento será realizada sempre em relação a ele. Esse sistema deve obedecer uma premissa fundamental: tem que ser um referencial é inercial, ou seja, não esteja acelerado nem rotacionado ( nele vale a lei da inércia), garantindo assim que nele as leis físicas preservem sua forma padrão.

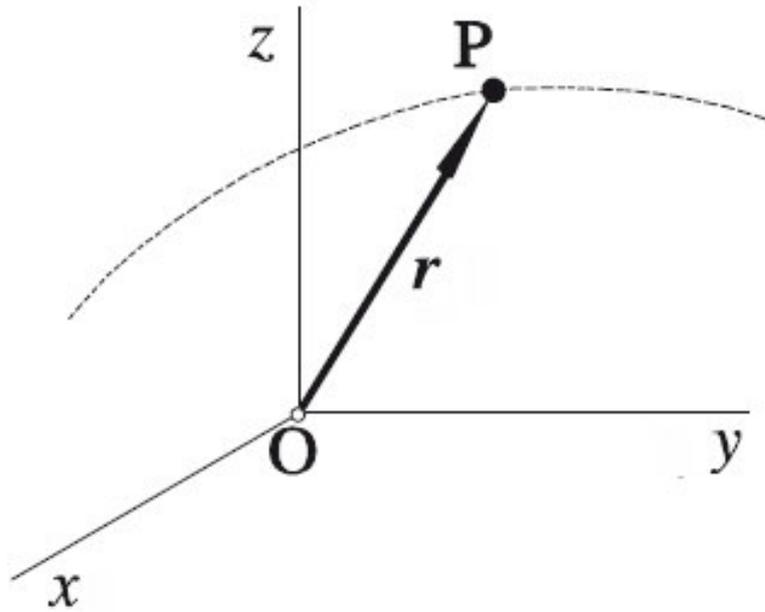


Figura 2.1: Partícula movendo-se no espaço

Como a lei da inércia afirma que o estado de repouso e o de movimento retilíneo uniforme são equivalentes, os dois são referenciais inerciais e podemos descrever o movimento da partícula relacionando as coordenadas entre os dois referenciais, uma vez que neles dois as leis físicas devem preservar a sua forma.

Um questão importante é: como garantir a invariância das Leis físicas em todos os referenciais? Bom, o que garante a invariância são as Transformações de Galileu.

$$\begin{aligned}x' &= x - ut \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\tag{2.1}$$

Esse conjunto de equações relacionam as coordenadas entre os referenciais escolhidos. A invariância das Leis físicas são obtidas quando elas são submetidas as Transformações de Galileu, e verifica-se que elas preservam sua forma padrão. O resultado obtido em cada um dos sistemas é válido, ou seja, os fornece dois pontos de vista equivalentes do mesmo fenômeno. Na Mecânica Clássica o tempo é uma grandeza absoluta, tendo assim o mesmo valor em todos os referenciais. Esse é um dos pontos cruciais da mecânica clássica, o tempo absoluto.

Considerando dois sistemas inerciais  $S$  em repouso e  $S'$  movendo-se com velocidade relativa

$\vec{u}$  constante em relação ao primeiro Num dado instante de tempo a partícula, no referencial  $S$  ocupa uma posição dada por  $(x, y, z)$ . Aplicando as transformações de Galileu, obtemos as coordenadas da partícula em  $S'$  que são  $(x', y', z')$ , ou seja, escrevemos a posição da partícula  $M$  nos dois referenciais.

Podemos também obter, derivando em relação ao tempo a equação 2.1, as transformações para a velocidade

$$\begin{aligned}v'_x &= v_x - u \\v'_y &= v_y \\v'_z &= v_z\end{aligned}\tag{2.2}$$

e aceleração. da partícula.

$$\begin{aligned}a'_x &= a_x \\a'_y &= a_y \\a'_z &= a_z\end{aligned}\tag{2.3}$$

A equação 2.3 nos fornece um resultado importante: a aceleração da partícula não é afetada pelo movimento relativo entre os referenciais inerciais, ou seja, ela é a mesma em todos. Por não sofrer alteração sob uma mudança de referencial, a aceleração é uma grandeza absoluta na mecânica newtoniana. Este resultado é fundamental para estabelecer o princípio da relatividade de Galileu.

Na Mecânica Clássica a massa também não é alterada por conta do movimento relativo. A exemplo da aceleração, o seu valor é o mesmo para todos os referenciais inerciais. Essas duas grandezas são invariantes perante as transformações de Galileu, o que nos leva a concluir que a Segunda Lei de Newton é mesma em todos os referenciais, evidenciando que todos compartilham da mesma física.

$$m' \vec{a}' = m \vec{a} \rightarrow \vec{F}' = \vec{F}\tag{2.4}$$

Examinando a equação anterior, confirmamos matematicamente que as leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais. Não existe um referencial privilegiado, pois todos são colocados em par de igualdade. Como todos são equivalentes, é impossível discernir através

de experimentos mecânicos, entre o estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme. Esta afirmação corresponde ao princípio da relatividade de Galileu.

## 2.2 O eletromagnetismo e as Transformações de Galileu

Através de suas quatro equações, James Clerk Maxwell (1831-1879) unificou eletricidade e magnetismo em uma nova teoria a Teoria do Eletromagnetismo Clássico. As equações de Maxwell, como ficaram conhecidas, descrevem todos os fenômenos eletromagnéticos, desde a interação entre partículas, até a geração de correntes induzidas em circuitos elétricos.

Uma das previsões mais significativas da Teoria do Eletromagnética foi a existência das ondas eletromagnéticas, que são perturbações que ocorrem por conta da variação dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  que podem se propagar no espaço mesmo sem a presença de matéria, com velocidade constante e em qualquer direção. O problema era que as equações da teoria eletromagnética não se mantinham invariantes quando mudamos de referencial.

Vamos analisar a seguinte questão: dois referenciais,  $S$  em repouso e outro  $S'$  movendo-se com uma velocidade relativa  $\vec{u}$  na direção do eixo  $x$ , em relação ao primeiro. Um pulso de luz viajando na mesma direção que  $S'$  tem velocidade igual a  $c$  no referencial  $S$ . Em  $S'$  o mesmo pulso terá velocidade  $c' = c - u$ , obtida através da transformação de velocidades. De modo análogo, um pulso de luz se propagando na direção oposta (esquerda) tem velocidade igual a  $c'$  em  $S'$ , que varia no intervalo de  $c - u$  a  $c + u$ . Portanto, fica claro que os observadores mediriam em seus respectivos sistemas dois valores distintos da velocidade da luz.

Este resultado mostra que sendo válido o princípio da relatividade de Galileu para a Eletrodinâmica, implicaria numa divergência no valor da velocidade da luz, quando medida por observadores em referencias diferentes e em movimento relativo entre si. Uma vez que já havia um consenso com respeito ao valor de  $c$  a solução encontrada foi impor que há um referencial no a velocidade da luz é  $c$  e só nele as equações Maxwell se tornam invariantes perante as transformações de Galileu. Esse referencial é o do éter.

Visto que a validade das equações de Maxwell estavam restritas a um referencial privilegiado, onde somente nele a velocidade da luz é  $c$ . O princípio da relatividade não abrangeu toda a física, sendo válido somente para a mecânica clássica. A saída encontrada foi a partir de experimentos comprovar ou desmentir a existência do éter como referencial privilegiado.

O que fazer? Estender o princípio da relatividade para toda a física ou somente para a Mecânica Clássica, deixando de fora o Eletromagnetismo? A resposta para esse questionamento

foi apresentada através de três possibilidades, são elas:

1. O princípio da relatividade aplica-se somente na Mecânica Clássica, mas não para o Eletromagnetismo. Na Eletrodinâmica existe somente um referencial (do éter) onde a velocidade da luz tem valor  $c$  e suas equações preservam sua forma padrão;
2. O princípio da relatividade aplica-se tanto para a Mecânica quanto para o Eletromagnetismo, porém as equações do Eletromagnetismo teriam que ser reformuladas para ficarem de acordo com as Transformações de Galileu;
3. Existe um princípio da relatividade para toda a física e as equações de Maxwell estão corretas. Neste caso, as Leis da Mecânica Clássica não estão corretas, exigindo assim uma nova Mecânica compatível com o novo princípio da relatividade. As transformações de Galileu também estavam incorretas, sendo substituídas por outras, que mantêm as leis físicas invariantes.

Das três opções a última, que parecia a menos provável, após a publicação da Teoria da Relatividade Restrita, mostrou-se a mais correta.

## 2.3 Experimento de Michelson e Morley

### 2.3.1 Introdução

Em sua Teoria Ondulatória da Luz, Christiaan Huygens sustentava a hipótese de que o éter era o meio no qual a luz se propagava. O éter estaria em repouso em relação às suas partes e por isso seria o referencial absoluto e nele a velocidade da luz seria  $c$ . Em todos os outros referenciais essa velocidade seria diferente.

Uma maneira de localizar o éter seria medir a velocidade da luz em uma infinidade de referenciais inerciais. Ao realizar essas medidas, verificaríamos que o valor da velocidade da luz mudaria de um referencial para outro e isso sugere que somente no referencial do éter, a velocidade da luz tem valor  $c$ , resultado que está de acordo com a teoria do Eletromagnetismo Clássico.

