



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

LEONARDO ARAUJO MARTINS

**ANÁLISE NUMÉRICA NÃO LINEAR DE LAJES LISAS SUBMETIDAS
À PUNÇÃO**

SÃO LUÍS – MA

2019

LEONARDO ARAUJO MARTINS

**ANÁLISE NUMÉRICA NÃO LINEAR DE LAJES LISAS SUBMETIDAS À
PUNÇÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal do Maranhão, como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Msc. Mikhail Luczynski

Co-orientador: Msc. Luciano Carneiro Reis

SÃO LUÍS – MA

2019

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Martins, Leonardo Araujo.

Análise numérica não linear de lajes lisas submetidas à punção / Leonardo Araujo Martins. - 2019.

95 f.

Coorientador(a): Luciano Carneiro Reis.

Orientador(a): Mikhail Luczynski.

Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2019.

1. Abaqus. 2. Análise Numérica. 3. Lajes Lisas. 4. Punção. I. Luczynski, Mikhail. II. Reis, Luciano Carneiro. III. Título.

À minha querida vizinha Ana Araujo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ter me iluminado e guiado até este momento, me concedendo saúde e inteligência suficiente para conseguir chegar até essa importante etapa da minha vida.

Ao meu professor e orientador Mikhail Luczynski que me repassou um pouco do seu conhecimento na área de estruturas, assim como pôde auxiliar nas decisões que foram tomadas durante a produção desta pesquisa.

Ao meu co-orientador e amigo Luciano Carneiro Reis, que mesmo na correria do seu doutoramento achou um tempinho para me orientar e auxiliar na modelagem e nas interpretações dos resultados desta pesquisa, contribuindo positivamente para a conclusão do mesmo e também para o meu crescimento intelectual.

A todos os professores da coordenação de engenharia civil, que puderam me passar um pouco do seu conhecimento durante as aulas na UFMA e a todos os amigos adquiridos durante essa jornada.

Aos meus chefes Luís Gustavo e Leonardo Guerra, pela oportunidade e por todo conhecimento e ensinamentos que foram repassados a mim, incentivando positivamente na minha formação pessoa e profissional.

Aos meus pais Larissa e Rogério e principalmente a minha mãe, que foi a maior responsável pela minha entrada na universidade, agradeço principalmente por todo o esforço que foi feito durante o começo, meio e fim desta jornada.

Ao meu irmão Marco Antônio pela companhia nos mais importantes momentos da minha vida.

Aos meus avós, Alberto e Liana, a minha bisavó Ana Araujo, que no auge dos seus 90 e poucos anos ainda me passa bastantes ensinamentos e aos meus tios Ana Cristina e Alberto Júnior.

Devo um agradecimento especial a minha madrinha Socorro Martins, pois devido a todo o seu apoio e o seu investimento eu fui capaz de estudar um pouco mais sobre a área que eu gosto, podendo assim me inserir no mercado profissional com um título de especialista, e ao meu padrinho Jorge que também sempre incentivou os meus estudos.

A minha namorada Ianna Karoline, pela paciência, dedicação, motivação e amor que me deu durante esses 5 anos, estando sempre do meu lado e sendo uma das responsáveis pelo meu crescimento como pessoa, amigo, namorado e profissional. Aos meus melhores amigos Caio, Célio, Matheus, Ana Beatriz, Claudia e Celso, pela convivência e todos os momentos felizes que tivemos.

A família da minha namorada, Aldeone, Ivonete, Jakeline e Kaylane que sempre me receberam muito bem em sua casa e foram a minha segunda família durante a minha estada em Balsas, permanecendo até hoje.

“Treine enquanto eles dormem, estude enquanto eles se divertem, persista enquanto eles descansam, e então, viva o que eles sonham”.

(Provérbio Japonês)

RESUMO

Martins, Leonardo Araujo. **Análise numérica não linear de lajes lisas submetida à punção**. 2019, 94 f. Trabalho de Conclusão de Curso, Bacharelado em Engenharia Civil – Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2019.

Ainda que a adoção da metodologia construtiva que utiliza lajes lisas possua várias vantagens, deve-se ter um cuidado especial na adoção deste método. Tal cuidado se dá pelo fato das lajes lisas possuírem a capacidade de ter uma ruptura brusca devido ao efeito de cisalhamento, a essa ruptura dá-se o nome de punção. Diversos estudos buscam avaliar o comportamento da ligação laje lisa – pilar através de ensaios experimentais, onde se utilizam diversas variáveis como modificação do índice de retangularidades dos pilares, taxa geométrica de armaduras, resistência do concreto, além de outros parâmetros. Entretanto, esta pesquisa busca analisar o comportamento de lajes lisas quando há mudança no índice de retangularidade dos pilares. Tal análise será realizada através da modelagem computacional, utilizando o software Abaqus/CAE como ferramenta, que trabalha com o método dos elementos finitos. Para tanto, precisa-se, antes, aferir a metodologia a ser utilizada durante a modelagem, para este fim foi modelado uma laje com características semelhantes as adotadas para esta pesquisa. De igual forma, foi necessário estudar a metodologia necessária para a modelagem através de outros trabalhos utilizados no escopo desta pesquisa, essa metodologia aborda a necessidade da definição de parâmetros de materiais e dos elementos. Foram geradas três lajes autorais com dimensões de 1800 x 1800 x 125 mm, onde variou-se o índice de retangularidade dos pilares em 1,2 e 5. Como resultado foram gerados gráficos com a relação entre carga aplicada e deslocamento obtido, os dados obtidos foram comparados com os valores normativos e com os resultados experimentais de outros autores. Sendo que os resultados conduzem a validade da metodologia adotada.

Palavras chave: Lajes Lisas. Punção. Análise Numérica. Abaqus.

ABSTRACT

MARTINS, Leonardo Araujo. **Non-linear numerical analysis of columns-slab connectation submitted in punching**. 2019, 94 f. Course Completion Work, Bachelor of Civil Engineering - Federal University of Maranhão, São Luís, 2019.

Although the adoption of the constructive methodology that uses plain slabs has several advantages, special care must be taken in the adoption of this method. Such care is given by the fact that the smooth slabs have the capacity to have a sudden rupture due to the shear effect, to that rupture is called puncture. Several studies aim to evaluate the behavior of the slab - pillar slab connection through experimental tests, where several variables are used, such as modifying the index of pillar retangularities, geometric rate of reinforcement, concrete resistance, as well as other parameters. However, this research seeks to analyze the behavior of smooth slabs when there is a change in the index of rectangularity of the pillars. This analysis will be carried out through computational modeling, using the software Abaqus / CAE as a tool, which works with the finite element method. For this, it is necessary, before, to evaluate the methodology to be used during the modeling, for this purpose was modeled a slab with characteristics similar to those adopted for this research. Likewise, it was necessary to study the methodology required for modeling through other works used in the scope of this research, this methodology addresses the need to define parameters of materials and elements. Three authors' slabs with dimensions of 1800 x 1800 x 125 mm were generated, where the rectangular index of the pillars was varied in 1,2 and 5. As a result, graphs were generated with the relation between applied load and displacement obtained, the obtained data were compared with the normative values and with the experimental results of other authors. Since the results lead to the validity of the adopted methodology.

Key words: Slabs. Puncture. Numerical analysis. Abaqus.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Sistema convencional com lajes, vigas e pilares.	14
Figura 1.2. Sistema construtivo com lajes lisas e pilares.	14
Figura 1.3. Ruptura da laje por punção	15
Figura 2.1. Características geométricas das lajes ensaiadas por Hawkins et al. (1971).	20
Figura 2.2 – Lajes ensaiadas por Silva (2003).	22
Figura 2.3. Lajes ensaiadas por Mouro (2006).....	24
Figura 2.4. Gráfico da carga de ruptura em relação aos lados do pilar.....	25
Figura 2.5. Lajes ensaiadas por Damasceno (2007).....	26
Figura 2.6. Lajes ensaiadas por Moraes Neto (2007).	28
Figura 2.7. Resultado de Laje ensaiada por Alves (2016).....	31
Figura 2.8. Perímetros críticos em pilares externos.	32
Figura 3.1. Estrutura hipotética adotado para esta pesquisa.	37
Figura 3.2. Diagrama de rotina de modelagem.	39
Figura 3.3. Geometria da Laje L1A.	41
Figura 3.4. Detalha das armações da Laje L1A.	42
Figura 3.5. Sistema de ensaio utilizado na laje L1A.....	42
Figura 3.6. Posicionamento da chapa metálica na laje L1A.....	43
Figura 3.7. Laje L1A com Vigas de reação.....	43
Figura 3.8. Chapa metálica da laje L1A.	44
Figura 3.9. Restrições impostas na face superior das vigas de reação.	44
Figura 3.10. Carga concentrada aplicada no centro da chapa metálica.....	45
Figura 3.11. Armação da laje L1A modelada no Abaqus.	46
Figura 3.12. Posicionamento da armação na laje.	46
Figura 3.13. Geometria das lajes autorais.....	47

Figura 3.14. Armação das lajes autorais.	48
Figura 3.15. Vigas de reação nas lajes L1, L2 e L3.	49
Figura 3.16. Vigas de reação nas lajes L1, L2 e L3.	49
Figura 3.17. Chapa metálica nas lajes L1, L2 e L3.	50
Figura 3.18. Armação da laje L3.	51
Figura 3.19. Comportamento do concreto a compressão.	54
Figura 3.20. Diagrama tensão-deformação do concreto submetido à tração.	55
Figura 3.21. Diagrama tensão-deformação para.....	56
Figura 3.22. Diagrama tensão-deformação para concreto tracionado.	56
Figura 3.23. Malha da laje L1.....	57
Figura 4.1. Corte na laje L1A, demonstrando os deslocamentos no eixo Z.	61
Figura 4.2. Laje L1A demonstrando os deslocamentos no eixo Z.....	61
Figura 4.3. Gráfico Deslocamentos x Carga na laje L1A de Damasceno (2007).	62
Figura 4.4. Deslocamento vertical na laje L1 em corte.....	64
Figura 4.5. Deslocamento vertical na laje L1 em planta.	64
Figura 4.6. Gráfico Deslocamento x Carga na laje L1.....	65
Figura 4.7. Corte da laje L2 demonstrando os deslocamentos no eixo Z.....	65
Figura 4.8. Deslocamentos no eixo Z na laje L2.	66
Figura 4.9. Gráfico Deslocamento x Carga das lajes L2.	66
Figura 4.10. Deslocamentos verticais na Laje L3, em corte.....	67
Figura 4.11. Deslocamentos verticais na Laje L3, em planta.	67
Figura 4.12. Gráfico Deslocamento x Carga Laje L3.....	68

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1. Características e resultados das lajes ensaiadas por Hawkins et al. (1971).	21
Tabela 2.2. Características e resultados das lajes ensaiadas por Silva (2003).....	23
Tabela 2.3. Características e resultados das lajes ensaiadas por Mouro (2006).	25
Tabela 2.4. Características e resultados das lajes ensaiadas por Damasceno (2007).	27
Tabela 2.5. Características e cargas de ruptura das lajes ensaiadas.	29
Tabela 2.6. Parâmetros α e μ	33
Tabela 3.1. Unidades a serem utilizadas no Abaqus	40
Tabela 3.2. Parâmetros do método <i>Static General</i>	59
Tabela 3.3. Características do concreto para a laje L1A de Damasceno (2007).....	60
Tabela 3.4. Características do concreto para as lajes L1, L2 e L3 autorais.	60
Tabela 3.5. Parâmetros usados no CDP para as duas séries.....	60
Tabela 3.6. Características do aço.....	60
Tabela 4.1. Deslocamentos máximos para a laje L1A de Damasceno (2007).	62
Tabela 4.2. Comparação entre os deslocamentos máximos das lajes L1, L2 e L3...69	
Tabela 4.3. Comparação cargas de ruptura da laje L1A.	70
Tabela 4.4. Comparação cargas de ruptura das lajes L1, L2 e L3.	70
Tabela 4.5. Comparação com a carga de ruptura de outras pesquisas.	71

SUMÁRIO

1. Introdução	14
1.1. Justificativa	17
1.2. Objetivos	18
1.2.1. Objetivo geral	18
1.2.2. Objetivos específicos	18
1.3. Organização do trabalho.....	19
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
2.1. Revisão Sistemática	20
2.1.1. Hawkins et al. (1971).....	20
2.1.2. Silva (2003).....	21
2.1.3. Mouro (2006).....	24
2.1.4. Damasceno (2007).....	26
2.1.5. Moraes Neto (2007)	28
2.1.6. Alves (2016).....	30
2.2. Recomendações Normativas	31
2.2.1. Resistência à punção	31
2.2.1.1. NBR 6118 (ABNT, 2014)	31
2.2.2. Cargas de fissuração e estimativa de momento fletor.....	33
2.2.3. Deslocamentos.....	34
3. METODOLOGIA.....	37
3.1. Considerações Iniciais	37
3.2. Abaqus/CAE	38
3.3. Definição dos modelos.....	40
3.3.1. Geometria e condições de contorno.....	40

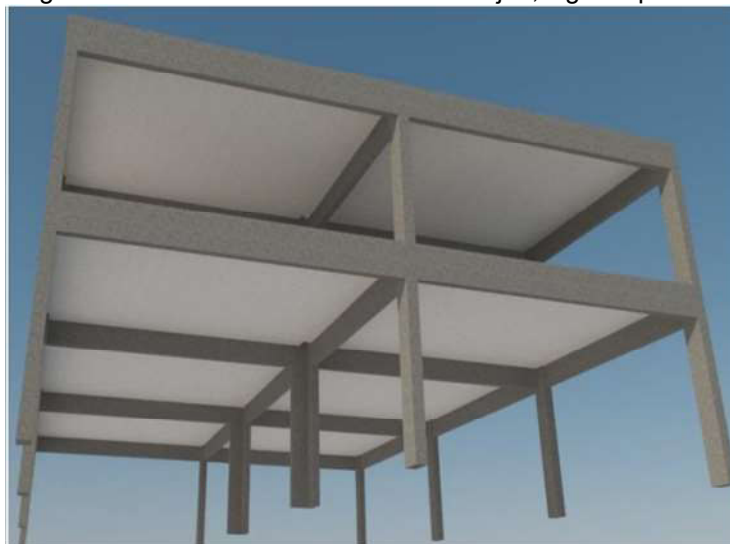
3.3.1.1. Damasceno (2007)	40
3.3.1.2. Lajes autorais	46
3.3.2. Modelos constitutivos para os materiais.....	51
3.3.2.1. Propriedades elásticas	51
3.3.2.2. Propriedades elasto-plásticas do aço	52
3.3.2.3. Modelo plástico do Concreto	52
3.3.2.3.1. Comportamento do concreto a compressão segundo a NBR 6118:2014.....	53
3.3.2.3.1. Comportamento do concreto a tração	54
3.4. Modelo de dano	55
3.5. Malha	57
3.6. Modelo de interações de contato.....	58
3.7. Análise não linear física e geométrica	58
3.8. Propriedade dos materiais	59
4. Análise dos resultados	61
4.1. Análise dos deslocamentos verticais	61
4.1.1. Damasceno (2007).....	61
4.1.2. Lajes Autorais	63
4.1.2.1. Laje L1	63
4.1.2.2. Laje L2.....	65
4.1.2.3. Laje L3.....	67
4.1.2.4. Comparação entre os deslocamentos máximos	68
4.2. Cargas de Ruptura	69
4.2.1. Damasceno (2007).....	69
4.2.2. Lajes Autorais	70
4.2.3. Comparação com outros autores	71

5. Conclusão	72
5.1. Deslocamentos Verticais	72
5.2. Carga de Ruptura	72
5.3. Modelo computacional.....	73
5.4. Sugestões para trabalhos futuros.....	73
Referências Bibliográficas.....	74
APÊNDICES.....	77
APÊNDICE A – DESLOCAMENTOS VERTICAIS COMPUTACIONAIS NO CENTRO DO VÃO DA LAJE L1A DAMASCENO (2007).	77
APÊNDICE B – DESLOCAMENTOS VERTICAIS EXPERIMENTAIS NO CENTRO DO VÃO DA LAJE L1A DAMASCENO (2007).....	78
APÊNDICE C – DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO CENTRO DO VÃO DA LAJE L1.....	79
APÊNDICE C - DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO CENTRO DO VÃO DA LAJE L2.....	80
APÊNDICE D - DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO CENTRO DO VÃO DA LAJE L3.....	81
APÊNDICE E – DADOS ABAQUS PARA O CDP DA LAJE L1A DE DAMASCENO (2007).	82
APÊNDICE F – DADOS ABAQUS PARA O CDP DAS LAJES L1, L2 E L3.	83
APÊNDICE G – CÁLCULO PARA CARGAS DE FISSURAÇÃO E PREVISÃO DE FLECHAS	84

1. Introdução

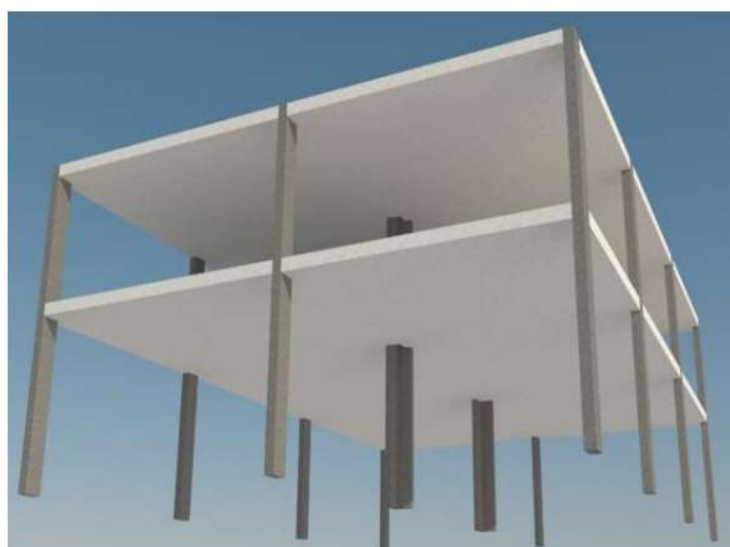
Usualmente grande parte dos edifícios brasileiros feitos em concreto armado seguem o modelo de estrutura convencional, onde a laje apoia em vigas e as vigas apoiam em pilares e este, consecutivamente, apoia em uma fundação. Entretanto, muito se tem falado e pesquisado sobre o uso de lajes sem vigas, um modelo que deixa de lado a estrutura convencional (as lajes apoiadas em vigas) e começa a trabalhar apenas com as lajes apoiadas diretamente sobre os pilares. As figuras 1.1 e 1.2, são capazes de ilustrar os dois tipos de sistema construtivos.

Figura 1.1. Sistema convencional com lajes, vigas e pilares.



Fonte: Pinto (2015).

Figura 1.2. Sistema construtivo com lajes lisas e pilares.



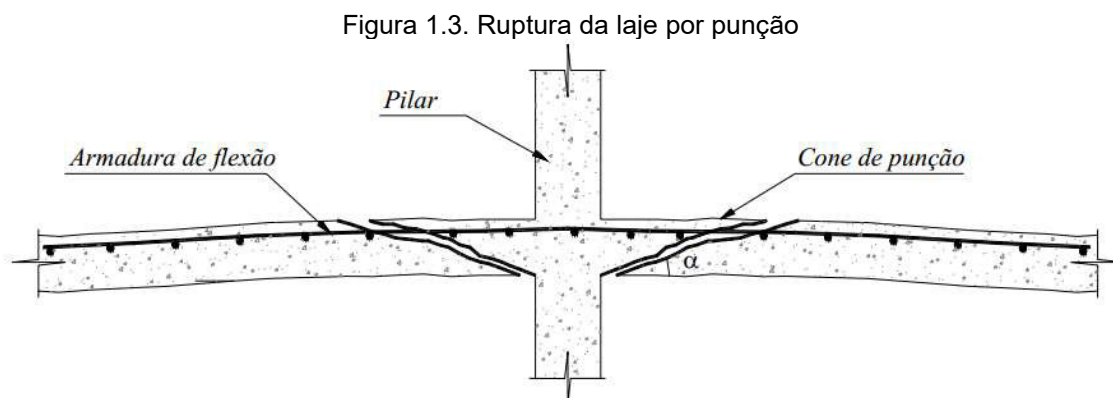
Fonte: Pinto (2015).

