

Sumário	1
1 Introdução	2
2 Geometria Diferencial	4
2.1 Espaços Topológicos	4
2.2 Variedades	5
2.3 Vetores Tangentes	7
2.4 Vetores Duais	7
2.5 Tensores	9
2.6 Derivada covariante	11
2.7 Transporte Paralelo	12
2.8 Tensor de Curvatura de Riemann	14
2.9 Bases Não Coordenadas e o Formalismo da Tetrada	16
2.10 Conexão de Spin	18
2.11 Equações de Campo de Einstein	19
3 Equações de onda no espaço-tempo de Minkowski	21
3.1 Equações de onda relativísticas	21
3.1.1 A Equação de Klein-Gordon	21

3.1.2	A equação de Dirac	24
3.1.3	Densidade de Probabilidade na Equação de Dirac	30
3.1.4	Equação de Dirac para Partículas Livres	31
3.1.5	Limite não-relativístico	33
4	Aplicações Da Equação de Dirac	38
4.1	Níveis de Landau	38
4.1.1	Bilineares de Dirac	40
4.2	Equações de Onda no Espaço-Tempo Curvo	41
4.2.1	Derivada covariante de um spinor	41
5	Conclusões	43
	Referências Bibliográficas	44

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Equação de Dirac e aplicações

Daniel França Lima

ORIENTADOR: EDILBERTO OLIVEIRA SILVA

SÃO LUÍS, SETEMBRO DE 2016

Equação de Dirac e aplicações

Monografia apresentada ao Curso de Física da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador: Edilberto Oliveira Silva

Doutor em Física - UFMA

SÃO LUÍS, FEVEREIRO DE 2017

Lima, Daniel França.

Equação de Dirac e aplicações

Daniel França Lima - 2017

51 f.

Impresso por computador.

Orientador: Edilberto Oliveira Silva

Dissertação - Departamento Física

Universidade Federal do Maranhão.

1. Variedades. 2. Conexão de spinorial 3. Equação de Dirac 3. Níveis de Landau

CDU 532.527

DANIEL FRANÇA LIMA

Equação de Dirac e aplicações

Monografia apresentada ao Curso de Física da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Edilberto Oliveira Silva (Orientador)

UFMA

Dr. Felipe Peixoto Poulis

UFMA

Dr. Cláudio Fernando Ferreira Farias

UFMA

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Antonio Maria Lima e Maria de Jesus França Lima e a toda minha família, por todos anos de apoio e auxílio.

Ao meu orientador, professor Edilberto Oliveira Silva, pelos ensinamentos ao longo dos anos de iniciação científica e agora nesse trabalho de conclusão de curso.

Aos colegas de curso, Marcelos dos Reis Feitosa, Abigail Rodrigues Castro, Diego Azevedo, Joel Félix Diniz, Joelson dos Reis Prado, João Luis Brandão Andrade, Marcos Vinícius Almeida, Kayman Joseph Carvalho, Lucas Franco Carvalhêdo, Joel Anderson Pinheiro, Rayanne França e Railson Oliveira pela amizade e companheirismo imprescindíveis durante os árduos anos do curso de física. Um agradecimento em especial à Marcos Lima Dias e João Alfêres pelas longas discussões e colaborações que me fizeram aprender e crescer muito como estudante de física.

À minha namorada, Alexia Tomásia Ferreira.

Ao CNPq, pelo auxílio durante os anos de PIBIC.

Resumo

Neste trabalho, fazemos um estudo introdutório de alguns elementos de geometria diferencial que são essenciais para entender os fundamentos matemáticos básicos da Teoria da Relatividade Geral. A partir desses fundamentos, deduzimos as equações de onda relativísticas no espaço-tempo de Minkowski e apresentamos algumas de suas soluções. Também estudamos a equação de Dirac no espaço-tempo curvo e apresentamos algumas propriedades.

Palavras chave: Geometria Diferencial, Equação de Klein-Gordon, Equação de Dirac

Abstract

In this work, we make an introductory study of some elements of differential geometry that are essential to understand the basic mathematical foundations in General Relativity Theory. From these fundamentals, we derive the relativistic wave equations in Minkowski's space-time and present some of their solutions. Also derive the Dirac equation in curved space-time and we present some properties.

Keywords: Differential Geometry, Klein-Gordon equation, Dirac equation

CAPÍTULO 1

Introdução

A geometria diferencial nasceu dos estudos de cartografia e astronomia, das quais grande parte da nomenclatura que desta disciplina se origina. Desde os trabalhos de pioneiros como Pierre de Fermat, Jean Frenet e Newton até a primeira metade dos seculo XIX, a geometria diferencial era tratada de maneira extríntrica, em que as curvas e superfícies eram analisadas dentro de um espaço euclideo de dimensões maiores. Na segunda metade do século XIX, Bernhard Riemann, a partir dos trabalhos de Carl Friedrich Gauss, desenvolveu a maneira intríntrica da se tratar a geometria diferencial, na qual trata-se o objeto geométrico em si mesmo. Riemann foi o responsável pela introdução do conceito de variedades, e foi o precursor da geometria diferencial moderna que conhecemos. A forma intríntrica nos permite estudar geometrias que não podem ser tratadas de maneira extríntrica, como o espaço-tempo na relatividade geral.

A relatividade geral tem se mostrado até então a teoria correta para o estudo de fenômenos ligados à gravitação. Porém, algumas inconsistências têm sido observadas em algumas situações. Como um exemplo, temos as singularidades que surgem nas soluções das equações de Einstein para buracos negros. O consenso entre os físicos é que uma teoria quântica para a relatividade geral sanria esses problemas. Muitas teorias foram propostas, mas até então nenhuma delas foi confirmada experimentalmente. O que apresentaremos neste não é uma

Abordaremos neste trabalho a mecânica quântica relativística. A relatividade restrita foi incorporada a mecânica quântica com sucesso. Em 1927, Oscar Klein e Walter Gordon, sepa-

radamente, propuseram uma equação de onda relativística. Inicialmente proposta como uma equação de onda de partícula única, a equação de Klein-Gordon foi abandonada por alguns anos, pois ela apresentava densidades de probabilidades negativas, além de energias negativas. Em 1928, Dirac propôs uma equação que apresenta densidade de probabilidade positivo-definida, assim como energias negativas, que foram associadas à antipartículas. As equações de Klein-Gordon e Dirac foram reinterpretadas como equações de campo para partículas de spin 0 e spin 1/2, respectivamente. Apesar da necessidade da equação de Dirac ser representada como uma equação de campos, sua interpretação como uma equação que descreve a dinâmica de uma partícula fornece bons resultados para o valor do momento magnético do elétron, dos níveis de energia de Landau e dos níveis de energia do átomo de hidrogênio.

O presente trabalho está organizado como segue. No capítulo 2, abordamos alguns tópicos de geometria diferencial, que consistem basicamente em usar o cálculo diferencial para estudar geometria. Além disso, também consideramos o espaço-tempo como uma variedade diferenciável. Fazemos um breve estudo desses objetos matemáticos, começando com sua definição a partir de espaços topológicos. Definimos algumas estruturas nestas variedades como vetores tangentes, duais e tensores. Para analisar conceitos relacionados à geometria do espaço-tempo, definiremos a métrica. Em seguida, para tratar de curvaturas, utilizamos o mecanismo de transporte paralelo, derivada covariante com conexões afim e de spin e o tensor de curvatura de Riemann. Finalizamos o capítulo fazendo um breve estudo das equações de Einstein. No capítulo 3, fazemos uso da matemática desenvolvida no estudo da geometria diferencial para obter a equação de Dirac em espaços-tempos curvos.

Neste capítulo, apresentaremos de forma sucinta alguns elementos matemáticos que são úteis para estudar a geometria do espaço-tempo em relatividade geral. Começamos apresentando algumas definições básicas que serão úteis para entender a geometria do espaço-tempo curvo.

2.1 Espaços Topológicos

Um espaço topológico T é um conjunto X junto com uma coleção U de subconjuntos, chamados de conjuntos abertos, Tal que U contém:

- O conjunto vazio \emptyset e o conjunto X .
- A união de qualquer coleção (possivelmente infinita) de conjuntos abertos de U .
- A interseção de qualquer número finito de conjuntos abertos de U .

Temos, como exemplo, o conjunto discreto $U = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, onde $X = \{a, b, c\}$ é um espaço topológico. Por outro lado, o conjunto discreto $\{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}\}$ não é um espaço topológico em X , pois a união de $\{a\}$ e $\{b\}$, isto é $\{a, b\}$, não é um elemento do conjunto.

Uma vizinhança de $p \in X$ é qualquer conjunto aberto contendo p . Uma topologia em X é chamada de Hausdorff se quaisquer dois pontos distintos do espaço possuem vizinhanças cuja

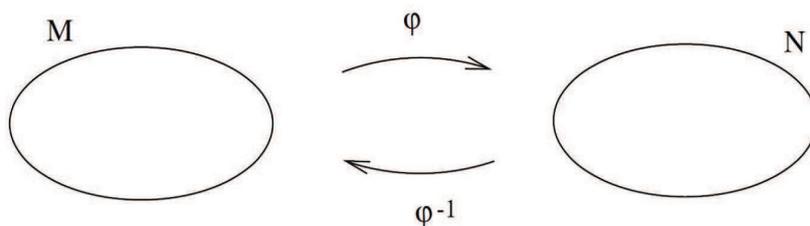


Figura 2.1: Mapa entre conjuntos

intersecção é vazia, ou matematicamente, se para cada dois pontos $p, q \in X$, existem dois conjuntos U e V tal que $p \in U$ e que $q \in V$.

Sejam X e Y mapas entre espaços topológicos. Um mapa $\phi : X \mapsto Y$ é um homeomorfismo se ele é contínuo e tem um inverso $\phi^{-1} : Y \mapsto X$ que também é contínuo. Se existe um homeomorfismo entre X e Y eles são ditos homeomórficos ou topologicamente equivalentes.

Um mapa C^∞ é contínuo e pode ser indefinidamente diferenciável. Mapas C^∞ são chamados mapas suaves. Chamamos difeomórficos dois conjuntos M e N se existe um mapa suave $\phi : M \mapsto N$ e um mapa inverso $\phi^{-1} : N \mapsto M$. O mapa ϕ é chamado de difeomorfismo.