Porém, como medir a velocidade da luz em diferentes referenciais? Usou-se a Terra como suporte, pois podemos considerá-la como um referencial inercial que possui uma velocidade orbital de  $30 \text{ km/s}$  em relação ao Sol, e que em cada época do ano aponta numa direção diferente. De acordo com a teoria, o éter se encontra fixo em relação ao Sol. Portanto, as medições poderiam ser realizadas em cada época distinta.

### 2.3.2 A experiência

A experiência foi realizada pelo físico alemão Albert Abraham Michelson (1852-1931) e Edward William Morley (1838-1923) que teve como objetivo detectar a existência do éter e através da análise de padrões de interferência, forneceu de maneira indireta informações sobre a velocidade da luz em relação ao referencial do éter. O aparelho utilizado para a realização da experiência foi o interferômetro óptico, inventado por Michelson em 1880 e utilizado no ano seguinte para a primeira das duas experiências.

A primeira experiência foi realizada em 1881, no laboratório de Astrofísica de Postdam, com o objetivo de detectar algum movimento da Terra em relação ao éter. A ideia era comparar o tempo que dois feixes de luz levariam para percorrer a mesma distância paralela ou transversalmente à direção do movimento da Terra em relação ao éter. Esta primeira versão

forneceu resultados não muito precisos. A previsão era encontrar um determinado deslocamento de franja, porém o resultado encontrado foi considerado incorreto.

Michelson em 1887, junto com Morley, realizaram em Cleveland no Estados Unidos, a segunda versão do experimento, onde a precisão e confiabilidade do equipamento fez com que o resultado obtido tivesse relevância. O objetivo era medir pequenas variações da velocidade da luz em relação a um observador no referencial da Terra, que funciona como um referencial inercial que se move com uma velocidade de  $\vec{v}$  em relação ao referencial do éter, onde o valor da velocidade é  $c$ .

Uma visão esquemática do experimento é a seguinte: um feixe de luz é emitido de uma fonte e incide sobre um espelho semi-transparente  $S$  inclinado  $45^\circ$  em relação a direção de propagação do feixe. Ao incidir sobre espelho, o feixe é separado em dois, o feixe 01 que é transmitido e o feixe 02 que é refletido. O feixe 01 é refletido de volta pelo espelho 01, e o feixe 02 pelo espelho 02. Ao serem refletidos os dois feixes retornam para  $S$ , o feixe 01 refletido pelo espelho 01 é parcialmente refletido, e o feixe 02 refletido pelo espelho 02 é parcialmente transmitido de volta por  $S$  para um anteparo, onde eles se interferem.

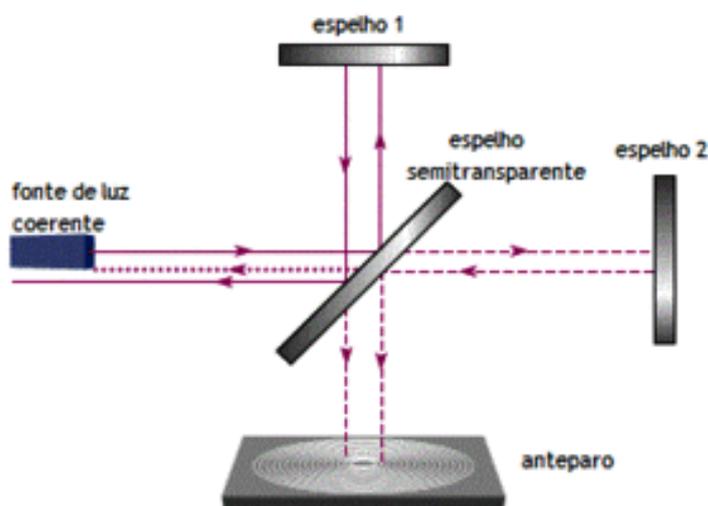


Figura 2.2: Interferômetro

A Terra e o interferômetro estão se movendo com uma velocidade  $\vec{v}$  em relação ao éter. O experimento foi montado de modo que a velocidade  $\vec{v}$  fosse alinhada na direção do feixe transmitido. O tempo total que o feixe leva para ir de  $S$  para o espelho 01 e retornar será

medido por um observador fixo no referencial da Terra, que vê a velocidade de ida do pulso sendo  $c - u$ , e na volta  $c + u$ . Logo o valor do tempo de ida e volta sobre o braço  $L_1$  do interferômetro é

$$t_I = \frac{L_1}{c - u} \quad (2.5)$$

$$t_V = \frac{L_1}{c + u} \quad (2.6)$$

O tempo total do percurso de ida e volta é

$$t_1 = t_I + t_V$$

$$t_1 = \frac{2L_1}{c \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \quad (2.7)$$

Para calcular o tempo de percurso do feixe refletido, vamos considerar um observador parado no referencial do éter. O caminho percorrido pelo feixe é agora transversal à direção do movimento do interferômetro. Neste caso, os espelhos movem-se juntos através do éter com velocidade  $\vec{v}$ , e a velocidade do feixe nesse referencial é  $c$ .

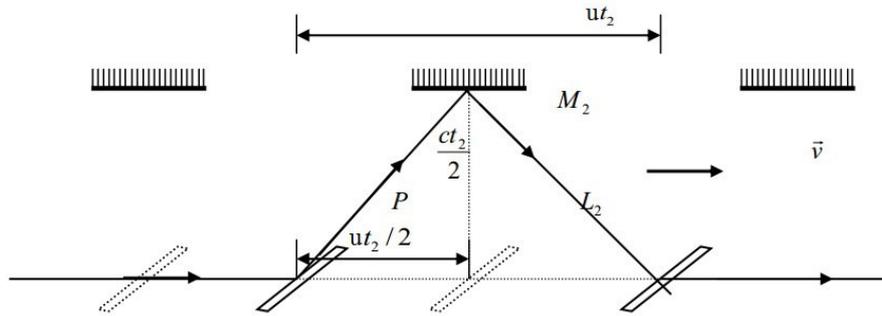


Figura 2.3: Interferômetro2

O observador vê a luz seguindo a hipotenusa dos triângulos da figura e o tempo de percurso é.

$$\left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 = L_2^2 + \left(\frac{ut_2}{2}\right)^2$$

$$t_2 = \frac{2L_2}{c\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2.8)$$

E a diferença nos tempos de percurso.

$$\Delta t = t_2 - t_1$$
$$\Delta t = \frac{2}{c} \left( \frac{L_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{L_1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \right) \quad (2.9)$$

Como a Terra realiza o movimento de translação ao redor do Sol, sua velocidade orbital varia diariamente. A variação velocidade  $\vec{v}$  em relação ao éter ocasiona pequenas mudanças na velocidade da luz  $c$  em relação ao aparelho. Isso resultaria em pequenas variações diárias no caminho óptico e conseqüentemente alteração no padrão de interferência, ou seja, grandes variações  $\vec{v}$  resultam em grandes alterações no padrão de interferência. Um período como três meses seria perfeito para percepção da variação de  $\vec{v}$ .

Porém, esperar até meses para obter uma mudança significativa de  $\vec{v}$  não era muito viável, para contornar isso Michelson e Morley rodaram o experimento em  $90^\circ$  e assim simularam a variação de  $\vec{v}$  equivalente a três meses. Desse modo, puderam repetir o experimento a fim de encontrar as variações no padrão de interferência dos feixes.

Ocorreu que ao final das experiências, o deslocamento das franjas de interferência não foi observado, implicando que não há alteração no valor da velocidade da luz entre as medidas entre os referenciais. Se não há mudança no valor da velocidade da luz, então não existe só um referencial para o qual a velocidade da luz é  $c$ .

A não detecção do éter era totalmente contrária a visão dos físicos da época. Para eles todas as ondas precisavam de um meio para se propagar, e a não existência do éter contradizia essa afirmação, além de não estar também de acordo com as Transformações de Galileu. Tendo em vista a alta precisão do experimento, o seu resultado era incontestável e estava de fato correto.

## 2.4 Os postulados da Teoria da Relatividade Restrita

Com a não detecção do éter pelo experimento de Michelson-Morley, concluiu-se que a velocidade da luz não era afetada pelo movimento relativo da Terra, sendo a mesma em qualquer referencial inerciais e em qualquer direção.

Para os físicos da época a existência do éter era incontestável, pois para eles um meio para a propagação da luz deveria que existir. Mesmo com o alto grau de precisão do experimento de Michelson-Morley foi capaz de derrubar essa visão. Com isso, foram propostas teorias para explicar a não detecção do éter.

Essas teorias buscavam justificar o porque da não detecção do éter no experimento de Michelson-Morley. Porém elas falharam, tornando a hipótese de existência do éter insustentável. Assim, o único caminho a se seguir era estender o princípio da relatividade para toda a física, considerando as Leis da Eletrodinâmica corretas e a necessidade de modificação na Mecânica Clássica e nas equações de transformação de Galileu.

Em 1905, Albert Einstein (1879-1955) em seu trabalho sobre a Teoria da Relatividade, chamado de “Sobre a Eletrodinâmica dos corpos em movimento” propôs a velocidade da luz é constante em todos os referenciais inerciais. Ao propor isso, Einstein modificou os conceitos clássicos de espaço e tempo. Toda a Teoria da relatividade restrita é baseada nos dois postulados abaixo:

1. Princípio da relatividade, afirma que as Leis físicas possuem a mesma forma em todos os referenciais inerciais, ou seja, o princípio da relatividade é válido para toda a física;
2. Constância da velocidade da luz, afirma que a luz (ondas magnéticas em geral) possui uma velocidade  $c$  constante, que é independente do estado de movimento da fonte e do observador.