Segundo a Norma Brasileira a NBR 6118 (ABNT, 2014), as lajes sem vigas são divididas em duas, as lajes lisas e as lajes cogumelos, sendo que a primeira é quando a laje é aplicada diretamente sobre o pilar e a segunda quando existe a presença de um capitel. Tais grupos ainda podem ser divididos em dois tipos: laje maciça e laje nervurada. Esta pesquisa desenvolve a temática das lajes lisas maciças.

Segundo Ferreira (2010), o sistema de lajes sem vigas torna-se vantajoso devido a simplificação da fôrma, como não há vigas não será necessário um trabalho mais elaborado de mão de obra, o que leva a uma situação duplamente econômica. De igual forma, as lajes lisas facilitam a aplicação das instalações prediais, assim como flexibiliza o layout interno dos ambientes e reduz a altura total da edificação.

Entretanto, esta metodologia também possui desvantagens, o que na maioria das vezes limitam o seu uso. Segundo Carvalho e Pinheiro (2009), este sistema acaba levando a deslocamentos horizontais, a instabilidade lateral devido às ações laterais e também ao fenômeno mais importante, a punção. Tais problemas são causados devido à ausência das vigas.

Como citado acima o fenômeno de punção é o mais importante fator a ser ponderado no dimensionamento de lajes lisas. Segundo Carvalho e Pinheiro (2009), este fenômeno ocorre quando uma força agindo em uma pequena área de uma placa provoca a sua perfuração. Tais forças são ocasionadas pelo esforço cisalhante que existe na ligação laje-pilar, oriundo da reação da mesma. A forma da ruptura é adjacente a face do pilar e possui um formato de tronco de cone, a figura 1.3 demonstra a ruptura por punção.



Fonte: Damasceno (2007).

Desta feita os fenômenos de punção podem ser capazes de levar a laje a ruptura e conduzir assim toda a estrutura a ruína. Existem vários casos de edifícios

que tiveram suas lajes rompidas por punção. Entretanto destaca-se o caso do edifício Prest-o-Lite localizado em Indianapolis, que segundo Ferreira (2006) foi o primeiro caso de ruptura por punção que se tem registrado, tendo sido datado em 1911. Um outro caso é o desabamento de parte do Shopping Rio Poty, na cidade de Teresina – PI, que utilizava o sistema de laje lisa protendida, Sessa (2017) descreve que as aberturas de furos adjacentes aos lados dos pilares podem ter sido a causa do desabamento de sete dos dezoito setores da estrutura e que tais aberturas possam ter reduzido a resistência a punção desta laje, levando assim a ruptura.

Sendo assim, fundamenta-se o estudo do fenômeno de punção, para que se consiga manter um grau de segurança na utilização deste tipo de lajes. Já que como demonstrado anteriormente gera ao projeto economia, flexibilidade e praticidade.

Dentre os fatores que levam a ruptura a punção, Carvalho e Pinheiro (2009) destacam a altura útil, relação entre lado do pilar e a altura útil, aberturas nas lajes próximas ao pilar, excentricidade no carregamento, índice de retangularidade do pilar, amadura de flexão e armadura transversal de cisalhamento.

Partindo deste princípio este trabalho aborda o tema de lajes lisas com a seguinte problemática: De que forma o índice de retangularidade dos pilares atuam no comportamento de lajes lisas puncionadas?

1.1. Justificativa

Mesmo com todas as vantagens das lajes lisas ainda existe um certo receio por parte das equipes técnicas em adotar este modelo. Este fato é explicado pela dificuldade de analisar a capacidade de carga destas lajes. Sendo assim, segundo Carvalho e Pinheiro (2009), este problema levou a várias pesquisas, para que pudesse se desenvolver uma metodologia de cálculo mais simplificada. O pioneiro desta linha de pesquisa foi Talbot (1913), que segundo Carvalho e Pinheiro (2009), ensaiou cerca de 83 sapatas, sendo que 20 romperam por punção.

Com o início desta linha de pesquisa, começaram a surgir diversos trabalhos que analisam o comportamento da ruptura das lajes quando submetidas a punção e fazendo a variação dos parâmetros que influem na sua resistência. Porém, grande parte destes trabalhos versam sobre a análise experimental ou analítica e utilizam a análise numérica apenas para quesito de comparações com os dados experimentais.

Sendo assim, optou-se por fazer o estudo do comportamento das lajes lisas utilizando a análise numérica não linear por meio dos elementos finitos. De igual forma escolheu-se como parâmetro o índice de retangularidade dos pilares.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo geral

Avaliar o comportamento de lajes lisas puncionadas quanto a variação do índice de retangularidade do pilar através de uma análise numérica não linear.

1.2.2. Objetivos específicos

- Apresentar metodologia de modelagem computacional de lajes lisas;
- Avaliar o grau de proximidade dos resultados do método apresentado quanto aos trabalhos já realizados por outros autores;
- Avaliar o comportamento de uma série de lajes sem esta armadura de punção, quando há mudança de índice de retangularidade do pilar em todos os casos.

1.3. Organização do trabalho

Este trabalho de conclusão de curso foi composto de cinco capítulos, apresentados abaixo.

No capítulo 2, aborda-se o referencial teórico, composto pela revisão sistemática, que aborda os principais autores referentes a variável de estudo adota nesta pesquisa. Em seguida, trabalha-se com os valores normativos sobre punção e estimativa de ruptura a flexão, utilizando como base a NBR 6118 (2014, ABNT).

No capítulo 3, desenvolve-se toda a metodologia utilizada neste trabalho, tal como a modelagem e as escolhas das características das lajes, assim como os modelos computacionais adotados para a simulação.

No Capítulo 4, são apresentados os resultados obtidos através das modelagens computacionais, também são comparados os valores experimentais e numéricos da laje ensaiada por Damasceno (2007) e realiza-se uma análise dos resultados oriundos da modelagem das lajes autorais L1, L2 e L3.

No Capítulo 5, são apresentadas as conclusões dessa pesquisa, assim como sugestões para trabalhos futuros.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

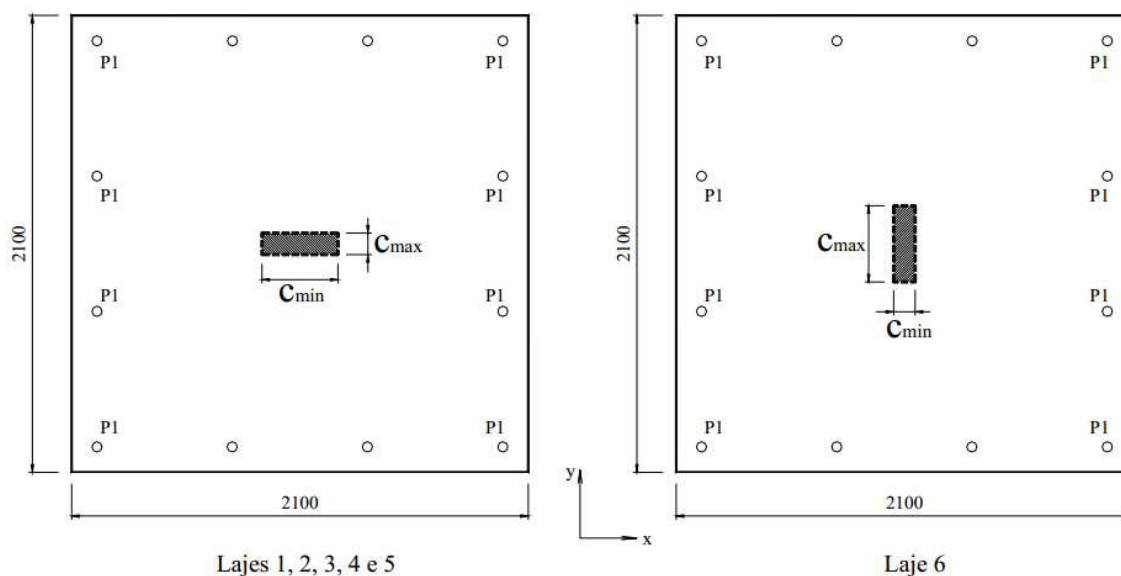
2.1. Revisão Sistemática

A seguir serão apresentados alguns trabalhos que abordam o estudo de punção em lajes lisas de concreto armado, dando foco aos trabalhos onde há como objetivo a variação do índice de retangularidade dos pilares. Sendo estes de suma importância para a fundamentação teórica deste trabalho.

2.1.1. Hawkins et al. (1971)

O autor foi um dos pioneiros no estudo comportamental de lajes lisas submetidas a punção. Hawkins et al. (1971) realizou o estudo do comportamento de 9 lajes lisas com dimensões de 2100x2100x152 mm³ com resistência a compressão em torno de 30 MPa. O autor utilizou como variáveis principais a variação do índice de retangularidade, a taxa de armadura de flexão e a posição de $C_{\text{máx}}$ em relação ao carregamento. A figura 2.1 mostra as características das lajes.

Figura 2.1. Características geométricas das lajes ensaiadas por Hawkins et al. (1971).



Fonte: Hawkins et al. (1971)

A tabela 2.1 mostra as características geométricas e dos materiais das lajes ensaiadas experimentalmente, assim como a carga e a forma de ruptura. Cabe destacar que a maioria das lajes romperam por punção.

Tabela 2.1. Características e resultados das lajes ensaiadas por Hawkins et al. (1971).

Laje	Pilar		$C_{m\acute{a}x}/C_{m\acute{a}x}$ <i>in</i>	d (mm)	ρ (%)	f_c (MPa)	V_{exp} (kN)	Modo de Ruptura
	C_{min}	$C_{m\acute{a}x}$						
1	305	305	1,00			31	391	Flexão
2	406	203	2,00			27	358	Punção
3	457	152	3,00		1,12	31	340	Punção
4	495	114	4,33	117		32	337	Punção
5	457	152	3,00		-	28	362	Punção
6	152	457	3,00		1,12	25	342	Flexão
7	457	152	3,00		0,87	27	326	Punção
8	495	114	4,33		0,81	27	321	Punção
9	305	152	2,00	121	0,77	30	322	Punção

Fonte: Hawkins et al. (1971)

Hawkins et al. (1971) concluiu que nas lajes que possuíam carregamento unidirecional tiveram as suas resistências a punção reduzidas a medida que o índice de retangularidade era aumentado. Ao fazer uma comparação, entre a laje 1 e 4, por exemplo, pode-se notar uma redução de 16% na resistência das mesmas. O que leva a conclusão de que as dimensões dos pilares são um fator importante para a resistência a punção de lajes lisas.

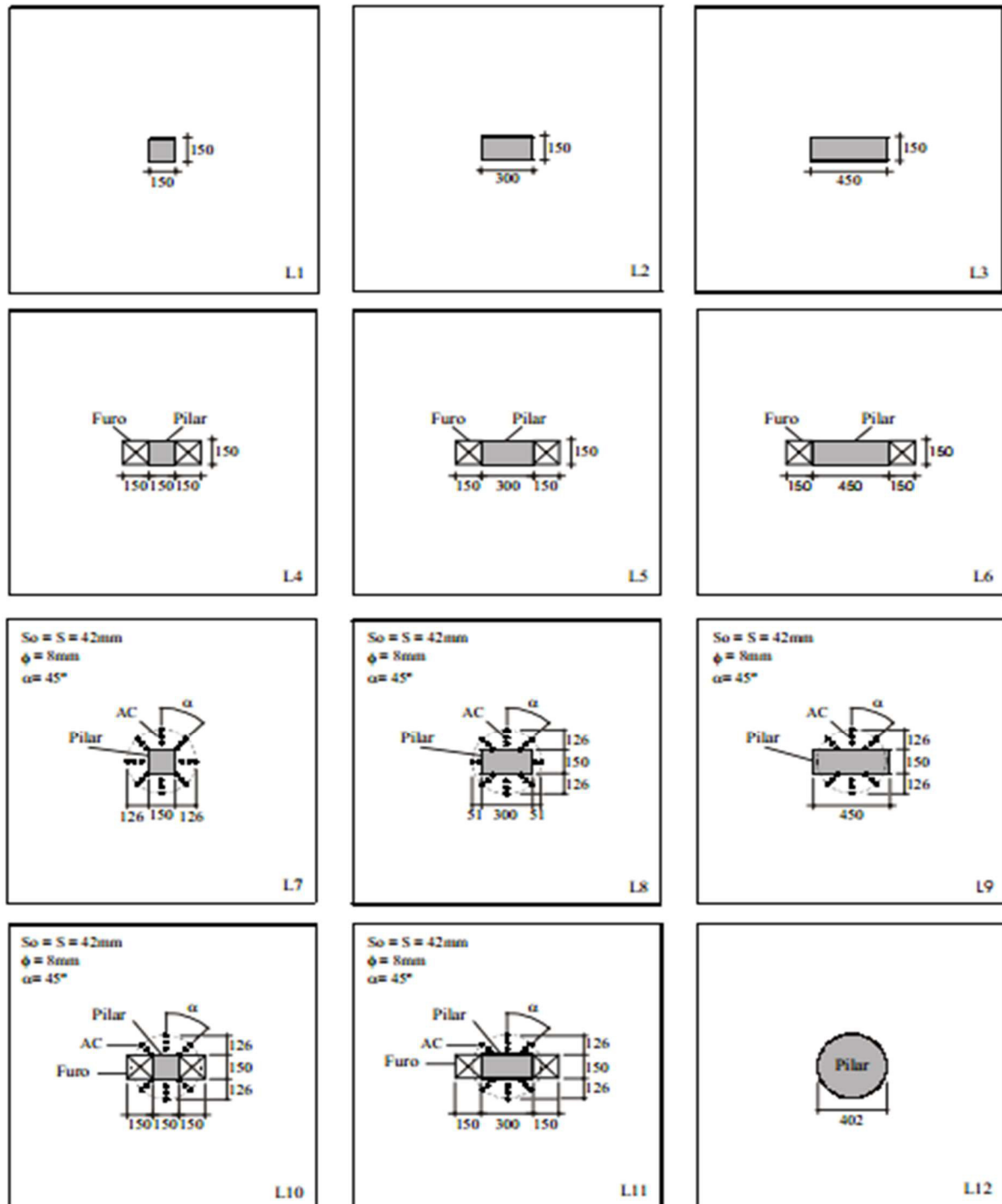
2.1.2. Silva (2003)

Nesta pesquisa o autor busca avaliar a influência da variação do índice de retangularidade dos pilares, a presença de furos adjacentes a menor face do pilar e a possível contribuição da armadura de cisalhamento para a resistência a punção dessas lajes. Sendo assim o autor estudou 12 lajes com dimensões de 1800x1800x130 mm³ e d=90mm, utilizando resistência a compressão de 40 MPa.

As 12 lajes foram divididas em 4 grupos, sendo o grupo 1 composto por 4 lajes onde buscou-se variar apenas o índice de retangularidade dos pilares, mantendo o

menor lado constante em 150mm. O grupo 2 composto por 3 lajes tinha como variável a presença de dois furos de 150x150 mm² adjacentes ao menor lado do pilar. O Grupo 3 possuía 3 lajes com armadura de punção e por fim o grupo 4 usava tanto armadura de punção quanto furos, além da variação das seções dos pilares. A figura 2.2 demonstra as lajes ensaiadas.

Figura 2.2 – Lajes ensaiadas por Silva (2003).



Fonte: Silva (2003).

A tabela 2.2 demonstra as características geométricas e dos materiais, assim como a forma de ruptura da laje. É válido ressaltar que externa significa que a laje teve ruptura na parte externa a armadura de punção.

Tabela 2.2. Características e resultados das lajes ensaiadas por Silva (2003).

Grupo	Lajes	f_c (MPa)	ρ (%)	Pilar	Furo	V_u (kN)	Ruptura
1	L1	39,6	1,45	150x150	não	273	Punção
	L2	40,4		150x300	não	401	Punção
	L3	40,8		150x450	não	469	Punção
2	L4	39,4	1,57	150x150	não	225	Punção
	L5	39,6		150x300	não	350	Punção
	L6	39,1		150x450	não	375	Punção
3	L7	49,0	1,45	150x150	sim	420	Externa
	L8	49,4		150x300	Sim	452	Externa
	L9	50,2		150x450	Sim	452	Externa
4	L10	40,0	1,57	150x150	Sim	325	Externa
	L11	40,8		150x300	Sim	350	Externa
1	L12	42,3	1,45	402	não	525	Punção

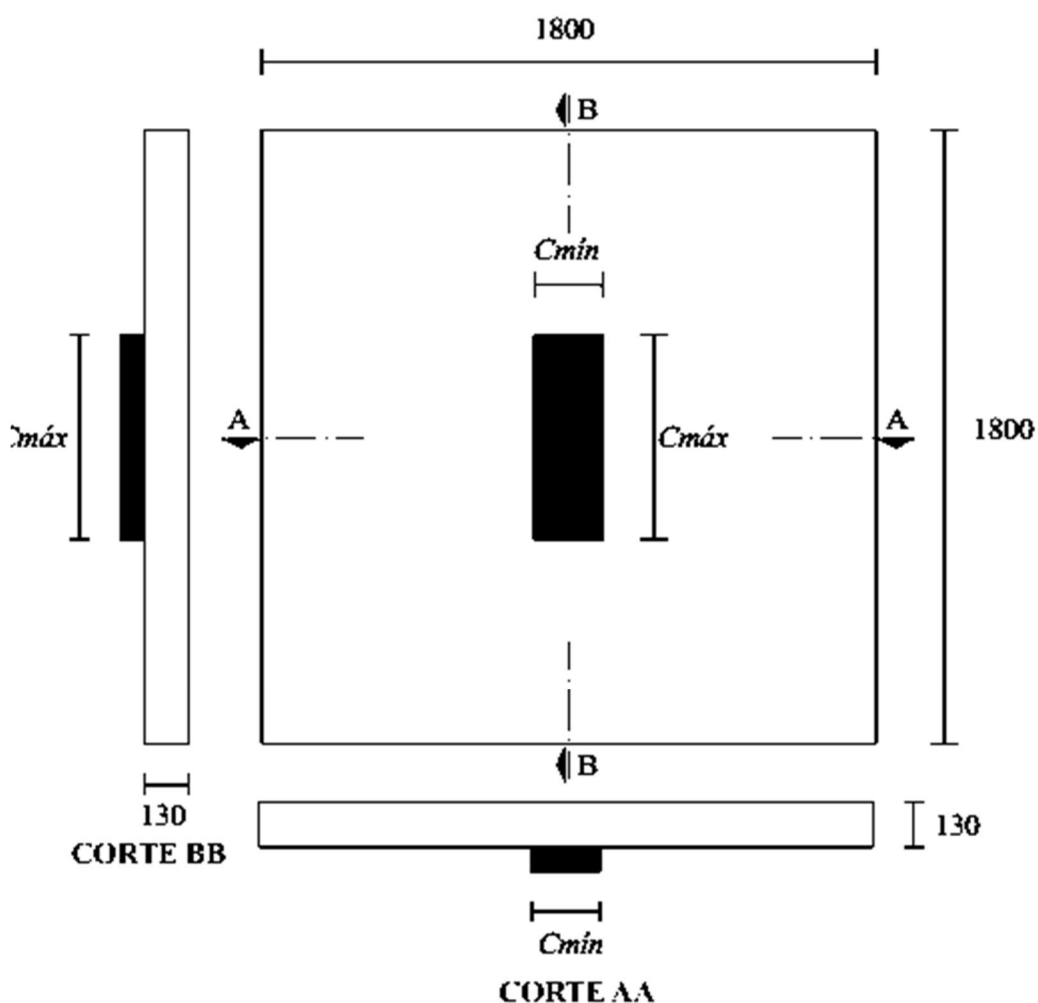
Fonte: Silva (2003).

Silva (2003) concluiu que o aumento da dimensão do pilar, conseqüentemente aumenta o perímetro de controle o que leva a um acréscimo na carga de ruptura da laje. Entretanto, o aumento não chega a ser constante e tende a acontecer um decréscimo de acordo com o aumento da dimensão do pilar. O autor também inferiu que a presença do furo afeta negativamente na resistência a punção, pois os ensaios mostraram que a carga de ruptura reduziu devido a retirada de concreto.

2.1.3. Mouro (2006)

A pesquisa de Mouro (2006) analisa experimentalmente 8 lajes cogumelo de concreto armado com o objetivo principal de investigar o comportamento de lajes cogumelo submetidas a carregamento central. Para tal a autora utilizou como variável o índice de retangularidade do pilar, ou relação entre as dimensões da seção transversal do pilar ($C_{m\acute{a}x}/C_{m\acute{i}n}$). A figura 2.3 mostra a geometria das lajes.

