

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Joel Anderson Ferreira Pinheiro

Estudo Sobre Estrelas de Nêutrons Anisotrópicas

SÃO LUÍS, JULHO DE 2017

Joel Anderson Ferreira Pinheiro

Estudo sobre Estrelas de Nêutrons Anisotrópicas

Monografia apresentada ao Programa de graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Luis Benito Castro

SÃO LUÍS, JULHO DE 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca Setorial - CCET/UFMA

Ferreira Pinheiro, Joel Anderson.

Estudo Sobre Estrelas de Nêutrons Anisotrópicas / Joel Anderson Ferreira Pinheiro. - 2017.

39 f.

Orientador: Prof. Dr. Luis Benito Castro.

Monografia (Graduação) - Curso de Física, Universidade Federal do Maranhão, SÃO LUIS, 2017.

1. Cálculo Tensorial. 2. Estrela de Nêutrons. 3.

Joel Anderson Ferreira Pinheiro

Estudo Sobre Estrelas de Nêutros Anisotrópicas

Monografia apresentada em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Física.

Aprovado em: **18/07/2017** .

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Luis Benito Castro - UFMA (Orientador)

Prof. Dr. Professor César Oswaldo Vásquez Flores- UFMA

Prof. Dr. Professor Luis Enrique Arroyo Meza- UFMA

Agradecimentos

A Deus, por ter me ajudado a vencer mais uma batalha importante em minha vida e por estar sempre comigo.

Ao meu pai, João Damasceno, e à minha mãe, Ana Rosa, pelo incentivo nos estudos, amor e cuidado comigo.

A minha irmã, Jordânia, pela preocupação e ajuda.

À minha tia, Antonia, minha prima, Luciana, pelo carinho e consideração que têm por mim e pela hospitalidade durante o curso.

Aos demais familiares que torceram por mim e sempre que puderam, estavam dispostos a me ajudar

Aos meus amigos, Alyne Lima, Alexia Tomasia, Arthur, Daniel Lima, João Luís, Joel Felix, Joelson Reis, Kayman Johsep, Marcos Lima, Marcos Vinícius Almeida, Railson, Rayanne França, por terem me dado a honra de se tornarem meus grandes amigos ao longo do curso e pelas ajudas de extrema importância que me deram.

Ao Prof. Luis Benito, pelo apoio, amizade e pelos ensinamentos.

Aos professores que pude receber os ensinamentos, por ter tido paciência e dedicação em me ensinar.

À Universidade Federal do Maranhão, pelo espaço cedido e pela oportunidade oferecida.

A FAPEMA, que financiou a minha formação e a elaboração desta obra.

“ Eu imagino Deus como a fonte de toda a energia que criou e mantém o equilíbrio do Universo.

Eu vejo Deus na flor e na abelha que suga o néctar para produzir o mel.

Eu vejo Deus no pássaro que devora a abelha; e no homem que devora o pássaro; e no verme que devora o homem.

Eu vejo Deus em cada estrela no céu, nas minhas noites nas pousadas; e nos olhos tristes de cada boi, ruminando na invernada.

Eu só não vejo Deus é no homem que devora o homem; e por isso acho que ainda tenho muito o que aprender nesses caminhos da vida...”

(Palavras de um peão boiadeiro, conhecido como o filho do Diabo, que se casou com uma santa, em uma roda de viola, numa dessas pousadas da vida...)

Resumo

O presente trabalho visa um estudo introdutório ao cálculo tensorial e relatividade geral. A partir dessa fundamentação teórica podemos estudar as estruturas estelares. O estudo dessas estruturas é justificado quando falamos da evolução estelar. Estrelas de nêutrons são objetos astrofísicos de grande proporções em: gravidade, força do campo magnético, densidade e temperatura. Para uma análise do equilíbrio de uma estrela de nêutrons utilizamos as equações de campo de Einstein, utilizamos a solução da equação de Schwarzschild e encontramos a métrica de Schwarzschild. Com essa métrica podemos encontrar as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkof para uma estrela anisotrópica com simetria esférica. As ferramentas técnicas do trabalho são as seguintes: o cálculo tensorial, a geometria diferencial e relatividade geral.

PALAVRAS-CHAVE: Relatividade geral, Estrela de Nêutrons.

Abstract

The present work intends an introductory study to the tensorial calculus and general relativity. From this theoretical foundation we can study the stellar structures. The study of stellar structures is justified when we talk about stellar evolution. Neutron stars are astrophysical objects of great proportions in: gravity, magnetic field strength, density and temperature. For an equilibrium analysis of a neutron star we use Einstein's field equations, and we use the solution of the Schwarzschild equation and find the Schwarzschild metric. With the Schwarzschild metric we can find the Tolman-Oppenheimer-Volkof equations for an anisotropic star with spherical symmetry. The technical tools of the work are the following: tensorial calculus and differential geometry and general relativity.

KEYWORDS: General Relativity; Neutrons Star.

Sumário

Sumário	1
Lista de Figuras	2
1 Introdução	7
2 Análise Tensorial	10
2.1 Espaço de N Dimensões	10
2.2 Transformação de Coordenadas	11
2.3 Vetores Covariantes e Contravariantes	11
2.4 Escalares ou Invariantes	12
2.5 Tensores	12
2.5.1 Operações Fundamentais com Tensores	13
2.5.2 Tensor Métrico	13
2.5.3 Símbolo de Christoffel	14
2.5.4 Derivada Covariante	16
2.5.5 Tensor de Curvatura de Riemann	17
3 Evolução Estelar	19
3.1 Equação de Continuidade da Massa	19
3.2 Equação de Equilíbrio Hidrostático	20
3.3 Etapas Evolutivas das Estrelas	20
4 Estudo de uma estrela de Nêutrons	25
4.1 Relatividade Geral	25

4.2	A Geodésica como equação de movimento da Relatividade Geral e o limite Newtoniano	28
4.2.1	Limite Newtoniano	29
4.3	Equação de Campo de Einstein	30
4.4	Solução de Schwarzschild	32
4.5	Equações de Tolman-Oppenheimer-Volkof para uma Estrela Anisotrópica	35
5	Conclusão	38
	Referências Bibliográficas	39

Lista de Figuras

- 3.1 Imagem capturada pelo telescópio Hubble. <http://eternosaprendizes.com/2010/04/24/hubble-celebra-seu-20%C2%BA-aniversario-revelando-fantasticas-imagens-de-epicas-montanhas-espaciais-na-nebulosa-carina/> 21
- 3.2 Esquema do pulsar. http://www.if.ufrgs.br/oei/stars/neutron_st/neutrst.htm . . . 24

Capítulo 1

Introdução

Estrelas de nêutrons são objetos compactos pertencentes a uma classe comumente chamada de “estrelas mortas”, uma vez que elas se originam do “caroço” deixado por uma estrela com massa entre 10 a 25 massas solares que explodiu numa supernova. São compostas principalmente por nêutrons cuja estabilidade gravitacional deriva do Princípio de Exclusão de Pauli. Embora prevista teoricamente desde a descoberta do nêutron em 1932 pelo inglês James Chadwick. Sua primeira observação foi em 1967, quando a doutoranda da Universidade de Cambridge Jocelyn Bell Burnell, trabalhando em um experimento proposto por Antony Hewish, descobriu que certos sinais pulsados de rádio chegavam com enorme precisão a cada 1,33728 segundos, vindos da constelação de Vulpecula. Essas fontes foram chamadas de pulsares. A grande importância de estudar estrelas de nêutrons é que elas nos fornecem um laboratório único para testar as leis da física sobre condições extremas. Por exemplo, a correção da massa das estrelas de nêutrons por efeitos relativísticos pode ser superior a 50%, mostrando então ser um ótimo laboratório para a relatividade geral. Em relação à teoria de campos temos a oportunidade única de estudar a matéria em campos magnéticos que podem chegar a 10^{12}T , enquanto o campo magnético de “poderosos eletroímãs” geralmente não são superiores a 10T. Em relação à física nuclear temos também a possibilidade de conjecturar sob o comportamento da matéria em densidades altíssimas.

A relatividade geral de Einstein tem um papel importante na obtenção das propriedades das estrelas de nêutrons, através da solução das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Com a TOV derivamos as importantes relações de massa e raio de uma estrela. Estas equações

são deduzidas a partir das equações de Einstein considerando a estrela como uma distribuição de matéria esfericamente simétrica, estática e que se comporta como um fluido perfeito.