2.2 Variedades

Em nosso estudo estamos interessados em uma classe de espaços topológicos, chamados de variedades. Estes espaços possuem a propriedade de “parecerem” euclidianos em uma pequena região, mesmo que globalmente seja curvo ou tenha uma topologia complicada. Como exemplo mais comum e mais intuitivo, temos a superfície terrestre. Temos a sensação de que ela é plana, porém, quando vista de fora, ela é quase esférica. Temos esta falsa percepção porque a vemos localmente em pequenas escalas comparado ao seu tamanho total. Examinamos superfícies curvas imaginando que elas estão imersas em um espaço euclidiano de dimensões maiores. Mas em algumas ocasiões isto não é suficiente. Na Teoria da Relatividade Geral, o espaço-tempo tem uma geometria curva e a gravidade é uma manifestação dessa curvatura. Agora precisamos estudar o espaço-tempo “dentro dele” e não imersos em uma dimensão superior à quatro. Nossa intenção é aproveitar a característica local dos conceitos de cálculo em \mathbb{R}^n para desenvolver o cálculo em uma variedade arbitrária. Para fazer isto, fazemos uma definição precisa do que vem a ser uma variedade.

Seja \mathbb{R}^n o espaço euclidiano n -dimensional com vizinhanças definidas como na seção anterior.

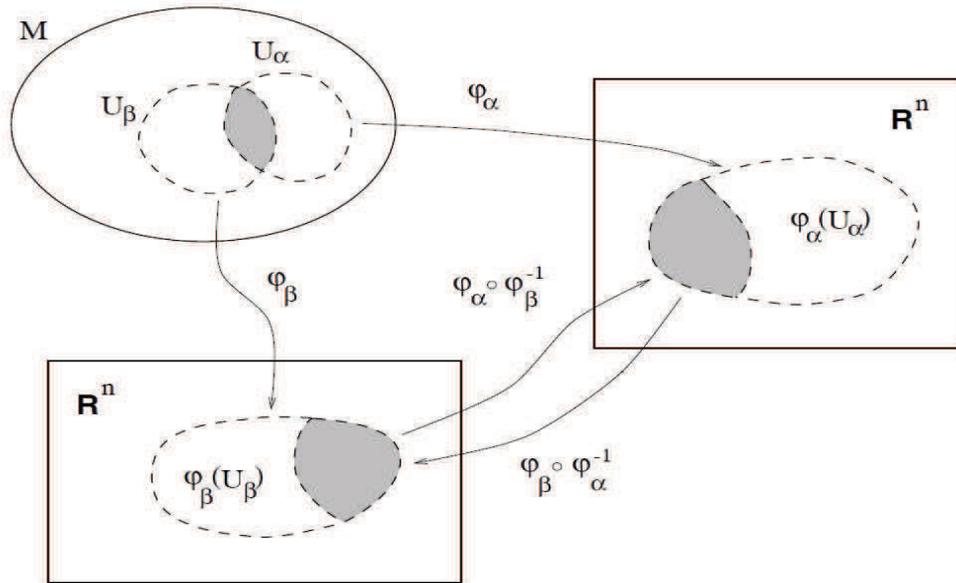


Figura 2.2: Variedades com seus subconjuntos e respectivos mapas

Uma variedade n -dimensional M é uma união de vizinhanças U_α , em que cada U_α está associado com uma mapa ϕ_α que leva cada $p \in U_\alpha$ em um ponto uma vizinhança aberta de \mathbb{R}^n . Os mapas (U_α, ϕ_α) são chamados de cartas ou sistemas de coordenadas. Um conjunto de cartas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ é chamado de atlas. Se duas cartas se sobrepõem, isto é, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então o mapa $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ leva os pontos em $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ no conjunto aberto $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ e todos esses mapas devem ser C^∞ onde são definidos. Essa discussão é ilustrada na Figura (2.2). A existência de mapas $\{\phi_\alpha\}$ permite-nos inserir coordenadas na variedade M . Cada ponto $p \in M$ está associado a um ponto $\{x^1, x^2, \dots, x^n\} = \{x^i\}$ em \mathbb{R}^n . É importante notar que esses conjuntos de mapas não são únicos. Poderíamos ter usado um conjunto de mapas diferentes $\{\phi'_\alpha\}$ que associam o mesmo $p \in M$ a um $\{x'^i\}$ em \mathbb{R}^n . O advento dos mapas $\{\phi_\alpha\}$ permite-nos aplicar alguns conceitos conhecidos de \mathbb{R}^n .

Uma função em um *manifold* é um mapa $f : M \rightarrow \mathbb{R}^1$. Vamos assumir que a composição $f \circ \phi_\alpha$ que mapeia \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n é uma função suave, no sentido já discutido anteriormente. Uma curva suave C em uma variedade é um mapa de um intervalo $(0, 1)$ em \mathbb{R}^1 para M , tal que a composição $\phi_\alpha \circ C$ seja um mapa suave de \mathbb{R}^1 para \mathbb{R}^n . Para todo t dentro intervalo, $C(t)$ leva à um ponto $p \in M$. Assim, $\phi_\alpha \circ C = \phi_\alpha(p)$ dá-nos uma n -nupla $\{x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)\}$. Note-se que uma curva C definida em M são entidades independente de um sistema de coordenadas, enquanto uma escolha particular de ϕ_α permite uma parametrização particular de

$\{x^i(t)\}$ através do mapa $\phi_\alpha \circ C$. Agora podemos definir uma função em C pela composição $f \circ C$, onde $C : \mathbb{R}^1 \rightarrow M$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^1$, com $f \circ C : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$.

2.3 Vetores Tangentes

Um vetor tangente à uma curva C em uma variedade M em um ponto p é um operador que mapeia cada função definida em p em um número

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \{(f \circ C)(t+s) - (f \circ C)(t)\}. \quad (2.1)$$

Observa-se que $(f \circ C)$ é um mapa de $(0, 1)$ de \mathbb{R}^1 para \mathbb{R}^1 . Assim, usando um conjunto de $\{\phi_\alpha\}$, podemos escrever $(f \circ C) = f(x^i(t))$, onde $\{x^i(t)\} = \phi_\alpha \circ C$. Então,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_p = \frac{dx^i}{dt} \Big|_{t=t_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \Big|_{C(t_0)} = V^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (2.2)$$

Assim, podemos expressar cada vetor tangente em p como uma combinação linear dos operadores $\{\partial/\partial x^i\}$. O conjunto de todos os vetores tangentes em p forma um espaço vetorial T de n dimensões. No espaço tangente T_p podemos escolher n vetores de base linearmente independentes \mathbf{e}_i que expandem T . Logo, qualquer vetor arbitrário de \mathbf{V} pode ser escrito como

$$\mathbf{V} = V^i \mathbf{e}_i. \quad (2.3)$$

onde V^i é a i -ésima componente do vetor \mathbf{V} na base \mathbf{e}_i . A escolha natural de \mathbf{e}_i é

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad (2.4)$$

que são chamadas de bases coordenadas. Observa-se que o formalismo utilizado permite escolhas arbitrárias para as bases. Em algumas situações é mais conveniente escolher bases não coordenadas, como veremos posteriormente.

2.4 Vetores Duais

Uma vez definido o espaço vetorial T , podemos definir o seu dual T^* . O espaço dual é o espaço dos mapas lineares, ω , que levam vetores do espaço vetorial original em números reais, que em linguagem matemática é identificado por

$$\omega : T \mapsto \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

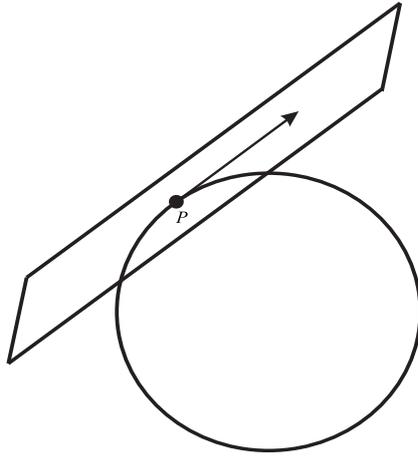


Figura 2.3: Rpresentação de um vetor tangente em ponto p

Dizemos que um mapa é linear se

$$\omega (a\mathbf{v}+b\mathbf{u}) = \omega (a\mathbf{v}) + \omega (b\mathbf{u}) , \quad (2.6)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ $\omega \in T^*$. Esses vetores duais também obedecem aos axiomas de um espaço vetorial, isto é,

$$(\alpha + \omega) (\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v} + \omega\mathbf{v}, \quad (2.7)$$

e

$$(\alpha\omega) (\mathbf{v}) = \alpha [(\omega\mathbf{v})] . \quad (2.8)$$

Para podermos escrever os vetores duais em termos de suas componentes, temos de definir os vetores de bases duais, $\hat{e}^{(\nu)}$, de tal modo que sejam ortogonal aos vetores de base coordenados,

$$\hat{e}^{(\nu)}\hat{e}_\mu = \delta_\mu^\nu, \quad (2.9)$$

onde δ_μ^ν é o delta de Kronecker. Podemos agora escrever os vetores como combinação linear dos vetores da base dual

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_\nu \hat{e}^{(\nu)}. \quad (2.10)$$

A notação em termos de componentes nos dá uma maneira fácil de escrever a ação de um vetor dual em um vetor como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} (\mathbf{v}) &= \omega_\nu \hat{e}^{(\nu)} v^\mu \hat{e}_\mu, \\ &= \omega_\mu v^\mu \delta_\mu^\nu, \\ &= \omega_\mu v^\mu \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

É por isso que raramente é necessário escrever os vetores de base (e vetores duais) explicitamente: em vez disso, podemos expressar através das componentes

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\omega}) \equiv \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) = \omega_{\mu} v^{\mu}.$$

Assim, o espaço dual dos vetores duais é o próprio espaço vetorial original. Evidentemente, no espaço-tempo não estamos interessados em um único espaço vetorial, mas em campos de vetores tangentes e vetores duais. O conjunto de todos os vetores duais sobre M é chamado de *fibrado cotangente*, $T^*(M)$. Assim, o resultado da ação do campo vetorial dual sobre o campo vetorial é uma função escalar sobre o espaço-tempo.

Um exemplo simples que ilustra como atuam vetores duais ocorre com a notação bra-ket de Dirac na mecânica quântica no espaço de Hilbert. No espaço de Hilbert, os vetores são representados por kets, $|\psi\rangle$, e o espaço vetorial dual é representado pelos “bras”, $\langle\phi|$. A atuação dos bras nos kets nos dá o número $\langle\phi|\psi\rangle$ (Na verdade este é um número complexo, mas a ideia é a mesma). No espaço-tempo, o exemplo mais simples de um vetor dual é o gradiente de uma função escalar, denotado como

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}} \hat{\theta}^{\nu}. \quad (2.12)$$

A regra da cadeia usada para transformar derivadas parciais equivale, neste caso, à transformação das componentes dos vetores duais

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}} = \Lambda_{\nu}^{\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}, \quad (2.13)$$

onde $\Lambda_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$. O exemplo mais simples de vetor dual no espaço-tempo é o gradiente de uma função escalar,

$$\partial_{\mu}\phi \frac{\partial x^{\mu}}{\partial\lambda} = \frac{d\phi}{d\lambda}. \quad (2.14)$$

É possível observar que as componentes de um vetor dual transformam sob uma lei de transformação inversa à dos vetores tangentes. Por esta razão, os vetores duais também são chamados de covariantes. Elementos do espaço dual também são chamados de *vetores cotangentes* ou *1-formas*.