O primeiro postulado define a inexistência do éter como referencial privilegiado e garante a equivalência entre todos os referenciais inerciais. O segundo, impõe o valor  $c$  para a velocidade da luz, contradizendo as transformações de Galileu e de forma indireta explica o resultado nulo do experimento de Michelson-Morley.

## 2.5 Transformações de Lorentz: Significado e suas as consequências.

Quando tratamos fenômenos relativísticos as Transformações de Galileu já não são mais adequadas para descrever os fenômenos, logo precisamos recorrer a novas equações de transformação que venham a fornecer resultados satisfatórios.

Em 1904 o físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) obteve um conjunto de equações que levaram seu nome, as chamadas de Transformações de Lorentz. Apesar de ter desenvolvido as equações ele não foi capaz de dar uma interpretação física para suas equações. O responsável por interpretar fisicamente as Transformações de Lorentz foi Einstein, que as deduziu a partir dos dois postulados que baseiam sua teoria: o da isotropia e homogeneidade do espaço. Einstein elevou as Transformações de Lorentz à condição de novas equações de simetria da natureza ([1]), substituindo as transformações de Galileu, para a serem as novas leis de transformação entre sistemas de coordenadas.

Imaginando dois referenciais  $S$  e  $S'$ , com  $S'$  movendo-se em relação a  $S$  com velocidade relativa  $\vec{u}$  paralela ao eixo  $x - x'$  e definir  $t = t'$  no instante que as origens dos dois sistemas coincidem. Um evento ocorrendo no referencial  $S$  num tempo  $t$  possui coordenadas  $(x, y, z)$ . Qual será as coordenadas  $(x', y', z')$  em um tempo  $t'$  no referencial  $S'$ . Tais coordenadas são fornecidas pelas Transformações de Lorentz, que são,

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - ut) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - x\frac{u}{c^2}\right)\end{aligned}\tag{2.10}$$

onde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}}$  é o fator de Lorentz.

As transformações inversas são,

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + ut') \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)\end{aligned}\tag{2.11}$$

A partir das transformações de Lorentz surgem algumas consequências que possuem um grande significado para a teoria, que são expressas na forma de efeitos cinemáticos-relativísticos que envolvem as medidas de tempo e espaço quando medidas em referenciais distintos. Discutiremos a seguir tais consequências, dando a cada uma uma visão mais particular.

### 2.5.1 Dilatação temporal

Esse efeito está relacionado com a medida do intervalo de ocorrência de dois eventos, realizadas por dois observadores que estão em referenciais diferentes. Supondo que na origem do referencial  $S$  há um relógio, que marca os tempos  $t_A$  e  $t_B$  associados à ocorrência de um evento no mesmo ponto ( $x_A = x_B$ ), cujo intervalo  $\Delta\tau = t_B - t_A$ . Este intervalo é chamado de tempo próprio (intervalo medido no referencial em repouso em relação ao eventos). A pergunta é, qual será o intervalo medido no referencial  $S'$  que se move com uma velocidade relativa  $\vec{u}$  em relação a  $S$ ? A resposta é fornecida a partir das transformações de Lorentz.

$$t'_A = \gamma\left(t_A - \frac{u}{c^2}x_A\right)\tag{2.12}$$

$$t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{u}{c^2}x_B\right)\tag{2.13}$$

o intervalo de tempo que será medido no referencial  $S$  é.

$$\Delta t'_{BA} = t'_B - t'_A\tag{2.14}$$

substituindo as equações (2.12) e (2.13) em (2.14) temos.

$$\Delta t'_{BA} = \gamma\left(t_B - \frac{u}{c^2}x_B\right) - \gamma\left(t_A - \frac{u}{c^2}x_A\right)$$

como  $x_A = x_B$ , temos.

$$\Delta t'_{BA} = \gamma(t_B - t_A)$$

$$\Delta t'_{BA} = \gamma \Delta t_{BA} \quad (2.15)$$

Como o fator  $\gamma > 1$ , então  $\Delta t'_{BA} > \Delta t_{BA}$ . Temos demonstrado que um observador que vê o fenômeno em movimento relativo, a duração do fenômeno é sempre maior do que a duração do mesmo fenômeno medido por um observador no referencial em repouso em relação a ele, esse acréscimo está associado ao fator  $\gamma$ .

### 2.5.2 Contração de comprimento

Esse efeito está associado a com a medida de comprimento de um corpo quando efetuada em referenciais inerciais distintos e que possuem uma velocidade relativa entre si. Quando medimos o comprimento de um corpo em um referencial fixo e comparamos com a medida feita em um outro referencial que se move com velocidade relativa  $\vec{u}$  em relação ao primeiro, observamos que seu comprimento é contraído por um fator  $\gamma$  na direção do movimento.

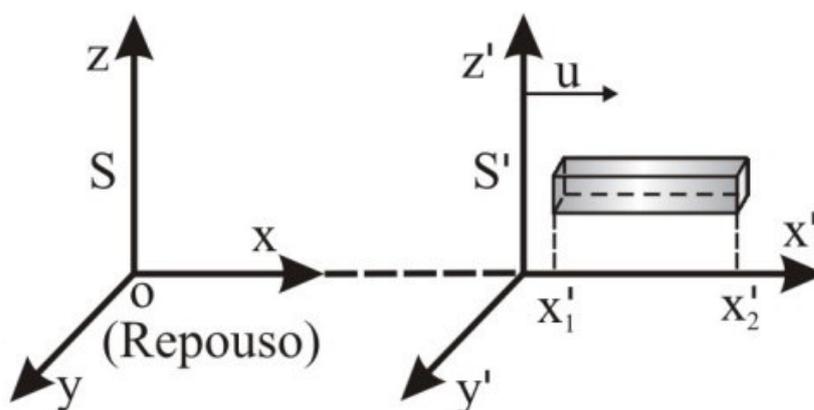


Figura 2.4: Contração de comprimento

Para demonstrar o efeito da contração, usaremos um exemplo simples de uma barra rígida. No referencial  $S'$  um observador mede o comprimento da barra  $L'$ , que é denominado comprimento próprio, pois é medido no referencial que se encontra em repouso em relação a barra, e suas extremidades coincidem com os pontos  $x'_B$  e  $x'_A$ . No referencial  $S$ , que possui uma velocidade relativa  $\vec{u}$  em relação a  $S'$ , as extremidades da barra coincidem com os pontos  $x_A$  e  $x_B$  e

tempos  $t_A$  e  $t_B$  respectivamente. Para determinar o comprimento da barra em  $S$ , usaremos as transformações de Lorentz para relacionarmos as medidas de  $S$  e  $S'$ .

Da equação 2.10, temos,

$$x'_B = \gamma(x_B - ut_B) \text{ e } x'_A = \gamma(x_A - ut_A)$$

O comprimento da barra no referencial  $S$  é dado pela distância entre os pontos  $x_A$  e  $x_B$  (extremidades da barra) quando medidas ao mesmo instante, ou seja, quando  $t_A = t_B$ .

$$\Delta x'_{BA} = x'_B - x'_A$$

$$x'_B - x'_A = \gamma[(x_B - ut_B)] - [\gamma(x_A - ut_A)]$$

$$x'_B - x'_A = \gamma[(x_B - x_A) - u(t_B - t_A)]$$

temos que em  $S$  a barra mede um comprimento  $L = x_B - x_A$  e  $t_A = t_B$ , então.

$$x'_B - x'_A = \gamma(x_B - x_A)$$

$$L = \frac{L'}{\gamma} \tag{2.16}$$

Este resultado comprova a previsão anterior, um observador medirá o comprimento da barra em relação ao referencial que a vê em movimento relativo menor do que o comprimento da mesma barra, medida no referencial em repouso.

### 2.5.3 Adição de velocidades

Na mecânica clássica, a soma de velocidades para corpos que se encontravam em movimento relativo era obtida a partir das transformações de Galileu (2.1). Porém com a aceitação da teoria da relatividade de Einstein, surgiu a necessidade de se reformular toda a mecânica. A mecânica clássica cedeu seu lugar para Mecânica Relativística, que estendeu os conceitos da mecânica newtoniana para um cenário onde os corpos possuem velocidades elevadas.

Tornou-se também necessário obter novas equações de transformação entre as coordenadas dos referenciais, uma vez que as transformações de Galileu, no contexto relativístico, apresentavam inconsistências nos seus resultados. Coube a Einstein definir as transformação de Lorentz (2.10) como as novas equações transformação entre os referenciais.

A partir das transformações de Lorentz, podemos relacionar as coordenadas de uma partícula em um referencial  $S$ , com as coordenadas da mesma partícula em outro referencial  $S'$  que se encontra em movimento relativo em relação ao primeiro. Se esse corpo está se movendo, podemos então obter as equações que relacionam a velocidade do corpo nos dois sistemas de referência, e assim definir as **novas equações e transformação de velocidade**.