Então, ao modelar o interior da estrela de nêutrons, somos forçados a fazer certos pressupostos sobre as propriedades da estrela de nêutrons. Algumas dessas suposições parecem naturais do ponto de vista físico, no entanto, há sempre incertezas e suspeitas de que os pressupostos podem não estar totalmente corretos. Como a história da ciência mostra, há surpresas às vezes - A natureza nem sempre compartilha nossas noções sobre o que é "natural". É por isso que as alternativas também devem ser investigadas.

A suposição de uma estrela como uma distribuição de matéria esfericamente simétrica pode não ser muito realística já que existem certos fatores, como por exemplo a presença de um campo magnético ou elétrico muito intenso, que podem provocar alterações na estrutura da estrela. Portanto, o estudo sobre as estrelas de nêutrons torna-se muito importante.

Um dos pressupostos amplamente aceitos no estudo das configurações de equilíbrio das estrelas de nêutrons e suas oscilações é que a pressão da estrela de nêutrons é isotrópica. No entanto, existem argumentos de que a pressão pode ser anisotrópica

Algumas investigações teóricas mostram que a matéria nuclear pode ser anisotrópica em densidades muito altas, onde as interações nucleares devem ser tratadas relativisticamente. A anisotropia pode ser produzida pela existência de um núcleo sólido ou pela presença de superfluido, por condensação de pions, por diferentes tipos de transições de fase, pela presença de campo magnético forte. Do ponto de vista formal, a mistura de dois fluidos é matematicamente equivalente a um fluido anisotrópico.

Durante as últimas décadas surgiram trabalhos que estudavam configurações estáticas simétricas esféricas anisotrópicas na relatividade geral. Esses estudos mostram que a anisotropia pode ter efeitos não negligenciáveis na estrutura e propriedades da estrela de nêutrons. Por exemplo, a anisotropia pode influenciar notavelmente a massa de equilíbrio máximo, o deslocamento para o vermelho máximo e a compactidade máxima das estrelas.

Durante este trabalho, no capítulo 2 será definida uma quantidade matemática chamada tensor, o seu conceito, classificações e operações. No final desse capítulo definiremos um tensor de grande serventia chamado tensor de curvatura de Riemann que é o método mais comum usado na relatividade geral.

A importância de entender a física no interior de uma estrela é apresentada no capítulo 3. Na evolução estelar observa-se como as estrelas evoluem pela observação de numerosas estrelas, cada uma em um diferente ponto do ciclo da vida, e pela simulação da estrutura estelar.

O estudo sobre estrelas de nêutrons anisotrópicas é abordado no capítulo 4 com uma introdução a relatividade geral e definido a gravitação Newtoniana como seu caso especial. Depois usaremos a equação de Einstein com uma solução esféricamente simétrica para analisarmos a equação de equilíbrio de uma ENA.

Capítulo 2

Análise Tensorial

O conceito de tensor tem sua origem no desenvolvimento na geometria diferencial de Gauss, Reimann e Christoffel. O estudo das relações que permanecem válidas quando mudamos de um referencial para o outro é o objetivo principal do calculo tensorial. As leis da física devem ser independentes da escolha de um referencial particular, sendo válidas em qualquer sistema de coordenadas. O estudo do calculo tensorial é de grande uso na relatividade geral, mecânica, hidrodinâmica, eletromagnetismo e outros campos da ciência.

2.1 Espaço de N Dimensões

Em um espaço tridimensional um ponto pode ser descrito por um conjunto de 3 números

$$x = x^1, x^2, x^3, \tag{2.1}$$

chamados de coordenadas, que são especificados por um referencial. Já um ponto na N-dimensão, por analogia, é descrito por um conjunto de N-números:

$$x = x^1, x^2, x^3 \dots x^N, \tag{2.2}$$

o qual os numeros acima são chamados de superscritos.

2.2 Transformação de Coordenadas

Sendo

$$x = x^1, x^2 \dots x^N \quad (2.3)$$

$$\bar{x} = \bar{x}^1, \bar{x}^2 \dots \bar{x}^N, \quad (2.4)$$

coordenadas de dois pontos em dois referenciais diferentes. Supondo que existe N relações entre as coordenadas dos 2 sistemas tendo a forma:

$$\bar{x}^1 = \bar{x}^1(x^1, x^2 \dots x^N) \quad (2.5)$$

$$\bar{x}^2 = \bar{x}^2(x^1, x^2 \dots x^N) \quad (2.6)$$

.

.

.

$$\bar{x}^N = \bar{x}^N(x^1, x^2 \dots x^N), \quad (2.7)$$

podemos reescrever essas relações na forma $\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1, x^2 \dots x^N)$, onde $k=1,2,\dots,N$. É suposto que essas funções são: de valor único contínuas e possuem derivadas contínuas. Da mesma forma, é possível obter uma transformação de x para \bar{x} , $x^k = x^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2 \dots \bar{x}^N)$.

2.3 Vetores Covariantes e Contravariantes

Se uma quantidade $A^1, A^2 \dots A^N$ em um sistema de coordenadas $(x^1, x^2 \dots x^N)$ são relacionadas a outras quantidades $(A'^1, A'^2 \dots A'^N)$ em outro sistema de coordenadas $(x'^1, x'^2 \dots x'^N)$ pela transformação:

$$A'^r = \sum_{s=1}^N \frac{\partial x'^r}{\partial x^s} A^s, \quad (2.8)$$

que por convenção de soma de Einstein¹ pode ser escrita com:

¹A convenção do somatório foi elaborada uma notação mais simples e curta. Ao invés de escrever a expressão $a_1 x^1 + a_2 x^2 \dots a_N x^N$ temos $\sum_{j=1}^N a_j x^j$.

$$A'^r = \frac{\partial x'^r}{\partial x^s} A^s.$$

Estes, são chamadas de componentes de um vetor contravariante ou tensor contravariante de primeira ordem.

Se uma quantidade $A_1, A_2 \dots A_N$ em um sistema de coordenadas $(x^1, x^2 \dots x^N)$ são relacionadas a outra quantidades $(A'_1, A'_2 \dots A'_N)$ em outro sistema de coordenadas $(x'^1, x'^2 \dots x'^N)$ pela transformação:

$$A'_r = \sum_{s=1}^N \frac{\partial x^s}{\partial x'^r} A_s,$$

ou:

$$\bar{A}_r = \frac{\partial x^s}{\partial x'^r} A_s,$$

Estes, são chamadas de componentes de um vetor covariante ou tensor covariante de primeira ordem.

2.4 Escalares ou Invariantes

Uma função ϕ de coordenadas x^k pode ser descrita em outro sistema, $\bar{\phi}$ sendo o valor funcional, perante uma transformação coordenadas \bar{x}^k . Então é dito *escalar* ou *invariante* se com respeito a uma transformação de coordenadas $\phi = \bar{\phi}$.

2.5 Tensores

Vetores contravariantes, escalares e vetores covariantes são todos casos especiais de uma classes de quantidades que se transformam com uma linear ,homogênea, lei de transformação. Tais quantidades são chamadas de tensores. De acordo com esta descrição um escalar é um tensor de ordem 0 ,um vetor de ordem 1.

2.5.1 Operações Fundamentais com Tensores

1. Adição: A soma de dois ou mais tensores da mesma ordem e tipo (mesmo número de índices contravariantes e covariantes) é também um tensor.

$$C_q^{mp} = A_q^{mp} + B_q^{mp}. \quad (2.9)$$

2. Subtração: A diferença entre dois ou mais tensores da mesma ordem e tipo é também um tensor.

$$D_q^{mp} = A_q^{mp} - B_q^{mp}. \quad (2.10)$$

3. Produto Externo: O produto entre dois ou mais tensores de mesma ordem e tipo é também um tensor. Este produto envolve a multiplicação ordinária das componentes do tensor, chamado de produto externo.

$$C_{qs}^{pr m} = A_q^{pr} \cdot B_s^m. \quad (2.11)$$

Observe que todo tensor pode ser escrito como a multiplicação de tensores de ordem mais baixas. Por isso, a divisão entre tensores não é sempre possível.