2.5 Tensores

Vetores duais são mapas lineares que levam vetores em escalares. É possível generalizar esses objetos para mapas multilineares que levam vários vetores e vetores duais em escalares,

um tensor. Seja um espaço vetorial finito V e seja V^* seu espaço vetorial dual. Um tensor T do tipo (p, q) é um mapa multilinear que leva p vetores duais e q vetores em um número real

$$T : V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \longmapsto \mathbb{R} \quad (2.15)$$

O símbolo \times denota o *produto cartesiano*; multilinearidade significa que o tensor age linearmente em cada um dos seus argumentos. Matematicamente, para um tensor do tipo $(1, 1)$, temos

$$T(a\omega + b\alpha, cV + dU) = acT(\omega, V) + adT(\omega, U) + bcT(\alpha, V) + bdT(\alpha, U). \quad (2.16)$$

Assim, de acordo com a definição, um tensor do tipo $(0, 1)$ é um vetor dual. Analogamente, um tensor do tipo $(1, 0)$ é um elemento de V^{**} . Mas, como já definimos anteriormente, um elemento de V^{**} é apenas um elemento de V . Logo, um tensor do tipo $(1, 0)$ é apenas um vetor. Outro exemplo é o de um tensor T que mapeia um vetor dual e dois vetores em escalar,

$$T : V^* \times V \times V \longmapsto \mathbb{R}, \quad (2.17)$$

o qual leva T em um tensor do tipo $(1, 2)$.

O conjunto de todos os tensores do tipo (p, q) é um espaço vetorial conhecido como espaço tensorial T_q^p ; assim como qualquer outro espaço vetorial, seus elementos podem ser somados ou multiplicados por números reais para formar outros elementos do mesmo espaço. Para construir uma base desse espaço, devemos definir uma nova operação conhecida como produto tensorial, \otimes . Se um tensor T é do tipo (p, q) e S é um tensor (r, s) , definimos um tensor $T \otimes S$ $(p+r, q+s)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} & T \otimes S(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(p)}, \dots, \omega^{(p+r)}, V^{(1)}, \dots, V^{(q)}, \dots, V^{(q+s)}), \\ = & T(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(p)}, V^{(1)}, \dots, V^{(q)}) S(\omega^{(p+1)}, \dots, \omega^{(p+r)}, V^{(q+1)}, \dots, V^{(q+s)}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

É importante notar que $\omega^{(i)}$ e $V^{(i)}$ são vetores e vetores duais e não suas componentes. De posse dessa definição, torna-se simples a construção de uma base para todos os tensores (p, q) usando o produto tensorial. Assim, temos

$$\hat{e}_{(\mu 1)} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{(\mu p)} \otimes \hat{e}^{(\nu 1)} \otimes \dots \otimes \hat{e}^{(\nu q)}. \quad (2.19)$$

Em um espaço 4-dimensional teremos 4^{p+q} tensores de base. Um tensor dado em função de suas componentes é representado como

$$T = T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} \hat{e}_{(\mu 1)} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{(\mu p)} \otimes \hat{e}^{(\nu 1)} \otimes \dots \otimes \hat{e}^{(\nu q)}. \quad (2.20)$$

Assim como para vetores é comum representar tensores por suas componentes. Para tensores do tipo (p, q) a lei de transformação é dada por

$$T'^{\mu'_1 \dots \mu'_p}_{\nu'_1 \dots \nu'_q} = \Lambda^{\mu'_1}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\mu'_p}_{\mu_p} \Lambda^{\nu_1}_{\nu'_1} \dots \Lambda^{\nu_q}_{\nu'_q} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}. \quad (2.21)$$

Muitos autores definem tensores como objetos que se transformam como (2.21). Essa definição não ajuda a entender o significado dos tensores como entidades geométricas independentes do sistema de coordenadas. Contudo, podemos manipulá-los, o que é suficiente para o escopo deste trabalho.

2.6 Derivada covariante

A curvatura em uma variedade existe e não necessariamente está associada a uma métrica. Mas vamos lidar somente com a ideia de espaço-tempo como uma variedade equipada com uma métrica. A curvatura está ligada a outro objeto, a *conexão afim*, representada pelos coeficientes da conexão ou símbolos de Christoffel, $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$. Os símbolos de Christoffel apesar de serem representados com índices, não são tensores.

A conexão está intimamente ligada ao conceito de derivada covariante. Em um espaço-tempo minkowskiano a derivada parcial de um tensor, por exemplo $\partial_{\mu} A^{\nu}$, tem a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas. Para um espaço-tempo curvo isto já não é mais necessariamente verdade, de modo que o conceito de derivada parcial tem de ser generalizado para o de uma *derivada covariante*. A derivada é construída de tal modo que, ao ser aplicada à um tensor, ela forneça novamente um tensor. Ela é representada por ∇_{μ} .

Exigindo que o operador ∇_{μ} seja linear e obedeça a regra de Leibniz para operadores, ele pode ser escrito como uma derivada parcial somada a uma transformação linear. Assim, para a derivada covariante de um vetor, temos

$$\nabla_{\mu} A^{\nu} = \partial_{\mu} A^{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} V^{\lambda}, \quad (2.22)$$

onde a conexão $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ é um conjunto de transformações lineares ou matrizes. Embora a transformação da conexão não seja um tensor, ela é construída de modo que a derivada covariante se transforme como uma equação tensorial e, portanto, ela é válida em todos os sistemas de coordenadas. A derivada covariante de um escalar, ϕ , por ser invariante, reduz-se a sua derivada parcial,

$$\nabla_{\mu} \phi = \partial_{\mu} \phi. \quad (2.23)$$

A derivada covariante de um vetor dual é

$$\nabla_{\mu}\omega_{\nu} = \partial_{\mu}\omega_{\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}\omega_{\lambda}. \quad (2.24)$$

A derivada covariante pode ser generalizada para um tensor arbitrário de ordem (k, l) da seguinte forma:

$$\nabla_{\sigma}T_{\nu_1\dots\nu_l}^{\mu_1\dots\mu_k} = \partial_{\sigma}T_{\nu_1\dots\nu_l}^{\mu_1\dots\mu_k} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1}T_{\nu_1\dots\nu_l}^{\lambda\mu_2\dots\mu_k} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2}T_{\nu_1\dots\nu_l}^{\lambda\mu_1\dots\mu_k} + \dots - \Gamma_{\sigma\nu_1}^{\lambda}T_{\lambda\nu_2\dots\nu_l}^{\mu_1\dots\mu_k} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^{\lambda}T_{\nu_1\lambda\dots\nu_l}^{\mu_1\dots\mu_k} - \dots \quad (2.25)$$

Vamos assumir que a conexão não tem torção, isto é, que ela é simétrica nos índices inferiores, a saber

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}. \quad (2.26)$$

Assumimos também que a conexão é compatível com a métrica, ou seja, que a derivada covariante da métrica é nula

$$\nabla_{\mu}g_{\nu\lambda} = 0. \quad (2.27)$$

Outra quantidade importante é a equação que relaciona a conexão com o tensor métrico,

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}). \quad (2.28)$$

2.7 Transporte Paralelo

Quando tomamos a derivada de um campo vetorial ao longo de uma curva $C(\lambda)$ no espaço euclidiano, estamos comparando as componentes de um vetor em dois pontos infinitesimalmente próximos, como por exemplo x e $x + dx$. Eles são separados por $\delta\lambda$, onde λ é a parametrização da curva. Então, a derivada ao longo de uma curva em um espaço-tempo curvo em um ponto x será

$$\frac{d}{dC(t)}A^{\mu} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{A^{\mu}(x + dx) - A^{\mu}(x)}{\delta t}. \quad (2.29)$$

Em uma variedade qualquer, a subtração $A^{\mu}(x + dx) - A^{\mu}(x)$, em geral, não será um vetor. Isto é devido ao fato de que, como já discutimos em seções anteriores, vetores em diferentes pontos não pertencem ao mesmo espaço tangente. Esta também é a razão pela qual a derivada parcial de um vetor em uma variedade não é necessariamente um vetor. Podemos contornar esta dificuldade introduzindo o conceito de *transporte paralelo*. O transporte paralelo em um espaço-tempo plano consiste em transportar um vetor de um ponto à outro da variedade, sempre

mantendo-o constante. Iremos apresentar nesta seção a generalização da ideia de transporte paralelo para uma variedade curva.

Para uma dada curva $C(t)$, manter um tensor $T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k}$ constante, significa manter suas componentes contantes, ou seja, fazer com que suas derivadas ao longo do caminho sejam nulas:

$$\frac{d}{d\lambda} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} = \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} = 0.$$

Para fazer a equação acima uma equação tensorial, devemos substituir a derivada parcial por uma covariante. Definimos a *derivada direcional covariante*,

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu. \quad (2.30)$$

Este é um mapa definido somente ao longo a curva de (k, l) tensores em (k, l) tensores. Com a equação acima, podemos generalizar o transporte paralelo de um tensor arbitrário T ao longo de uma curva $x^\mu(\lambda)$ qualquer em uma variedade. Assim, em uma variedade, a derivada direcional covariante também deve ser nula, ou seja,

$$\left(\frac{D}{d\lambda} T \right)_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} = 0. \quad (2.31)$$

Esta equação tensorial é conhecida como *equação de transporte paralelo*. Para um vetor, esta equação torna-se

$$\frac{d}{d\lambda} A^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu A^\sigma = 0. \quad (2.32)$$

Essa equação pode ser vista como uma equação diferencial de primeira ordem associado a um problema de valor inicial: para um dado tensor ao longo de uma curva, só há uma maneira de levar esse tensor de um ponto a outro da curva de modo que a equação (2.32) seja satisfeita. Assim, dizemos que tal tensor foi paralelamente transportado. Escrevendo a equação de transporte paralelo para um vetor na forma infinitesimal, temos

$$A^\mu(x \rightarrow x + dx) = A^\mu(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\nu dx^\lambda, \quad (2.33)$$

onde $A^\mu(x \rightarrow x + dx)$ é o vetor $A^\mu(x)$ transportado paralelamente do ponto x ao ponto $x + dx$ ao longo da curva $x^\mu(\lambda)$. Supondo que temos uma conexão compatível com uma métrica, ou seja, que vale a equação $\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0$, podemos calcular o transporte paralelo da norma de um vetor como

$$\frac{D}{d\lambda} (g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu) = \frac{D}{d\lambda} (g_{\mu\nu}) A^\mu A^\nu + g_{\mu\nu} \frac{D}{d\lambda} (A^\mu) A^\nu + g_{\mu\nu} \frac{D}{d\lambda} (A^\nu) A^\mu = 0. \quad (2.34)$$

A equação (2.34) mostra que o transporte paralelo preserva as noções de norma e ortogonalidade de um vetor.