Seja  $S$  um sistema inercial fixo e  $S'$  um sistema movendo-se com velocidade  $\vec{u}$  em relação a  $S$ . Uma partícula movendo-se em  $S'$  possui velocidade  $\vec{v}'$ , então a velocidade da mesma partícula vista do referencial  $S$  é determinada a partir das transformações de Lorentz.

Vamos analisar duas situações, a primeira quando a partícula está se movendo na mesma direção do movimento relativo entre  $S$  e  $S'$ . A segunda, quando a velocidade da partícula é perpendicular ao movimento relativo.

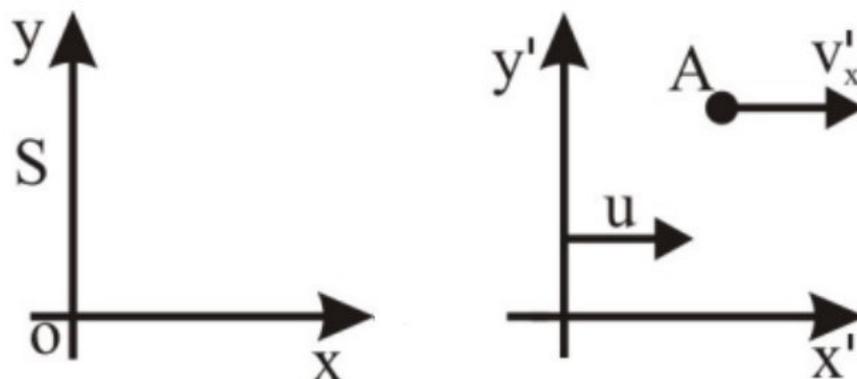


Figura 2.5: Adição de velocidades :partícula na direção do movimento relativo

Considerando somente as transformações para  $x$  e  $t$  das equações (2.11), temos

$$x = \gamma(x' + ut')$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$

Diferenciando essas expressões, temos.

$$dx = \gamma(dx' + ut'dt') \tag{2.17}$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{u}{c^2}dx'\right) \tag{2.18}$$

E dividindo a equação (2.17) pela (2.18), temos.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x} \quad (2.19)$$

A equação (2.19) nos fornece a velocidade da partícula do ponto de vista do referencial  $S$  e assumindo que ela move-se na direção positiva do eixo  $x$ .

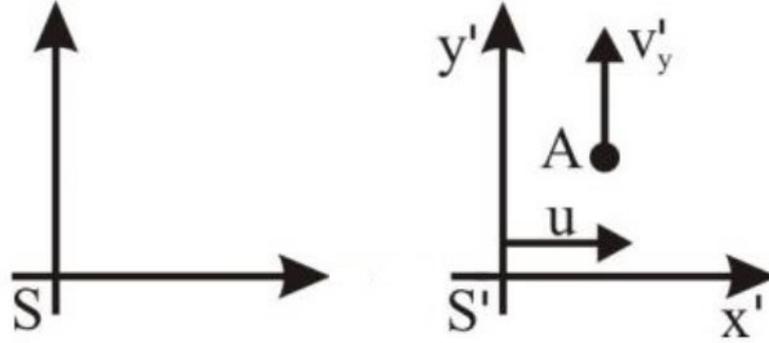


Figura 2.6: Adição de velocidades :partícula na direção perpendicular ao movimento relativo

Considerando a segunda situação, onde a partícula está se movendo em uma direção perpendicular ao movimento relativo entre os referenciais (2.6). Vamos supor que a partícula se move na direção do eixo- $y$ . Considerando somente as transformações para  $y$  e  $t$ , e diferenciando as duas equações, temos

$$dy = dy' \quad (2.20)$$

$$dt = \gamma \left( dt' + \frac{u}{c^2} dx' \right) \quad (2.21)$$

Agora, vamos dividir a equação (2.20) pela equação (2.21), que resulta em

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{v'_y \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x} \quad (2.22)$$

A equação (2.22) é a expressão para a velocidade da partícula, a mesa caso esteja movendo-se perpendicularmente a direção do movimento relativo. Este resultado também é válido para a componente  $z$  da velocidade, que nesse caso teria a forma:

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x} \quad (2.23)$$

# Capítulo 3

## Espaço de Minkowski

Como foi visto em seções anteriores, as Leis de Newton têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais (isso é verificado através das transformações de Galileu), ou seja todos os referenciais inerciais são equivalentes. Ao publicar a teoria da relatividade restrita Einstein impôs algumas mudanças nos conceitos da mecânica clássica. Uma das modificações mais marcantes foi o estabelecimento de uma velocidade limite para os corpos, a velocidade da luz  $c$ . Outro conceito novo foi a introdução do conceito de espaço – tempo. Na relatividade restrita essas duas grandezas estão intimamente interligadas, o tempo perde seu caráter absoluto e passa a ser relativo. Em resumo, a teoria da relatividade mostrou que algumas previsões da teoria de Newton só eram válidas quando a velocidade dos fenômenos é baixa, quando passamos a analisar fenômenos com velocidades elevadas, a teoria de Newton não era capaz de fornecer um resultado correto. Houve portanto, a necessidade de se formular uma nova mecânica, que satisfizesse os postulados da teoria da relatividade.

Visto que a teoria da relatividade promoveu diversas mudanças no ambiente físico. Foi necessário também propor um novo espaço geométrico que a exemplo do espaço euclidiano na mecânica clássica, servisse base para a descrição matemática dos fenômenos.

Hermann Minkowski (1864–1909) que em 1908 ao proferir uma palestra com o título “Espaço e tempo” apresentou suas ideias a respeito da teoria da relatividade. Minkowski mostrou em seu trabalho, que a teoria da relatividade poderia ser tratada geometricamente através da sua teoria do espaço tempo quadridimensional.

### 3.0.1 O espaço-tempo de Minkowski

O espaço-tempo de Minkowski é um espaço quadridimensional, pseudo-euclidiano e plano. Ele é o palco de ocorrência de todos os eventos físicos. Ao defini-lo Minkowski deu uma interpretação geométrica a teoria da relatividade. A ideia de um espaço-tempo quadridimensional surge naturalmente quando Einstein define que o tempo, ao contrário do que se pensava, depende de qual referencial está sendo medido, logo passa a ser considerado uma grandeza relativa, e ser considerado como uma dimensão do espaço. Desse modo, qualquer evento que ocorre no espaço-tempo é especificado através das coordenadas referentes ao quatro eixos coordenados.

### 3.0.2 Quadrivetores, Métrica e Tensores

Tendo em vista que estamos trabalhando em um espaço quadridimensional, temos que definir os elementos matemáticos que represente as grandezas físicas. O primeiro a ser definido são os Quadrivetores, que no espaço-tempo de Minkowski são definidos objetos matemáticos que possuem quatro componentes que os definem.

Em relação as suas coordenadas, os quadrivetores são definidos como covariantes e contravariantes. A diferença entres essas coordenadas esta na forma em que elas se transformam quando o quadrivetor é submetido a uma transformação de coordenadas.

As componentes de um quadrivetor em um sistema inercial qualquer podem ser escritas de duas formas: a primeira como sendo  $x^\mu$ , onde  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , escritas da seguinte forma.

$$(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

onde:

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \quad (3.1)$$

que chamamos de componentes contravariantes do quadrivetor. A segunda é da forma  $x_\mu$ , com  $\mu = 0, 1, 2, 3$  e expressas na forma.

$$(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

com

$$x_0 = ct, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z \quad (3.2)$$

A seguir daremos mais detalhes a respeito das componentes dos quadrivetores.

## Componentes Contravariantes.

As componentes  $x^\alpha$  de quadrivetor são ditas contravariantes, quando submetidas a uma transformação de coordenadas entre os sistemas  $S$  e  $S'$ , transformam-se da seguinte forma.

$$x^{\bar{\mu}} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\nu}^{\bar{\mu}} x^{\nu} \quad (3.3)$$

onde  $x^{\bar{\mu}}$  e  $x^{\nu}$  representam as componentes contravariantes do quadrivetor  $\vec{R}$  nos sistemas  $S'$  e  $S$ . O termo  $\Lambda_{\nu}^{\bar{\mu}} = \frac{\partial x^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\nu}}$  é a matriz de transformação 4x4 entre os referenciais considerados,  $x^{\bar{\mu}}$  e  $x^{\nu}$  representam as coordenadas dos sistemas  $S'$  e  $S$  respectivamente.