Figura 2.3. Lajes ensaiadas por Mouro (2006)



Fonte: Mouro (2006).

Neste estudo foram utilizadas lajes com dimensões de 1800x1800x130 mm³, e os pilares tiveram suas dimensões variadas mantendo apenas o perímetro constante e igual a 1000 mm, tais pilares mantiveram o índice de retangularidade variando entre 1 a 4. As lajes utilizaram de concreto com resistência a compressão de 25 MPa e trabalharam com uma taxa geométrica de armadura média de 1,4%.

As lajes contaram com barras de aço tipo CA-50, sendo que para todas as lajes foram utilizadas a mesma distribuição de armadura. Sendo assim, utilizou-se de 19 barras com 12,5 mm de diâmetro para a armadura negativa e 11 barras de 6,3 mm de diâmetro na armação positiva. As características geométricas e dos materiais utilizados para o ensaio constam na tabela 2.3, basta evidenciar que todas as lajes romperam por punção.

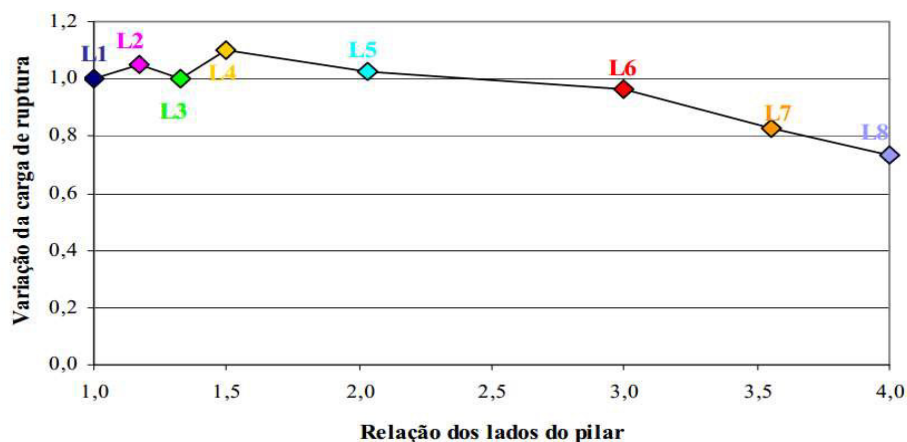
Tabela 2.3. Características e resultados das lajes ensaiadas por Mouro (2006).

Laje	Pilar (mm)		$C_{m\acute{a}x}/C_{m\acute{i}n}$	d (mm)	f_c (MPa)	V_{exp} (kN)
	$C_{m\acute{i}n}$	$C_{m\acute{a}x}$				
L1	250	250	1,00	94	29	375
L2	230	270	1,17	93	29	390
L3	215	285	1,33	94	29	375
L4	200	300	1,50	90	29	395
L5	165	335	2,03	94	22	385
L6	125	375	3,00	91	22	350
L7	110	390	3,55	91	22	300
L8	100	400	4,00	94	22	275

Fonte: Mouro (2006).

A autora chegou à conclusão que a medida que o índice de retangularidade dos pilares aumenta a resistência a punção diminui, esse fator pode ser visto através do gráfico da figura 2.4. Também foi inferido que as lajes romperam por punção com uma relação de cerca de 55% a 81% em relação a carga estimada de ruptura por flexão.

Figura 2.4. Gráfico da carga de ruptura em relação aos lados do pilar.



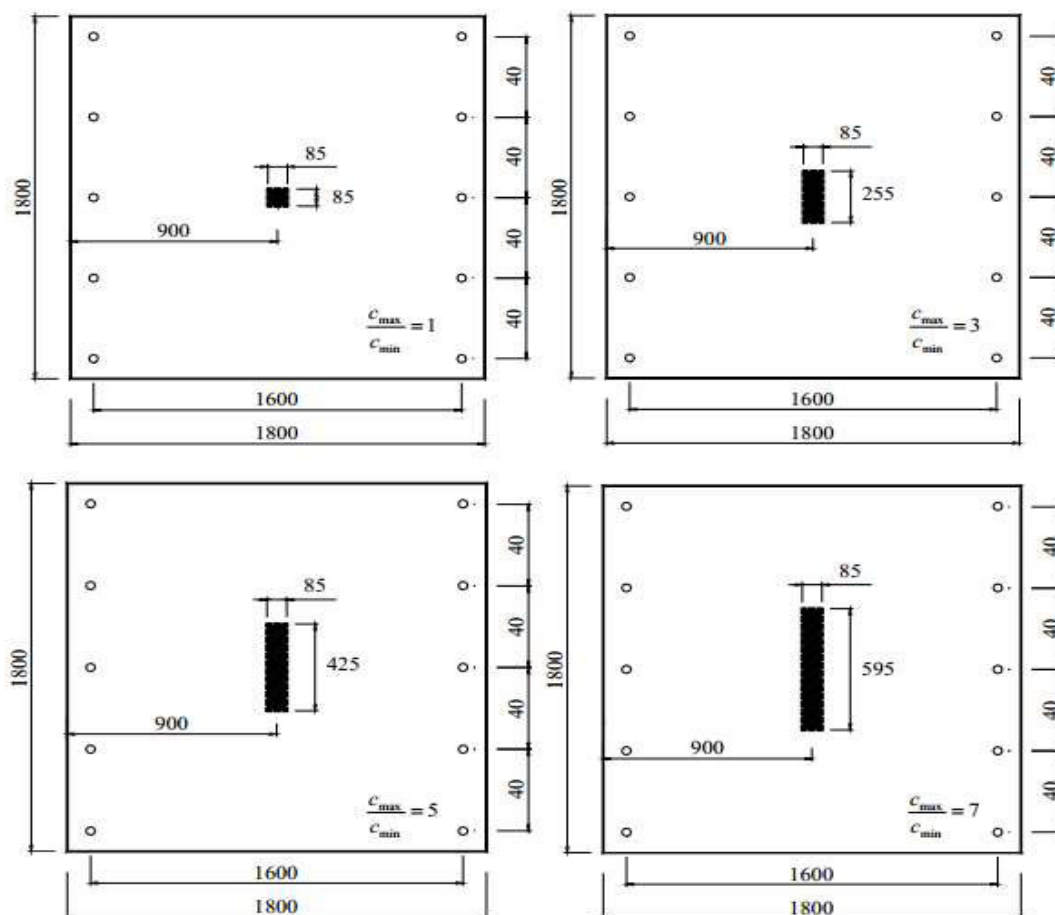
Fonte: Mouro (2006).

2.1.4. Damasceno (2007)

Com o objetivo principal de analisar o comportamento de lajes lisas unidirecionais de concreto armado submetidas ao fenômeno do puncionamento Damasceno (2007) analisou experimentalmente 9 lajes lisas unidirecionais de concreto armado, sem armadura de cisalhamento e utilizando com variáveis a taxa de armadura de flexão secundária e o índice de retangularidade dos pilares, alterando a sua maior dimensão ($C_{máx}$).

As lajes possuíam um formato quadrado com dimensões de (1800 x 1800 x 110 mm³) e o menor lado do pilar (C_{min}) foi mantido constante em 85 mm, todas foram concretadas com concretos com resistência de 40MPa. Tais elementos foram divididas em dois grupos, onde o grupo A trabalhava com a taxa de armadura secundária de flexão com média de 1,25% e outro (Grupo B) com taxa entorno de 0,3%, em ambos os grupos houve a variação do índice de retangularidade dos pilares em 1,3,5,7. A figura 2.5 demonstra a geometria das lajes.

Figura 2.5. Lajes ensaiadas por Damasceno (2007).



Fonte: Damasceno (2007).

Em todas as lajes foram utilizadas barras de aço do tipo CA-50. As lajes utilizavam barras de 12,5 mm na armadura principal de flexão de todas as lajes e barras de 12,5 e 6,3 mm nas armaduras secundárias das lajes, sendo o primeiro utilizado no primeiro grupo onde a taxa estava entorno de 1,25% e a segunda nas lajes que tinham a taxa na média de 0,3%.

As principais características geométricas e dos materiais das lajes ensaiadas, assim como a carga de ruptura e o modo e superfície de ruptura estão contidas na Tabela 2.4.

Tabela 2.4. Características e resultados das lajes ensaiadas por Damasceno (2007).

Lajes	P_x (%)	P_y (%)	d (mm)	f_c (MPa)	$C_{m\acute{a}x}/C_{m\acute{i}n}$	P_u (kN)	Modo de Ruptura
L1A	1,22	1,22	89,3	41,3	1	188,5	Punção
L2A	1,22	1,22	89,3	40,0	3	254,0	Flexo-punção
L3A	1,09	1,09	99,7	39,7	5	297,0	Flexão
L4A	1,11	1,11	98,6	40,4	7	325,0	Flexão
L1B	1,11	0,28	98,1	41,4	1	172,0	Punção
L2B	1,21	0,31	90,5	42,0	3	194,5	Punção
L3B	1,18	0,30	92,7	41,6	5	262,0	Flexo-punção
L4B	1,11	0,28	98,1	40,5	7	254,5	Flexo-punção

P_x : taxa de armadura principal P_y : taxa de armadura secundária

Fonte: Damasceno (2007).

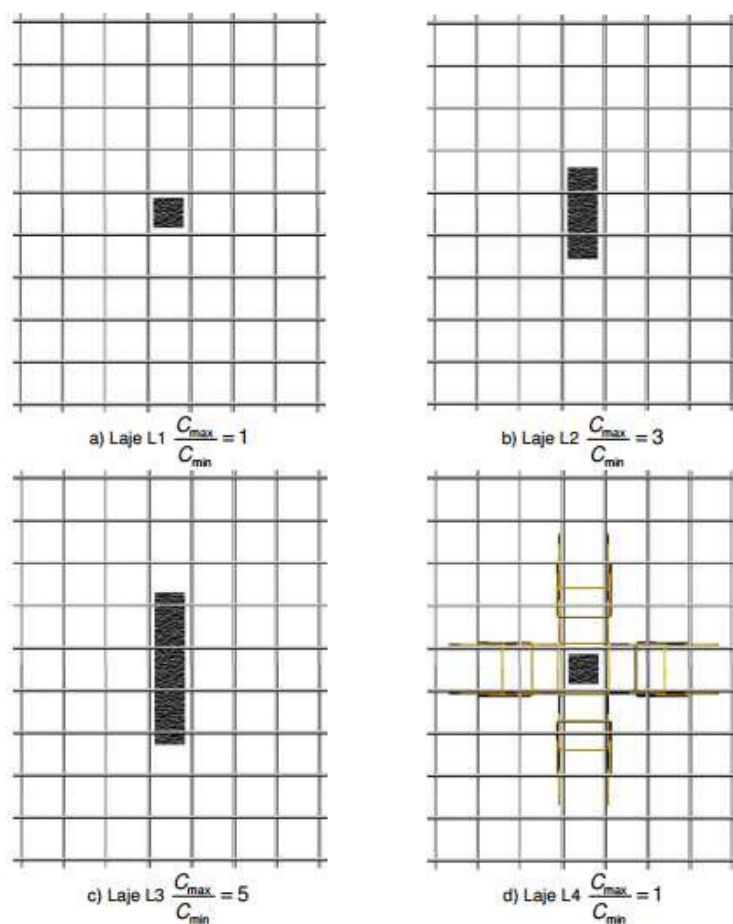
Damasceno (2007) foi capaz de observar que as variáveis utilizadas no ensaio foram capazes de aumentar a resistência da ligação pilar-laje e também agir na ductilidade à ruptura da laje. De igual forma foi observado que o aumento do índice de retangularidade dos pilares influi negativamente na taxa de crescimento de carga de ruptura.

2.1.5. Moraes Neto (2007)

O autor realizou o ensaio experimental de 08 (oito) lajes lisas bidirecionais de concreto armado, com lados de 1800 mm e espessura de 110 mm. Sendo todas submetidas a carregamentos simétricos, impostos as lajes por meio de uma placa com espessura de 50mm de espessura.

Esta pesquisa teve como objetivo principal estudar a influência do índice de retangularidade do pilar, variando-os em 1, 3 e 5. O autor também analisou a influência de estribos abertos e inclinados na ruptura à punção de lajes lisas. Também foi feita uma análise numérica linear através do software SAP 2000, com o objetivo de melhor entender o comportamento do elemento estudado. A figura 2.6 mostra a geometria das lajes.

Figura 2.6. Lajes ensaiadas por Moraes Neto (2007).



Fonte: Moraes Neto (2007).

As oito lajes foram divididas de forma que as 3 primeiras não possuíam armadura de cisalhamento e tiveram apenas as dimensões dos pilares modificadas,

sendo assim, serviram de laje de referência para a análise das demais, as 3 seguintes possuíam armadura de cisalhamento e variavam o índice de retangularidade dos pilares. Por fim as 2 últimas lajes utilizaram um índice de retangularidade de 5 e variaram apenas a forma de distribuição das armaduras de cisalhamento.

Para as armaduras foram utilizadas barras de CA-50, sendo que as armaduras principais de flexão estavam dispostas com 16 barras de 12,5 mm e espaçadas a 118 mm em cada direção, também foram utilizados ganchos nas bordas das lajes, estes serviram para auxiliar na ancoragem das armaduras. Para armadura de cisalhamento possuíam estribos abertos e inclinados a 60° do eixo horizontal, e com barras de 6,3 mm. O autor explica a escolha da inclinação de 60° relacionando-as com a inclinação da fissura de punção na superfície de ruptura da laje, que se mantém em torno de 25° a 30°, e encontravam-se abertos devido a facilidade de montagem. A tabela 2.5. mostra as características e a forma de ruptura das lajes ensaiadas, assim como a carga última.

Tabela 2.5. Características e cargas de ruptura das lajes ensaiadas.

Laje	$C_{m\acute{a}x}/C_{m\acute{i}n}$	d (mm)	ρ (%)	f_{ck} (MPa)	Dist. dos estribos	P_u (kN)	Modo de ruína
L1	1	87	0,014	39,4	-	224	Punção
L2	3	87,5	0,012	39,8	-	241	Punção
L3	5	86,5	0,013	40,9	-	294	Punção - dúctil
L4	1	87	0,014	39,4	Cruz	282	Punção - dúctil
L5	3	87	0,012	42,7	Cruz	288,5	Flexo-punção
L6	5	87	0,013	42,8	Cruz	344,5	Flexo-punção
L7	5	87	0,013	43,9	Paralelo	322	Flexo-punção
L8	5	88	0,013	46,9	Duplo-T	346,5	Flexão

Fonte: Moraes Neto (2007).

O autor conseguiu chegar à conclusão de que o índice de retangularidade do pilar igual a 1 gerou uma concentração e tensões nas proximidades do carregamento o que conduz a uma ruína brusca. Com o índice igual a 5 não foi encontrada uma boa

resistência da laje a flexão, entretanto, o autor descreve que esse comportamento confere ductilidade, maior resistência a punção e alteração do modo de ruína.

Destaca-se ainda que a análise do autor em relação a atuação da armadura de cisalhamento na resistência da ruptura a punção da laje foi satisfatória, haja vista que a armadura de cisalhamento com inclinação possui a tendência de “costurar” a fissuração ou aumentar a seção de ruína.

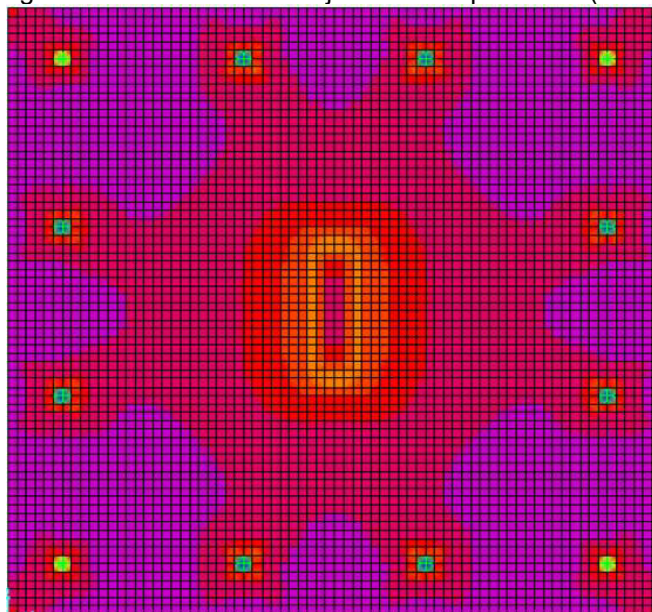
Quanto a análise numérica linear elástica, o autor concluiu que embora os resultados obtidos sejam imprecisos para trabalhos nos quais haja plastificação de materiais, ela é importante para saber o comportamento do elemento estudado. Esta análise proporcionou ao pesquisador identificar os locais em que haveriam maior deformação e concentração de tensões para que tais locais pudessem ser instrumentados na realização da experimentação das lajes.

2.1.6. Alves (2016)

O autor analisou numericamente 6 lajes com dimensões de 8000x8000x130 mm³. A pesquisa teve objetivo de avaliar o comportamento da laje lisa quando submetida a punção quando foi tomado como variável o índice de retangularidade dos pilares, de igual forma o autor buscou comparar os valores oriundos dos ensaios experimentais desenvolvidos por Mouro (2006) com os valores obtidos através da análise numérica. Os valores também foram comparados com estimativas normativas da ACI 318, MC90, Eurocode 2 , NBR 6118.

Durante a pesquisa foram modeladas 6 lajes que utilizaram pilares com índice de retangularidade de 1; 1,33; 1,5; 2,03; 3 e 4. Foi utilizado um concreto de 30 MPa e modulo de elasticidade de 2,87 GPa. As lajes foram modeladas através do software SAP 2000, onde utilizou-se elementos do tipo SHELL para representar as lajes. A figura 2.7 mostra a laje modelada com os resultados do ensaio para o índice de retangularidade 4.

Figura 2.7. Resultado de Laje ensaiada por Alves (2016).



Fonte: Alves (2016).

O autor chegou à conclusão de que os valores obtidos através do método dos elementos finitos conseguem ser bem próximos, tanto dos valores experimentais quanto dos valores normativos. Assim como foi notado que a partir do momento que o índice de retangularidade foi aumentando a precisão da simulação dos valores de tensão de cisalhamento decrescem significativamente, isso ocorre quando os valores são postos em comparação aos valores experimentais e torna-se mais perceptível a partir do índice 3.

2.2. Recomendações Normativas

2.2.1. Resistência à punção

Esta seção irá abordar sobre as recomendações normativas relacionadas ao dimensionamento e verificação de lajes lisas submetidas à punção. Diversos códigos, sejam nacionais ou internacionais, possuem em seu escopo a verificação a punção de lajes lisas. Entretanto, esta pesquisa utilizará apenas o código normativo vigente no Brasil a NBR 6118 (ABNT, 2014).

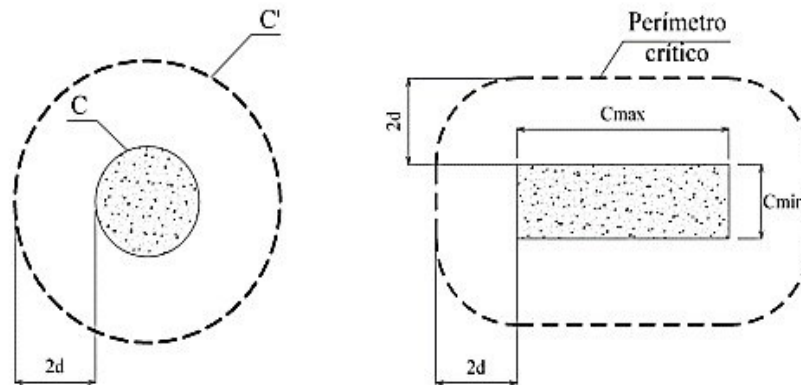
2.2.1.1. NBR 6118 (ABNT, 2014)

A NBR 6118 (ABNT, 2014) traz em seu escopo um modelo de cálculo baseado nas superfícies de controle, sendo necessário verificar a tensão de cisalhamento em duas ou mais, sendo estas definidas de acordo com a força aplicada. A norma oferece diferentes formulações variadas de acordo com a região no qual o pilar está inserido

(Interno, borda e canto), nesta pesquisa utilizaremos as equações para pilares internos com carregamento assimétrico.