2.8 Tensor de Curvatura de Riemann

O tensor de curvatura de Riemann desempenha um papel importante em relatividade geral, pois ele fornece, matematicamente, uma definição formal de curvatura. Se ele for zero, o espaço é plano; se for diferente de zero, então o espaço é curvo. Esse tensor é facilmente obtido a partir da derivada segunda de um tensor,

$$A^{\mu}_{;\alpha\beta} \equiv \frac{A^{\mu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}}. \quad (2.35)$$

Em geral, é verdade que $A^{\mu}_{,\alpha\beta} = A^{\mu}_{,\beta\alpha}$, mas não é verdade que $A^{\mu}_{;\alpha\beta} = A^{\mu}_{;\beta\alpha}$. Por exemplo, considere a derivada de uma função escalar ϕ . Um escalar não muda sob transporte paralelo, ou seja,

$$\phi_{;\mu} = \phi_{,\mu}. \quad (2.36)$$

A partir da expressão (2.36), temos que

$$\phi_{;\mu;\nu} = \phi_{,\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \phi_{,\alpha}. \quad (2.37)$$

Devido ao fato de que $\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, fica provado que $\phi_{;\mu;\nu} = \phi_{;\nu;\mu}$. Isso revela que a ordem da derivada não importa para um escalar. Considere agora um vetor A^{μ} . A derivada covariante de um vetor, $A^{\mu}_{;\nu}$ é um tensor de segunda ordem. Por isso, ao derivarmos mais uma vez, temos

$$\begin{aligned} A^{\mu}_{;\nu;\lambda} &= A^{\mu}_{;\nu,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} A^{\alpha}_{;\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} A^{\mu}_{;\alpha}, \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} A^{\mu}_{;\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} A^{\alpha}_{;\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} A^{\mu}_{;\alpha}, \\ &= A^{\mu}_{,\nu,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha,\lambda} A^{\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} A^{\alpha}_{,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} A^{\alpha}_{;\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} A^{\mu}_{;\alpha}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Trocando os índices ν e λ , obtemos

$$A^{\mu}_{;\lambda;\nu} = A^{\mu}_{,\lambda,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha,\nu} A^{\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} A^{\alpha}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} A^{\alpha}_{;\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} A^{\mu}_{;\alpha}. \quad (2.39)$$

Subtraindo (2.39) de (2.38), temos

$$A^{\mu}_{;\nu;\lambda} - A^{\mu}_{;\lambda;\nu} = A^{\alpha} (\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha,\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\nu,\beta} \Gamma^{\beta}_{\lambda\alpha}) \equiv A^{\alpha} R^{\mu}_{\lambda\alpha\nu}, \quad (2.40)$$

onde

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = -\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\varepsilon\beta}^{\alpha}\Gamma_{\beta\delta}^{\varepsilon} - \Gamma_{\varepsilon\delta}^{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\varepsilon} \quad (2.41)$$

é o tensor de curvatura de Riemman. O tensor de Riemman tem as seguintes propriedades quanto à simetria:

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = -R_{\beta\delta\gamma}^{\alpha}, \quad (2.42)$$

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} + R_{\gamma\delta\beta}^{\alpha} + R_{\delta\beta\gamma}^{\alpha} = 0 \quad (2.43)$$

e

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}. \quad (2.44)$$

Todas as outras propriedades do tensor de Riemann podem ser obtidas a partir destas. Por exemplo,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}. \quad (2.45)$$

O tensor de Ricci é obtido com a contração de dois índices,

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\varepsilon\beta}^{\varepsilon}, \quad (2.46)$$

o qual, diferente do tensor de Riemann, ele é simétrico, ou seja,

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}. \quad (2.47)$$

Outra quantidade importante é o escalar de Riemann que é obtido através da contração do índices do tensor de Ricci

$$R = R_{\alpha}^{\alpha}. \quad (2.48)$$

O tensor de Riemann também obedece a uma identidade diferencial chamada de identidade de Bianchi

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\varepsilon} + R_{\alpha\beta\delta\varepsilon;\gamma} + R_{\alpha\beta\gamma\varepsilon;\delta} = 0. \quad (2.49)$$

A derivada covariante do Tensor de Ricci e de um escalar obedecem a uma importante relação que será utilizada para a obtenção da relatividade geral. Subindo o índice α e contraindo o índice ε na identidade de Bianchi e contraindo δ , temos

$$R_{\beta\gamma;\varepsilon} + R_{\beta\alpha\varepsilon;\gamma}^{\alpha} + R_{\beta\varepsilon\gamma;\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (2.50)$$

Usando as propriedades de antissimetria no segundo termo, temos

$$R_{\beta\gamma;\varepsilon} + R_{\beta\varepsilon;\gamma} + R_{\beta\varepsilon\gamma;\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (2.51)$$

Se subirmos o índice β e contrairmos e contrairmos com ε , obtemos

$$R_{\gamma;\beta}^{\alpha} - R_{;\gamma} + R_{\beta\gamma;\alpha}^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.52)$$

Usando novamente as propriedades de antissimetria podemos escrever

$$R_{\beta\gamma;\alpha}^{\alpha\beta} = R_{\gamma\beta;\alpha}^{\alpha\beta} = R_{\gamma;\beta}^{\alpha}. \quad (2.53)$$

Assim, o primeiro e o último termo em (2.52) são idênticos e equação fica escrita como

$$2R_{\gamma;\beta}^{\beta} - R_{;\gamma} = (2R_{\gamma}^{\beta} - \delta_{\gamma}^{\beta}R)_{;\gamma} = 0. \quad (2.54)$$

Finalmente, subindo o índice γ , obtemos um resultado importante:

$$(R^{\beta\gamma} - \frac{1}{2}g^{\beta\gamma}R)_{;\beta} = 0. \quad (2.55)$$

O termo entre parantêsis é chamado de tensor de Einstein

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R. \quad (2.56)$$

Como veremos depois, este é o tensor que descreve a curvatura do espaço-tempo nas equações de campo da relatividade geral.

2.9 Bases Não Coordenadas e o Formalismo da Tetrada

Até agora, utilizamos bases adaptadas a sistemas de coordenadas definidas na variedade porque é uma maneira natural de apresentar conceitos como os vetores tangentes e derivada covariante. Mas o fato de que todos objetos da formulação apresentada existem independente do sistema de coordenadas, podemos fazer uma abordagem independente do sistema de coordenadas utilizando o *Princípio da Equivalência*. Este princípio fundamental norteia a Relatividade Geral de Einstein. Ele é apresentado de várias maneiras na literatura, mas aqui vamos enunciá-lo como na Ref. [1]:

Em regiões pequenas o suficiente do espaço-tempo, as leis da física se reduzem às da Relatividade Especial; é impossível detectar a existência de um campo gravitacional por meio de experimentos locais.

Este princípio nos permite considerar o espaço-tempo como uma variedade que, localmente, ela se parece com o espaço-tempo de Minkowski. Assim, se sabemos como descrever o comportamento de partículas com spin no espaço de Minkowski, também sabemos como descrevê-las

em pequenas regiões do espaço-tempo curvo da relatividade geral. Este será o ponto de partida para obter a equação de Dirac no espaço-tempo curvo.

Imaginemos que em cada ponto da variedade podemos introduzir um conjunto de vetores de base $\hat{e}_{(a)}$ (em nossa notação usamos índices latinos para bases não coordenadas e índices gregos para bases coordenadas). Escolheremos estes vetores de base com a exigência de que eles sejam ortonormais com relação a variedade que estamos trabalhando. Em outras palavras, para o caso de variedades lorentzianas, devemos ter

$$g(\hat{e}_{(a)}, \hat{e}_{(b)}) = \eta_{ab}, \quad (2.57)$$

em que o produto interno $g(,)$ dos vetores de base deve ser igual a métrica η_{ab} de assinatura $(+ - - -)$ do espaço de Minkowski. Tais conjuntos de vetores de base ortonormais são chamados de tetradas ou vierbein, e o procedimento para estabelecer bases ortonormais em cada ponto espaço é chamado de formalismo da tetrado. Assim como para bases coordenadas, podemos expressar vetores como combinações lineares de bases não coordenadas. Conseqüentemente, podemos expressar os vetores de base antigos, $\hat{e}_\mu = \partial_\mu$, em termos dos novas

$$\hat{e}_\mu = e_\mu^a \hat{e}_{(a)}. \quad (2.58)$$

As componentes e_μ^a formam uma matriz $n \times n$. Representamos sua inversa invertendo os índices como e_a^μ . Essas matrizes devem satisfazer as relações

$$e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu, \quad e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a. \quad (2.59)$$

Logo, também é possível expressar os vetores de base $\hat{e}_{(a)}$ em termos das bases coordenadas

$$\hat{e}_{(a)} = e_a^\mu \hat{e}_\mu. \quad (2.60)$$

Em termos da tetrada inversa, a Eq. (2.57) torna-se

$$g_{\mu\nu} e_a^\mu e_\nu^b = \eta_{ab}, \quad (2.61)$$

ou equivalentemente,

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^\alpha \eta_{ab}. \quad (2.62)$$

Podemos também estabelecer um conjunto da bases duais não coordenadas que se relacionam com os vetores de base não coordenados da seguinte maneira:

$$\hat{\theta}^{(b)} \hat{e}_{(a)} = \delta_b^a. \quad (2.63)$$

Isso significa que as bases duais não coordenadas também estão relacionadas às bases duais coordenadas

$$\hat{\theta}^{(\mu)} = e_a^\mu \hat{\theta}^{(a)}, \quad (2.64)$$

e vice-versa

$$\hat{\theta}^{(a)} = e_\mu^a \hat{\theta}^{(\mu)}. \quad (2.65)$$

Qualquer outro vetor pode ser expresso em termos das bases locais. Se um vetor V é escrito nas bases coordenadas $V^\mu \hat{e}_\mu$ e $V^a \hat{e}$, suas componentes se relacionam da seguinte maneira:

$$V^\mu = e_\mu^a V^a. \quad (2.66)$$

Para um tensor arbitrário, temos

$$T_{\nu'_1 \dots \nu'_q}^{\mu'_1 \dots \mu'_p} = T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}. \quad (2.67)$$

Com a ajuda das tetradas, podemos ir e voltar aos índices locais e coordenados, o que nos permite manipular quantidades físicas que são definidas apenas no espaço de Minkowski em uma variedade curva.