Escrevendo as transformações de Lorentz em termos de  $x^{\bar{\mu}}$ , temos.

$$x^{\bar{0}} = \gamma \left( x^0 - \frac{u}{c} x^1 \right)$$

$$x^{\bar{1}} = \gamma \left( x^1 - \frac{u}{c} x^0 \right)$$

$$x^{\bar{2}} = x^2$$

$$x^{\bar{3}} = x^3$$

a partir dessas transformações obtemos a matriz de transformação entre o sistema de coordenadas.

$$\Lambda_{\nu}^{\bar{\mu}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{\bar{0}}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{\bar{0}}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{\bar{0}}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{\bar{0}}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{\bar{1}}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{\bar{1}}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{\bar{1}}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{\bar{1}}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{\bar{2}}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{\bar{2}}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{\bar{2}}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{\bar{2}}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{\bar{3}}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{\bar{3}}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{\bar{3}}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{\bar{3}}}{\partial x^3} \end{vmatrix}$$

ou

$$\Lambda_{\nu}^{\bar{\mu}} = \begin{vmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

## Componentes Covariantes

As componentes covariantes de um quadri vetor são escritas matematicamente, após uma transformação de coordenadas da seguinte forma,

$$x_{\bar{\mu}} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\bar{\mu}}^{\nu} x_{\nu}$$

onde  $x_{\bar{\mu}}$  e  $x_{\nu}$  são as componentes covariantes do quadri vetor representado nos sistemas  $S'$  e  $S$ . Nota-se que as componentes covariantes transformam-se de A matriz de transformação  $\Lambda_{\bar{\mu}}^{\nu}$  é inversa a matriz de transformação das componentes contravariantes, sendo escrita da forma.

$$\Lambda_{\bar{\mu}}^{\nu} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial x^{\bar{0}}} & \frac{\partial x^0}{\partial x^{\bar{1}}} & \frac{\partial x^0}{\partial x^{\bar{2}}} & \frac{\partial x^0}{\partial x^{\bar{3}}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{\bar{0}}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{\bar{1}}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{\bar{2}}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{\bar{3}}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{\bar{0}}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{\bar{1}}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{\bar{2}}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{\bar{3}}} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{\bar{0}}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{\bar{1}}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{\bar{2}}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{\bar{3}}} \end{vmatrix}$$

$$\Lambda_{\bar{\mu}}^{\nu} = \begin{vmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Vale destacar que os conceitos de contravariante e covariantes aplicam-se somente as componentes dos quadri vetores. Um quadri vetor é possui o mesmo significado em qualquer sistema de coordenadas onde é escrito.

### 3.0.3 Métrica

Uma descrição intrínseca de um espaço é feita a partir das medidas de intervalo de distância realizadas no próprio espaço, com o objetivo de encontrar uma descrição do mesmo. Para mensurar essa descrição definimos a Métrica do espaço, como sendo a função que fornece a natureza do espaço em que é definida.

No espaço de Minkowski podemos definir a métrica a partir da medida de distância entre dois eventos vizinhos, que é invariante perante uma transformação de coordenadas no espaço-tempo de Minkowski, a métrica é definida como segue:

Considerando dois eventos vizinhos no espaço de Minkowski, definimos o quadrivetor posição  $x^\mu = (ct, x, y, z)$  dos eventos com sendo aquele que localiza os respectivos eventos no espaço. Um quadrivetor possui quatro coordenadas, três espaciais e uma temporal representadas da seguinte forma.

Sendo  $\vec{x}_1^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  e  $\vec{x}_2^\mu = (x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ , os quadrivetores posição que localizam os eventos 1 e 2 respectivamente. Supondo que eles sejam bem próximos, o intervalo infinitesimal de distância entre ambos é escrito como sendo

$$d\vec{x}^\mu = \vec{x}_2^\mu - \vec{x}_1^\mu$$

cujos módulo quadrado é

$$ds^2 = d\vec{x}^\mu \cdot d\vec{x}^\mu$$

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

Usando (3.1), o elemento de arco é reescrito da forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.4)$$

que é invariante por uma transformação de Lorentz. Porém, podemos reescrever a equação anterior na forma mais geral.

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.5)$$

onde o termo  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski. Para simplificar a notação, adotamos a convenção da soma de Einstein, que é uma operação tensorial sobre os índices repetidos, sendo assim, a soma vamos considerar apenas os termos onde os índices se repetem. Adotando a convenção da soma, podemos reescrever a equação (3.5) de uma forma mais compacta.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Para que reproduza o resultado da equação (3.4) os elementos do tensor métrico devem satisfazer as seguintes condições:

$$g_{00} = 1, g_{ij} = 0, g_{ii} = -1$$

O espaço-tempo de Minkowski possui uma métrica indefinida, pois  $ds^2$  pode ser positivo, negativo ou nulo ([2]). É essa característica da métrica que diferencia o espaço de Minkowski do espaço euclidiano.

A o tensor métrico do espaço também pode ser definida em termos do produto escalar entre os vetores de base

$$g_{\mu\nu} = g(\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu) = \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu \quad (3.6)$$

onde

$$g_{00} = 1, g_{ij} = 0, g_{ii} = -1 \quad (3.7)$$

O tensor métrico é um tensor de segunda ordem e pode ser representado na forma matricial.

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ao definimos os quadrivetores, dizemos que eles são entes matemáticos definidos no espaço de Minkowski que possuindo quatro componentes, uma temporal e três espaciais. Suas componentes, dependendo da lei de transformação que obedecem podem ser contravariantes ou covariantes.

### Classificação dos quadrivetores

Sendo  $\vec{A}$  um quadrivetor no espaço de Minkowski, podemos escrevê-lo na forma.

$$\vec{A} = A^\mu \hat{e}_\mu$$

e suas componentes de acordo com a equação (3.3). Tendo definido os quadrivetores, podemos introduzir a operação de produto escalar entre eles, cujo resultado é mostrado a seguir.

Sendo  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  dois quadrivetores definidos no espaço de Minkowski, o produto escalar entre eles é uma operação da forma:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A^\mu \hat{e}_\mu \cdot B^\nu \hat{e}_\nu \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= A^\mu \cdot B^\nu (\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu) \end{aligned}$$

usando a equação (3.6), podemos escrever

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\mu \cdot B^\nu g_{\mu\nu}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^0 \cdot B^0 g_{00} + A^1 \cdot B^1 g_{11} + A^2 \cdot B^2 g_{22} + A^3 \cdot B^3 g_{33}$$

usando os resultados da equação (3.7)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^0 \cdot B^0 - A^1 \cdot B^1 - A^2 \cdot B^2 - A^3 \cdot B^3. \quad (3.8)$$

O resultado acima mostra que a operação de produto escalar entre dois quadrivetores gera uma grandeza escalar chamado de invariante. A invariância se deve ao fato de que em qualquer sistema de referencia adotado essa grandeza possui o mesmo valor. Temos que ter em mente que o produto escalar tensorial é diferente do produto escalar usual que trabalhamos ao longo do estudo dos vetores. Para diferenciá-los vamos adotar um tipo e notação que venha a tornar mais clara essa distinção.

Desse modo, podemos reescrever a equação (3.8) da seguinte maneira

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^0 \cdot B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (3.9)$$

onde  $A^0 \cdot B^0$  representa o correspondente ao eixo temporal e  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  representa a parte espacial do quadrivetor.

O produto escalar de um quadrivetor por ele mesmo é escrito na forma.

$$\vec{A}^2 = A \cdot A = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2 \quad (3.10)$$

Um olhar mais atento para a ultima equação, percebemos que diferentemente do que ocorre no produto escalar usual, o módulo quadrado de um quadrivetor não é necessariamente positivo. É justamente o valor de  $\vec{A}^2$  que nos fornece a classificação do quadrivetores.

- Se  $\vec{A}^2 > 0$  , então  $\vec{A}$  é um quadrivetor tipo tempo;
- Se  $\vec{A}^2 < 0$  , então  $\vec{A}$  é um quadrivetor tipo espaço;
- Se  $\vec{A}^2 = 0$  , então  $\vec{A}$  é um quadrivetor tipo luz.

### 3.0.4 Tensores

Um tensor é a generalização do conceito de quadri-vetores. As componentes de um tensor se classificam como: contravariantes, covariantes e mistas.

Por exemplo, sendo  $T$  um tensor de segunda ordem, as suas componentes são ditas contravariantes, quando submetidas a uma mudança de coordenadas seguem a seguinte lei.

$$T^{\bar{\mu}\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\bar{\mu}} \Lambda_{\beta}^{\nu} T^{\alpha\beta} \quad (3.11)$$

As componentes covariantes de um tensor, transformam-se de maneira contrária as componentes contravariantes e são escritas da seguinte forma.

$$T_{\bar{\mu}\nu} = \Lambda_{\bar{\mu}}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} T_{\alpha\beta} \quad (3.12)$$

E por fim o tensor misto que é um tensor que possui tanto componentes contravariantes e covariantes.

$$T_{\nu}^{\bar{\mu}} = \Lambda_{\alpha}^{\bar{\mu}} \Lambda_{\nu}^{\beta} T_{\beta}^{\alpha} \quad (3.13)$$

# Capítulo 4

## Dinâmica Relativística.

### 4.1 Introdução

Com a aceitação da Teoria da relatividade, surgiu a necessidade de desenvolver uma nova mecânica, que descrevesse de modo satisfatório o movimento dos corpos e estivesse de acordo com os postulados bases da teoria da relatividade. Muitos conceitos clássicos se mostraram incompatíveis com os postulados da TRR, e sanar essa inconsistência nasceu a Dinâmica relativística, uma teoria mais geral e satisfatória para descrever o movimento dos corpos.

A dinâmica relativística estuda as relações entre, massa, energia, momento e outras grandezas dinâmicas, no contexto relativístico quando medidas em referenciais inerciais distintos.

### 4.2 Quadrivetor Energia-Momento.

Na Mecânica Clássica o momento linear é uma grandeza vetorial definida pelo produto da massa do corpo e sua velocidade linear, matematicamente é escrito na forma:

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Na Teoria da relatividade o momento é definido levando em consideração os postulados da TRR. O espaço no qual estamos trabalhando é de quatro dimensões e por isso o momento é um quadrivetor nesse espaço, cuja representação matemática é:

$$\vec{P}^\mu = m_0 \vec{U}^\mu \tag{4.1}$$

onde  $m_0$  é a massa de repouso do corpo, ou seja, sua massa no referencial de repouso em relação à medida. Já  $\vec{U}^\mu$  é o quadrivetor velocidade, cujo o módulo é igual a.