Para o caso da verificação da punção em lajes lisas sem armadura de punção é necessário verificar apenas as superfícies críticas C e C'. O contorno C é calculado no perímetro do pilar, já a superfície C' é calculada com um afastamento de 2d das faces do pilar. A figura 2.8 ilustra esses dois perímetros.

Figura 2.8. Perímetros críticos em pilares externos.



Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

No caso em estudo a tensão solicitante nos perímetros críticos podem ser calculadas através da equação 2.1.

$$\tau_{sd} = \frac{Fsd}{u d} \quad \text{Equação 2.1}$$

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014) na superfície crítica do contorno C, deve ser verificada indiretamente a tensão de compressão diagonal do concreto, através da tensão de cisalhamento. Sendo assim é necessário que a desigualdade constante na equação 2.2 seja satisfeita.

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27(1-250/f_{ck})f_{cd} \quad \text{Equação 2.2}$$

Em seguida torna-se necessário verificar a resistência da superfície crítica C'. Sendo assim, a NBR 6118 (ABNT, 2014) recomenda que deve ser verificada a capacidade da ligação à punção, associada à resistência à tração diagonal. Portanto a desigualdade da equação 2.3 deve ser atendida, caso contrário será necessário o uso de armadura de cisalhamento.

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd1} = 0,13 \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) (100 \rho f_{ck})^{1/3} \quad \text{Equação 2.3}$$

2.2.2. Cargas de fissuração e estimativa de momento fletor

Visando realizar uma previsão das cargas de ruptura ou a obtenção da carga de fissuração é necessário que sejam empregados meios analíticos. Portanto, ao utilizar o método desenvolvido por Carvalho e Filho (2014), consideraremos que a laje será apoiada nos seus quatro lados e que as mesmas serão quadradas. Entretanto, antes de fazer a aplicação do método é necessário possuir algumas informações como o vão da laje, no caso a largura da mesma, e também os valores de α , γ e μ . O valor de γ deve ser calculado por meio da equação 2.4.

$$\gamma = \frac{I_y}{I_x} \quad \text{Equação 2.4}$$

Os parâmetros α e μ são encontrados nas tabelas fornecidas em Carvalho e Filho (2014), a partir do valor de γ e da forma de apoio da laje. Como a laje é apoiada nos quatro lados ela é do tipo 1. Ao cruzar o valor de γ com o Tipo I na tabela pôde obter os valores da tabela 2.6 a seguir.

Tabela 2.6. Parâmetros α e μ

α	μ
4,67	4,41

Fonte: Carvalho e Filho (2014).

A partir disso é possível encontrar o momento solicitante através da equação 2.5. Basta frisar que como a laje é quadrada os dois momentos solicitantes são iguais, como mostra a equação supracitada.

$$M_x = M_y = \mu_x \frac{p l^2}{100} \quad \text{Equação 2.5}$$

Visando descobrir a carga de fissuração pode-se aplicar o Momento de Fissuração (M_r), conceituado pela NBR 6118 (ABNT, 2014) como o valor limite entre a mudança do estágio I para o estágio II, ou seja, o momento cujo o qual representa

o início da fissuração da peça. Para que seja capaz de prever a carga de fissuração é necessário igualar a sollicitação ao momento de fissuração, conduzindo a equação 2.6.

$$p_{fiss} = \frac{100 M_r}{\mu_x I^2} \quad \text{Equação 2.6}$$

Entretanto, torna-se necessário encontrar o Momento de Fissuração (M_r) da peça, sendo assim é necessário fazer-se o uso da equação 2.7.

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{y_t} \quad \text{Equação 2.7}$$

Onde:

$$\alpha = \begin{cases} 1,2 & \text{para seções T ou duplo T;} \\ 1,3 & \text{para seções I ou T invertido;} \\ 1,5 & \text{para seções Retangulares;} \end{cases}$$

f_{ct} é a resistência a tração à flexão, sendo calculado por $f_{ct} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2}$

y_t é a distância entre o centro de gravidade da seção até a fibra mais tracionada;

I_c é o momento de inércia bruto da peça.

2.2.3. Deslocamentos

Segundo Reis (2018), para que se obtenha o grau de proximidade entre o modelo computacional e os modelos analíticos é necessário que seja feita a previsão da flecha, através de modelos simplificados que considerem a fissuração das peças. Carvalho e Filho (2014) sugerem um procedimento de cálculo baseado na NBR 6118 (ABNT, 2014). Seguindo tal procedimento de cálculo é necessário calcular inicialmente a posição da linha neutra (y_t) e a Inércia da peça no Estádio I (I_c),

conhecida também como a Inércia Bruta. Tais valores podem ser calculados através das equações 2.8 e 2.9.

$$y_t = h/2 \quad \text{Equação 2.8}$$

$$I_c = \frac{bh^3}{12} \quad \text{Equação 2.9}$$

Em seguida deve-se calcular a posição da linha neutra (x_2), equação 2.10, e a Inércia no estágio II (I_2), equação 2.11. Convém destacar que a peça só se encontra no estágio II, quando a sollicitação ultrapassa o limite entre os dois estádios, ou seja, quando $M_s > M_r$, quando isso não ocorre, ou seja $M_s < M_r$, então pode-se utilizar os valores do estágio I para calcular a flecha.

$$\frac{b x_2^2}{2} - \alpha_e a_s (d - x_2) = 0 \quad \text{Equação 2.10}$$

Onde:

$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c}$ Sendo E_s o módulo de elasticidade do aço e E_c o módulo de elasticidade do concreto;

A_s É a taxa de armadura para faixa de 1 metro;

D Altura útil da laje;

b Tomado como valor de 1000 mm;

$$I_2 = \frac{b x_2^3}{3} - \alpha_e a_s (d - x_2)^2 \quad \text{Equação 2.11}$$

Quando $M_s > M_r$ torna-se necessário encontrar uma rigidez equivalente, calculado devido a fissuração da laje. Para tanto, a NBR 6118 (ABNT, 2014), indica que seja usada a equação 2.12.

$$(EI)_{eq} = E_c s \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_2 \right\} \leq E_c s I_c \quad \text{Equação 2.12}$$

O último passo do processo é calcular a flecha gerada a partir do carregamento aplicado na laje. Tal flecha pode ser calculada com o auxílio das tabelas supracitadas que são encontradas em Carvalho e Filho (2014). Reis (2018), diz que para utilizar tais tabelas deve-se admitir que o carregamento aplicado no pilar corresponde a uma carga distribuída uniformemente na área da laje. A partir da equação 2.13 pode-se definir o valor da flecha.

$$a = \frac{\alpha p l^4}{(E I)_{eq}}$$

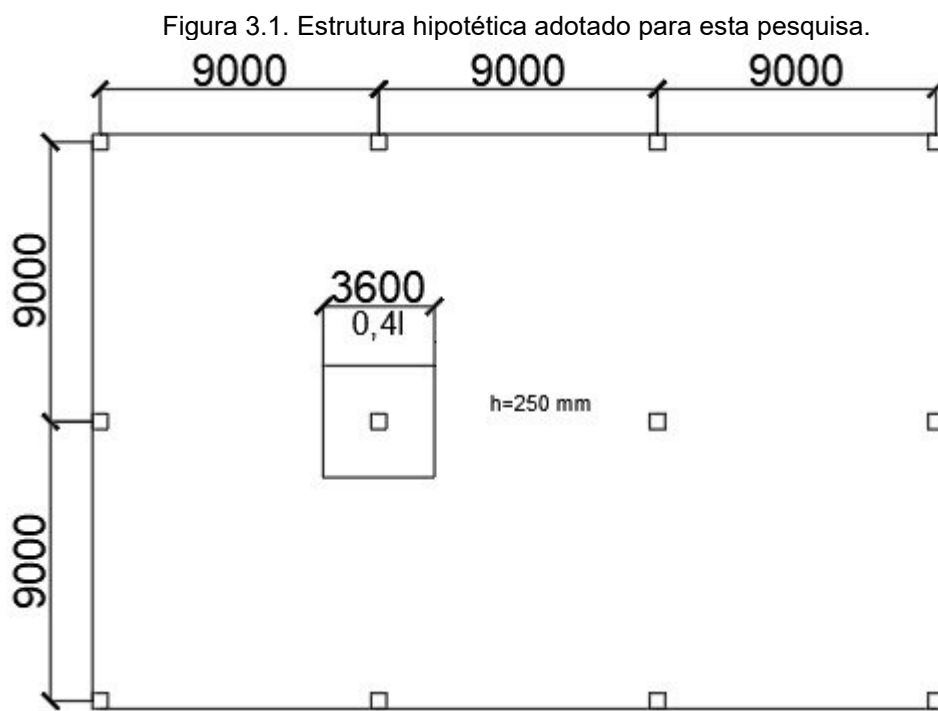
Equação 2.13

3. METODOLOGIA

Este capítulo versará sobre a modelagem a ser desenvolvida para a análise numérica desta pesquisa. Para tanto, serão descritos aqui as informações referentes a características das lajes ensaiadas, assim como as leis constitutivas e características dos materiais e os parâmetros a serem adotados dentro do software, para que se tenha a correta rotina de cálculo.

3.1. Considerações Iniciais

Este trabalho visa analisar o comportamento de lajes lisas de concreto armado com pilares internos retangulares. Sendo assim, foram elaborados modelos na escala de 1:2 simulando a zona central de vãos laterais de 9000 mm, configurando assim uma estrutura bidirecional. O valor deste vão que foi retirado de uma estrutura hipotética que está sendo ilustrada na figura 3.1.



Fonte: Autor (2019).

Segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) o momento fletor nulo pode ser encontrado em uma circunferência em torno do pilar com um raio igual a $0,22l$, sendo l a dimensão do vão. Entretanto, Albuquerque (2009) e Pinto (2015) afirmam que no caso de lajes quadradas este valor deve ser adotado como $0,4l$.

3.2. Abaqus/CAE

Durante esta pesquisa foi utilizado o software Abaqus/CAE na versão 2017 para modelar e analisar as lajes de concreto armado. Este software é uma importante ferramenta computacional que utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF), permitindo assim que o usuário desenvolva análises numéricas através da modelagem da estrutura, realizando assim um modelo mais simplificado do modelo real.

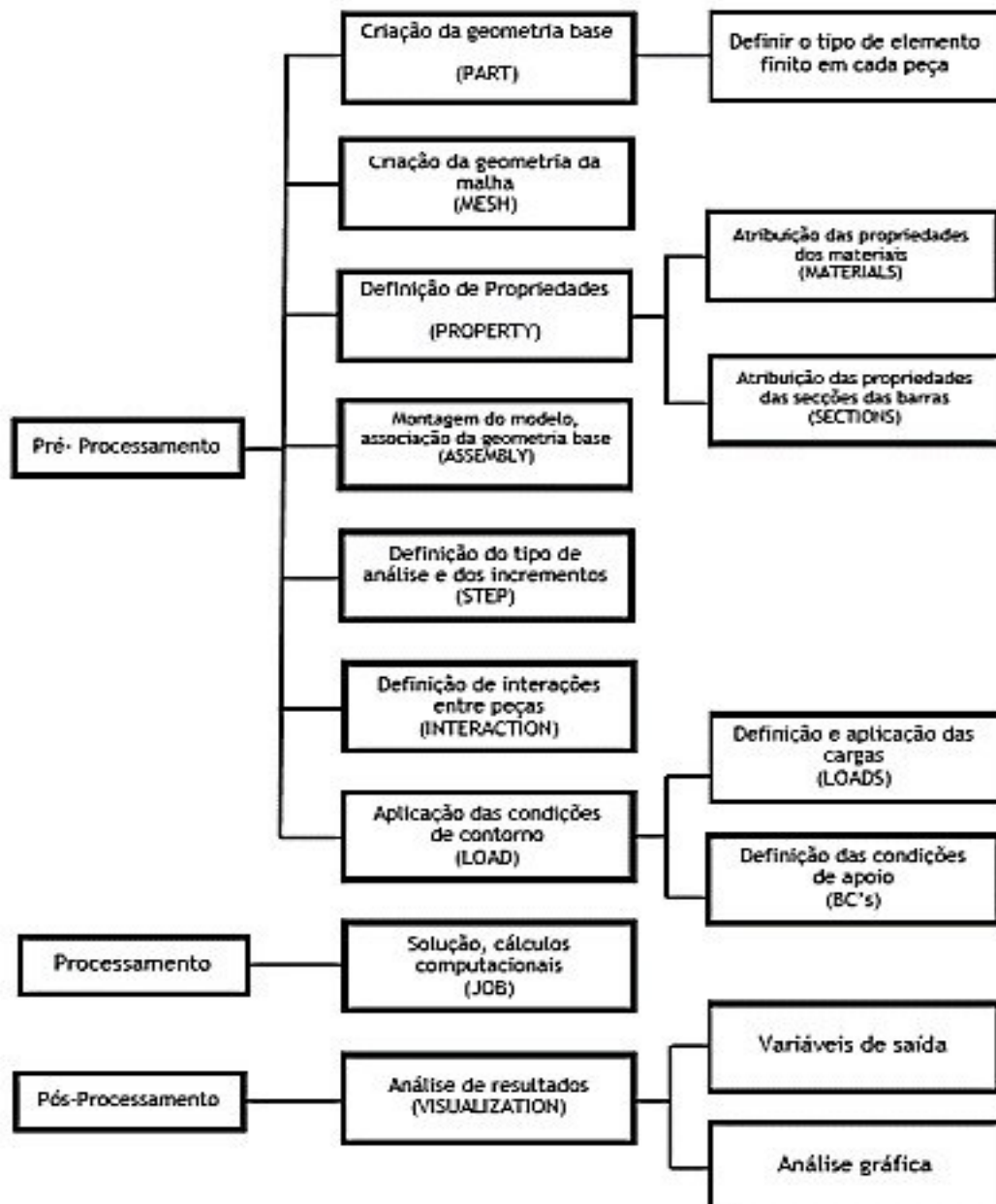
Visando a parametrização inicial dos resultados buscou-se inicialmente compreender as variáveis envolvidas no estudo e utilizadas durante a modelagem, de forma que a alteração das mesmas pudesse levar o modelo numérico a proximidade do modelo real. Assim como, as considerações normativas dos materiais e as suas características.

Foi necessário realizar o estudo de toda a rotina experimental realizada por um estudo, afim de entender e tentar replicar de maneira mais aproximada o passo a passo utilizando o software. Para tanto, buscou-se utilizar as equações constitutivas dos materiais utilizados (Concreto e Aço), módulo de deformação e resistência a tração do concreto, todos esses itens trazidos pela NBR 6118 (ABNT, 2014).

Reis (2018), cita a necessidade de descartar todos os itens que não influenciam tanto na análise computacional. Sendo assim, descarta-se os tirantes, pilaretes de suporte e demais itens de medição utilizados nos ensaios. Sendo que segundo o mesmo, estes elementos devem ser representados em forma de carregamentos e condições de contorno. Sendo assim, restam somente as lajes de concreto, armações, chapas metálicas e vigas de reação, as modelagens de tais itens serão descritas no decorrer deste capítulo.

Nas modelagens que serão realizadas nesse trabalho seguirão um fluxo de trabalho representado na figura 3.2. A rotina de cálculo representada no diagrama abaixo representa os passos básicos para a modelagem, pode-se mudar a ordem, mas não se pode deixar de executar um desses passos.

Figura 3.2. Diagrama de rotina de modelagem.



Fonte: Ferreira (2016).

Entretanto, antes de iniciar a rotina de modelagem, faz-se necessário a definição de um sistema de unidades a ser utilizado no software. Para tanto, a tabela 3.1 faz algumas considerações sobre as unidades que podem ser utilizadas no software de maneira a seguir um padrão.

Tabela 3.1. Unidades a serem utilizadas no Abaqus

Grandeza	Unidade SI	Unidade SI (mm)
Comprimento	M	mm
Força	N	N
Massa	Kg	Tonelada
Tempo	S	s
Tensão	Pa (N/m ²)	MPa (N/mm ²)
Energia	J	mJ
Densidade	Kg/m ³	Tonelada/mm ³

Fonte: Ferreira (2016).

3.3. Definição dos modelos

Foram desenvolvidos duas séries de lajes para serem analisadas durante essa pesquisa. A primeira série de laje, faz referência a laje L1A do estudo do autor Damasceno (2007), tal série foi modelada com o intuito de parametrizar o modelo computacional, buscando conduzir os resultados do modelo numérico ao mais próximo possível do modelo real.

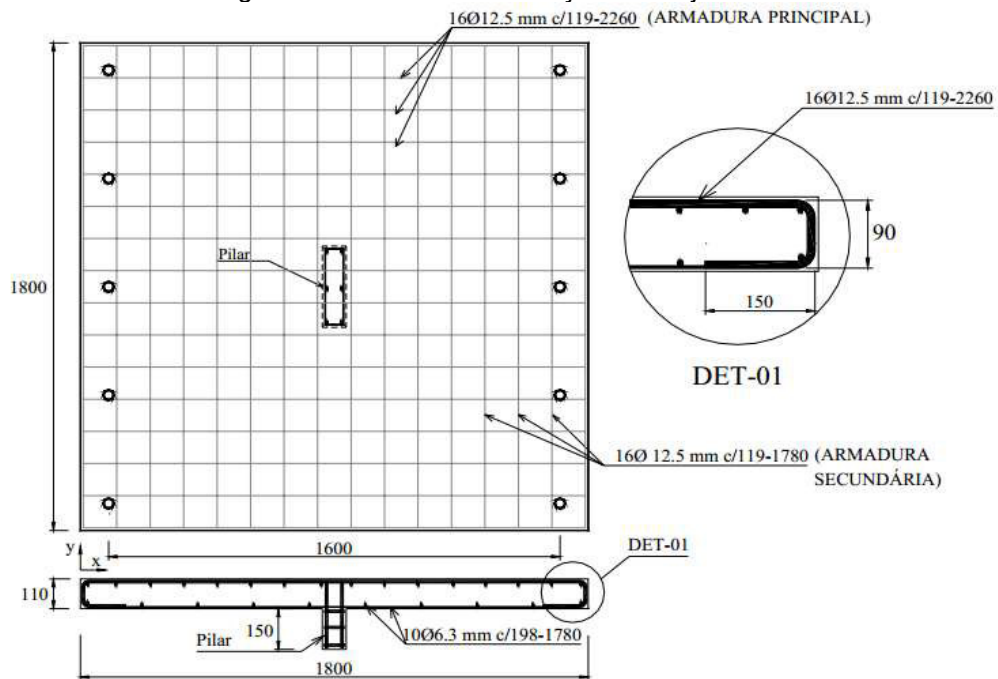
A partir da parametrização e dos resultados obtidos através da primeira série de lajes, assim como tendo uma rotina de cálculo será iniciado o estudo da segunda série de lajes. Esta série contará com a modelagem computacional de três lajes de mesma dimensão, variando apenas o índice de retangularidade dos pilares.

3.3.1. Geometria e condições de contorno

3.3.1.1. Damasceno (2007)

Foi escolhida a laje L1A do autor pois a mesma rompeu por punção. A laje possuía dimensões geométricas de 1800x1800x110 mm³ e pilar com o índice de retangularidade igual a 1, possuindo dimensões de 85 x 85 mm², como mostra a figura

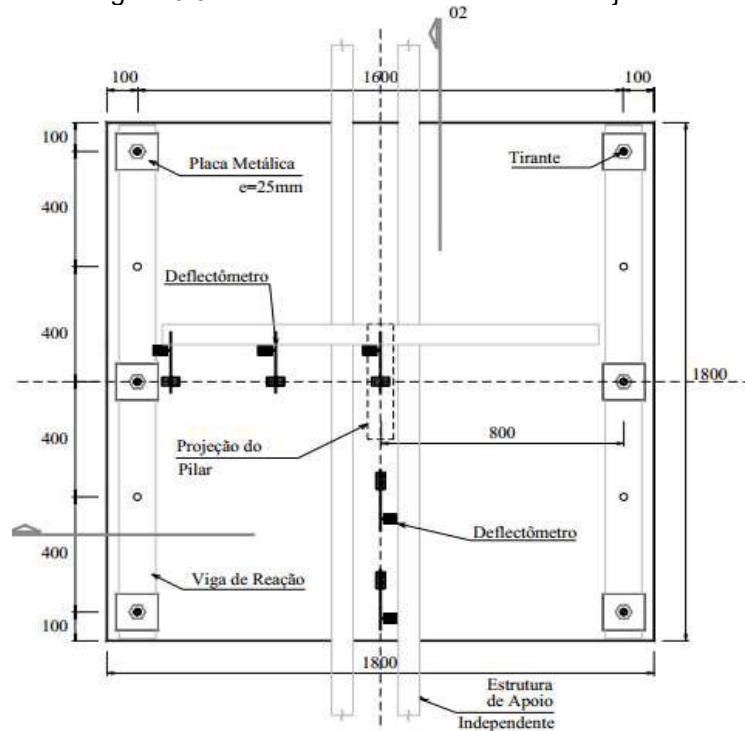
Figura 3.4. Detalha das armações da Laje L1A.