4. Contração: Se os índices contravariantes e covariantes de um tensor forem iguais. Uma soma sobre é dada de acordo com a convenção do somatório. O resultado é um tensor de ordem duas vezes menor

$$A_{qr}^{mpr} = B_q^{mp}. \quad (2.12)$$

Agora se $p = q$

$$B_p^{mp} = C^m. \quad (2.13)$$

5. Produto Interno: Pelo processo do produto externo entre dois tensores seguido de uma contração, obtemos um novo tensor por meio de um produto interno. Dados os seguintes tensores A_q^{mp} e B_{st}^r o produto externo é dado por $A_q^{mp} \cdot B_{st}^r$. Fazendo $q = r$ obtemos o produto interno $A_r^{mp} \cdot B_{st}^r$. E se $q = r$ e $p = s$ obtemos outro produto interno $A_r^{mp} \cdot B_{pt}^r$

2.5.2 Tensor Métrico

O comprimento de arco em um espaço Euclidiano é dado por $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Dado um tensor, podemos derivar outros tensores levantando ou abaixando índices. Já para um espaço curvo, escrevemos como $ds^2 = g(x)_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. O tensor métrico, é simétrico de ordem 2 que depende das coordenadas do espaço. No espaço quadri-dimensional do espaço-tempo, quando usadas as coordenadas cartesianas

$$ds^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (2.14)$$

Associação de Tensores: Dado um tensor, podemos derivar outros tensores apenas por subir ou descer um índice. Podemos obter essa derivação de tensor por meio do produto interno entre um dado tensor e um tensor métrico

$$A_q^p = g^{rp}A_{rq}, A^{pq} = g^{rp}g^{sq}A_{rs}, A_{rs}^p = g_{rq}A_s^{pq}. \quad (2.15)$$

2.5.3 Símbolo de Christoffel

Do tensor métrico, definimos duas novas funções

$$\Gamma_{\alpha\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha} \right), \quad (2.16)$$

e

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = g^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha\rho\sigma}. \quad (2.17)$$

São chamados de símbolo de Christoffel e primeira e segunda ordem.

Dessas definições, obtemos a seguinte relação:

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\lambda} \right), \quad (2.18)$$

os símbolos de Christoffel de primeira e segunda ordem também são escritos da forma $[\alpha, \rho\sigma]$ e $\{\rho\sigma\}^\mu$, respectivamente.

Lei de Transformação dos Símbolos para os Símbolos de Christoffel

Os Símbolos de Christoffel não são tensores, pois, sobre uma mudança de coordenadas eles não se transformam como tal. Para os símbolos de Christoffel de 1ª ordem encontramos

$$\Gamma'_{\alpha\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g'_{\alpha\rho}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g'_{\alpha\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g'_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (2.19)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} g_{\mu\nu} \right) + \frac{\partial}{\partial x'^{\rho}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} g_{\mu\nu} \right) - \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} g_{\mu\nu} \right) \right] \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x'^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x'^{\rho}} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x'^{\alpha}} \right) \quad (2.21)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} \right) + \frac{\partial}{\partial x'^{\rho}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \right) - \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \right) \right] g_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

o primeiro termo do lado direito da equação acima produz

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\rho}} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\alpha}} \right) \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}, \quad (2.23)$$

mudando os índices os quais os índices da derivada $g_{\mu\nu}$ de serão μ, ν, κ

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\alpha}} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right). \quad (2.24)$$

Reescrevendo o segundo termo

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma} \partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} + \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} - \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial^2 \partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial^2 \partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma} \partial x'^{\rho}} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial^2 \partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\sigma}} \right] g_{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

o primeiro com o ultimo termo e o segundo com o terceiro se cancelam devido a simetria do tensor métrico e a propriedade de comutatividade das derivadas parciais. Com isso obtemos para o segundo termo da seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} g_{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

Somando os termos acima obtemos a transformada dos símbolos de Christoffel de primeira ordem:

$$\Gamma'_{\alpha\rho\sigma} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \Gamma_{\kappa\mu\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\sigma}} g_{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

fazendo uso da lei de transformação para $g^{\mu\nu}$ definimos a lei de transformação para os símbolos Christoffel de segunda ordem, $\Gamma'^{\lambda}_{\rho\sigma} = g'^{\lambda\alpha} \Gamma'_{\alpha\rho\sigma}$:

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} g^{\beta\gamma} \left(\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \Gamma_{\kappa\mu\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\sigma}} g_{\mu\nu} \right) \quad (2.28)$$

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} \delta_{\gamma}^{\kappa} g^{\beta\gamma} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \Gamma_{\kappa\mu\nu} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} \delta_{\gamma}^{\mu} g^{\beta\gamma} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\sigma}} g_{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\sigma}}. \quad (2.30)$$

2.5.4 Derivada Covariante

A derivada de um vetor covariante é um vetor covariante, o vetor gradiente. Este é um caso especial na qual a derivação de um tensor produz um novo tensor. A razão disso é que ao diferencial de um tensor em sistema de coordenadas curvilíneas, os vetores tangentes às curvas coordenadas variam ponto a ponto. Isso significa que mesmo quando o campo vetorial é constante, em geral as coordenadas da base escolhida não são constantes.

Logo, é necessário considerar a variação da orientação da base de vetores ao mover-se de um ponto a outro. Existem algumas expressões envolvendo primeiras derivadas de tensores nas quais são componentes de um novo tensor. Seja \tilde{A}^{μ} e A^{ν} componentes de vetores contravariantes nos sistemas de coordenadas \tilde{x}^{μ} e x^{ν} , respectivamente, que são relacionados pela transformação

$$A^{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} A^{\nu}, \quad (2.31)$$

diferenciando a equação acima com respeito a x^{α} leva a

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} + \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} A^{\nu}. \quad (2.32)$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima é o resultado esperado para $\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}$, porém, é o segundo termo que destroi o comportamento tensorial da derivada parcial. É possível reescrever esta equação de forma que tenhamos um tensor ao final. Podemos ser relacionar os sistemas de coordenadas por uma lei de transformação linear, chamando a (2.30):

$$\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\nu}} = \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} - \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\kappa\lambda}^{\mu}, \quad (2.33)$$

substituindo em (2.33)

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial A'^\nu}{\partial x'^\rho} + \Gamma'^{\lambda}_{\rho\nu} A'^\nu \right) - \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} A'^\nu. \quad (2.34)$$

Então, obtemos:

$$\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} A^\lambda \right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial A'^\nu}{\partial x'^\rho} + \Gamma'^{\lambda}_{\rho\nu} A'^\nu \right). \quad (2.35)$$

onde $\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} A'^\nu = \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} A^\lambda$

Então, podemos definir uma derivada covariante de um tensor contravariante como

$$\nabla_\alpha A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\alpha} \nabla'_\rho A'^\lambda, \quad (2.36)$$

definindo como

$$\nabla_\alpha A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} A^\lambda. \quad (2.37)$$

Se multiplicamos a equação acima por $(\partial x^\alpha / \partial x'^\beta) (\partial x'^\nu / \partial x^\mu)$ obtemos

$$\nabla_\beta A'^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \nabla_\alpha A^\mu. \quad (2.38)$$

2.5.5 Tensor de Curvatura de Riemann

Um importante conceito em um espaço curvado é o *tensor de curvatura*. Sua importância vem do fato de ser constituído de outros tensores de grande importância na relatividade.

Diferenciando covariantemente o tensor $\nabla_\alpha A^\beta$ usando a (2.37)

$$\nabla_\alpha A^\beta = (\nabla_\gamma \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\gamma) A^\beta, \quad (2.39)$$

obtemos a seguinte relação:

$$(\nabla_\gamma \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\gamma) A^\beta = -R^\rho_{\alpha\beta\gamma} A^\rho, \quad (2.40)$$

onde o tensor $R^\rho_{\alpha\beta\gamma}$ é dado por

$$R^{\rho}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\rho}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\gamma\sigma}, \quad (2.41)$$

ou podemos reescrevelo como

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = g_{\alpha\rho}R^{\rho}_{\beta\gamma\sigma}, \quad (2.42)$$

$R_{\alpha\beta}$ é o tensor de Ricci, que é um tensor simétrico de segunda ordem definido como uma contração do tensor de curvatura de Riemann da seguinte forma:

$$R_{\alpha\beta} = R^{\sigma}_{\beta\gamma\sigma} = g^{\sigma\gamma}R_{\sigma\alpha\beta\gamma}. \quad (2.43)$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\sigma}. \quad (2.44)$$

Contraindo o tensor de Ricci obtemos o escalar de Ricci.

$$R = R^{\alpha}_{\alpha} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (2.45)$$

Capítulo 3

Evolução Estelar

A teoria da estrutura estelar é extremamente complexa, necessitando para o desenvolvimento do resultados da termodinâmica, física atômica, nuclear e da teoria da gravitação. Assim, o estudo de tais sistemas possibilita o desenvolvimento dessas áreas. Um exemplo é o impulso ao estudo da física nuclear como fonte da energia no interior das estrelas. O estudo do estágio final de estrelas massivas tem ajudado no desenvolvimento da teoria da gravitação de objetos compactos, como estrelas de nêutrons e buracos negros. A estrutura de uma estrela pode ser descrita por um conjunto de equações contendo variáveis como pressão P , a densidade $\rho(r)$. A partir de umas ideias básicas é possível obter propriedades importantes no interior das estrelas.