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (4.2)$$

As componentes do quadrivetor momento são escritas como:

$$\vec{P}^\mu = (\gamma m_0 c, \vec{p})$$

ou

$$\vec{P}^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right). \quad (4.3)$$

As componentes espaciais  $p^\mu$  do quadrivetor momento correspondem ao momento relativístico

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} \quad (4.4)$$

E sua componente temporal  $p^0$

$$p^0 = \frac{E}{c} \quad (4.5)$$

onde:

$$E = \gamma m_0 c^2 \quad (4.6)$$

**é a energia relativística.**

E efetuando a contração tensorial de  $\vec{P}^\mu$  por ele mesmo, temos o seguinte resultado.

$$\vec{P}^\mu \vec{P}_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \quad (4.7)$$

temos que  $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$ , substituindo esse resultado na equação anterior, temos.

$$\vec{P}^\mu \vec{P}_\mu = m_0^2 c^2 \quad (4.8)$$

que é um invariante relativístico.

Ao usarmos  $\vec{U}^\mu = \gamma \vec{v}$  na equação (4.4), resulta em

$$\vec{p} = m_0 \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (4.9)$$

e em seguida, expandindo o termo  $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$  em série de Taylor,

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^4} + \dots \right) \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) na equação (4.9) , temos.

$$\vec{p} = m_0 \vec{v} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^4} + \dots \right) \quad (4.11)$$

Ao tomarmos o limite  $v \ll c$ , a equação torna-se.

$$\vec{p} = m_0 \vec{v}$$

que é justamente a expressão do momento linear clássico. Concluímos que ao aplicarmos o limite não relativístico na expressão do momento relativístico, ele se reduz a expressão clássica do momento.

Porém, o mesmo não se aplica a energia relativística ([3]). Expandindo o denominador da equação (4.6) da energia relativística em uma série de Taylor, temos,

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^4} + \dots \right)$$

e substituindo em (4.6), temos.

$$E = m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^4} + \dots \right) \quad (4.12)$$

O primeiro termo da expressão corresponde a energia de repouso da partícula. A energia de repouso corresponde a energia da partícula quando ela se encontra parada, ou seja, quando  $v = 0$ . O segundo termo é a energia cinética clássica, logo ao tomarmos o limite  $v \ll c$  , a energia relativística consiste na energia cinética da mecânica clássica.

Podemos reescrever (4.12) explicitando os termos.

$$E = E_0 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{u^4}{c^2} + \dots \quad (4.13)$$

onde  $E_0 = m_0 c^2$  corresponde a energia de repouso da partícula, os demais termos que estão associados a energia de movimento da partícula.compondo a energia cinética relativística.

$$K = \frac{1}{2} m_0 u^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{u^4}{c^2} + \dots = m_0 c^2 (\gamma - 1) \quad (4.14)$$

Podemos então reescrever (4.13) de uma forma mais compacta:

$$E = E_0 + K \quad (4.15)$$

A energia relativística pode ser reescrita usando a equação (4.14) e usando  $E_0 = m_0c^2$ .

$$E = m_0c^2 - m_0c^2(\gamma - 1)$$

$$E = m_0c^2 - \gamma m_0c^2 + m_0c^2$$

$$E = mc^2 \tag{4.16}$$

onde,  $m = \gamma m_0$ .

A equação (4.16) é a equação que expressa a equivalência entre a massa e a energia relativística, sendo o resultado mais significativo de toda a Teoria da Relatividade formulada. ([1]).

# Capítulo 5

## Colisões Relativísticas

### 5.1 Introdução

O estudo das colisões relativísticas trouxe importantes contribuições para a física moderna. Atualmente só conhecemos as partículas constituintes da matéria porque investigamos os processos resultantes de colisões entre partículas. As reações resultantes da colisão de partículas relativísticas proporcionaram o avanço no entendimento das interações fundamentais das partículas elementares([6]).

As colisões relativísticas são regidas por dois princípios fundamentais dentro da Dinâmica Relativística: conservação de momento e da energia total. Assim, todo o formalismo descrito no capítulo anterior, sobre Energia e momento relativístico, será usado na descrição dos processos de colisão.

Os processos de colisão são classificadas em três tipos, onde diferem no comportamento da energia cinética e da massa de repouso, são elas.

1. **Colisões Inelásticas:** Nesse tipo de colisão as partículas com energia cinética inicial colidem, e após o choque geram uma única partícula, com massa maior que a soma das massas das partículas iniciais. A energia cinética sofre uma diminuição e é convertida em Energia de repouso. Tal fenômeno ocorre por conta da conversão da energia de cinética em massa de repouso.
2. **Colisões Explosivas:** As colisões explosivas ocorrem quando há um decaimento de

partículas, onde novas partículas são geradas a partir de uma única. Nesse caso há conversão de massa de repouso em energia cinética. Após o processo a energia cinética final maior que a inicial e uma massa de repouso menor, pois parte dela foi convertida em energia cinética.

3. **Colisões Elásticas:** Por fim as colisões Elásticas, que são as únicas onde temos a conservação de massa de repouso, massa relativística e energia cinética. As partículas são as mesmas e possuem as mesmas massas antes de depois da colisão.

## 5.2 Aplicações

Nesta seção estudaremos alguns casos de colisões entre partículas subatômicas.

### 5.2.1 Partículas geradas através das colisões.

1. Uma partícula de massa  $A$  (com energia  $E$ ) atinge a partícula  $B$  (em repouso), produzindo partículas  $C_1 + C_2 + \dots + C_n$ . Ou seja,  $A + B \mapsto C_1 + C_2 + \dots + C_n$ . Calcule o limiar (a energia mínima) necessária para que ocorra esta reação, em termos das diferentes massas das partículas.

### Resolução

Usaremos a conservação de energia total e do momento. E analisaremos o problema tanto do referencial do laboratório quanto do centro de massa do sistema.

**No referencial do laboratório** temos a seguinte configuração do sistema:

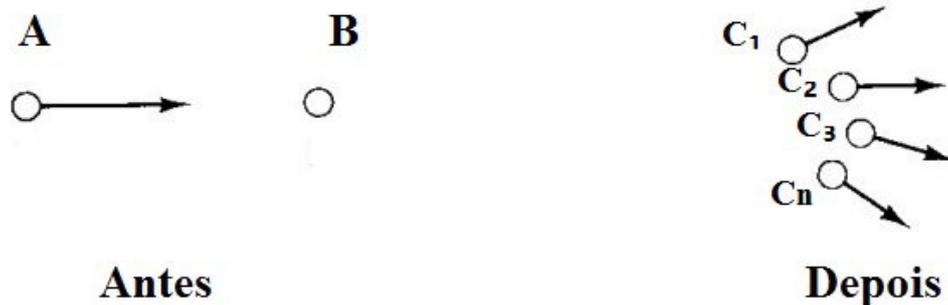


Figura 5.1: Colisão de duas partículas vistas do referencial do laboratório

Usaremos a equação (4.3) para calcular as componentes do quadri vetor energia-momento antes da colisão. Poderíamos calculá-lo também após o choque, uma vez que no referencial do laboratório ele é conservado.

$$\vec{P}_{tot}^{\mu} = \left( \frac{E_{tot}}{c}, \vec{p}_{tot} \right) \quad (5.1)$$

onde:

$$\vec{p}_{tot} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$$

como a partícula  $B$  encontra-se inicialmente em repouso, então  $\vec{p}_B = 0$  e conseqüentemente:

$$\vec{p}_{tot} = \vec{p}_A$$

e a  $E_{tot} = E_A + E_B$ , onde  $E_B$  é a energia de repouso da partícula  $B$ .

Substituindo a energia total e o momento relativístico total na equação (5.1), encontramos.

$$\vec{P}_{tot}^{\mu} = \left( \frac{E_A}{c} + m_{Bc}, \vec{p}_A \right) \quad (5.2)$$

Porém no referencial do laboratório não é tão fácil verificar a condição mas no referencial do centro de massa sim.

**No referencial do centro de massa:**



Figura 5.2: Colisão de duas partículas vistas do referencial do centro de massa

Quando visto do referencial do centro de massa o quadrivetor energia-momento também é conservado, para esta configuração vamos calculá-lo após a colisão.

$$\vec{P}_{tot}^{\mu} = \left( \frac{E_{tot}}{c}, \vec{p}_{tot} \right) \quad (5.3)$$

Como estamos no referencial do centro de massa e o quadrivetor energia-momento é tipo tempo, sua parte espacial é nula, ou seja,  $\vec{p}_{tot} = 0$ . O que implica em:

$$\vec{P}_{tot}^{\mu} = \left( \frac{E_{tot}}{c}, 0 \right) \quad (5.4)$$

onde  $E_{tot} = E_{c_1} + E_{c_2} + E_{c_3} + \dots + E_{c_n}$ .

Como no limiar todas as partículas encontram-se em repouso, elas terão somente a sua correspondente energia de repouso. Podemos reescrever a equação (5.4).

$$\begin{aligned} \vec{P}_{tot}^{\mu} &= \left( \frac{E_{c_1} + E_{c_2} + E_{c_3} + \dots + E_{c_n}}{c}, 0 \right) \\ \vec{P}_{tot}^{\mu} &= ((m_1 + m_2 + \dots + m_n) c, 0) \\ \vec{P}_{tot}^{\mu} &= (Mc, 0) \end{aligned} \quad (5.5)$$

sendo  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ .

O quadrivetor energia-momento calculados no referencial do laboratório e do centro de massa são obviamente diferentes. Porém usando a equação (4.7) nas equações (5.3) e (5.5), obtemos.

$$\vec{P}_{tot}^{\mu} \vec{P}_{\mu tot} = \left( \frac{E_A}{c} + m_{BC} \right)^2 + \vec{p}_A^2$$

$$\vec{P}_{tot}^\mu \vec{P}_{\mu tot} = \left(\frac{E_A}{c}\right)^2 + 2m_B E_A + m_B c^2 - P_A^2$$

usando a equação (4.8).

$$\vec{P}_{tot}^\mu \vec{P}_{\mu tot} = 2m_B E_A + c^2 (m_A^2 + m_B^2) \quad (5.6)$$

e para a o quadrivetor no referencial do centro de massa.

$$\vec{P}_{tot}^\mu \vec{P}_{\mu tot} = M^2 c^2 \quad (5.7)$$

Os resultados das equações (5.6) e (5.7), são grandezas invariantes e portanto iguais em qualquer sistema. Assim igualando estes resultados temos.

$$\begin{aligned} \vec{P}_{tot}^\mu \vec{P}_{\mu tot} &= \vec{P}_{tot}^\mu \vec{P}_{\mu tot} \\ 2m_B E_A + c^2 (m_A^2 + m_B^2) &= M^2 c^2 \\ E_A &= \left(\frac{M^2 - m_B^2 - m_A^2}{2m_B}\right) c^2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

A equação (5.8) é a expressão para a energia mínima necessária para que ocorra a reação.

## 5.2.2 Cálculo do Limiar de Energia

Usando os resultados do exemplo anterior para encontrar os limiares de energia para as seguintes reações, assumindo que o próton está parado.

### Limiar de Energia do Próton incidente

- $p + p \longrightarrow p + p + \pi^0$

A Energia é dada pela equação (5.8)

$$E_A = \left(\frac{M^2 - m_B^2 - m_A^2}{2m_B}\right) c^2$$

Temos que:

$$m_A = m_B = m_p = 938.27 \frac{MeV}{c^2}$$

$$m_{\pi^0} = 134,98 \frac{MeV}{c^2}$$

$$M = 2m_p + m_{\pi^0} = 2011.52 \frac{MeV}{c^2}$$

A energia é então.

$$E_p = \left( \frac{(2011.52 \frac{MeV}{c^2})^2 - 2(938.27 \frac{MeV}{c^2})^2}{2(938.27 \frac{MeV}{c^2})} \right) c^2$$

$$E_p = 1218 MeV \quad (5.9)$$

### Limiar de Energia do Próton incidente

- $p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-$

Temos:

$$m_A = m_B = m_p = 938.27 \frac{MeV}{c^2}$$

$$m_{\pi^+} = 139.57 \frac{MeV}{c^2}$$

$$m_{\pi^-} = 139.57 \frac{MeV}{c^2}$$

$$M = 2m_p + m_{\pi^+} + m_{\pi^-} = 2155.68 \frac{MeV}{c^2}$$

E a energia é

$$E_p = \left( \frac{(2155.68 \frac{MeV}{c^2})^2 - 2(938.27 \frac{MeV}{c^2})^2}{2(938.27 \frac{MeV}{c^2})} \right) c^2$$

$$E_p = 1538 MeV \quad (5.10)$$

### Limiar de Energia para o $\pi^-$ incidente

- $\pi^- + p \rightarrow p + \bar{p} + n$

Temos:

$$m_A = m_{\pi^-} = 139.57 \frac{MeV}{c^2}$$

$$m_B = m_p = 938.27 \frac{MeV}{c^2}$$

$$m_n = 939.57 \frac{MeV}{c^2}$$

$$M = 2m_p + m_n = 2816.11 \frac{MeV}{c^2}$$

E portanto a energia do Píon incidente é

$$E_{\pi^-} = \left( \frac{(2816.11 \frac{MeV}{c^2})^2 - (139.57 \frac{MeV}{c^2})^2 - (938.27 \frac{MeV}{c^2})^2}{2(938.27 \frac{MeV}{c^2})} \right) c^2$$

$$E_{\pi^-} = 3747 MeV \quad (5.11)$$



### 5.2.3 Decaimento e criação de novas partículas.

Uma partícula  $A$ , em repouso, decai em duas partículas  $B$  e  $C$  ( $A \rightarrow B + C$ )

- Encontre as energias das partículas  $B$  e  $C$ , em termos das massas das partículas.

Usando a conservação de momento relativístico podemos escrever:

$$\vec{P}_A^\mu = \vec{P}_B^\mu + \vec{P}_C^\mu$$

ou

$$\vec{P}_C^\mu = \vec{P}_A^\mu - \vec{P}_B^\mu \quad (5.14)$$

Agora, elevando a equação (5.14) ao quadrado, tem-se.

$$\left(\vec{P}_C^\mu\right)^2 = \left(\vec{P}_A^\mu\right)^2 + \left(\vec{P}_B^\mu\right)^2 - 2\vec{P}_A^\mu \cdot \vec{P}_B^\mu \quad (5.15)$$

onde:

$$\left(\vec{P}_A^\mu\right)^2 = m_A^2 c^2 \quad (5.16)$$

$$\left(\vec{P}_B^\mu\right)^2 = m_B^2 c^2 \quad (5.17)$$

$$\left(\vec{P}_C^\mu\right)^2 = m_C^2 c^2 \quad (5.18)$$

$$\vec{P}_A^\mu \cdot \vec{P}_B^\mu = \frac{E_A E_B}{c} - \vec{p}_A \cdot \vec{p}_B \quad (5.19)$$

O momento relativístico  $\vec{p}_A = 0$ , pois a partícula  $A$  encontra-se inicialmente parada. Substituímos as equações (5.16) a (5.19) em (5.15) para encontrar a energia.

$$\begin{aligned} m_C^2 c^2 &= m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2 \left( \frac{m_A c^2 E_B}{c^2} \right) - \vec{p}_A \cdot \vec{p}_B \\ (m_C^2 - m_A^2 - m_B^2) c^2 &= -2 m_A E_B \\ E_B &= - \frac{(m_C^2 - m_A^2 - m_B^2) c^2}{2 m_A} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Usando a conservação de energia, encontramos a energia da partícula  $C$ .

$$E_A = E_B + E_C$$

onde  $E_A = m_A c^2$  é a energia de repouso da partícula  $A$  e  $E_B$  é dado por (5.20). Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 E_C &= E_A - E_B \\
 E_C &= m_A c^2 + \frac{(m_C^2 - m_A^2 - m_B^2) c^2}{2m_A} \\
 E_C &= \frac{(m_C^2 + m_A^2 - m_B^2) c^2}{2m_A}
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

- Encontre as magnitudes dos momentos das partículas  $B$  e  $C$ .

Usando a equação (4.7), temos:

$$\begin{aligned}
 \vec{P}_B^\mu \vec{P}_{\mu B} &= \frac{E_B^2}{c^2} - \vec{p}_B = m_B^2 c^2 \\
 \vec{p}_B^2 &= \frac{E_B^2}{c^2} - m_B^2 c^2
 \end{aligned}$$

usando a equação (5.20), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_B^2 &= \frac{(-m_C^2 + m_A^2 + m_B^2)^2 c^4}{4m_A^2 c^2} - m_B^2 c^2 \\
 \vec{p}_B^2 &= \frac{(-m_C^2 + m_A^2 + m_B^2)^2 c^2}{4m_A^2} - \frac{4m_A^2 m_B^2 c^2}{4m_A^2} \\
 \vec{p}_B^2 &= \frac{c^2}{4m_A^2} \left[ (m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)^2 - m_B^2 c^2 \right] \\
 \vec{p}_B^2 &= \frac{c^2}{4m_A^2} \left[ m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 + 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2 - 4m_A^2 m_B^2 \right] \\
 |\vec{p}_B| &= \frac{c}{2m_A} \sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 + 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2 - 4m_A^2 m_B^2}
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Podemos reescrever todo o termo dentro de radical como  $\lambda(m_A^2, m_B^2, m_C^2) = m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 + 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2 - 4m_A^2 m_B^2$ .

$$|\vec{p}_B| = \frac{c}{2m_A} \sqrt{\lambda(m_A^2, m_B^2, m_C^2)} \tag{5.23}$$

Para encontrar  $|\vec{p}_C|$  recorreremos a conservação do momento.

$$\vec{p}_A = \vec{p}_B + \vec{p}_C$$

Como  $\vec{p}_A = 0$ .

$$\vec{p}_B = -\vec{p}_C$$

O que implica em

$$|\vec{p}_B| = |\vec{p}_C|$$

Então.

$$|\vec{p}_C| = \frac{c}{2m_A} \sqrt{\lambda(m_A^2, m_B^2, m_C^2)} \quad (5.24)$$

As partículas  $B$  e  $C$  se movem com momentos iguais, porém com direções opostas.