Fonte: Damasceno (2007).

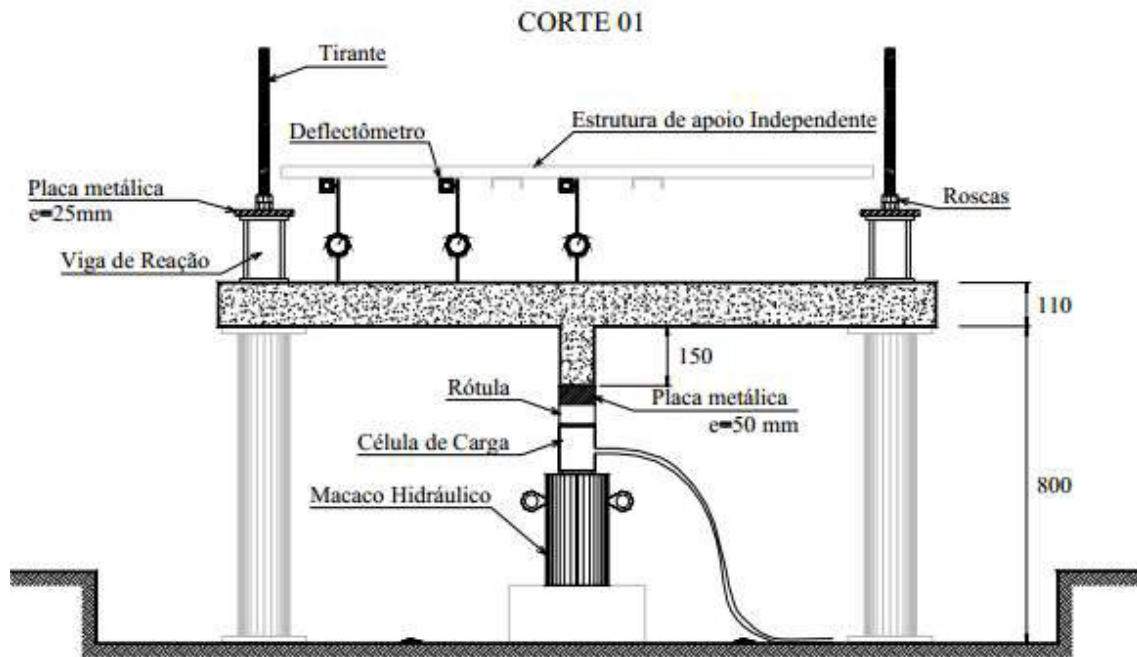
A laje L1A era unidirecional, portanto, o autor utilizou vigas de reação metálicas em apenas um sentido da laje, tais vigas possuíam a dimensão de 100x200 mm². Também fora utilizado chapas metálicas com dimensões de 85x85x50 mm³ com a função de distribuir para a laje as cargas impostas a ela. As figuras 3.5 e 3.6 permitem a visualização do sistema de ensaio e do posicionamento da chapa utilizada.

Figura 3.5. Sistema de ensaio utilizado na laje L1A.



Fonte: Damasceno (2007).

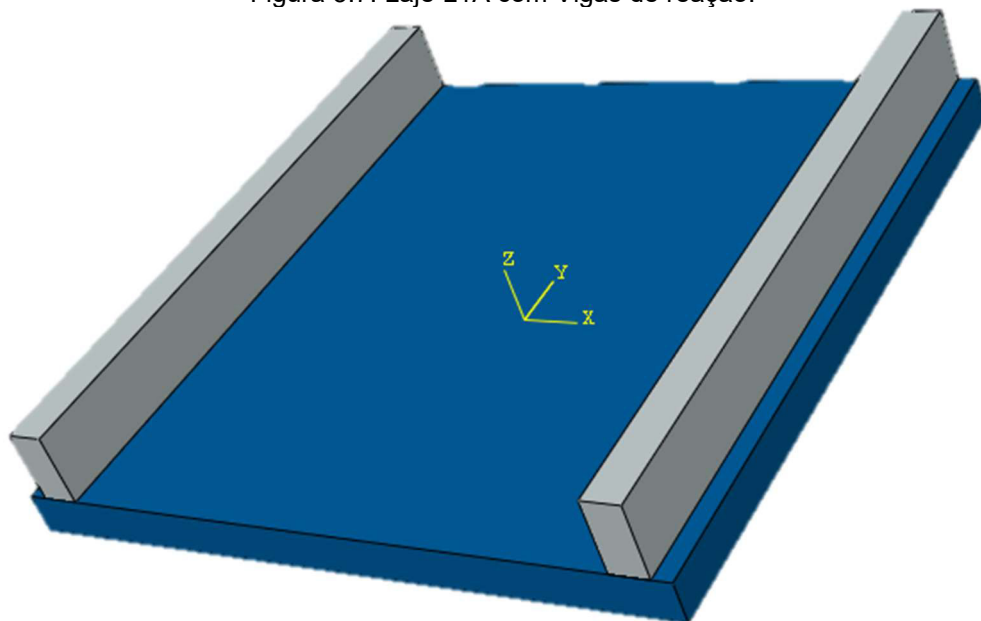
Figura 3.6. Posicionamento da chapa metálica na laje L1A.



Fonte: Damasceno (2007).

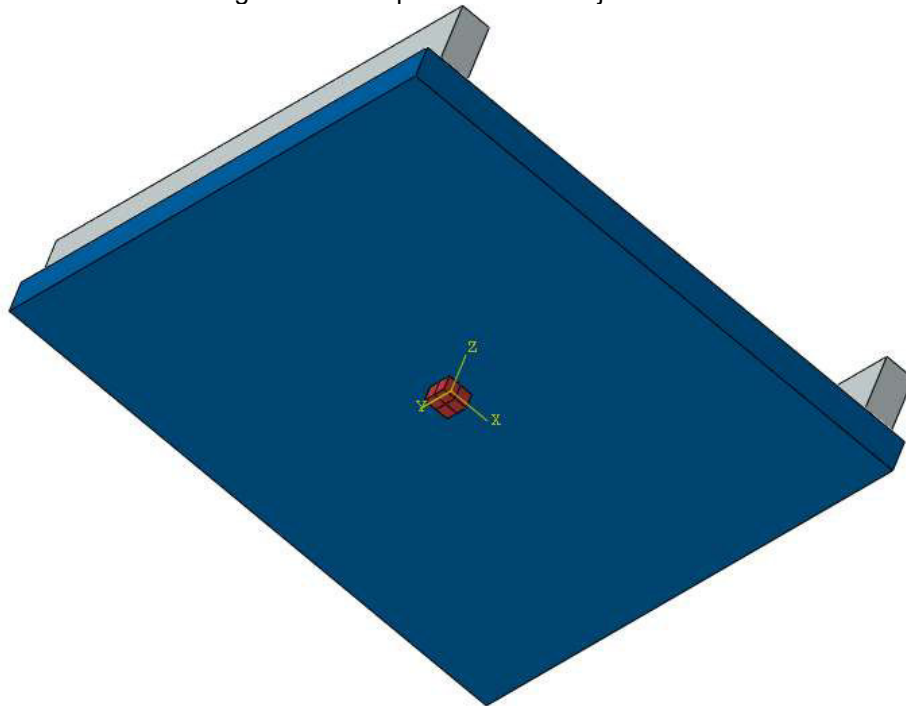
A laje foi modelada com as mesmas características geométricas mostradas nas figuras 3.3 e 3.4. Assim como a localização das vigas de reação, dimensões das chapas, posicionamento das armações e as demais características descritas no estudo de Damasceno (2007). As Figuras 3.7 e 3.8 mostram a geometria da laje modelada, assim como o correto posicionamento das vigas de reação e da chapa de aplicação de carga.

Figura 3.7. Laje L1A com Vigas de reação.



Fonte: Autor (2019).

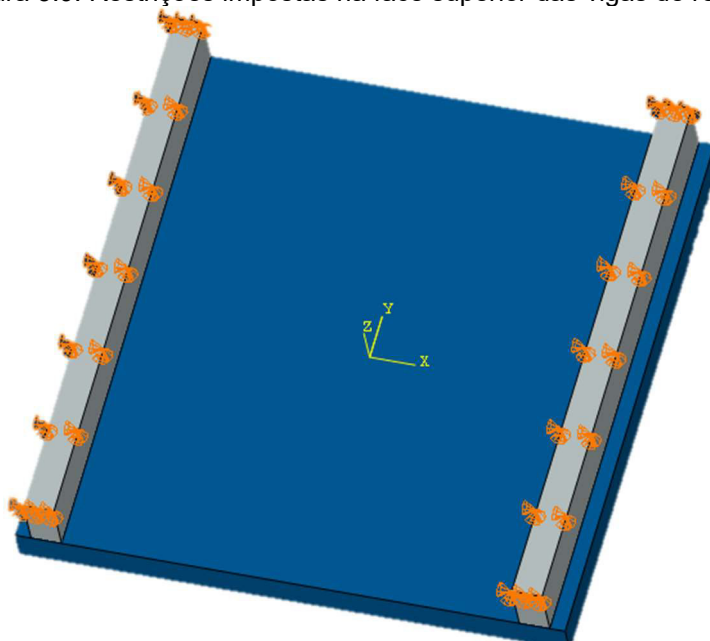
Figura 3.8. Chapa metálica da laje L1A.



Fonte: Autor (2019).

Assim como foi realizado por Damasceno (2007) no sistema de ensaio, também foi aplicado a restrição das translações nos três eixos (x , y e z), através das Boundarys Conditions, ou condições de contorno, tais condições foram aplicadas nas faces superiores das vigas de reação. Essa medida foi adotada para impedir que a laje se movimentasse verticalmente a medida que a carga fosse sendo aplicada. A figura 3.9 mostra os locais de aplicação dessas restrições.

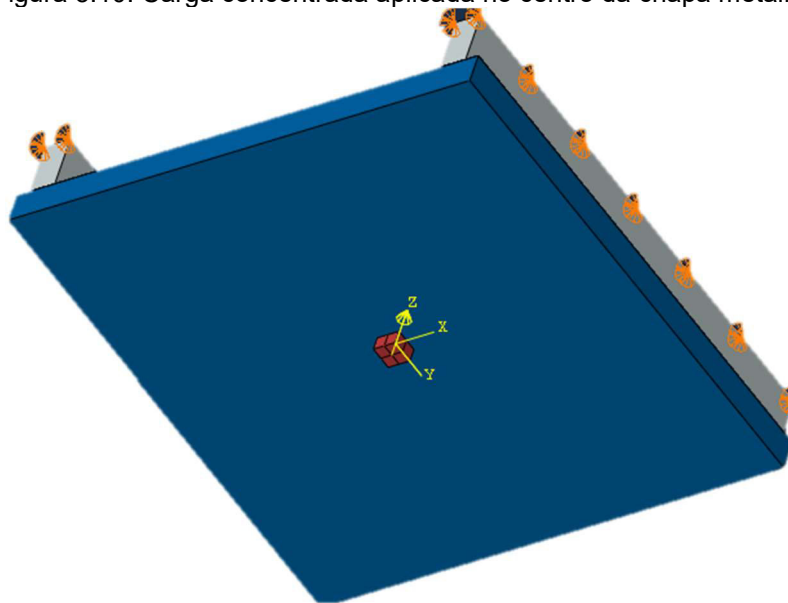
Figura 3.9. Restrições impostas na face superior das vigas de reação.



Fonte: Autor (2019).

A aplicação da carga se deu no centro da chapa metálica modelada segundo as geometrias dadas no estudo de Damasceno (2007). Sendo assim, modelou-se a chapa de forma que ela seja indeformável, ou seja, que ela não se deforme junto com a aplicação da carga, também foi utilizado o aço como material para a mesma. A carga foi aplicada como força concentrada com uma intensidade de 500 kN com taxa de variação de 0 a 1, a taxa foi adicionada para que a carga pudesse ser incrementada a cada passo de cálculo. A figura 3.10 demonstra a aplicação da força.

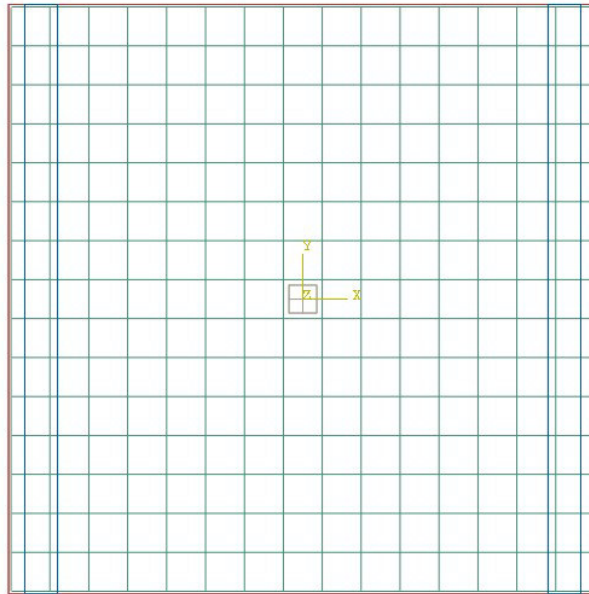
Figura 3.10. Carga concentrada aplicada no centro da chapa metálica.



Fonte: Autor (2019).

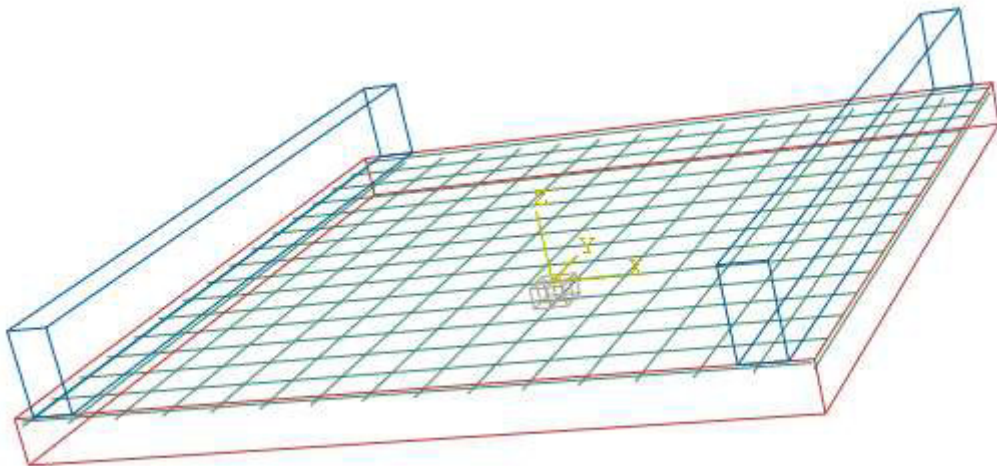
A armadura utilizada na modelagem desta laje também seguiu as recomendações do autor, estando distribuídas da forma como foi supracitada, e semelhante à figura 3.4. A armadura utilizada no modelo real fazia uso de ganchos em suas pontas, tais ganchos possuíam a função de melhorar a aderência da armadura com o concreto. Entretanto, na modelagem os ganchos não foram utilizados, já que, segundo Soares (2016), o Abaqus/CAE possui uma ferramenta que simula corretamente a aderência entre o concreto e o aço, através da compatibilidade de deslocamentos entre as duas. A figura 3.11 mostra as armaduras já modeladas no Abaqus e a figura 3.12 o posicionamento da armadura dentro da laje

Figura 3.11. Armação da laje L1A modelada no Abaqus.



Fonte: Autor (2019).

Figura 3.12. Posicionamento da armação na laje.

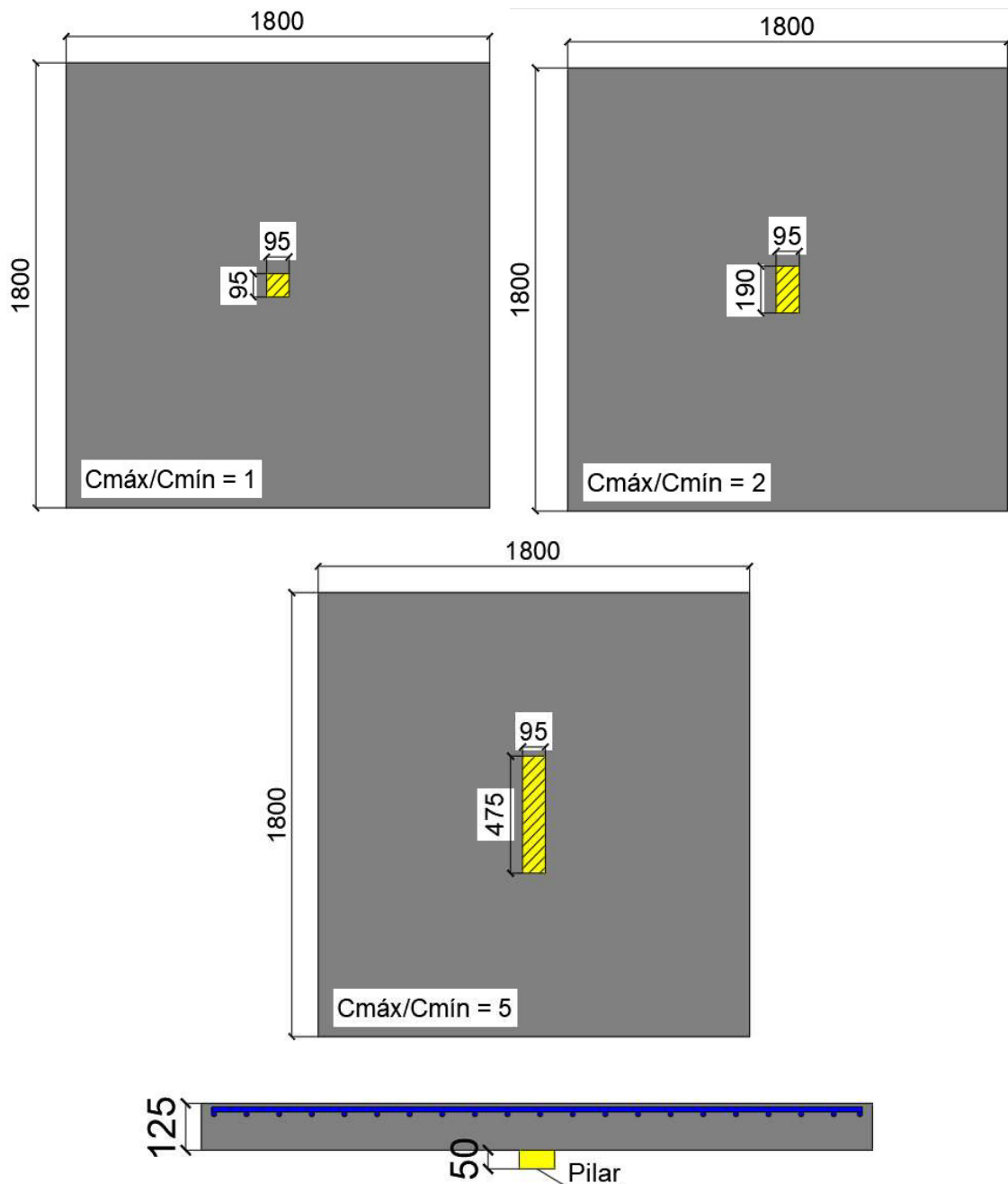


Fonte: Autor (2019).

3.3.1.2. Lajes autorais

Foram modeladas três lajes bidirecionais com dimensões de 1800 x 1800 x 125 mm³. A variável de estudo utilizada foi o índice de retangularidade dos pilares, assumindo índices de 1,2 e 5, como mostra a figura 3.13. O concreto utilizado para estas lajes possuía 30 MPa e resistência a tração de 2,9 MPa, assim como módulo de elasticidade de 29895,8 MPa, valores estes calculados em conformidade com a NBR 6118 (ABNT, 2014).