2.10 Conexão de Spin

Com o formalismo tetrado podemos definir bases locais em cada ponto de uma variedade curva. Agora é importante saber como se dá o transporte paralelo de um vetor de um ponto com uma determinada base local para outra com uma nova base local. Para isso, precisamos estabelecer um novo tipo de conexão que estabeleça essa nova modalidade de transporte paralelo. Ela é chamada de *conexão de spin* e definirá a derivada covariante de tensores locais. O nome conexão de spin vem do fato que isto permite a formulação covariante da derivada de um spinor, que será discutida mais adiante. As equações para o transporte paralelo de vetores locais devem ter a mesma forma que os vetores coordenados, mas com uma conexão diferente, a saber

$$V^a(x + dx) = V^a(x) - \omega_{\mu b}^a(x) V^b(x) dx^\mu. \quad (2.68)$$

onde $\omega_{\mu b}^a$ é a conexão de spin. Ela carrega a informação para transformar o vetor utilizando os símbolos de Christoffel, ajustando as coordenadas locais no ponto inicial com as coordenadas

locais no ponto final pelas tetradas. Para encontrar a forma explícita para $\omega_{\mu b}^a$ partimos da relação

$$V^\mu(x) = e_\mu^a(x)V^a(x). \quad (2.69)$$

Transportando o vetor do ponto x para o ponto $(x + dx)$ a equação acima assume a forma

$$V^\mu(x \rightarrow x + dx) = e_\mu^a(x + dx)V^a(x \rightarrow x + dx). \quad (2.70)$$

Expandindo $e_\mu^a(x + dx)$ em primeira ordem em torno de dx , temos

$$V^\mu(x \rightarrow x + dx) = e_\mu^a(x)V^a(x \rightarrow x + dx) + \partial_\nu e_\mu^a(x)V^a(x \rightarrow x + dx)dx^\nu. \quad (2.71)$$

Inserindo (2.68) na (2.71), temos

$$\begin{aligned} V^\mu(x \rightarrow x + dx) &= e_\mu^a(x)V^a(x) - [e_\mu^a(x)\omega_{\lambda b}^a(x) - \partial_\lambda e_\mu^a(x)]V^b(x)dx^\lambda, \\ &= V^\mu(x) - [e_\mu^a(x)\omega_{\lambda b}^a(x) - \partial_\lambda e_\mu^a(x)]e_\sigma^b V^\sigma(x)dx^\lambda. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Comparando (2.72) com a equação de transporte paralelo para vetores, (2.33), extraímos a quantidade

$$\Gamma_{\sigma\rho}^\mu = [e_\mu^a(x)\omega_{\lambda b}^a(x) - \partial_\lambda e_\mu^a(x)]e_\sigma^b. \quad (2.73)$$

Isolando a conexão de spin do lado direito, temos

$$\omega_{\mu b}^a = e_\nu^a e_b^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu + e_\nu^a \partial_\lambda e_b^\nu. \quad (2.74)$$

Abaixando os índices de $\omega_{\mu b}^a$, temos

$$\omega_{\mu ab} = \eta_{ac} e_\nu^c e_b^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu + \eta_{ac} e_\nu^c \partial_\lambda e_b^\nu, \quad (2.75)$$

que é antisimétrico nos índices inferiores,

$$\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}. \quad (2.76)$$

2.11 Equações de Campo de Einstein

A equação da teoria de Newton para a gravitação mostravam uma força instantânea. Ou seja, qualquer alteração no Sol, por exemplo, seria sentida pela terra imediatamente. Isto entrava em conflito com a teoria da relatividade restrita, pois viola seu segundo postulado, que

diz que um sinal não pode se propagar com velocidade maior que c . Einstein resolveu este problema propondo que a gravidade não fosse mais considerada como uma força, mas sim como uma resposta da métrica do espaço-tempo à energia e ao momento presentes em um evento. Inspirado nas equações de campo do eletromagnetismo, em que o campo F em um evento está associado a sua fonte, a 4-corrente j , Einstein buscou equações que associam a curvatura do espaço a sua “fonte”, a matéria, representada pelo tensor de energia-momento, $T_{\mu\nu}$. A primeira escolha para o lado esquerdo da equação representando a curvatura foi o tensor de Ricci. Assim, a primeira tentativa de Einstein foi a equação

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.77)$$

Para garantir que a energia e o momento fossem conservados, ele teve de impor a condição de que o lado direito da equação tivesse divergência zero. Como demonstrado em seções anteriores, o tensor de Einstein, dado por (2.56), obedece a essa exigência. Então, as *Equações de Campo de Einstein* tomam a forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.78)$$

onde $\kappa = 8\pi G/c^4$.

Equações de onda no espaço-tempo de Minkowski

3.1 Equações de onda relativísticas

3.1.1 A Equação de Klein-Gordon

A primeira tentativa de unificação da mecânica quântica com a relatividade foi utilizar dois princípios de cada uma das duas teorias: a energia relativística como função da massa e do momento; o fato de que os observáveis podem ser representadas por operadores. A equação que obtemos com esse procedimento é conhecida como equação de Klein-Gordon.

A relação entre energia, momento e massa, derivada por Einstein é

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (3.1)$$

Para uma partícula livre, o Hamiltoniano do sistema corresponde à sua energia, ou seja, $H = E$. Substituindo os operadores da energia,

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.2)$$

e do momento,

$$\mathbf{p} = -i\hbar \nabla, \quad (3.3)$$

na Eq. (3.1), obtemos a equação de Klein-Gordon livre

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\hbar^2 \nabla^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (3.4)$$

Se aplicamos (3.4) sobre uma função de onda ψ , temos

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\hbar^2 \nabla^2 c^2 + m^2 c^4) \psi. \quad (3.5)$$

Usando unidades em que $\hbar = c = 1$, a equação acima resulta

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2) \psi, \quad (3.6)$$

ou

$$(\square + m^2) \psi = 0, \quad (3.7)$$

ou ainda

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \psi = 0, \quad (3.8)$$

onde $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ é o conhecido operador d'Alambertiano no espaço-tempo de Minkowski. O operador \square é um invariante relativístico, ou seja, ele se transforma como um escalar. A massa m , evidentemente, também é um escalar, de modo que o operador $(\square + m^2)$ também é um escalar e, conseqüentemente, uma grandeza covariante. A equação de Klein-Gordon também descreve satisfatoriamente partículas de spin-0. Essa equação foi abandonada por confrontar alguns princípios da mecânica quântica. O primeiro deles é aparecimento de soluções com energia negativa. Para demonstrar isso, devemos resolver a equação de Klein-Gordon.

Como mencionado acima, a equação de Klein-Gordon descreve a dinâmica relativística de uma partícula sem spin. Sabemos que a solução da partícula livre é identificada por uma onda plana como

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.9)$$

Vale lembrar que, como estamos considerando a relatividade restrita, p e x são 4-vetores representados por $p = (E, \mathbf{p})$ e $x = (t, \mathbf{x})$, respectivamente. Logo, devemos realizar um produto escalar no exponte como

$$px = p_\mu x^\mu = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}. \quad (3.10)$$

Por simplicidade, vamos fazer os cálculos em uma dimensão. Deste modo, a equação (3.8) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + m^2 \psi = 0. \quad (3.11)$$

Usando (3.9) em (3.11), encontramos

$$(E^2 - p^2) \psi = m^2 \psi. \quad (3.12)$$

Cancelando a função de onda e resolvendo para a energia, encontramos

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (3.13)$$

A equação acima mostra explicitamente que é possível encontrar estados de energia positivos e negativos, o que não é fisicamente aceitável. Esse foi um dos motivos que levaram ao abandono da equação de Klein-Gordon como uma equação de onda relativística para uma partícula livre. Atualmente, sabemos que isso é apenas um erro na interpretação deste resultado. Outro problema mais decisivo para o abandono da equação de Klein-Gordon é o aparecimento de densidades de probabilidade negativa. Isso pode ser entendido como segue. Desde que a probabilidade é uma quantidade conservada, podemos definir uma equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \quad (3.14)$$

onde ρ é a *densidade de probabilidade* e J é a *corrente de probabilidade*, definida pela equação ($\hbar = 1$)

$$J = -i\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}. \quad (3.15)$$

Derivando (3.15) em relação a x , temos

$$\frac{\partial J}{\partial x} = i \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} + i\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}, \quad (3.16)$$

$$= -i\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}. \quad (3.17)$$

Fazendo uso da Eq. (3.11), podemos escrever a Eq. (3.17) na forma

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -i\psi^* \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + m^2 \psi \right) + i\psi \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} + m^2 \psi^* \right), \quad (3.18)$$

$$= -i \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} \right). \quad (3.19)$$

Substituindo o resultado acima na Eq. (3.15), encontramos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = i \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} \right). \quad (3.20)$$

Uma solução que satisfaz à equação acima é

$$\rho = i \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right). \quad (3.21)$$

O fato da equação de Klein-Gordon ter derivadas de segunda ordem com relação ao tempo nos leva à densidades de probabilidade diferentes da mecânica quântica usual. Vamos relembrar que a densidade de probabilidade relacionada à equação de Schrödinger de onda ψ é dada por

$$\rho = |\psi|^2 = \psi^* \psi. \quad (3.22)$$

Este é um resultado direto da equação (3.19) junto com a equação de Klein-Gordon. Vamos mostrar que as derivadas temporais de primeira ordem na densidade de probabilidade e as soluções para energia para a partícula livre trazem alguns problemas. Usando (3.9) podemos calcular $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ e $\frac{\partial \psi^*}{\partial t}$ em (3.21):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -iE e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = iE e^{i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}, \quad (3.24)$$

de modo que podemos escrever

$$\rho = i \left\{ e^{i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \left[-iE e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right] - e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \left[iE e^{i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right] \right\} = 2E. \quad (3.25)$$

À priori, a equação acima pode parecer um resultado coerente, mas lembre-se de que encontramos também valores de energia negativos. Logo, usando (3.13), temos

$$\rho = 2E = -2\sqrt{p^2 + m^2} > 0. \quad (3.26)$$

Não há interpretação para uma densidade de probabilidade negativa. Este fato foi determinante para o abandono da equação de Klein-Gordon e início da busca por novas alternativas, como veremos na próxima seção.