3.1 Equação de Continuidade da Massa

Considerando uma estrela esférica, onde r é a distância ao centro. Chamando $M(r)$ a massa contida na esfera de raio r e densidade $\rho(r)$, podemos escrever para a massa elementar dM contida na casca de espessura de dr

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (3.1)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (3.2)$$

Essa equação exprime a continuidade da massa, isto é, a diferença entre a esfera de raio $r + dr$ e de raio r , é a massa da casca esférica de espessura dr

A partir de (3.1) notamos que é necessário conhecer a variação da densidade ρ com a posição

r para que a equação de continuidade possa ser integrada, sendo possível obter a variação da massa $M(r)$ em função de r , conhecer ou a massa de uma estrela de raio R

$$M(r) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (3.3)$$

3.2 Equação de Equilíbrio Hidrostático

Consideremos uma estrela em equilíbrio hidrostático, isto é, um elemento de volume no interior da estrela estará em equilíbrio sob a ação das forças gravitacionais e de pressão. Considere um elemento de gás de altura dr e área A a uma distância r do centro da estrela, onde a densidade é $\rho(r)$. A pressão na parte inferior do elemento, exerce uma força para cima e uma força para baixo devido a pressão em cima do elemento. A força resultante devido à diferença de pressão, $dP = P_S - P_I$ ¹, é:

$$F_p = -AdP \quad (3.4)$$

Escolhendo o eixo positivo na direção da parte superior, r aumenta e conseqüentemente a pressão diminui, a força resultante está na direção positiva. A condição para o equilíbrio hidrostático é:

$$F_p + F_G = 0 \quad (3.5)$$

Logo, se $F_G = \frac{GM(r)dm}{r^2}$ e $dm = \rho(r)Adr$ então:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

3.3 Etapas Evolutivas das Estrelas

O nascimento de uma estrelas se dá em meio a nuvens moleculares imersas em nebulosas gasosas existentes nas galáxias como o da nebulosa Carina (como podemos ver na figura 3.1). Assim como as galáxias em geral, as nuvens moleculares são feitas quase que inteiramente de hidrogênio e hélio. Turbulências, como as causadas por uma explosão de supernova nas

¹Onde S é superior e I inferior

proximidades, provocam crescentes adensamentos em algumas regiões da nebulosa, formando glóbulos de gás frio, que acabam colapsando sob seu próprio peso. Cada glóbulo dará origem a uma estrela. Até aqui, consideramos estrelas em equilíbrio estático, porém, elas não podem existir, pois, reações nucleares no interior da estrela sintetizam hidrogênio em hélio e com o passar do tempo a composição inicial se altera..



Figura 3.1: Imagem capturada pelo telescópio Hubble.
<http://eternosaprendizes.com/2010/04/24/hubble-celebra-seu-20%C2%BA-aniversario-revelando-fantasticas-imagens-de-epicas-montanhas-espaciais-na-nebulosa-carina/>

À medida que o glóbulo colapsa, forma-se um disco em rotação com a protoestrela no centro; jatos bipolares de gás e poeira são gerados pelo disco rotante e pelo vento estelar da protoestrela.

No interior da protoestrela, o núcleo continua a acrescentar matéria das camadas externas a ela, ficando mais denso e mais quente. Quando a temperatura do núcleo fica alta o suficiente (8 milhões K) para iniciar as reações termonucleares, a protoestrela passa a ser chamada de estrela, iniciando a fase de sua vida chamada "sequência principal".

A massa mínima que a protoestrela precisa ter para seu núcleo atingir a temperatura suficiente para acender as reações nucleares e formar uma estrela é de aproximadamente 10% da massa do Sol (o valor teórico é 0,08 massas solares), correspondendo a aproximadamente 70 vezes a massa de Júpiter. Se a massa for menor do que isso ela será uma anã marrom.

Sequência principal

A sequência principal (SP) é etapa mais longa da vida da estrela, quando ela está fundindo hidrogênio em hélio no núcleo e brilhando estavelmente, em equilíbrio hidrostático. Durante esse tempo as estrelas mantêm uma relação unívoca entre a luminosidade e a temperatura, determinada pela sua massa, formando uma faixa diagonal no diagrama HR, com as estrelas mais quentes (mais massivas), sendo as mais luminosas e as mais frias (as menos massivas) as menos luminosas.

A massa com que uma estrela se forma define a sua temperatura, a sua cor, o seu tamanho, a sua luminosidade e o seu tempo de vida da estrela na sequência principal. Quanto maior a massa, mais quente, mais azul e mais luminosa será a estrela, e menor será o seu tempo de vida.

Anãs Brancas

O estudo sobre as anãs brancas iniciou-se em 1850 com a descoberta da estrela secundária de Sirius, chamada Sirius B. Observou-se ser uma estrela 10.000 vezes menos luminosa do que Sirius A, mas com uma massa de 0.98 massa solar. Sua temperatura, sendo da ordem de 10,000K, seu raio deveria ser extremamente pequeno. Como estrelas com essa temperatura externa são brancas, esse tipo de estrela passou a ser chamado de anã branca.

Logo constatou-se que o material no interior de uma anã branca era muito denso para se comportar como um gás ideal. Ao invés disso, o gás estava degenerado. Em estrelas normais, um aumento de massa levaria ao aumento de seu tamanho, aumentando portanto seu diâmetro. Para anãs brancas, todavia, o contrário é verdadeiro; as de massa maior são menores. Portanto, há um limite superior para a massa de uma anã branca, para o qual o seu raio tende a zero. Este limite é chamado de limite de Chandrasekhar.

Anãs brancas são, portanto, de massa comparável à do Sol, mas de tamanho apenas ligeiramente maior do que o da Terra.

Uma anã branca é uma estrela que já esgotou seu combustível nuclear. Não possui, portanto,

uma fonte de energia nuclear que a mantenha luminosa por muito tempo. Entretanto, uma anã branca, por ser originalmente a região central de uma estrela, é inicialmente um objeto bastante quente. Em consequência, ela mantém-se irradiando luz pela conversão de seu manancial de energia interna em radiação. Uma estrela normal também o faz, mas tem sua energia térmica repostada pelas reações nucleares. No caso de uma anã branca, a inexistência de um processo de reposição de sua energia interna implica que a estrela lentamente se resfria. Estrelas de maior massa se resfriam mais rapidamente do que as de menor massa.

Estrela de Nêutrons

A idéia de uma estrela de nêutrons foi desenvolvida em 1939 quando os primeiros cálculos sobre suas propriedades foram feitos. Uma estrela de nêutrons possuiu uma massa inicial por volta de $8M_{\odot}$ ou mais. Estrelas com essa magnitude queimam além do hidrogênio e hélio queimam o carbono e produzem elementos mais pesados . Se a massa de uma estrela normal fosse comprimida em um volume suficientemente pequeno, os prótons e elétrons seriam forçados a se combinar e formar neutrons. Por exemplo, uma estrela de 0.7 massa solar produziria uma estrela de neutrons de apenas uns 10 km de raio. Mesmo com uma temperatura superficial de 50,000 K, seu raio é tão pequeno que sua luminosidade total seria um milhão de vezes menor do que a do Sol.

Como as anãs brancas, estrelas de nêutrons apresentam uma relação de proporção inversa entre massa e raio. Quanto maior a massa da estrela de nêutrons, menor seu raio. Seu tamanho extremamente pequeno implica que elas giram muito rápido, devido à conservação de momento angular. A matéria que anteriormente estava sob a forma de hidrogênio, hélio, etc; agora perde suas características de carga e seus elétrons devido aos efeitos de pressões enormes e tudo é puxado para o núcleo dos átomos e são convertidos em nêutrons. Estes nêutrons estão tão comprimidos devido à pressão que a estrela de nêutrons se converte praticamente em um nêutron gigantesco.