- Observe que o fator  $\lambda(a^2, b^2, c^2) = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c)$ . Assim  $|\vec{p}_B|$  vai pra zero quando  $m_A = m_B + m_C$ , e torna-se imaginário se  $m_A < (m_B + m_C)$ . Explique.

Como se trata de uma colisão do tipo explosiva, a energia de repouso é convertida em energia cinética. Assim, a massa das partículas  $B$  e  $C$  é menor que a massa da partícula  $A$ . Fazendo  $m_A < (m_B + m_C)$  não ocorre o decaimento, pois não haveria uma energia suficiente para produzir as partículas no referencial do centro de massa.

#### 5.2.4 Decaimento e cálculo da energia das novas partículas.

Use o resultado da subseção anterior para encontrar a energia, no referencial do centro de massa, de cada partícula originada do decaimento nas seguintes reações.

##### Decaimento do $\pi^-$

- $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

Temos:

$$E_B = E_{\mu^-}$$

$$E_C = E_{\bar{\nu}_\mu}$$

$$m_A = m_{\pi^-} = 139.570 \frac{MeV}{c^2}$$

$$m_B = m_{\mu^-} = 105.65 \frac{MeV}{c^2}$$

$$m_C = m_{\bar{\nu}_\mu} = 0 \frac{MeV}{c^2}$$

E as energias de  $\mu^-$  e  $\bar{\nu}_\mu$  são:

$$E_{\mu^-} = - \frac{\left( m_{\bar{\nu}_\mu}^2 - m_{\pi^-}^2 - m_{\mu^-}^2 \right) c^2}{2(m_{\pi^-})}$$

$$E_{\mu^-} = -\frac{\left(0^2 \frac{MeV}{c^2} - \left(139.570 \frac{MeV}{c^2}\right)^2 - \left(105.65 \frac{MeV}{c^2}\right)^2\right) c^2}{2 \left(139.570 \frac{MeV}{c^2}\right)}$$

$$E_{\mu^-} = 109.77 MeV \quad (5.25)$$

$$E_{\bar{\nu}_\mu} = \frac{\left(m_{\bar{\nu}_\mu}^2 + m_{\pi^-}^2 - m_{\mu^-}^2\right) c^2}{2 (m_{\pi^-})}$$

$$E_{\bar{\nu}_\mu} = \frac{\left(0^2 \frac{MeV}{c^2} + \left(139.570 \frac{MeV}{c^2}\right)^2 - \left(105.65 \frac{MeV}{c^2}\right)^2\right) c^2}{2 \left(139.570 \frac{MeV}{c^2}\right)}$$

$$E_{\bar{\nu}_\mu} = 29.79 MeV \quad (5.26)$$

### Decaimento do $\pi^0$

- $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$

Temos:

$$E_B = E_C = E_\gamma$$

$$m_A = m_{\pi^0} = 139.57 \frac{MeV}{c^2}$$

$$m_B = m_C = m_\gamma = 0 \frac{MeV}{c^2}$$

$$E_\gamma = -\frac{\left(m_\gamma^2 - m_{\pi^0}^2 - m_\gamma^2\right) c^2}{2 (m_{\pi^0})}$$

$$E_\gamma = -\frac{\left(-139.57 \frac{MeV}{c^2}\right)^2 c^2}{2 \left(139.57 \frac{MeV}{c^2}\right)}$$

$$E_\gamma = 69.78 MeV \quad (5.27)$$

### Decaimento do $K^+$ .

- $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$

Temos:

$$E_B = E_{\pi^+}$$

$$E_C = E_{\pi^0}$$

$$m_A = m_{k^+} = 493.7 \frac{MeV}{c^2}$$

$$m_B = m_{\pi^+} = 139.57 \frac{MeV}{c^2}$$

$$m_C = m_{\pi^0} = 134.98 \frac{MeV}{c^2}$$

$$E_{\pi^+} = -\frac{(m_{\pi^0}^2 - m_{k^+}^2 - m_{\pi^+}^2) c^2}{2(m_{k^+})}$$

$$E_{\pi^+} = -\frac{\left(\left(134.98 \frac{MeV}{c^2}\right)^2 - \left(493.7 \frac{MeV}{c^2}\right)^2 - \left(139.57 \frac{MeV}{c^2}\right)^2\right) c^2}{2\left(493.7 \frac{MeV}{c^2}\right)}$$

$$E_{\pi^+} = 248.1 MeV \quad (5.28)$$

$$E_{\pi^0} = \frac{(m_{\pi^0}^2 + m_{k^+}^2 - m_{\pi^+}^2) c^2}{2(m_{k^+})}$$

$$E_{\pi^0} = \frac{\left(\left(134.98 \frac{MeV}{c^2}\right)^2 + \left(493.7 \frac{MeV}{c^2}\right)^2 - \left(139.57 \frac{MeV}{c^2}\right)^2\right) c^2}{2\left(493.7 \frac{MeV}{c^2}\right)}$$

$$E_{\pi^0} = 245.57 MeV \quad (5.29)$$

### Decaimento da partícula $\Lambda$

- $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$

Temos:

$$E_B = E_p$$

$$E_C = E_{\pi^-}$$

$$m_A = m_\Lambda = 1.115,683 \frac{MeV}{c^2}$$

$$m_B = m_p = 938.27 \frac{MeV}{c^2}$$

$$m_C = m_{\pi^-} = 139.57 \frac{MeV}{c^2}$$

$$E_p = -\frac{(m_{\pi^-}^2 - m_\Lambda^2 - m_p^2) c^2}{2m_\Lambda}$$

$$E_p = -\frac{\left(\left(139.57 \frac{MeV}{c^2}\right)^2 - \left(1.115,683 \frac{MeV}{c^2}\right)^2 - \left(938.27 \frac{MeV}{c^2}\right)^2\right) c^2}{2\left(1.115,683 \frac{MeV}{c^2}\right)}$$

$$E_p = 943.64 MeV \quad (5.30)$$

$$E_{\pi^-} = \frac{(m_{\pi^-}^2 + m_\Lambda^2 - m_p^2) c^2}{2m_\Lambda}$$

$$E_{\pi^-} = \frac{\left(\left(139.57 \frac{MeV}{c^2}\right)^2 + \left(1.115,683 \frac{MeV}{c^2}\right)^2 - \left(938.27 \frac{MeV}{c^2}\right)^2\right) c^2}{2\left(1.115,683 \frac{MeV}{c^2}\right)}$$

$$E_{\pi^-} = 172.03 MeV \quad (5.31)$$

## Decaimento da partícula $\Omega^-$

- $\Omega^- \rightarrow \Lambda + K^-$

Temos:

$$E_B = E_\Lambda$$

$$E_C = E_{K^-}$$

$$m_A = m_{\Omega^-} = 1672.45 \frac{MeV}{c^2}$$

$$m_B = m_\Lambda = 1.115,683 \frac{MeV}{c^2}$$

$$m_C = m_{K^-} = 493.7 \frac{MeV}{c^2}$$

$$E_\Lambda = - \frac{(m_{K^-}^2 - m_{\Omega^-}^2 - m_\Lambda^2) c^2}{2m_{\Omega^-}}$$

$$E_\Lambda = - \frac{\left( (493.7 \frac{MeV}{c^2})^2 - (1672.45 \frac{MeV}{c^2})^2 - (1.115.683 \frac{MeV}{c^2})^2 \right) c^2}{2 (1672.45 \frac{MeV}{c^2})}$$

$$E_\Lambda = 1135 MeV \quad (5.32)$$

$$E_{K^-} = \frac{\left( \left( (493.7 \frac{MeV}{c^2})^2 + (1672.45 \frac{MeV}{c^2})^2 - (1.115.683 \frac{MeV}{c^2})^2 \right) c^2 \right)}{2 (1672.45 \frac{MeV}{c^2})}$$

$$E_{K^-} = 536.6 MeV \quad (5.33)$$

# Capítulo 6

## Conclusões

A Teoria da Relatividade Restrita foi desenvolvida para fornecer uma solução para o problema da não invariância do Eletromagnetismo perante as Transformações de Galileu. Porém, seu campo de atuação é amplo, incluindo diversos fenômenos, dentre eles a Teoria das Colisões Relativísticas, que é nosso objeto de estudo.

Colisões entre partículas são importantes, pois do que conhecemos sobre os entes que constituem a matéria vêm do estudo das colisões relativísticas. Através Teoria da Relatividade Restrita, obtermos uma descrição completa desses fenômenos. Assim, podemos investigar como as partículas são criadas e principalmente , do que a matéria é constituída.

# Referências Bibliográficas

- [1] Resnick, Robert. Introduction to Special Relativity. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1968.
- [2] Barcelos Neto, João. Matemática para físicos com aplicações: vetores, tensores e spinors, volume 1/João Barcelos Neto. - São Paulo: Editora Livraria da Física,2010.
- [3] Griffiths, David. Introduction to Elementary Particles, Second Edition. Copyring 2008 WILEY-VHC Verlag GmnH & Co.KGaA, Weinheim.
- [4] Kohanoff, J. Electronic Structure Calculations for Solids and Molecules: Theory and Computational Methods. Cambridge, 2006.
- [5] Charles Kittel. Introdução à Física do Estado Sólido. LTC, 2006.
- [6] Uma introdução ao estudo da Teoria da Relatividade Restrita, Professor Manuel Messias Ferreira Jr. Departamento de Física da Ufma.