3.1.2 A equação de Dirac

Paul Dirac, ciente dos problemas apresentados pela equação de Klein-Gordon, também buscou uma equação de Schrödinger relativística. Em 1928, propôs uma equação bem sucedida, que não só resolveu as dificuldades apresentadas pela equação de Klein-Gordon, como também obteve outros êxitos, como a previsão das antipartículas.

Vamos mostrar aqui uma forma de obter esta equação e demonstrar algumas de suas propriedades. Esta equação deve obedecer a certas exigências, a saber:

- Deve ser covariante sob as transformações de Lorentz;

- Deve dar a relação correta entre a energia e o momento, dada pela Eq. (3.1) para uma partícula livre;
- As derivadas temporal e espacial devem ser de primeira ordem para que a equação forneça uma densidade de probabilidade positiva.

O operador proposto por Dirac tem a forma

$$H = \alpha^i p^i c + \beta mc^2, \quad (3.27)$$

onde p^i são as componentes do momento, α^i e β são quantidades que a serem determinadas.

Assim, temos

$$\begin{aligned} H &= \beta mc^2 + c(\alpha^1 p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3), \\ H &= \beta mc^2 - i\hbar c \left(\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right), \\ H &= \beta mc^2 - i\hbar c \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \\ H &= \beta mc^2 - i\hbar c \alpha^i \partial_i. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Se aplicamos o operador $i\hbar\partial_0$ na equação de Schrödinger, temos:

$$i\hbar\partial_0 [i\hbar\partial_0\psi = H\psi], \quad (3.29)$$

ou

$$-\hbar^2\partial_0^2\psi = i\hbar\partial_0(H\psi) = H^2\psi, \quad (3.30)$$

onde

$$H^2 = (c\alpha^i p^i + \beta mc) (c\alpha^i p^i + \beta mc). \quad (3.31)$$

Explicitamente, temos

$$H^2 = c^2\alpha^i\alpha^j p^i p^j + mc^3(\alpha^i\beta + \beta\alpha^i)p^i + (\beta^2 mc^2)^2 \quad (3.32)$$

Comparando a expressão (3.32) com (3.1), podemos concluir que

$$\beta^2 = 1, \quad (3.33)$$

$$\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0, \quad (3.34)$$

e

$$\alpha^i \alpha^j p^i p^j = p^2 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2). \quad (3.35)$$

Na parcela $\alpha^i \alpha^j p^i p^j$ da Eq. (3.35), temos duas somas de Einstein em i e j , tal que

$$\alpha^i \alpha^j p^i p^j = \alpha^{(1)2} p_1^2 + \alpha^{(2)2} p_2^2 + \alpha^{(3)2} p_3^2 + \alpha^1 \alpha^2 p_1 p_2 + \dots \alpha^2 \alpha^3 p_2 p_3. \quad (3.36)$$

Como a soma deve resultar em $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, devemos ter

$$\alpha^{(1)2} = \alpha^{(2)2} = \alpha^{(3)2} = 1 \quad \text{ou} \quad \alpha^{(i)2} = 1, \quad (3.37)$$

e

$$\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} + \alpha^{(2)} \alpha^{(1)} = 0,$$

$$\alpha^{(2)} \alpha^{(3)} + \alpha^{(3)} \alpha^{(2)} = 0,$$

$$\alpha^{(1)} \alpha^{(3)} + \alpha^{(3)} \alpha^{(1)} = 0,$$

ou seja

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 0, \quad (3.38)$$

para $i \neq j$. A relação (3.35) fornece

$$\alpha^{(i)2} = 1, \quad (3.39)$$

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 0. \quad (3.40)$$

As duas relações acima podem ser compactadas em apenas uma como

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta_{ij}. \quad (3.41)$$

Resumindo, temos as seguintes relações:

$$\beta^2 = 1, \quad (3.42)$$

$$\alpha^{(i)2} = 1, \quad (3.43)$$

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 0, \quad (3.44)$$

$$\beta \alpha^i + \alpha^i \beta = 0. \quad (3.45)$$

Essas relações nos levam a concluir que α^i e β não podem ser números. Na verdade eles devem ser matrizes, para que sejam satisfeitas as relações de anticomutação. Portanto, fica provado que podemos escrever o Hamiltoniano na forma (3.27), desde que as quantidades α^i e β sejam matrizes, cuja a forma e dimensão ainda iremos determinar. Além disso, sabemos que o Hamiltoniano deve ser hermitiano, $H = H^\dagger$, de modo que as matrizes encontradas acima também devem obedecer a esta condição, garantindo assim, que seus autovalores sejam reais.

Determinação da ordem das matrizes α^i e β

Admitindo-se que as matrizes α^i e β são diagonalizáveis, podemos escrevê-las na forma diagonal,

$$\alpha^i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

$$\alpha^{(i)2} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} = \mathbf{1}_{n \times n}. \quad (3.47)$$

Como $\alpha^{(i)2} = 1$, os autovalores de α^i devem ser $\lambda_i = \pm 1$. Multiplicando por β pela esquerda, a relação $\beta \alpha^i = -\alpha^i \beta$, temos: $\alpha^i = -\beta \alpha^i \beta$. Em seguida, aplicando o traço nos dois lados, temos

$$\text{tr}(\alpha^i) = -\text{tr}(\beta \alpha^i \beta) = \text{tr}(\alpha^i) = 0, \quad (3.48)$$

onde temos usado a propriedade do traço: $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$. Analogamente, temos

$$\text{tr}(\beta) = -\text{tr}(\alpha^i \beta \alpha^i) = -\text{tr}(\beta) = 0. \quad (3.49)$$

Assim, podemos concluir que as matrizes α^i e β têm traço nulo, ou seja

$$\text{tr}(\alpha^i) = \sum_j \lambda_j = 0. \quad (3.50)$$

Sabendo que as matrizes têm traços nulos e que seus autovalores são ± 1 , podemos concluir que a ordem dessas matrizes é par, pois não é possível ter uma soma de um número ímpar de autovalores λ_j igual a zero quando $\lambda = \pm 1$. Evidentemente, a primeira opção a ser considerada é $N = 2$. Porém, as únicas matrizes 2×2 que são mutuamente anti-comutante são as três matrizes de Pauli, $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, que definem uma base. A próxima ordem a ser analisada é

$N = 4$. Para matrizes dessa ordem, encontramos facilmente um conjunto quatro matrizes anti-comutante. Qualquer conjunto de quatro matrizes $\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \beta\}$ anti-comutantes, de traço nulo, hermitianas e com autovalores ± 1 , constitui uma possível representação destas matrizes. Posteriormente, elas foram denominadas de matrizes de Dirac. A representação mais comum para matrizes é

$$\alpha^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 1_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli, dadas por

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

com

$$\begin{aligned} \sigma^{i\dagger} &= \sigma^i, \\ \{\sigma^i, \sigma^j\} &= 2\delta_{ij}, \\ \{\sigma^i, \sigma^j\} &= 2\varepsilon_{ijk}\sigma^k, \quad (\sigma^i)^2 = 1_{2 \times 2}, \\ \text{tr}(\sigma^i) &= 0. \end{aligned}$$

Para escrever as matrizes α^i e β em suas formas explícitas, usamos as matrizes σ^i . Assim, temos

$$\alpha^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Agora, podemos escrever (3.27) em forma matricial:

$$H = \alpha^i p^i c + \beta mc^2 = \begin{bmatrix} mc^2 & c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \\ c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) & -mc^2 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Partindo da equação $i\hbar\partial_0\psi = H\psi$ e propondo uma solução da forma $\psi(x, t) = \psi(x) e^{i/\hbar Et}$, temos $E\psi = H\psi$. Escrevendo o espinor ψ na forma

$$\psi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

com

$$\varphi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad \chi = \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

a equação de Dirac pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mc^2 & c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \\ c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) & -mc^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

ou

$$E\varphi = mc^2\varphi + c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi, \quad (3.58)$$

$$E\chi = -mc^2\chi + c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\varphi. \quad (3.59)$$

Com a inserção dos espinores de duas componentes, a equação de Dirac se transformam em duas equações acopladas. Essas equações permitem escrever φ em função de ψ e vice-versa:

$$\varphi = \frac{c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{E - mc^2}\chi, \quad (3.60)$$

$$\psi = \frac{c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{E + mc^2}\varphi, \quad (3.61)$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Agora, vamos introduzir um novo elemento, as matrizes γ^μ

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \alpha^i\beta. \quad (3.63)$$

Usando o Hamiltoniano dado em (3.27), podemos reescrever a equação de Dirac em uma forma mais compacta e conhecida. A saber,

$$i\partial_0\psi = H\psi, \quad (3.64)$$

ou

$$i\partial_0\psi = \beta m\psi + i\alpha^i\partial_i\psi. \quad (3.65)$$

Multiplicando a equação acima por β , resulta

$$i\beta\partial_0\psi + i\beta\alpha^i\partial_i\psi = \beta^2 m\psi, \quad (3.66)$$

ou

$$i(\gamma^0 \partial_0 + i \gamma^i \partial_i) \psi - m\psi = 0, \quad (3.67)$$

ou ainda

$$i(\gamma^u \partial_u - mc) \psi = 0, \quad (3.68)$$

que é a forma encontrada na literatura.