É difícil calcular como é o interior de uma estrela de nêutrons, pois a ele se aplica uma Física de condições extremas, não reproduzível em nossos laboratórios. Modelos sugerem que os neutrons comprimidos em uma configuração tão densa formam um "mar superfluido". Normalmente, superfluidos, como o hélio líquido, ocorrem a temperaturas muito baixas. As baixas temperaturas são necessárias em função da presença de cargas elétricas (prótons e elétrons);

uma mistura densa de nêutrons (com carga elétrica nula) pode se tornar superfluida mesmo a altas temperaturas.

Muitas estrelas de nêutrons foram descobertas graças aos pulsares 3.2. Os pulsares foram descobertos em 1960 através de telescópio de rádio como fontes de pulsos periódicos. Toda estrela possui um campo magnético, em geral fraco. Contudo, quando o núcleo de uma estrela é comprimido até atingir o estágio de uma estrela de nêutrons (após uma explosão de supernova, por exemplo), o campo magnético fraco também é comprimido. As linhas de campo se adensam, tornando o campo magnético muito intenso. Um campo magnético forte, combinado com alta rotação produz fortes correntes elétricas na superfície da estrela de nêutrons.

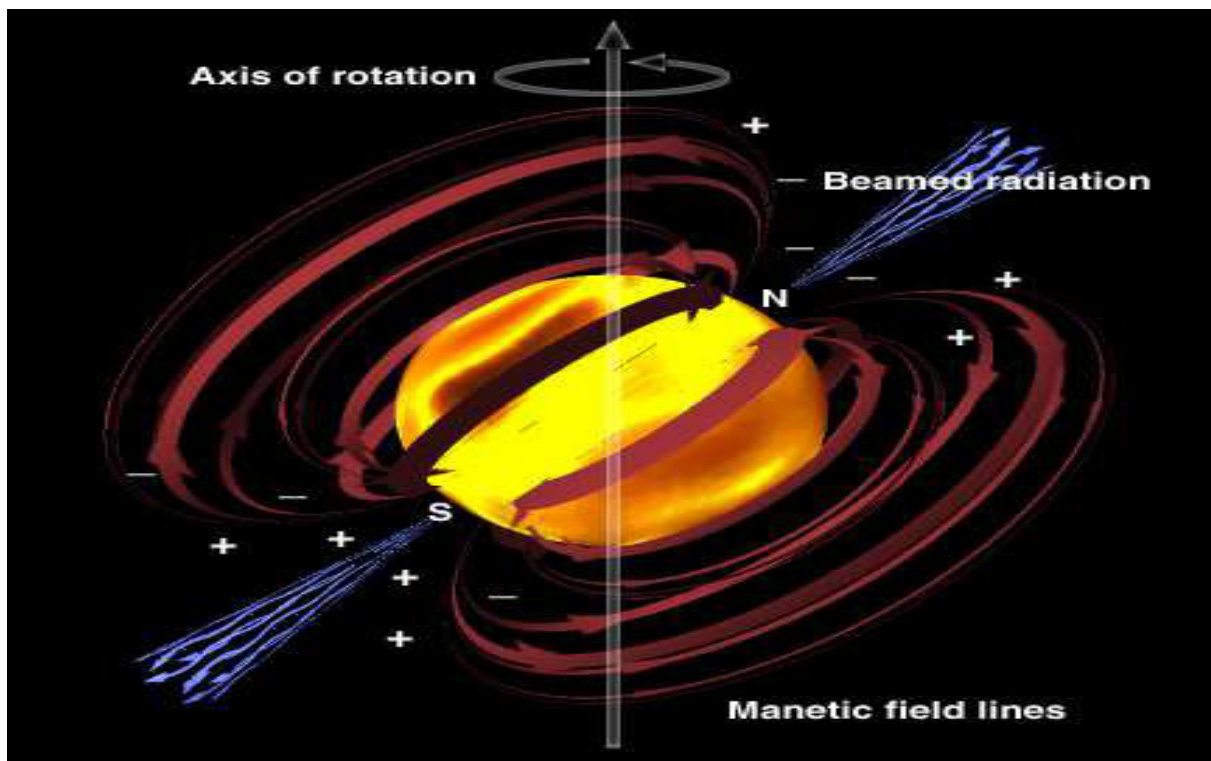


Figura 3.2: Esquema do pulsar. http://www.if.ufrgs.br/oei/stars/neutron_st/neutrst.htm

Prótons e elétrons fracamente ligados à superfície da estrela são projetados para fora e fluem ao longo das linhas do campo magnético, em direção aos seus polos norte e sul. O eixo magnético da estrela de neutrons não está necessariamente alinhado com o eixo de rotação.

Capítulo 4

Estudo de uma estrela de Nêutrons

4.1 Relatividade Geral

Corolário do Princípio de Equivalência (PE): Campos gravitacionais devem provocar deflexão num feixe de luz. Para deduzir os efeitos da gravidade, temos os procedimentos a seguir:

- Considerar a descrição de um observador em queda livre. De acordo com a PE (princípio de equivalência) não há efeito gravitacional e este referencial é inercial e a relatividade especial se aplica a este referencial.
- O observador que esta em um referencial inercial, em relação ao que está em queda livre, vê o movimento do primeiro observador acelerado no campo gravitacional devido a uma força $\vec{F} = m \vec{g}$.
- O efeito de aceleração e gravidade, percebido pelo segundo observador, deve obedecer aos postulados da relatividade geral. “ A física deve ser independente do sistema de coordenadas”.

Vamos estudar este efeito usando a luz de uma lanterna. Um astronauta esta em uma espaçonave em queda livre e aponta uma lanterna e emitir um feixe de luz perpendicularmente à direção da aceleração. Segundo o PE, não há efeito da gravidade e o feixe de luz segue um caminho reto com velocidade c até o nariz da espaçonave. Para o segundo observador há um campo gravitacional \vec{g} e a espaçonave esta em queda livre e o feixe de luz parece se curvar.

Outra situação é quando o feixe de luz é emitido paralelamente ao direção do campo gra-

vitacional. Para o astronauta, que esta em queda livre, não há efeitos físicos associados a gravidade. Já para o observador do lado de fora, pelo fato do emissor esta em movimento , percebe o efeito doppler sobre a luz.

Assumindo que a nave comece a cair no momento da emissão, $\Delta t = \frac{h}{c}$ e $\Delta u = g\Delta t$ ¹ . A formula do efeito doppler é:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta u}{c}. \quad (4.1)$$

A frequência percebida pelo observador do lado de fora é menor do que a emitida, havendo um desvio para o vermelho.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{-\Delta u}{c}. \quad (4.2)$$

Podemos expressar o em termos do potencial gravitacional:

$$\Delta u = g\Delta t = g\frac{h}{c}, \quad (4.3)$$

$$\Delta u = \frac{\Delta\Phi}{c}. \quad (4.4)$$

Logo:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{-\Delta\Phi}{c^2} = \frac{-(\Phi_{rec} - \Phi_{emi})}{c^2}. \quad (4.5)$$

Mas, da equação acima, surge a pergunta: o efeito doppler acontece mesmo se não houver movimento relativo entre o receptor e o emissor e estão sujeitos somente a uma diferença de potencial?

A resposta esta no modo como o tempo passa nesses dois pontos. Como $\frac{1}{\tau} = \omega$, podemos rescrever esta equação como:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} = \tau_1 \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right)^2. \quad (4.6)$$

¹u é a velocidade do receptor e h a altura da queda

² $\omega_{1emissor}$

Substituindo (4.6) em (4.5), temos:

$$\tau_1 = \left(1 + \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{c^2}\right)\tau_2. \quad (4.7)$$

Com isso, concluímos que para um ponto com um potencial gravitacional maior o relógio corre mais rápido em relação a outro em um ponto com potencial menor. Isso da pelo fato de a gravidade está distorcendo o espaço-tempo.

Na relatividade especial, os espaço-tempo é plano. Mas a presença da gravidade, curva o espaço-tempo. Agora o intervalo espaço-tempo (ds) é curvo, e usaremos o tensor métrico para descrever a geometria do espaço-tempo.