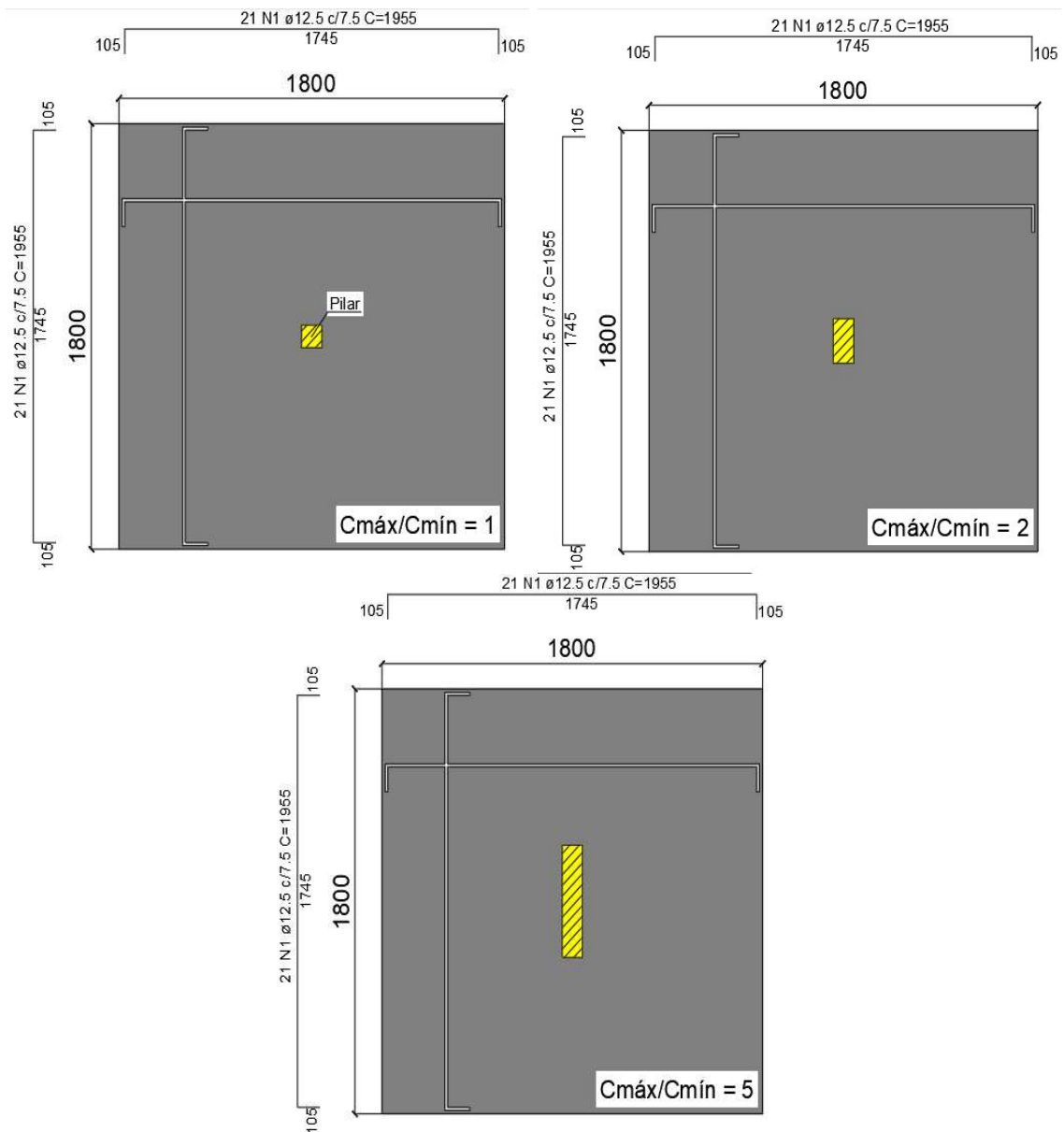
Figura 3.13. Geometria das lajes autorais.



Fonte: Autor (2019).

A laje contou taxa de armadura de flexão de 1,4% em todas as lajes, utilizando como base o valor usado por Pinto (2015). Sendo assim foram utilizadas barras de aço do tipo CA-50, no qual as armaduras negativas principais possuíam diâmetro de 12,5 mm espaçados a cada 75 mm, como pode ser visto na figura 3.14.

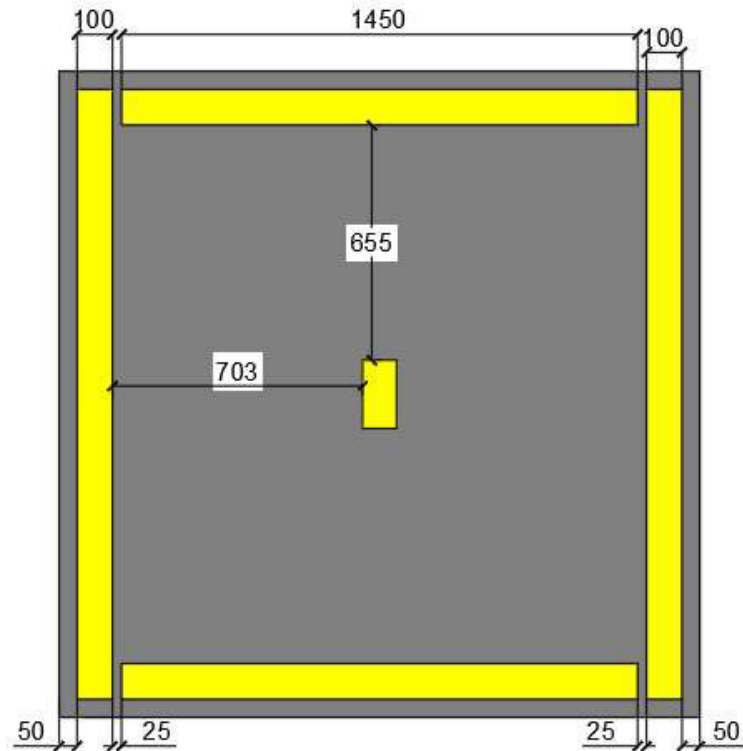
Figura 3.14. Armação das lajes autorais.



Fonte: Autor (2019).

As lajes estudadas são bidirecionais, portanto, foram utilizadas vigas de reação metálicas nos dois sentidos das lajes, tais vigas possuíam a dimensão de 100x200 mm². Também foram utilizadas chapas metálicas com dimensões de 95x95x50 mm³; 95x190x50 mm³ e 95x475x50 mm³ com a função de distribuir para a laje as cargas impostas a ela. A figura 3.15 permite a visualização do posicionamento das vigas de reação e as dimensões das mesmas.

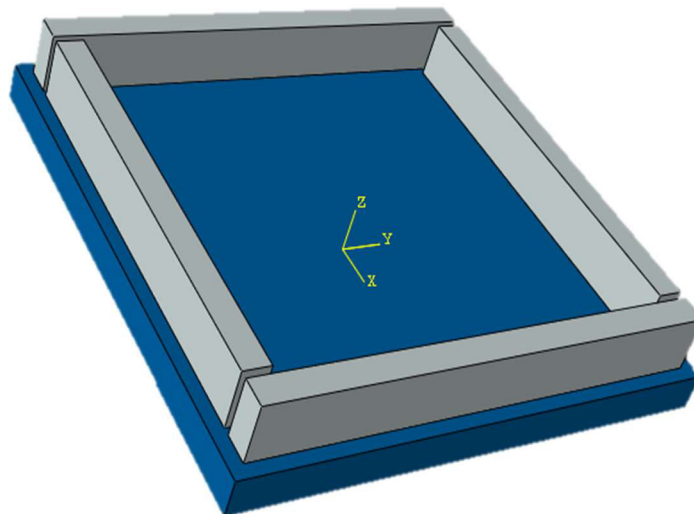
Figura 3.15. Vigas de reação nas lajes L1, L2 e L3.



Fonte: Autor (2019).

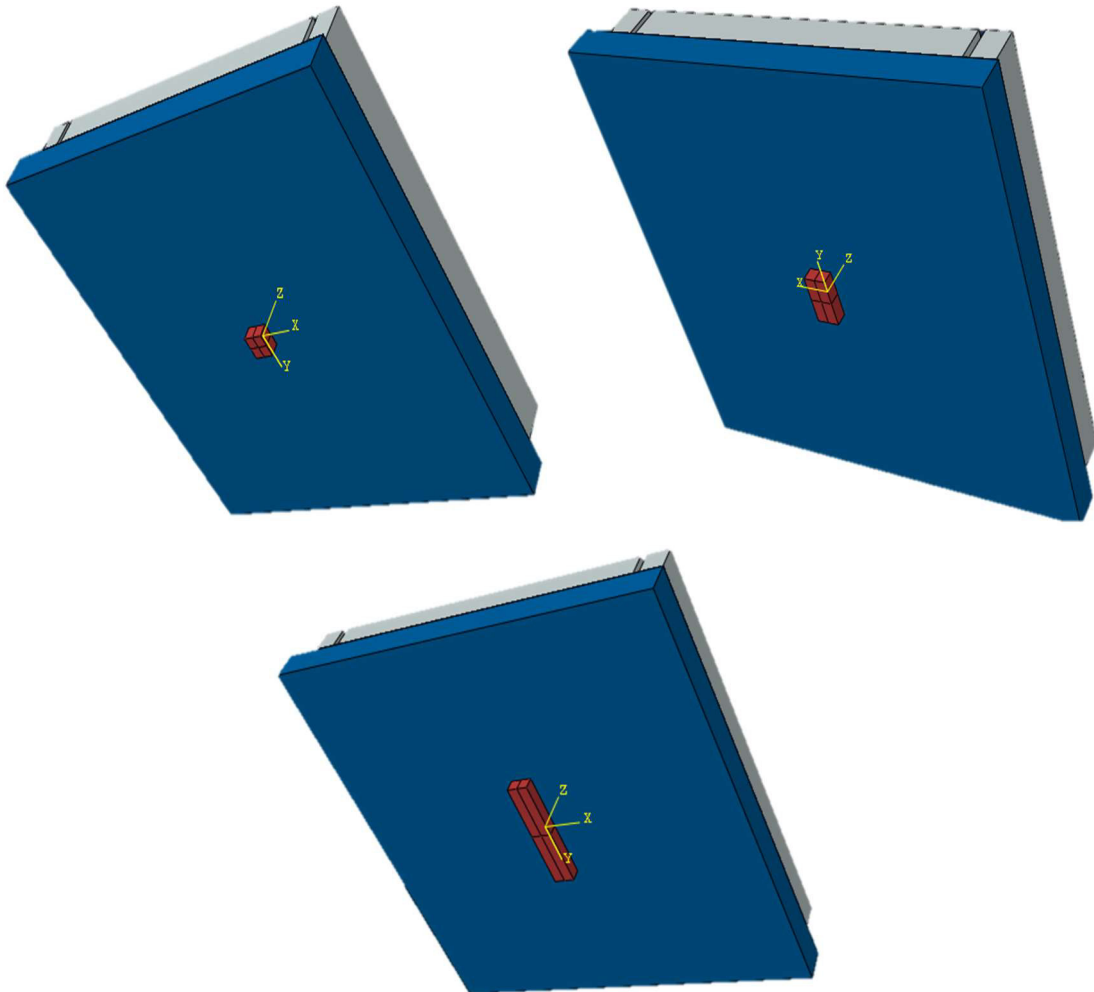
A modelagem das lajes foi feita utilizando todas as dimensões descritas neste item e seguindo os mesmos parâmetros adotados na modelagem da laje L1A do autor Damasceno (2007), como forma de carregamento e condições de contorno. A figura 3.16 e 3.17 mostram as vigas de reação e as chapas metálicas utilizadas na modelagem das lajes.

Figura 3.16. Vigas de reação nas lajes L1, L2 e L3.



Fonte: Autor (2019).

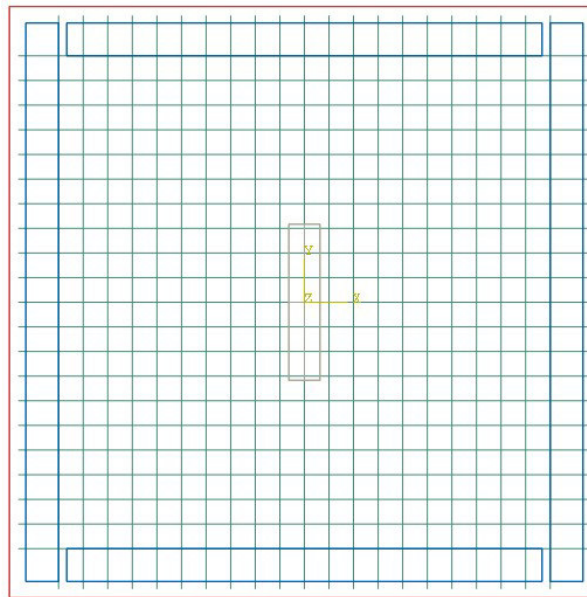
Figura 3.17. Chapa metálica nas lajes L1, L2 e L3.



Fonte: Autor (2019).

A armação foi modelada da forma como foi descrita anteriormente, adotando comprimento e área da seção iguais os reais. A figura 3.18 mostra a modelagem das armações na laje L3. É válido destacar que as modelagens das armações não podem ser feitas de forma que as barras se interceptem, caso isso ocorra é necessário adotar o efeito da passagem de ambas. Sendo assim, buscou-se utilizar as alturas das armaduras encontrados através do posicionamento das barras abaixo do cobrimento das mesmas.

Figura 3.18. Armação da laje L3.



Fonte: Autor (2019).

3.3.2. Modelos constitutivos para os materiais

Segundo Reis (2018), os modelos constitutivos visam alimentar o software com os parâmetros necessários para obtenção dos resultados desejado. Tais parâmetros são responsáveis por descrever de maneira correta as propriedades dos materiais utilizados durante o estudo. Este item abordará sobre as propriedades e os modelos constitutivos adotados para o aço e o concreto, estas propriedades foram inseridas no module property do Abaqus/CAE.

3.3.2.1. Propriedades elásticas

Visando representar as propriedades elásticas do aço e do concreto é utilizado a função Elastic na janela Property do Abaqus/CAE, nesta função é necessário inserir o módulo de elasticidade (E) e o coeficiente de Poisson do material.

O Concreto foi modelado com dois módulos de elasticidade distintos, devido a variação da resistência a compressão do concreto entre as duas séries de laje, tais módulos serão apresentados na seção 3.8. Entretanto, manteve-se o coeficiente de Poisson igual a 0,2 para todas duas séries de lajes. É válido destacar que os dois módulos de elasticidade utilizados neste trabalho são oriundos das recomendações normativas da NBR 6118 (ABNT, 2014), conforme a equação 3.1.

$$E_{ci}=1,0\cdot 5600\cdot \sqrt{f_{ck}}$$

Equação 3.1

Já para o aço foi utilizado o módulo de elasticidade constante de 210 GPa e o coeficiente de Poisson de 0,3. Para este material serão dispensadas propriedades adicionais, haja vista que se adotou, em ambas as séries de lajes, uma alta taxa de armadura para que não houvesse o escoamento da armadura, conduzindo assim a laje a uma ruptura apenas por puncionamento.

3.3.2.2. Propriedades elasto-plásticas do aço

A plasticidade do aço pode ser dada de diversas formas, porém neste trabalho busca-se evitar que a haja escoamento do aço. Para tal, Reis (2018) e Soares (2016), recomendam que seja utilizado a relação tensão deformação que desconsidera o encruamento do aço e que possui elasto-plasticidade perfeita.

Sendo assim foi necessário apenas o uso da função MAXPS na janela Materials, tal função permite que seja inserida a tensão de escoamento do aço e a energia de fratura do mesmo. Portanto, foi adotado os valores de 500 MPa e 5 MPa, consecutivamente.

3.3.2.3. Modelo plástico do Concreto

Segundo a NBR 6118 (2014, ABNT) para tensões acima de $0,5f_c$ o concreto assume um comportamento plástico, onde a peça começa a fissurar e a análise deste comportamento de forma linear fica complexa. O Abaqus possui em seu acervo a ferramenta Concrete Damaged Plasticity (CDP) que trabalha com os valores oriundos do diagrama tensão-deformação conjuntamente com o dano plástico.

Segundo Stangenberg (2008), este modelo foi desenvolvido por Lubliner et al. (1989) e foi aperfeiçoado por Lee (1988) onde o modelo assume uma taxa de fluxo não associado assim como uso de danos isotrópicos e permite a caracterização do material com condições de rigidez após o ponto de ruptura. Segundo Wahalathantri et al. (2011) este modelo assume dois mecanismos de ruptura, sendo a fissuração por tração e o esmagamento do concreto possuindo características uniaxiais por tração e plasticidade na compressão.

Para que o CDP possa funcionar é necessário que o usuário entre com as relações constitutivas do concreto, quando submetidas a compressão e a tração. Tais parâmetros podem ser adquiridos por modelos desenvolvidos numericamente, ou através das relações normativas, esta pesquisa utilizará as relações de tensão e

deformação desenvolvidas na NBR 6118 (2014, ABNT) para compressão e as relações desenvolvidas por Wang & Hsu (2001), mas estas relações serão descritas nas seções seguintes. Visando tornar essa rotina de cálculo mais prática desenvolveu-se uma planilha no software Excel, com o objetivo de calcular tais relações.

Segundo Reis (2018), o CDP é uma propriedade do concreto advinda da mecânica do dano dos meios contínuos, que pode ser explicada como a área de estudo responsável pelas mudanças nos comportamentos dos materiais após as suas alterações físicas começarem a serem desenvolvidas. O modelo também reforça o conceito de dano, que será aprofundado na seção 3.4.

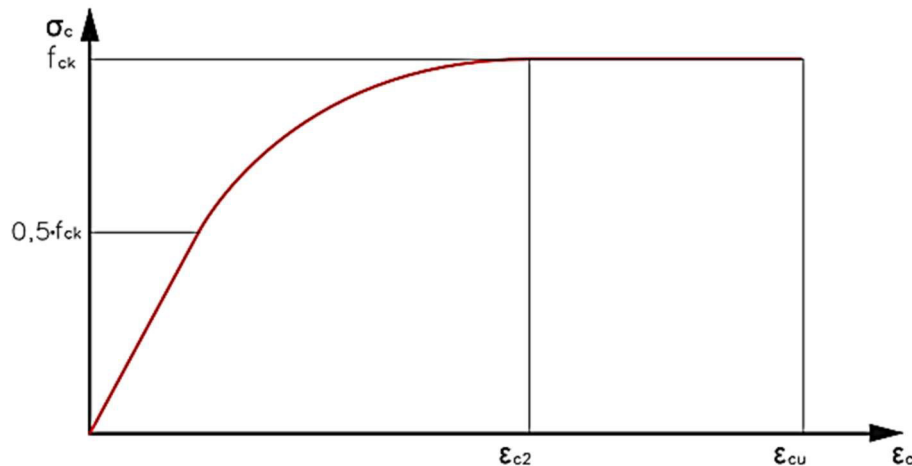
O CDP adota alguns parâmetros para a modelagem, sendo eles o ângulo de dilatação (ψ), a excentricidade (m), a razão entre as resistências no estado biaxial e uniaxial (f_{b0}/f_{c0}) e a razão da variante do tensor desviador no plano meridiano de tração pelo de compressão (K) e o parâmetro de viscosidade. Os valores destes parâmetros são definidos na seção 3.8.

Tao (2015), aborda a importância do uso da energia de fratura G_f , tal fator é a quantificação da energia necessária para abrir uma fissura de tração e depende das propriedades do material (F_c e dimensão do agregado), este é um dos tipos de modelagem do dano a compressão e a tração. Entretanto, como fica complicado definir a dimensão dos agregados utilizados durante esta pesquisa, adotou-se por modelar o dano através do lançamento do dano e deformação inelástica, gerados na mesma planilha utilizada para calcular as relações constitutivas.

3.3.2.3.1. Comportamento do concreto a compressão segundo a NBR 6118:2014

O comportamento do concreto à compressão pode ser descrito através do diagrama tensão-deformação que possui uma primeira fase linear, onde prevalece o comportamento elástico, em seguida, o concreto começa a fissurar e começa-se a descrever um comportamento plástico, o diagrama é mostrado na figura 3.19. A NBR 6118 (ABNT, 2014) admite para valores menores que $0,5f_c$ uma relação linear entre tensão e deformação.

Figura 3.19. Comportamento do concreto a compressão.



Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014)

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), deve-se usar ϵ_{c2} (Deformação no início do patamar plástico) igual a 0,002 e ϵ_{cu} (Deformação na ruptura) como 0,0035, como parâmetros para elaboração do diagrama tensão-deformação e os valores de Tensão a ser encontrada a cada incremento de deformação podem ser calculados através da equação 3.2. Cabe ressaltar que os valores indicados acima só podem ser utilizados para concretos com f_{ck} menor que 50 MPa, para resistências maiores que esta, ambas as deformações devem ser recalculadas. Entretanto, não cabe a esta pesquisa tal ressalva.

$$\sigma_c = 0.85 f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^2 \right] \quad \text{Equação 3.2}$$

Devido à natureza que será dado o uso dos dados encontrados através destes cálculos serem puramente científicas, ou seja, não levarem ao uso prático da estrutura, pode-se trocar o termo de cálculo da resistência a compressão do concreto, pelo valor característico. Entretanto, vale frisar que nesta pesquisa, infelizmente, não pôde ter sido desenvolvido ensaios em laboratórios com moldagem de corpo de prova, sendo assim, adota-se para o valor o valor teórico de f_{ck} e o valor calculado através da equação 3.2 para cálculo dos valores de tensão do diagrama tensão-deformação.

3.3.2.3.1. Comportamento do concreto a tração

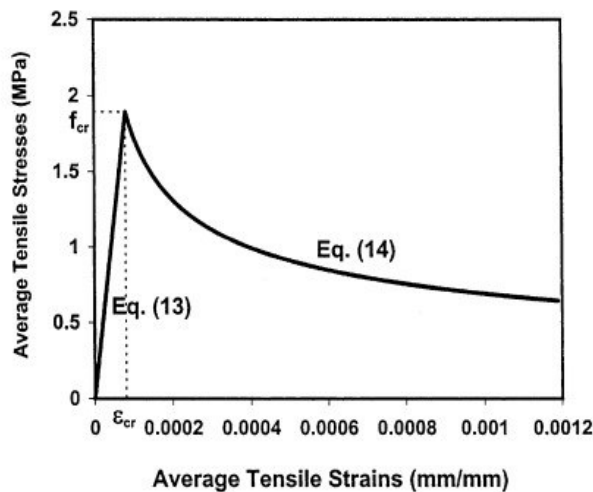
Para representar o comportamento do concreto quando submetido a tração a NBR 6118 (ABNT, 2014) descreve que deve ser feito um diagrama tensão-deformação bilinear. Entretanto, a norma supracitada trabalha apenas com a parte

não-fissurada do concreto. Sendo assim buscou-se em Wang e Hsu (2001) as equações que descrevessem ambas as etapas do diagrama tensão-deformação, sendo estas apresentadas nas equações 3.3 e 3.4, e conduzindo a um diagrama semelhante à figura 3.20.

$$\sigma_t = E_c \cdot \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \leq \varepsilon_{cr} \quad \text{Equação 3.4}$$

$$\sigma_t = f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_t} \right)^{0.4} \quad \varepsilon_t > \varepsilon_{cr} \quad \text{Equação 3.5}$$

Figura 3.20. Diagrama tensão-deformação do concreto submetido à tração.



Fonte: Wang e Hsu (2001).

3.4. Modelo de dano

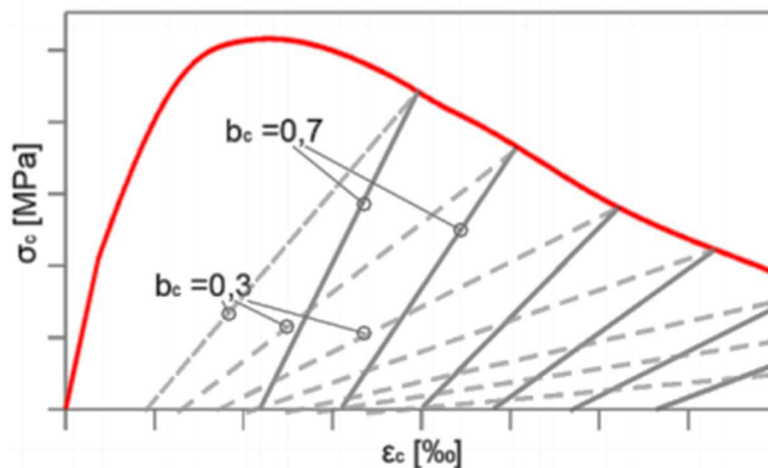
Segundo Reis (2018), quando o concreto está submetido a um ensaio cíclico, surge uma deformação residual oriunda das etapas de recarregamento, tal deformação conduz a uma diferença entre os valores de módulo de elasticidade inicial e o valor após a etapa de recarregamento, pois o segundo irá incorporar a deformação residual em seu valor. Sendo assim o dano pode ser conceituado como a diferença entre esses dois valores de módulo de elasticidade. Aikaterini (2000) define o dano como um fenômeno que quantifica o aparecimento de descontinuidades volumétricas e de superfície, que acontece em materiais sólidos.

Segundo Soares (2016) diversas são as formulações que podem descrever a variável do dano, sendo que o intervalo de resultado sempre se encontra entre 0 e 1,

onde 0 descreve a parte elástica do material e 1 a degradação total do mesmo. Birtel e Mark (2006) por sua vez desenvolveu a formulação encontrada na equação 3.6, onde é descrito a evolução da compressão e tração através da componente do dano que está totalmente ligada a deformação plástica do material, a equação possui o índice i que varia de acordo com a tensão ao qual está sendo submetido, c para compressão e t para tração. Cabe ressaltar que a quantificação do dano inicia apenas na fase plástica do concreto. A figura 3.21 e 3.22 mostram o ensaio de carregamento cíclico tanto para a compressão quanto para a tração, respectivamente.

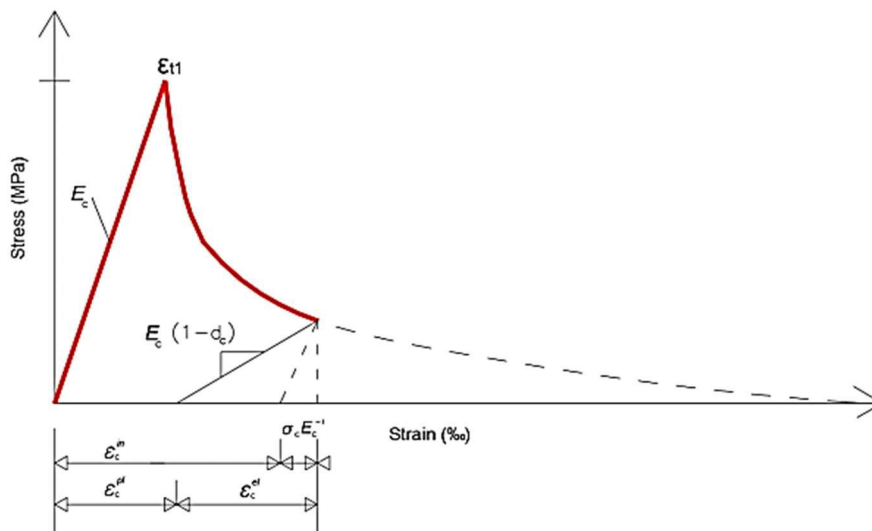
$$d_i = 1 - \frac{\sigma_i E_c^{-1}}{\varepsilon_i^{pl} \left(\frac{1}{b_i} - 1 \right) + \sigma_i E_c^{-1}} \quad \text{Equação 3.6}$$

Figura 3.21. Diagrama tensão-deformação para concreto comprimido.



Fonte: Birtel & Mark (2000).

Figura 3.22. Diagrama tensão-deformação para concreto tracionado.



Fonte: Birtel & Mark (2000).

A equação de dano está totalmente ligada as deformações plásticas e inelásticas do concreto, devido a relação do dano com a teoria da plasticidade, seja ele submetido a compressão ou a tração, tais deformações podem ser encontradas através das equações 3.7 e 3.8, e de igual forma também é feito o uso das constantes (b_c ou b_t) que são encontradas a partir do ensaio de carga cíclica e sempre variam no intervalo de 0 a 1. Birtel e Mark (2006) afirma que a constante b_c pode assumir o valor de 0,7 e a b_t de 0,1. As quantificações das deformações iniciam logo após o início da fase plástica.

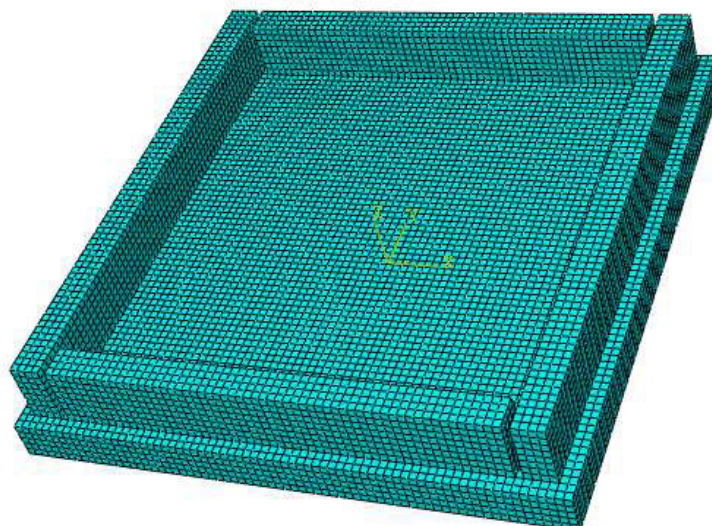
$$\varepsilon_i^{pl} = b_c \varepsilon_i^{in} \quad \text{Equação 3.7}$$

$$\varepsilon_i^{in} = \varepsilon_i - \sigma_i E_c^{-1} \quad \text{Equação 3.8}$$

3.5. Malha

As malhas utilizadas para representar os elementos analisados (vigas de ração, laje, barras de aço e chapas metálicas) tiveram um espaçamento de 25mm, a figura 3.23 mostra a malha da laje L1. Este tamanho foi adotado utilizando como referência os estudos feitos por Ferreira (2016), Soares (2016) e Reis (2018), onde estes puderam comprovar que os resultados são mais satisfatórios quando as malhas possuem espaçamento entre 20 mm e 35 mm.

Figura 3.23. Malha da laje L1.



Fonte: Autor (2019).

Utilizou-se o modelo C3D8 para a modelagem dos elementos volumétricos, sendo estes as vigas de reação, laje e a chapa. Segundo Soares (2016), o modelo C3D8 refere-se a um elemento sólido (3D), com 8 nós e 3 graus de liberdade.

Para a modelagem do aço foi utilizado o elemento T3D2, que segundo Ferreira (2016) é um elemento de geometria linear de barra reto, sendo em 3D e com 2 nós, permitindo 3 graus de liberdade. Tal elemento permite apenas esforços axiais nas barras.

3.6. Modelo de interações de contato

De forma a manter a aderência perfeita entre o aço e o concreto torna-se necessário adotar o uso de ganchos nas extremidades das barras. Entretanto, visando facilitar a modelagem das barras pode-se adotar a interação do tipo *Embedded element*, encontrado na função *Constraints*, este modelo permite que haja compatibilidade entre os deslocamentos das barras de aço com o concreto, simulando assim a aderência perfeita entre ambos.

Na região de contato das peças metálicas com a laje (viga de reação e chapa de carga), foi necessário modelar a ligação do tipo *Tie*, encontrado na função *Constraints*. Segundo Reis (2018), esta ligação vincula os nós dos elementos a fim de não permitir deslizamento entre eles, ou seja, busca-se que as peças se mantenham da forma como foram modeladas, sem que as mesmas saiam do lugar.

O outro tipo de ligação pôde ser configurado através da função *Interaction Propertie*, onde foi configurado a *frictionless* encontrado na aba *Tangencial Behavior* e a *Hard Contact* encontrada na aba *Normal Behavior*. Os dois tipos de contato servem para, segundo Reis (2018), eliminar o atrito entre as peças e evitar que haja penetração de um corpo no outro, respectivamente.

3.7. Análise não linear física e geométrica

Segundo Kimura (2007), as propriedades dos materiais utilizados nas construções dos edifícios de concreto armado, o concreto e o aço, alteram as suas propriedades à medida que o carregamento é aplicado à estrutura gerando assim uma não linearidade física. Outro fator que influencia neste fenômeno é a fissuração que a peça sofre a partir do momento de aplicação de carga, tal fissuração faz com que haja uma perda na rigidez da mesma.

Kimura (2007) também cita que a partir do momento que a estrutura de concreto armado começa a receber cargas ela começa a se deformar e a partir desta deformação ela começa a apresentar um comportamento não linear, a este comportamento dá-se o nome de não linearidade geométrica. A partir do entendimento destes dois fenômenos compreende-se que as estruturas em estudo possuem um comportamento não linear, representado pela não linearidade física e geométrica.

Segundo Ferreira (2016), ao contrário da análise linear, a análise não linear é solucionada com a variação da carga em função do tempo e o tempo total de incremento para a resposta não linear. Assim o Abaqus divide todo o processo em tempos de incremento, onde através do método de Newton-Raphson ele executa várias interações para determinar a solução de cada incremento de tempo.

Segundo Soares (2016) o Abaqus possui duas opções para resolver problemas não lineares através da análise implícita, onde não há condições dinâmicas, sendo o método *Riks* e o *Static General*. O método *Static General* será utilizado nesta pesquisa, sendo que foram utilizados os parâmetros que constam na tabela 3.2.

Tabela 3.2. Parâmetros do método *Static General*.

Initial	Minimum	Maximum	Increment
0.1	1E-15	1	10000

Fonte: Autor (2019).

3.8. Propriedade dos materiais

Visando a modelagem correta dos materiais foram possíveis descrever as propriedades dos materiais de acordo com a série de lajes. Tomando como item inicial o concreto, foram utilizadas duas diferentes propriedades dos materiais, sendo que para a primeira série de lajes foram utilizados os valores encontrados experimentalmente através dos processos normativos, que podem ser vistos na tabela 3.3, já para a segunda série de lajes foi possível estabelecer-se alguns valores para a propriedade dos materiais, baseando-se nas recomendações normativas da NBR 6118 (ABNT, 2014), tais parâmetros são vistos na tabela 3.4.

Tabela 3.3. Características do concreto para a laje L1A de Damasceno (2007).

Concreto		
f_{ck} (MPa)	E_c (MPa)	V
41,3	26500	0,2

Fonte: Damasceno (2007).

Tabela 3.4. Características do concreto para as lajes L1, L2 e L3 autorais.

Concreto		
f_{ck} (MPa)	E_c (MPa)	V
30	30672.5	0,2

Fonte: Autor (2019).

Os valores que foram utilizados nos parâmetros m , f_{cb}/f_{c0} e K foram considerados os mesmo que foram recomendados pelo programa, sendo os mesmos encontrados na abordagem de Pinto (2015), Soares (2016), Ferreira (2016) e Reis (2018). Os parâmetros supracitados estão descritos na tabela 3.5.

Tabela 3.5. Parâmetros usados no CDP para as duas séries.

Ψ	M	f_{cb}/f_{c0}	K
38°	0,1	1,16	0,6666

Fonte: Autor (2019).

Os valores utilizados para a modelagem das propriedades do aço estão descritos na tabela 3.6.

Tabela 3.6. Características do aço.

f_y (MPa)	E_s (MPa)	V
500	210000	0,3

Fonte: Autor (2019).

4. Análise dos resultados

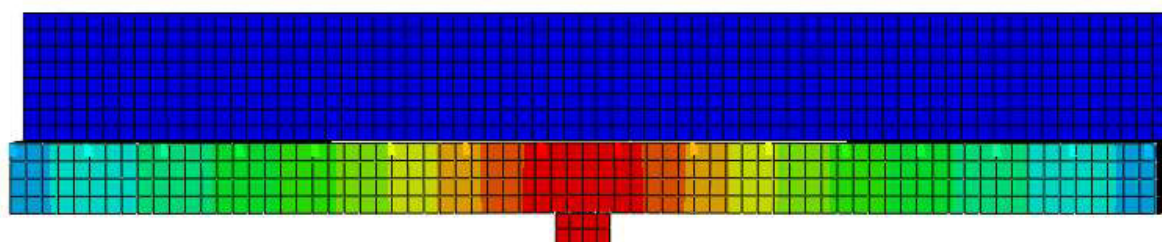
4.1. Análise dos deslocamentos verticais

As seções a seguir tratarão sobre a análise dos valores de deslocamentos verticais oriundos das modelagens computacionais, comparando-os com os valores experimentais (para a laje L1A), e com as estimativas normativas da NBR 6118 (2014, ABNT).

4.1.1. Damasceno (2007)

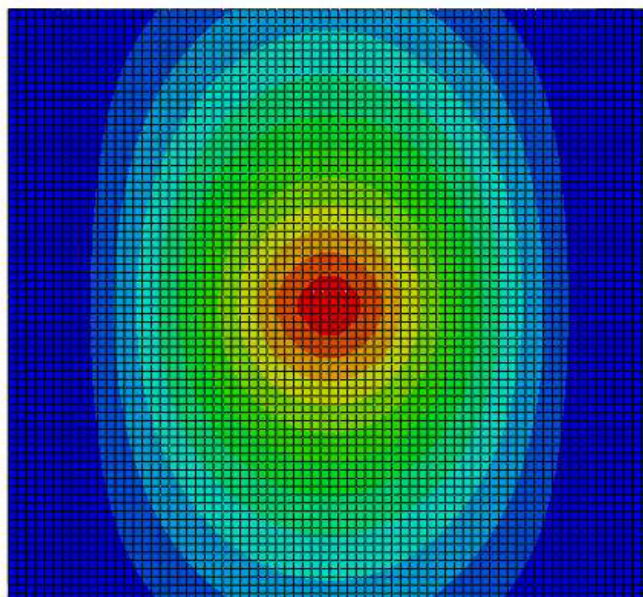
As figuras 4.1 e 4.2 apresentam a lajes L1A, em sua configuração deformada apresentando os dados de deslocamento no sentido do eixo Z, adotado como eixo vertical das peças. Pode-se perceber que a laje L1A, de Damasceno (2007), apresentou na figura 4.1 um maior deslocamento na parte central e este deslocamento se distribuiu para as lajes em formato oval, visível na figura 4.2, do ponto de aplicação da carga até as extremidades.

Figura 4.1. Corte na laje L1A, demonstrando os deslocamentos no eixo Z.



Fonte: Autor (2019).

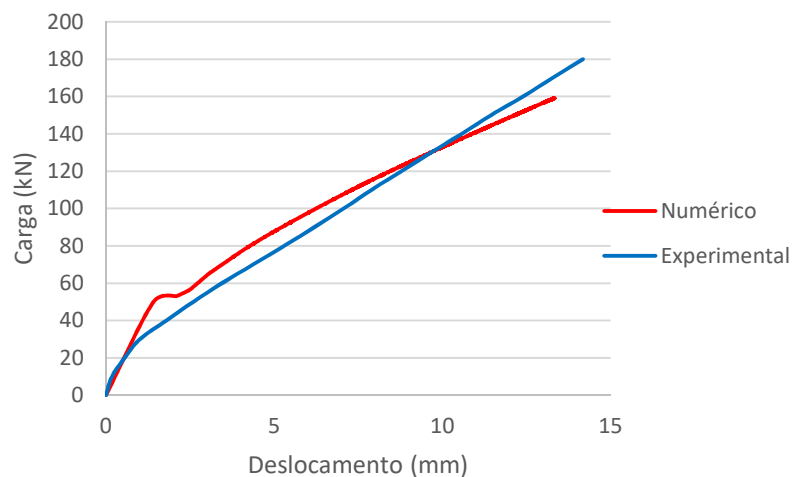
Figura 4.2. Laje L1A demonstrando os deslocamentos no eixo Z.



Fonte: Autor (2019).

A figura 4.3 demonstra o gráfico deslocamento x carga aplicada na laje L1A, gerado com os valores obtidos do resultado da modelagem computacional em comparação ao valor da análise experimental. O gráfico apresenta boa proximidade entre os resultados obtidos da modelagem computacional com os valores obtidos experimentalmente por Damasceno (2007). Entretanto, o modelo computacional apresentou uma carga de ruptura abaixo do encontrado na análise experimental, tal fator pode ser explicado pela zona elástica da laje, já que o módulo de elasticidade do autor é muito baixo se comparado ao módulo estimado pela norma NBR 6118 (2014, ABNT), conduzindo a equação de dano a valores reduzidos. A tabela 4.1 organiza os dados referentes ao deslocamento vertical máximo da Laje L1A, comparando os valores experimentais, numéricos e normativos.