3.1.3 Densidade de Probabilidade na Equação de Dirac

A principal motivação para Dirac buscar uma equação relativística com derivada temporal de primeira ordem no tempo era obter uma equação que fornecesse uma densidade de probabilidade positivo-definida. Vamos verificar este fato. A equação de Dirac,

$$\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \alpha^i \partial_i \psi + mc\beta \psi, \quad (3.69)$$

usando o conjugado hermitiano da função de onda ψ^\dagger , pode ser escrita como

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} &= -i\hbar c \alpha^{i\dagger} \partial_i \psi^\dagger + mc\beta^\dagger \psi^\dagger, \\ -i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} &= -i\hbar c \alpha^i \partial_i \psi^\dagger + mc\beta \psi^\dagger, \end{aligned} \quad (3.70)$$

pois $\alpha^{i\dagger} = \alpha$ e $\beta^\dagger = \beta$. Multiplicando (3.69) pela esquerda por ψ^\dagger , temos

$$-i\hbar \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \psi^\dagger \alpha^i \partial_i \psi + mc \psi^\dagger \beta \psi \quad (3.71)$$

Agora multiplicando (3.70) pela direita por ψ , temos

$$-i\hbar \psi \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = -i\hbar c \psi \alpha^i \partial_i \psi^\dagger + mc \psi \beta \psi^\dagger. \quad (3.72)$$

Por fim, subtraindo (3.72) de (3.71), obtemos

$$i\hbar \left(\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \right) = -i\hbar c (\psi^\dagger \alpha^i \partial_i \psi + \psi \alpha^i \partial_i \psi^\dagger), \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) &= -i\hbar c \partial_i (\psi^\dagger \alpha^i \psi), \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + i\hbar c \partial_i (\psi^\dagger \alpha^i \psi) &= 0. \end{aligned} \quad (3.74)$$

A equação (3.74) nos fornece a equação de continuidade para a densidade de probabilidade, ρ , que pode ser escrita como

$$\partial_0 \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.75)$$

onde

$$\rho = \psi^\dagger \psi \quad (3.76)$$

é a densidade de probabilidade e

$$j = \psi^\dagger \alpha^i \psi \quad (3.77)$$

é a densidade de corrente de probabilidade. A equação (3.75) pode ser escrita na forma covariante

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (3.78)$$

onde $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}) = j^\mu (c\psi^\dagger \psi, \psi^\dagger \alpha^i \psi)$ é o vetor densidade de corrente de probabilidade. Podemos observar que

$$\begin{aligned} \rho &= \begin{pmatrix} \psi_1^\dagger & \psi_2^\dagger & \psi_3^\dagger & \psi_4^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \\ &= \psi_1^\dagger \psi_1 + \psi_2^\dagger \psi_2 + \psi_3^\dagger \psi_3 + \psi_4^\dagger \psi_4, \end{aligned} \quad (3.79)$$

ou

$$\rho = \sum_i |\psi_i|^2, \quad (3.80)$$

da qual podemos observar que ρ é positivo-definida.

3.1.4 Equação de Dirac para Partículas Livres

A equação de Dirac (3.68) obtida descreve a dinâmica relativística de uma partícula livre. Isso fica evidente pela ausência de um potencial de interação. Supondo a existência de estados estacionários, podemos propor a seguinte expressão para a dependência temporal do espinor

$$\psi(x, t) = \psi(x) \exp[-(i/\hbar)\varepsilon t], \quad (3.81)$$

que se transforma em

$$\varepsilon \psi(x) = H \psi(x), \quad (3.82)$$

onde ε é fornece a evolução temporal do estado estacionário $\psi(x)$.

Aqui, é útil representar o espinor de quatro componentes em um outro de duas componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (3.83)$$

com

$$\phi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}, \quad (3.84)$$

Usando a forma explicita das matrizes de Dirac, a equação (3.82) pode ser reescrita como

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} + m^2 c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

ou

$$\varepsilon \phi = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \chi + m c^2 \phi, \quad (3.86)$$

$$\varepsilon \chi = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi - m c^2 \chi. \quad (3.87)$$

Escrevendo

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \exp [(i/\hbar) \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}], \quad (3.88)$$

as equações (3.86)-(3.87) se transformam nas mesmas equações para ϕ_0 e χ_0 se substituirmos os operadores $\hat{\mathbf{p}}$ pelos seus autovalores p . Agrupando com respeito a ϕ_0 e χ_0 , temos o sistema de equações

$$(\varepsilon - m c^2) \phi_0 - c \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} \chi_0 = 0, \quad (3.89)$$

$$-c \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} \phi_0 + (\varepsilon + m c^2) \chi_0 = 0. \quad (3.90)$$

Esse sistema de equações lineares homogêneas só tem soluções não triviais no caso em que o determinante dos coeficientes é nulo, ou seja,

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon - m c^2) & -c \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} \\ -c \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} & (\varepsilon + m c^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.91)$$

Usando a relação

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{A})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad (3.92)$$

As equações (3.86)-(3.87) se transformam em

$$\varepsilon^2 - m^2 c^4 - c^2 (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}) (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}) = 0, \quad (3.93)$$

$$\varepsilon^2 - m^2 c^4 - c^2 [\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + i \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{p})] = 0, \quad (3.94)$$

$$\varepsilon^2 - m^2 c^4 - p^2 c^2 = 0, \quad (3.95)$$

ou

$$\varepsilon^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2. \quad (3.96)$$

Podemos observar que o fator de evolução temporal ε corresponde a equação (3.1), que são as soluções positivas e negativas para a energia em função do momento. O que não poderia ser diferente: se estamos buscando uma equação relativística, ela deve fornecer a relação para energia descoberta por Einstein.

3.1.5 Limite não-relativístico

Antes de lidarmos com o problema de estabelecer invariância para as transformações de Lorentz para a equação de Dirac é importante analisar se essa equação tem significado físico. Começamos considerando um elétron livre em repouso. Deste modo, a Eq. (3.27) é reduzida a

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta m c^2 \psi. \quad (3.97)$$

Na representação β dada em (3.53), podemos escrever quatro soluções

$$\psi^1 = e^{-(imc^2/\hbar)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.98)$$

$$\psi^2 = e^{-(imc^2/\hbar)t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.99)$$

$$\psi^3 = e^{(imc^2/\hbar)t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.100)$$

$$\psi^4 = e^{(imc^2/\hbar)t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.101)$$

As duas primeiras soluções correspondem aos valores positivos de energia e as outras duas aos valores negativos. As estranhas energias negativas que surgem da forma quadrática $H^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ representaram considerável dificuldade, mas a sua solução significou um importante triunfo para a interpretação das antipartículas. Discutiremos isso em mais detalhes adiante. Por enquanto, concentramo-nos nas soluções positivas para energia. Mais precisamente pretendemos mostrar que em um regime não-relativístico reduzimos a equação de Dirac para a teoria bidimensional de Pauli para para partícula com spin. Para isso, introduzimos uma interação com campo eletromagnético descrito pelo 4-potencial

$$A^\mu = (\Phi, \mathbf{A}).$$

Tal acoplamento é mais facilmente introduzido por meio da substituição mínima

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu, \quad (3.102)$$

usado em eletrodinâmica clássica para descrever a interação entre uma carga pontual com o campo eletromagnético. Para essa situação específica, escrevemos o momento como

$$p^\mu \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (3.103)$$

Inserindo a Eq. (3.103) em (3.27), temos

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta mc^2 + e\Phi \right] \psi. \quad (3.104)$$

A equação (3.104) expressa a interação mínima de uma partícula de Dirac com o campo eletromagnético aplicado. Trabalhando um pouco mais essa expressão, encontramos

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2) \psi + (e\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} + e\Phi) \psi \quad (3.105)$$

ou

$$H + H'.$$

Assim, podemos fazer um paralelo entre o caso clássico, sendo H o hamiltoniano de Dirac e H' o hamiltoniano clássico, dado por

$$H' = -\frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + e\Phi. \quad (3.106)$$

Comparando (3.105) com (3.106), podemos observar a concordância com a interpretação de $\boldsymbol{\alpha}$ com um operador velocidade \mathbf{v} . A seguir, fazemos as extensões relativísticas das relações de Ehrenfest:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} = \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{r}] = c\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{v}, \quad (3.107)$$

$$\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\pi}) = \frac{i}{\hbar} [H, \boldsymbol{\pi}] - \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad (3.108)$$

$$\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\pi}) = e \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right], \quad (3.109)$$

com $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - (e/c) \mathbf{A}$ sendo operador momento efetivo e

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla \Phi \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.110)$$

são os campos elétrico e magnético, respectivamente. A equação (3.109) é a equação de operadores que descreve o movimento de uma carga pontual e .

Para acessar o limite não-relativístico da equação (3.104), vamos utilizar novamente as matrizes de Pauli em (3.51) e representar as funções de onda em termos de uma matriz coluna

$$\psi = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix}. \quad (3.111)$$

Podemos escrever a Eq. (3.105) como

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} + e\Phi \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} - mc^2 \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix}. \quad (3.112)$$

No limite não relativístico, a energia de repouso é a maior energia do sistema, de modo que

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{bmatrix} = e^{-(imc^2/\hbar)t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}, \quad (3.113)$$

onde agora φ e χ variam relativamnete devagar no tempo e são soluções das equações acopladas

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} = c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} + e\Phi \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} - 2mc^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

A segunda das equações (3.114) pode ser aproximada, para energias cinéticas e interações com campos pequenas em comparação com mc^2 . Como resultado, temos

$$\chi = \frac{1}{2mc} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) \varphi. \quad (3.115)$$

A equação (3.115) revela que as componentes χ da função de onda são pequenas em relação as componentes φ . Com relação a φ , χ é reduzida por $v/c \ll 1$ em uma arproximação não relativística. Inserindo (3.115) na primeira equação em (3.114), obtemos uma equação dada em termos do spinor superior,

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) + e\Phi \right] \varphi. \quad (3.116)$$

Manipulando algebricamente essa equação com o auxílio da identidade para as matizes de Pauli

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{A}) (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad (3.117)$$

encontramos

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\pi}) (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\pi}) &= \boldsymbol{\pi}^2 + i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}), \\ &= \boldsymbol{\pi}^2 - e\frac{\hbar}{c} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Assim, escrevemos

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B} + e\Phi \right] \varphi \quad (3.119)$$

que é a equação de Schrödinger-Pauli. Ela representa a dinâmica de Schrödinger com o termo de interação de momento magnético do elétron com o campo externo. A equação (3.119) explica

naturalmente o momento magnético do elétron, expresso em termos de um fator giromagnético igual ao dobro do caso orbital ($g_s = 2$). O momento magnético intrínscico do elétron é escrito na forma

$$\boldsymbol{\mu}_s = -g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{S}, \quad (3.120)$$

onde μ_B é o magneton de Bohr e

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.121)$$

é o operador de spin. Sabendo que

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}, \quad (3.122)$$

a Eq. (3.120) pode ser escrita como

$$\boldsymbol{\mu}_s = -g_s \frac{e}{2m} \mathbf{S}$$

ou

$$\boldsymbol{\mu}_s = -g_s \frac{e\hbar}{4m} \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.123)$$

Sabemos por dados experimentais que

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.124)$$

evidenciando que $g_s = 2$. Note que a equação (3.120) possui um termo de energia magnética,

$$\frac{e\hbar}{2m} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.125)$$

o que condiz com um fator de $g_s = 2$. Essa foi a primeira explicação teórica para o momento magnético do spin do elétron ser dado em termos de um fator giromagnético ser o dobro em relação ao fator giromagnético orbital. Este resultado é uma consequência do acoplamento mínimo (3.102).