A métrica descreve a medida do comprimento de um determinado sistema de coordenadas:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{12}dx^1 dx^2. \quad (4.8)$$

Qualquer curva pode ser descrita por um sistema de coordenadas $x^a(\sigma)$ ³ dependente do parâmetro σ . Podemos determinar o comprimento s :

$$ds = \sqrt{g_{ab}dx^a dx^b}. \quad (4.9)$$

Fazendo uma integral de linha, temos:

$$s = \int \frac{ds}{d\sigma} d\sigma = \int \sqrt{\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2} d\sigma = \int L d\sigma. \quad (4.10)$$

Para determinar a linha na no espaço curvado, podemos impor a condição de extremo:

$$\delta s = \delta \int L(x, \dot{x}) d\sigma = 0. \quad (4.11)$$

Onde L é a Lagrangiana:

$$L = \sqrt{g_{ab} \frac{dx^a}{d\sigma} \frac{dx^b}{d\sigma}} = L(x, \dot{x}). \quad (4.12)$$

Usando o calculo variacional na equação de Euler-Lagrange, temos:

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0. \quad (4.13)$$

³ $\omega_{2receptor}$

³esse parametro para a relatividade é o tempo próprio, τ

Podemos reescrever a lagrangiana como:

$$L(x, \dot{x}) = g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b. \quad (4.14)$$

Agora a equação de Euler-Lagrange pode ser mais facilmente escrita:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) = 2g_{ab} \dot{x}^b; \quad \frac{\partial L}{\partial x^a} = \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^a} \dot{x}^c \dot{x}^d, \quad (4.15)$$

$$\frac{d}{d\sigma} (g_{ab} \dot{x}^b) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^a} \dot{x}^c \dot{x}^d = 0. \quad (4.16)$$

A ultima equação é chamada de equação geodésica que informa a menor curva possível.

4.2 A Geodésica como equação de movimento da Relatividade Geral e o limite Newtoniano

Podemos reescrever a equação geodésica diferenciando o primeiro termo, pois, há dependência da métrica em relação ao parâmetro σ :

$$\frac{d}{d\sigma} (g_{ab} \dot{x}^b) = g_{ab} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} + \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}. \quad (4.17)$$

Substituindo em (4.16):

$$g_{\mu\lambda} \frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{g_{\lambda\rho}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma} = 0. \quad (4.18)$$

Podemos reescrever o segundo termo da equ. (4.18) como:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}. \quad (4.19)$$

Reorganizando, podemos simplificar a equação (4.16) usando uma combinação particular das derivadas de 1ª ordem, no qual temos símbolo de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}]$

:

$$g_{\mu\lambda} \frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\lambda} - \frac{g_{\lambda\rho}}{\partial x^\nu} \right) \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma}. \quad (4.20)$$

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma} = 0. \quad (4.21)$$

Esta ultima equação nos é a menor curva que uma partícula percorre no espaço-tempo.

4.2.1 Limite Newtoniano

A equação da geodésica pode ser escrita como a equação de movimento no “limite Newtoniano” de uma partícula se movendo com velocidade não relativística em um campo gravitacional estático e fraco.

Usando o fato de $v = \frac{dx^i}{dt} \ll c, i = 1, 2, 3$, temos que:

$$\frac{dx^i}{d\sigma} \ll c \frac{dt}{d\sigma} = \frac{dx^0}{d\sigma}. \quad (4.22)$$

Portanto, iremos considerar no somatório, $\frac{dx^0}{d\sigma}$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{00}^\nu \frac{dx^0}{d\sigma} \frac{dx^0}{d\sigma} = 0. \quad (4.23)$$

- **Campo estático** $\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0\right)$:

Significa que o símbolo Christoffel tomam a forma:

$$g_{\mu\nu} \Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}. \quad (4.24)$$

- **Campo fraco** $h_{\mu\nu} \ll 1$: Em uma curva podemos encontrar um plano tangente a um ponto p na curva. Neste ponto podemos, somente neste ponto, a métrica de uma curva é dada em coordenadas cartesianas, $g_{ab} = g_{ab}(P) = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$. Podemos escrever a métrica da superfície da curva como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ onde $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ e $h_{\mu\nu}$ é a correção de campo. Lembrando que um espaço plano tem uma métrica $\eta_{\mu\nu}$ constante, temos que $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}$ e o símbolo de Christoffel é:

$$\eta_{\mu\nu} \Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\nu}. \quad (4.25)$$

No qual as componentes são, onde $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$, para h_{00} estático, devido a estamos tratando da superfície do espaço-tempo:

$$-\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} = 0; \Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}. \quad (4.26)$$

Da equação acima podemos concluir que $\frac{dx^0}{d\sigma} = \text{const}$ e a parte $i = \mu = 1, 2, 3$ na equação (4.23)

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{00}^\mu \frac{dx^0}{d\sigma} \frac{dx^0}{d\sigma} = \left(\frac{d^2 x^\mu}{(dx^0)^2} + \Gamma_{00}^\mu \right) \left(\frac{dx^0}{d\sigma} \right)^2. \quad (4.27)$$

$$\left(\frac{d^2 x^\mu}{(cdt)^2} + \Gamma_{00}^\mu \right) \left(\frac{dx^0}{d\sigma} \right)^2. \quad (4.28)$$

Comprando com a equação de movimento de Newton $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\nabla\Phi$, , temos, por fim, usando a definição de que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$:

$$g_{00} = - \left(1 + \frac{2\Phi(x)}{c^2} \right). \quad (4.29)$$

Assim, podemos caracterizar um campo gravitacional fraco, onde $h_{00} \ll \eta_{00} \implies \left[\frac{\Phi}{c^2} \ll 1 \right]$.

4.3 Equação de Campo de Einstein

A relatividade geral diz que o espaço de Minkowski é alterado pela gravidade. Einstein usou este fato para generalizar a teoria da gravitação Newtoniana. O conteúdo central da relatividade geral é que a matéria produz uma curvatura no espaço tempo.

(Quantidade de curvatura local) = (Quantidade de densidade de matéria)

Esta relação, é chamada de Equação de campo de Einstein. Fazendo a relação com a teoria gravitacional Newtoniana, sua equação admite uma equação de um único potencial

$$\nabla^2 \Phi(x) = 4\pi G \rho(x)^4. \quad (4.30)$$

enquanto na relatividade geral são 10 componentes. Essas componentes são referentes ao tensor métrico $g(x)$ de Riemannian do espaço curvo, tratando a curvatura do espaço-tempo. Do lado esquerdo da igualdade, $\rho(x)$ é a fonte do campo gravitacional, para facilitar a análise, é

⁴onde G é a constante gravitacional Newtoniana($6,67 \cdot 10^{-8} \text{cm}^3 \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ no CGS)

um fluido ideal. Na relatividade restrita, usamos o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ para descrever a matéria no espaço-tempo:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p/c^2)u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}p. \quad (4.31)$$

Onde ρ densidade escalar, p é a pressão escalar e u^μ a quadrivelocidade obedece a condição $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = u_\mu u^\mu = 1$.

Por fim, podemos definir um tensor que descreva a relação da curvatura com a massa-energia, $G_{\mu\nu}$. Possuindo um carater geométrico dependendo de $g_{\mu\nu}$, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, e uma relação com o tensor momento-energia, $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, ou seja, a equação na relatividade que governa a gravitação é dada por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (4.32)$$

Resta agora determinar a constante κ . Com o intuito de determiná-la impomos usando a teoria geral da gravitação de Einstein reduzindo a teoria de Newton. Lembrando que:

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \quad (4.33)$$

e reescrevendo (4.23), contraindo os índices

$$R = -\kappa T \quad (4.34)$$

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\kappa T = \kappa T_{\mu\nu} \quad (4.35)$$

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (4.36)$$

Agora, podemos encontrar a componente R_{00} , onde $T = T^\mu_\mu = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$:

$$R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right) \quad (4.37)$$

$$\simeq \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}T \right) \quad (4.38)$$

$$= \frac{1}{2}\kappa T_{00} \quad (4.39)$$

$$= \frac{1}{2}\kappa c^2 \rho. \quad (4.40)$$

Onde ρ é a densidade de distribuição de matéria que produz o campo gravitacional. Podemos usar a expressão do tensor de Ricci para encontrar R_{00} negligenciando os termos que tem derivada temporal e não lineares:

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{00}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{0\rho}^\rho}{\partial x^0} + \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\rho - \Gamma_{0\rho}^\sigma \Gamma_{0\sigma}^\rho \quad (4.41)$$

$$\simeq \frac{\partial \Gamma_{00}^\rho}{\partial x^\rho} = \frac{\partial \Gamma_{00}^i}{\partial x^i}. \quad (4.42)$$

Com os resultados obtidos em (4.26), encontramos:

$$R_{00} \simeq \frac{\partial \Gamma_{00}^i}{\partial x^i} \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^i} = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00} \simeq \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi. \quad (4.43)$$

Onde ∇^2 é o operador laplaciano tri-dimensional. Reorganizando (4.40), (4.30) e (4.43) temos:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (4.44)$$

Com a determinação do κ , completamos a "derivação" da equação de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (4.45)$$

4.4 Solução de Schwarzschild

A equação de Einstein possui várias soluções exatas. Além das soluções exatas, existem as soluções inexatas para essas equações que descrevem sistemas físicos. Muitas das soluções exatas na relatividade geral são de difícil obtenção. E suas interpretações físicas são mais difíceis ainda.

Provavelmente, uma das soluções exatas mais simples é a solução de Schwarzschild. A métrica obtida descreve a solução no vácuo devido a uma distribuição esfericamente simétrica, campo gravitacional estático, espaço-tempo vazio (exceto em um único ponto), espaço-tempo assintoticamente plano. Com isso, o elemento de linha infinitesimal no sistema de coordenadas esféricas na qual a métrica depende de r e t :

$$ds^2 = A(r, t) dt^2 + B(r, t) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.46)$$

Observamos que existem dois termos desconhecidas, $A(r, t)$ e $B(r, t)$. Como o espaço-tempo é plano, exceto em um único ponto, devemos recuperar o espaço de Minkowski, logo quando $r \rightarrow \infty$, temos:

$$A(r, t) \rightarrow -c^2; B(r, t) \rightarrow 1 \quad (4.47)$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.48)$$

Sem perda de informação, vamos fazer uma pequena mudança de coordenada. Vamos chamar $A(r, t) = -e^{2\Phi}$ e $B(r, t) = e^{2\Lambda}$

$$ds^2 = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.49)$$

Vamos denotar o tensor métrico covariante como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\Phi} & & & 0 \\ & e^{2\Lambda} & & \\ & & r^2 & \\ 0 & & & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

e como tensor métrico contravariante

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\Phi} & & & 0 \\ & e^{-2\Lambda} & & \\ & & r^{-2} & \\ 0 & & & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Podemos agora calcular os símbolos de Christoffel usando (2.18)

$$\Gamma_{00}^0 = \dot{\Phi}; \Gamma_{01}^0 = \Phi'; \Gamma_{00}^1 = \Phi' e^{2(\Phi-\Lambda)}, \quad (4.52)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \dot{\Lambda}; \Gamma_{11}^0 = \dot{\Lambda} e^{2(\Phi-\Lambda)}; \Gamma_{11}^1 = \Lambda', \quad (4.53)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}; \Gamma_{22}^1 = -e^{-2\Lambda} r, \quad (4.54)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta; \Gamma_{33}^1 = -e^{-2\Lambda} r \sin^2 \theta, \quad (4.55)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; \Gamma_{23}^3 = \cot \theta. \quad (4.56)$$

Nas equações acima os pontos são a diferenciação em relação ao tempo t , e a linha a diferenciação em relação a r . Conhecendo os símbolos de Christoffel calculamos o tensor de Ricci

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial t} + \Gamma_{00}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^1) + \Gamma_{00}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) - \Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{01}^0,$$

$$R_{00} = \left[\Phi'' + \Phi' (\Phi' - \Lambda') + \frac{2\Phi'}{r} \right] e^{2(\Phi-\Lambda)} + \ddot{\Lambda} - \dot{\Lambda} \left(\dot{\Lambda} - \dot{\Phi} \right). \quad (4.57)$$

Usando o mesmo processo::

$$R_{11} = \left[\ddot{\Lambda} - \dot{\Lambda} \left(\dot{\Lambda} - \dot{\Phi} \right) \right] e^{-2(\Phi-\Lambda)} - \Phi'' - \Phi' (\Phi' - \Lambda') + \frac{2\Lambda'}{r} \quad (4.58)$$

$$R_{22} = [-1 - \Phi' r + \Lambda' r] e^{-2\Lambda} + 1, \quad (4.59)$$

$$R_{33} = \{[-1 - \Phi' r + \Lambda' r] e^{-2\Lambda} + 1\} \sin^2 \theta. \quad (4.60)$$

O escalar de Ricci é:

$$R = 2 \left\{ \left[-\Phi'' - \Phi' (\Phi' - \Lambda') - \frac{2\Phi'}{r} + \frac{2\Lambda'}{r} \right] e^{-2\Lambda} - \left[\ddot{\Lambda} - \dot{\Lambda} \left(\dot{\Lambda} - \dot{\Phi} \right) \right] e^{-2\Phi} + \frac{1}{r^2} \right\}. \quad (4.61)$$

Podemos encontrar a parte geometrica das equações de campo de Einstein para a simetria esfericas.

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = \left[\frac{2\Lambda'}{r} e^{-2\Lambda} - \frac{1}{r^2} (e^{-2\Lambda} - 1) \right] e^{-2\Phi} \quad (4.62)$$

$$R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R = \frac{2\Phi'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{e^{-2\Lambda}}{r^2} \quad (4.63)$$

$$R_{22} - \frac{1}{2} g_{22} R = \left\{ \Phi'' + \Phi' (\Phi' - \Lambda') + \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} + \left[\ddot{\Lambda} - \dot{\Lambda} \left(\dot{\Lambda} - \dot{\Phi} \right) \right] e^{-2\Phi} \right\} r^2 e^{-2\Lambda} \quad (4.64)$$

Como $R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta$, temos:

$$R_{33} - \frac{1}{2} g_{33} R = R_{22} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta g_{22} R \quad (4.65)$$

$$R_{33} - \frac{1}{2} g_{33} R = \sin^2 \theta \left(R_{22} - \frac{1}{2} g_{22} R \right), \quad (4.66)$$

A solução de Schwarzschild propõe uma solução no vacuo e para uma estrela estatica, então ,os termos com derivada em relação ao tempo são nulos e o tensor momento energia é 0. Assim, obtemos a seguintes equações independentes:

$$\frac{2\Lambda'}{r} e^{-2\Lambda} + \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\Lambda}) = 0 \quad (4.67)$$

$$\frac{2\Phi'}{r}e^{-2\Lambda} - \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\Lambda}) = 0. \quad (4.68)$$

Uma terceira equação independente da equação de Einstein surge para $\mu = 0$ e $\nu = 1$

Adicionando (4.67) e (4.68), encontramos

$$\Phi' + \Lambda' = 0. \quad (4.69)$$

Com isso podemos completar a métrica de Schwarzschild. Lembrando que g_{00} corresponde a $-e^{2\Phi}$ e usando a (4.29) logo:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & & & 0 \\ & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & & \\ & & r^2 & \\ 0 & & & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.70)$$

Notando que $\Phi = -\frac{2GM}{r}$. A solução de Schwarzschild é a única solução da TRG que foi inteiramente comprovada experimentalmente.

4.5 Equações de Tolman-Oppenheimer-Volkof para uma Estrela Anisotrópica

Para o caso de uma estrela anisotrópica, o tensor momento energia é dado por:

$$T_{\mu\nu} = \epsilon u_\mu u_\nu + P_r k_\mu k_\nu + P_t (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu - k_\mu k_\nu). \quad (4.71)$$

Onde u^μ é o fluido de 4 velocidades, ϵ é a densidade de energia do fluido, P_r e P_t pressão radial e tangencial respectivamente e k^μ é um vetor radial da unidade ($k^\mu k_\mu = 1$) com $u^\mu k_\mu = 0$. Fazendo $u_\mu = g_{\alpha\mu} u^\alpha$ e $k_\mu = g^{\mu\beta} k^\beta$, onde $u_0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{cdt}{d\tau}$ e lembrando que $c^2 (d\tau)^2 = -c^2 e^{2\Phi} (cdt)^2$

$$(u_0)^2 = \frac{-c^2}{\sqrt{e^{2\Phi}}}, \quad (4.72)$$

as demais componentes da quadrivelocidade são nulas, $u_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$, pois, está estática sendo assim no plano espaço-tempo só se locomove no tempo.