 Aplicações Da Equação de Dirac

4.1 Níveis de Landau

Agora estudaremos um sistema físico bastante conhecido na literatura onde se faz uso dos acoplamentos mínimo e não-mínimo. Neste caso, escrevemos a equação de Dirac com o termo de Pauli,

$$\left[(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu) - m + \frac{\Delta g}{2} \frac{e}{4m} \sigma^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} \right] \psi = 0. \quad (4.1)$$

Essa equação nos levará ao resultado $g = 2 + \Delta g$ e é usada para estudar o comportamento de partículas com fatores g diferente de 2 em campos fracos. Novamente, usamos um sistema de unidades em que $\hbar = c = 1$. Por simplicidade, vamos assumir que o campo magnético \mathbf{B} está ao longo do eixo- z . Para isso, o potencial vetor \mathbf{A} deve ser escolhido de tal forma que $A^0 = A^x = A^z = 0$, $A^y = Bx$. Como é bem conhecido na literatura, este sistema físico nos fornece os níveis de energia de uma partícula de Dirac em um campo magnético uniforme, também conhecidos como níveis de Landau. Para uma solução estacionária com energia E , escrevemos

$$\psi = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

de modo que as equações (3.86)-(3.87) fornecem

$$(E - m) \varphi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \chi, \quad (4.3)$$

$$(E + m) \chi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \varphi. \quad (4.4)$$

Eliminando χ , temos uma equação para φ :

$$(E - m) \varphi = [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})]^2 \varphi = [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}] \varphi, \quad (4.5)$$

$$= [\mathbf{p}^2 + e^2 B^2 x^2 - eB(\sigma_z + 2x)] \varphi. \quad (4.6)$$

Este é o hamiltoniano de um oscilador harmônico. Já que p_y, p_z e σ_z comutam com o lado direito, nós procuramos na forma

$$\varphi(\mathbf{x}) = e^{i(p_y y + p_z z)} f(x) \quad (4.7)$$

onde $f(x)$ satisfaz a equação de autovalores

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + (eBx - p_y)^2 - eB\sigma_z \right] f(x) = (E^2 - m^2 - p_z^2) p_y. \quad (4.8)$$

Assumindo $eB > 0$ e fazendo a mudança de variável

$$\xi = \sqrt{eB} \left(x - \frac{p_y}{eB} \right), \quad (4.9)$$

a equação (4.8) se reduz a

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 - \sigma_z \right) f = af, \quad (4.10)$$

onde

$$a = \frac{(E^2 - m^2 - p_z^2)}{eB}. \quad (4.11)$$

Se f é um autovetor de σ_z , com o autovalor $\alpha = \pm 1$, temos

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para } \alpha = 1, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{-1} \end{pmatrix} \text{ para } \alpha = -1. \quad (4.12)$$

Assim, f_α satisfaz a equação

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 \right) f_\alpha(\xi) = -(a + \alpha) f_\alpha(\xi). \quad \alpha = \pm 1$$

A solução que tende a zero no infinito pode ser expressa em termos dos polinômios de Hermite $H_n(\xi)$,

$$f_\alpha = ce^{-\xi^2/2} H_n(\xi),$$

com $a + \alpha = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Assim, os níveis de energia são dados por

$$E^2 = m^2 + p_z^2 + eB(2n + 1 - \alpha). \quad (4.13)$$

Estes níveis tem degenerescências discretas ($n, \alpha = -1; n + 1, \alpha = 1$) e contínuas (em p_y). As degenerescências contínuas podem ser reduzidas às discretas se considerarmos a partícula em uma caixa finita. A equação (4.13) nos dá uma generalização dos níveis de Landau relativísticos. O valor $g = 2$ é tal que o espectro para $E^2 = m^2$.

4.1.1 Bilineares de Dirac

Podemos construir uma base para todas as matrizes gama. Essas bases são dadas pelo conjunto $\{1, \gamma^u, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^u \gamma^5, \gamma^5\}$, onde a quinta matriz gama é definida como

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (4.14)$$

e $\sigma^{\mu\nu}$ como

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (4.15)$$

Os bilineares de Dirac são quantidades da forma $\bar{\psi}\Gamma\psi$, onde Γ é uma matriz de ordem 4. A partir do conjunto de bases apresentado acima, é possível formar 16 bilineares de Dirac. Cada um desses bilineares se transformam de formas diferentes sob transformações de Lorentz como mostrado na Tabela abaixo.

Bilineares de Dirac	Tipo de Transformação	
$\bar{\psi}\psi$	Escalar	
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	Pseudoescalar	
$\bar{\psi}\gamma^u\psi$	Vetor	
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	Tensor Antissimétrico	
$\bar{\psi}\gamma^u\gamma^5\psi$	Vetor Axial	

(4.16)

Os bilineares de Dirac são usados na próxima seção para deduzir a derivada covariante de um spinor.

4.2 Equações de Onda no Espaço-Tempo Curvo

4.2.1 Derivada covariante de um spinor

Como o campo de Dirac não é um campo tensorial, não podemos substituir a derivada parcial pela derivada covariante. Primeiro precisamos encontrar uma nova derivada covariante que possa ser usada em spinores. Para realizar esta tarefa, usamos o fato de que já conhecemos a equação de Dirac e o formalismo da tetrada para conectar regiões diferentes desse espaço através da conexão de spin. Devemos encontrar uma derivada covariante do campo spinorial que tenha a forma [5]

$$\nabla_\mu \psi(x) = [\partial_\mu + \Omega(x)]\psi(x), \quad (4.17)$$

onde $\Omega(x)$ é o coeficiente da conexão para o campo spinorial. Com esta conexão, o spinor deve obedecer a regra para transporte paralelo

$$\psi(x \rightarrow x + dx) = \psi(x) - \Omega(x) \psi(x) dx^\mu. \quad (4.18)$$

Para efetuar o transporte paralelo do spinor é preciso estar atento à tabela (4.16) para saber quais são as propriedades para as transformações dos bilineares de Dirac e, conseqüentemente, como elas sofrem o transporte paralelo. Da Tabela (4.16), temos o escalar $S(x) = \bar{\psi}(x) \psi(x)$, que permanece invariante sob transporte paralelo. Assim, temos

$$\begin{aligned} S(x \rightarrow x + dx) &= \bar{\psi}(x \rightarrow x + dx) \psi(x \rightarrow x + dx), \\ &= [\psi^\dagger(x) \gamma^0 - \psi^\dagger(x) \Omega^\dagger(x) \gamma^0 dx^\mu] [\psi(x) - \Omega(x) \psi(x) dx^\mu], \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde usamos a Eq. (4.18) e o resultado $(\gamma^0)^2 = 1$. Também o termo proporcional a $dx^\mu dx^\nu$ foi negligenciado por ser muito pequeno. Outra propriedade usada foi

$$\gamma^0 \Omega_\mu^\dagger \gamma^0 = -\Omega_\mu. \quad (4.20)$$

O vetor $V^a(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^a \psi(x)$ deve sofrer o transporte paralelo como qualquer outro vetor

$$\begin{aligned} V^a(x \rightarrow x + dx) &= [\psi^\dagger(x) - \psi^\dagger(x) \Omega^\dagger(x) \gamma^0 dx^\mu] \gamma^0 \gamma^a [\psi(x) - \Omega(x) \psi(x) dx^\mu], \\ &= \bar{\psi}(x) \gamma^a \psi(x) - \psi(x) - \bar{\psi}(x) [\gamma^a \Omega(x) - \Omega(x) \gamma^a] \psi(x) dx^\mu, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde usamos novamente a condição (4.20). Apartir da exigência que esta equação deva obedecer a equação (2.68), estabelecemos uma segunda condição para a conexão de spin

$$[\gamma^a, \Omega_\mu] = \omega_{\mu b}^a \gamma^b. \quad (4.22)$$

Deste comutador, concluímos que Ω_μ deva ser composto por alguma combinação da conexão de spin junto com um produto das matrizes gama satisfazendo o comutador, dado por

$$\Omega_\mu = -\frac{1}{4i}\omega_{\mu bc}\sigma^{bc} = \frac{1}{8}\omega_{\mu bc}[\gamma^b, \gamma^c]. \quad (4.23)$$

Para concluir a tarefa de encontrar a forma da equação de Dirac válida em espaços-tempos curvos, devemos voltar nossa atenção para as matrizes de Dirac, iremos reescrevê-las em coordenadas locais com o auxílio das tetradas inversas

$$\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a. \quad (4.24)$$

Assim, a equação de Dirac para espaços curvos é

$$[ie_a^\mu \gamma^a (\partial_\mu + \Omega_\mu) - m] \psi. \quad (4.25)$$

A equação (4.25) é usada para investigar a dinâmica de partículas de spin-1/2 em espaços-tempos de interesse como buracos negros e cordas cósmicas. Nesses estudos podemos analisar as correções para a energia dessas partículas nesse novo cenário.

Conclusões

Neste trabalho, estudamos alguns tópicos de geometria diferencial. Definimos variedades a partir de sua concepção como um espaço espaço topológico localmente euclidiano. Em seguida, definimos algumas estruturas a partir das variedade, os vetores tangentes duais e tensores. Para estudar curvaturas, definimos o transporte paralelo, a derivada covariante, a conexão de spin e as bases não-coordenadas. Fizemos um breve estudo sobre relatividade geral, definimos o tensor de curvatura e deduzimos a equação de Einstein. Estudamos as equações de onda relativísticas começando pela equação de Klein-Gordon. Apresentamos a solução para partículas livres que continham soluções negativas e positivas e sua densidade de probabilidade negativa, que fizeram com que ela fosse descartada temporariamente como equação de onda relativística. Em seguida, deduzimos a equação de Dirac e mostramos que a mesma resolve a questão da probabilidade negativa da equação de Dirac. Obtivemos os valores de energia para uma partícula livre e mostramos que ela se reduz a equação de Schrödinger acoplada à um campo eletromagnético e analisamos ainda os problemas dos Níveis de Landau. Tendo estudado as equações de onda no espaço de Minkowski e tendo em mãos os elementos necessários para estudar curvaturas, deduzimos a equação de Dirac para uma métrica específica. A partir dessa equação de Dirac, podemos estudar a dinâmica de partículas no espaço tempo de uma corda cósmica, buraco negro, etc.

Referências Bibliográficas

- [1] CARROLL, Sean. **Spacetime and Geometry an introduction to General Relativity** 1.ed. San Francisco, CA: Pearson Addison Wesley, 2004.
- [2] GREINER, Walter. **Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations.** 3. ed. New York: Springer, 2000.
- [3] ITZYKSON, C; ZUBER, J. **Quantum Field Theory.** 1 ed. New York: Mcgraw-Hill, 1974.
- [4] GRIFFITHS. David J. **Mecânica Quântica.** 1 ed. São Paulo: Pearson.
- [5] GRON, Oyvind. **Einstein General Theory of Relativity with modern applications in cosmology.** 1 ed. New york, NY, 2007.
- [6] LAWRIE, Ina D. **A Unified Grand Tour of Theoretical Physics.** 1ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2012.