Assim podemos reescrever como (4.71)

$$T_{\mu\nu} = \epsilon g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} u^\alpha u^\beta + P_r g^{\mu\sigma} k^\sigma k_\nu + P_t (g_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} u^\alpha u^\beta - g^{\mu\sigma} k^\sigma k_\nu), \quad (4.73)$$

logo, encontramos as componentes do tensor momento-energia para o caso de uma estrela anisotrópica para

$$\mu = \nu = 0$$

$$T_{00} = \epsilon g^{0\alpha} g^{\beta 0} u^\alpha u^\beta + P_r g^{0\sigma} k^\sigma k_0 + P_t (g_{00} + g^{\alpha 0} g^{\beta 0} u^\alpha u^\beta - g^{0\sigma} k^\sigma k_0), \quad (4.74)$$

lembrando k^σ só possui componente em r , temos:

$$T_{00} = c^2 \epsilon g_{00} = c^2 \epsilon e^{-2\Phi}, \quad (4.75)$$

para $\mu = \nu = 1$

$$T_{11} = \epsilon g^{1\alpha} g^{\beta 1} u^\alpha u^\beta + P_r g^{1\sigma} k^\sigma k_1 + P_t (g_{11} + g^{1\alpha} g^{\beta 1} u^\alpha u^\beta - g^{1\sigma} k^\sigma k_1), \quad (4.76)$$

$$T_{11} = P_r g_{11} = P_r e^{2\Lambda}, \quad (4.77)$$

para $\mu = \nu = 2$

$$T_{22} = \epsilon g^{2\alpha} g^{\beta 2} u^\alpha u^\beta + P_r g^{2\sigma} k^\sigma k_2 + P_t (g_{22} + g^{2\alpha} g^{\beta 2} u^\alpha u^\beta - g^{2\sigma} k^\sigma k_2), \quad (4.78)$$

$$T_{22} = P_r g_{22} = P_t r^2, \quad (4.79)$$

e

$$T_{33} = T_{22} \sin^2 = P_t r^2 \sin^2, \quad (4.80)$$

Com o tensor energia-momento definido, estamos aptos a calcular as equações de campo para descrever a matéria no interior de uma estrela anisotrópica, as equações encontradas na solução de Schwarzschild podem ser escritas como

$$\frac{2\Lambda'}{r} e^{-2\Lambda} + \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\Lambda}) = \kappa \epsilon \quad (4.81)$$

$$\frac{2\Phi'}{r} e^{-2\Lambda} - \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\Lambda}) = \kappa P_r \quad (4.82)$$

$$\left\{ \Phi'' + \Phi' (\Phi' - \Lambda') + \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} \right\} e^{-2\Lambda} = \kappa P_t, \quad (4.83)$$

a partir daqui escolhemos $G = c = 1$, onde $\kappa = 8\pi$, definindo-os como nossa unidade.

Podemos definir $m(r)$ a massa gravitacional contida em uma esfera de raio, pela (4.81)

$$[r(1 - e^{-2\Lambda})]' = \kappa r^2 \epsilon, \quad (4.84)$$

usando (4.51)

$$(1 - e^{-2\Lambda}) = \frac{2GM}{r}, \quad (4.85)$$

podemos definir

$$M(r) = \frac{\kappa}{2} \int_0^R r^2 \epsilon(r) dr. \quad (4.86)$$

As equações (4.81), (4.82) e (4.83) formam um sistema o qual podemos manipular algebricamente. De (4.81), temos:

$$2\Lambda' r = (\kappa r^2 \epsilon - 1) e^{2\Lambda} + 1, \quad (4.87)$$

de (4.82) temos:

$$2\Phi' r = (\kappa r^2 P_r + 1) e^{2\Lambda} - 1, \quad (4.88)$$

derivando a relação acima e multiplicando por r :

$$2r^2 \Phi'' + 2r \Phi' = (2\kappa r^2 P_r + 2\kappa r^3 P_r') e^{2\Lambda} + 2\Lambda' r (\kappa r^2 P_r + 1) e^{2\Lambda} \quad (4.89)$$

$$2r^2 \Phi'' = (2\kappa r^2 P_r + 2\kappa r^3 P_r') e^{2\Lambda} + (\kappa r^2 \epsilon - 1) (\kappa r^2 P_r + 1) e^{4\Lambda} + 1, \quad (4.90)$$

elevando (4.88) ao quadrado, temos:

$$2\Phi'^2 r^2 = \frac{1}{2} [(\kappa r^2 P_r + 1) e^{4\Lambda} - 2(\kappa r^2 P_r + 1) e^{4\Lambda} + 1], \quad (4.91)$$

Podemos reescrever (4.83) como:

$$P_r' = \frac{2(P_t - P_r)}{r} - (\epsilon + P_t) \Phi', \quad (4.92)$$

ou

$$P_r' = \frac{2\sigma}{r} - \frac{(\epsilon + P_t)(4\pi r^3 P_r + m(r))}{r(r - 2m(r))}, \quad (4.93)$$

onde $\sigma = P_t - P_r$. Sendo a equação de equilíbrio hidroestático de uma estrela anisotrópica. Esse termo desempenha um papel fundamental na estrutura do objeto, pois pode favorecer o equilíbrio da estrutura ou a sua destruição, dependendo se ele é positivo ou negativo:

- $\sigma > 0$ age como um gradiente de uma força repulsiva.
- $\sigma < 0$ age como um gradiente de uma força atrativa.
- $\sigma = 0$ caso isotrópico ??).

Capítulo 5

Conclusão

Nosso objetivo com esse trabalho foi fazer um estudo sobre a estrutura de uma estrela anisotrópica decorrente seja de um campo elétrico ou magnético que surge no interior da estrela. Para isso fizemos um uso do calculo tensorial e da relatividade geral. Pelo principio de equivalencia, verificou-se que a gravidade e energia produzem uma curvatura no espaço-tempo. Logo, corpos da magnitude de uma estrela provocam uma curvatura não desprezível no espaço-tempo, o estudo deste fenomeno é chamado de relatividade geral

Dessa relação massa-energia podemos obter um tensor chamado tensor momento-energia o qual utilizamos para encontrar as equações de Einstein. Para resolver a equação de campo de Einstein usamos a solução de Schwarzschild e depois encontramos as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para uma estrela anisotrópica.

A partir da TOV definimos $\sigma = P_t - P_r$ como uma espécie de força gerada pela anisotropia. Essa força pode ser direcionada para fora ou para dentro, dependendo do sinal de σ . Portanto, podemos ter uma configuração maior se σ for negativo e menos maciço se σ for positivo. A força e a distribuição da força dependem da magnitude de σ e do seu perfil. Com base neste mecanismo, podemos suportar maiores massas e raios de estrelas de nêutrons ajustando σ . Teremos uma configuração mais massiva se for negativo σ e menos massiva se σ for positivo. Com essas equações, (4.86) (4.92) (4.93) , e uma equação de estado que relaciona ϵ com P_t e P_r podemos obter mais detalhes sobre um estrela anisotópica .

Referências Bibliográficas

- [1] N..P. Rodrigo. Estrelas Politrópicas Carregadas e Anisotrópicas. Dissertação- Pós Graduação em Física, Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro , 2005
- [2] A. Sulaksono. Anisotropic pressure and hyperons in neutron stars. International Journal of Modern Physics, 22 pg, 2015
- [3] H. M. Mohammad. P. Neeraj . Relativistic anisotropic stellar models with Tolman VII spacetime. Astrophysics and Space Science, 10p, julho 2015
- [4] Glendenning: Compact Stars – Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity, Springer – Verlag, New York, 2
- [5] P. Haensel, A. Y. Potekhin, D. G. Yakovlev: Neutron Stars, Equation of State and Structure– Springer, New York, 2006.
- [6] C. Moshe. Classical Field: General Relativity and Gauge Theory – World Scientific
- [7] M.. Dan. Astrophysics in a Nutshell. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2007
- [8] H.B Hartle. Gravity: An Introduction to Einstein’s General Relativity. – Addison Wesley, Santa Barbara, 2003
- [9] P. C. Tai. Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction – Oxford University Press, New York, 2005
- [10] R. S. Murray. Análise vetorial – McGraw-Hill, New York, 1959