Figura 4.3. Gráfico Deslocamentos x Carga na laje L1A de Damasceno (2007).



Fonte: Autor (2019).

Tabela 4.1. Deslocamentos máximos para a laje L1A de Damasceno (2007).

Método		Deslocamento (mm)
Método	Procedimento	L1A
Normativo	NBR6118	27,12
Computacional	NBR6118	13,34
Experimental		14,18
Diferença Normativo x Computacional (%)		-51%
Diferença Normativo x Experimental (%)		-48%
Diferença Computacional x Experimental (%)		6%

Fonte: Autor (2019).

A diferença percentual entre a laje computacional e a laje experimental, onde a primeira é 6% menor que a segunda, mostra a proximidade que houve entre as duas análises. Nota-se que a fase elástica da laje computacional termina com uma carga mais elevada que a laje experimental e logo em seguida o comportamento gera um patamar, onde há pouco deslocamento com o acréscimo de carga, este fato pode ser explicado pela não coincidência numérica entre as fases elásticas das lajes.

Observando a diferença entre os valores de deslocamento experimental e normativo, estando o resultado experimental 48% menor que o valor normativo, o mesmo acontece com o resultado computacional, estando 51% menor, nota-se que a norma NBR 6118 (2014, ABNT) apresenta-se a favor da segurança. Tal consideração deve ser feita pois ao realizar o procedimento de cálculo do dimensionamento e verificação segundo a norma supracitada majora-se a carga, levando ao proporcional aumento da flecha real.

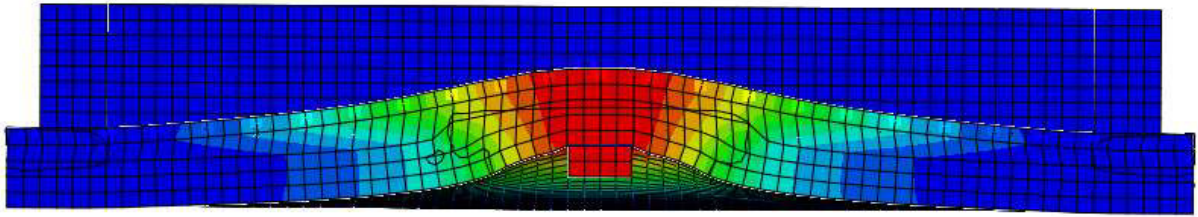
4.1.2. Lajes Autorais

Esta seção aborda os valores obtidos através da modelagem computacional. Sendo que serão apresentados os deslocamentos das lajes L1, L2 e L3 através dos resultados extraídos do Abaqus. Assim como os gráficos do deslocamento em função da carga aplicada nas lajes. Os valores dos deslocamentos foram organizados na tabela 4.2 e são comparados com as estimativas normativas da NBR 6118 (2014, ABNT).

4.1.2.1. Laje L1

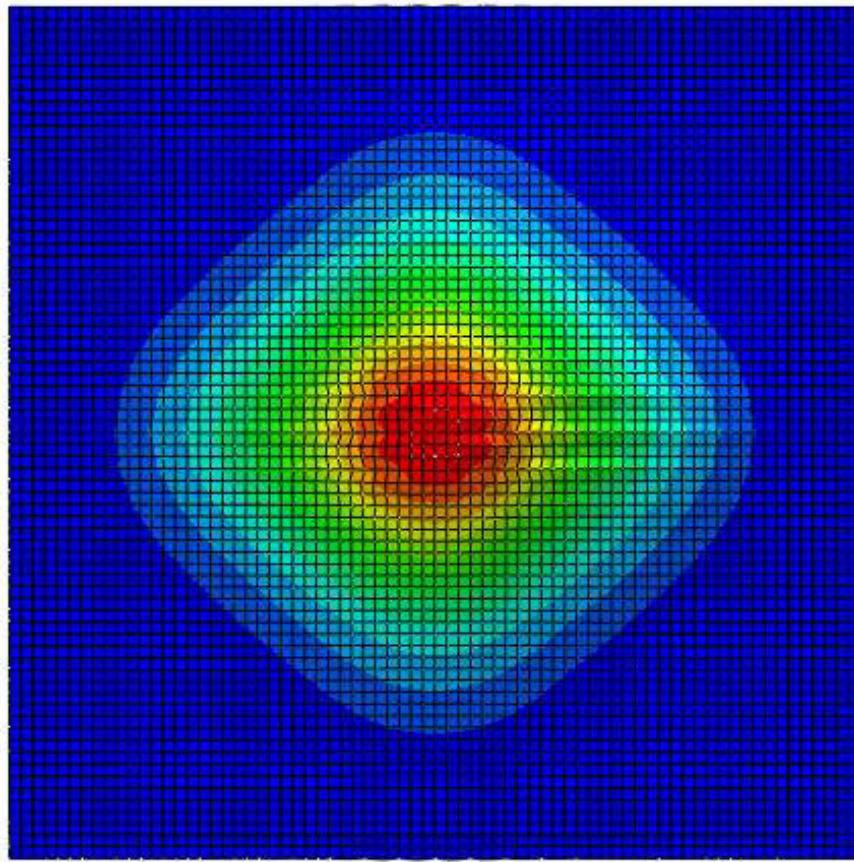
A figura 4.4 e 4.5 representam a laje L1, autoral. Os resultados, novamente, mostram que os deslocamentos das lajes se deu do ponto de aplicação da carga para as extremidades, visível na figura 4.4. Diferente da laje L1A, a laje L1, deformou consideravelmente em relação ao eixo Z (verticalmente), tal comportamento pode-se ser explicado pela baixa rigidez do pilar, que possui IR igual a 1. De igual forma, infere-se que a deformação da laje já passa a ter um sentido mais circular, visível na figura 4.5.

Figura 4.4. Deslocamento vertical na laje L1 em corte.



Fonte: Autor (2019).

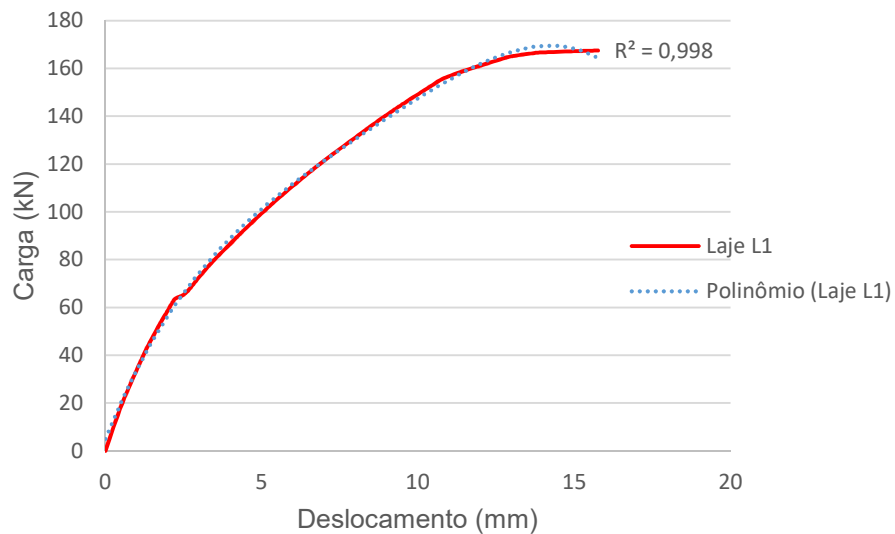
Figura 4.5. Deslocamento vertical na laje L1 em planta.



Fonte: Autor (2019).

O gráfico que está na figura 4.6 descreve o comportamento do deslocamento da laje L1 de acordo com o acréscimo de carga realizado durante o modelo computacional. Ao analisar o gráfico é possível verificar que existe um patamar entre as cargas de 60kN e 80kN, onde tem-se um pequeno acréscimo de deslocamento em relação ao aumento da carga. O aumento do deslocamento durante o incremento de carga segue uma tendência polinomial de grau 4.

Figura 4.6. Gráfico Deslocamento x Carga na laje L1.

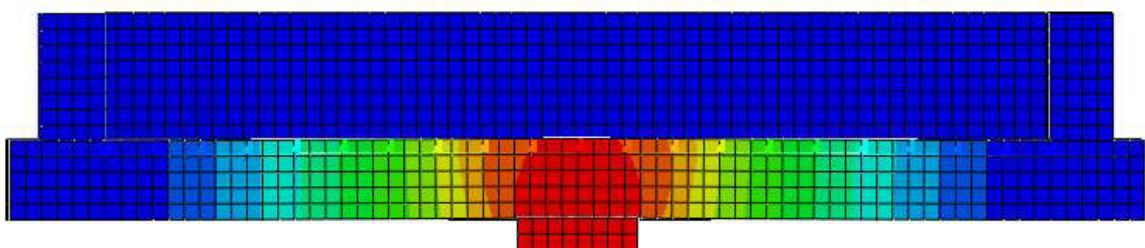


Fonte: Autor (2019).

4.1.2.2. Laje L2

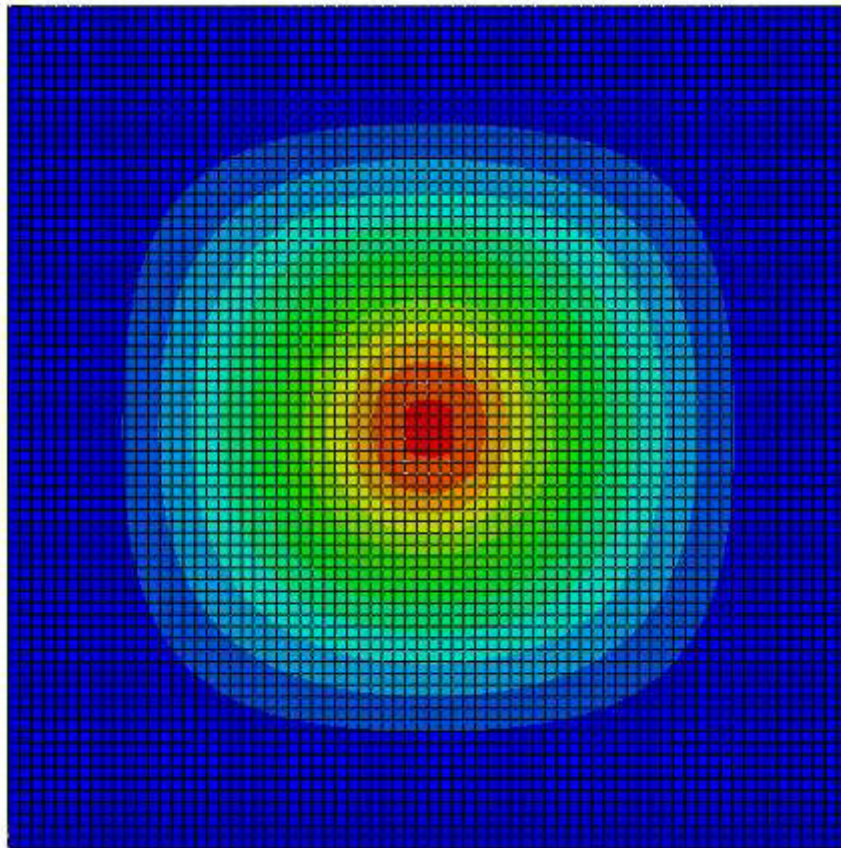
As figuras 4.7 e 4.8 ilustram os deslocamentos da laje autoral L2. A figura 4.7, mostra que o deslocamento vertical começa a diminuir em relação as lajes L1A e L1, apresentando uma área em vermelho (maiores valores), bem mais reduzida e próximo as laterais da chapa. Identifica-se que a laje deslocou menos em relação a laje L1, esse fato deve-se a maior rigidez na chapa que representa o pilar, tal aumento foi gerado pelo aumento na seção da chapa, que apresentou um IR igual a 2. Nota-se na figura 4.8, que o deslocamento possui um perfil mais circular, assemelhando-se a forma de ruptura de punção de lajes lisas.

Figura 4.7. Corte da laje L2 demonstrando os deslocamentos no eixo Z.



Fonte: Autor (2019).

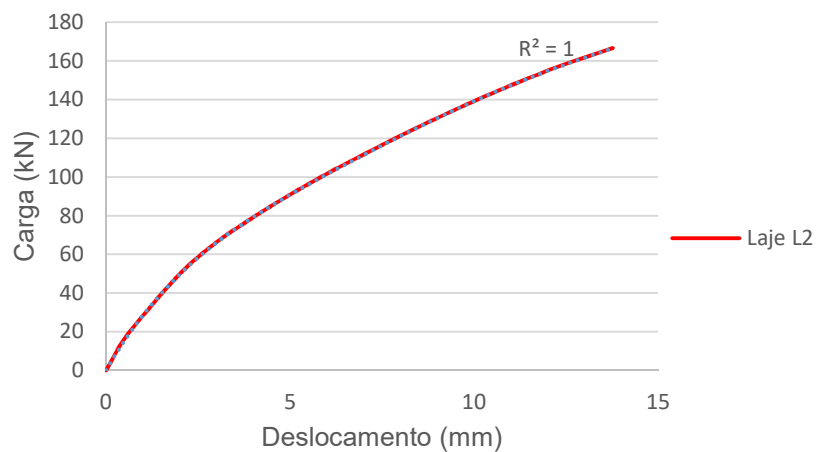
Figura 4.8. Deslocamentos no eixo Z na laje L2.



Fonte Autor (2019).

O comportamento do deslocamento em função do acréscimo de carga da laje L2 durante a modelagem computacional é apresentado na figura 4.9. Nota-se que até próximo a carga de 60kN há um pequeno aumento de deslocamento após essa fase os deslocamentos começam a ter uma taxa maior de crescimento. Há uma aproximação entre a carga e o deslocamento máximo desta laje e anterior. A relação entre carga e deslocamento possui uma tendência polinomial de grau 5.

Figura 4.9. Gráfico Deslocamento x Carga das lajes L2.

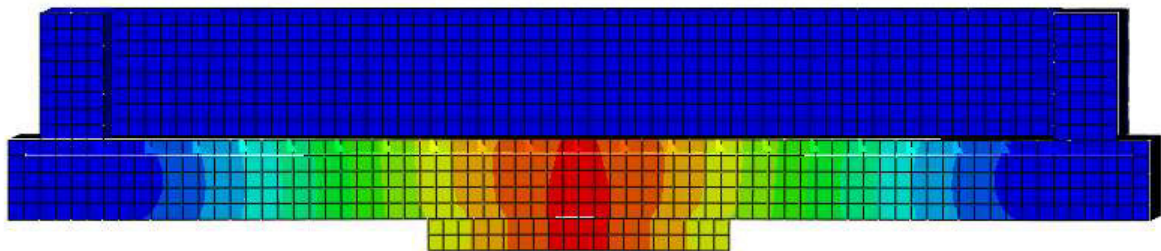


Fonte: Autor (2019).

4.1.2.3. Laje L3

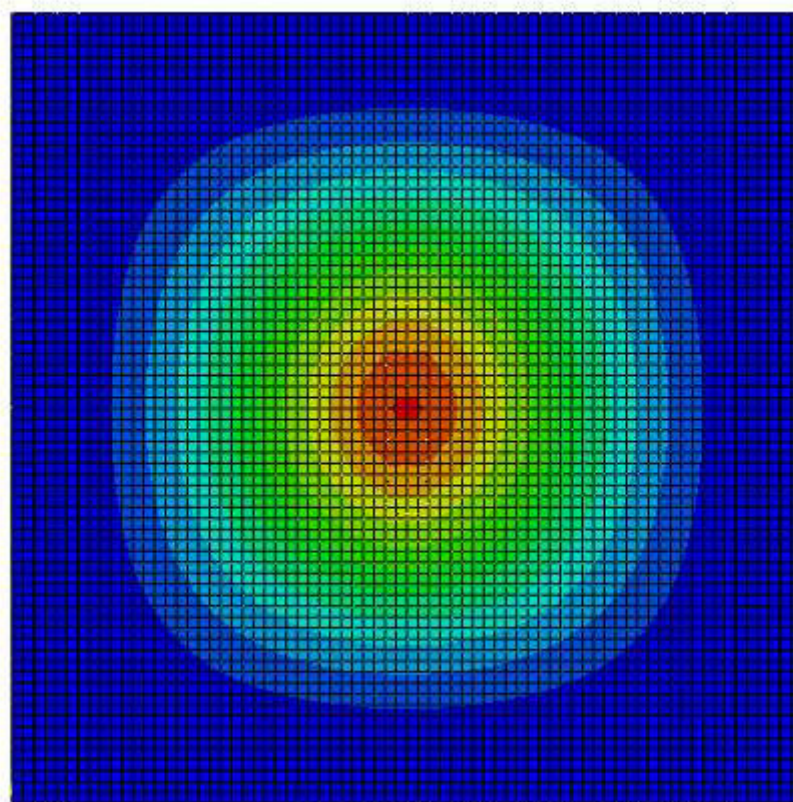
A laje autoral L3, está representada nas figuras 4.10 e 4.11. Na figura 4.10, pôde-se inferir a redução no deslocamento vertical da viga, que passa a ter o tamanho do pilar e a reduzir o seu valor à medida que a força se aproxima da superfície superior da laje, novamente este comportamento deve-se ao aumento da rigidez do pilar, que agora apresenta IR igual a 5. O comportamento do deslocamento da laje agora passa a apresentar um formato circular, visto na figura 4.11.

Figura 4.10. Deslocamentos verticais na Laje L3, em corte.



Fonte: Autor (2019).

Figura 4.11. Deslocamentos verticais na Laje L3, em planta.

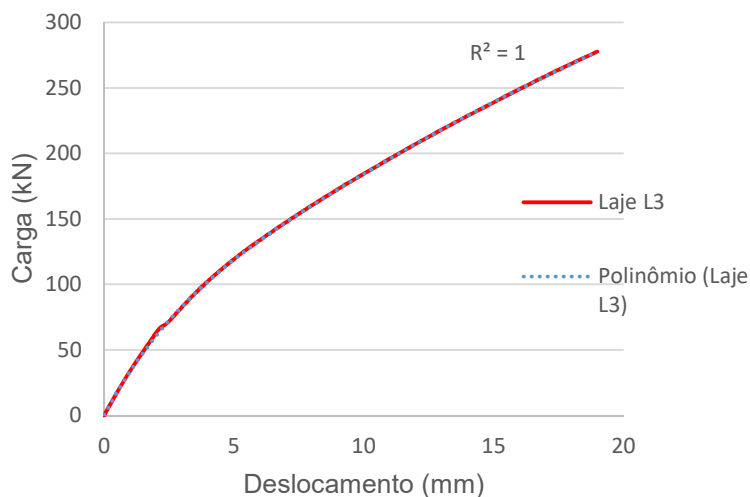


Fonte: Autor (2019).

A figura 4.12 demonstra o gráfico que mostra o aumento da deformação em função dos passos de incremento de carga. Nota-se que assim como o ocorrido na laje L1,

existe um patamar no gráfico, porém desta vez encontra-se entre as cargas 50kN e 100kN. Também se infere um aumento na carga e no deslocamento máximo na laje L3 em relação as demais lajes. Novamente a relação entre deslocamento e carga apresenta uma tendência polinomial de grau 5.

Figura 4.12. Gráfico Deslocamento x Carga Laje L3.



Fonte: Autor (2019).

4.1.2.4. Comparação entre os deslocamentos máximos

A partir dos diagramas gerados foi possível determinar a carga de ruptura e o deslocamento máximo gerado nas lajes, esses resultados foram colocados na tabela 4.2. Os valores computacionais obtiveram uma diferença de 9%, para a laje L2, e 4%, para a laje L3, quando comparados aos resultados normativos. A proximidade destes resultados auxilia na validação da modelagem computacional.

O resultado da laje L1 apresenta-se 15% superior ao normativo, esse valor pode ser explicado pelas figuras apresentadas na seção 4.1.2.2, onde essa foi a única laje que apresentou deslocamentos mais significativos, partindo da observação que a chapa metálica utilizada para o carregamento penetrou na laje. Acredita-se que esse fenômeno tenha acontecido devido a menor rigidez da chapa que representava o pilar no ensaio, já que a chapa possui Índice de Retangularidade 1..

Tabela 4.2. Comparação entre os deslocamentos máximos das lajes L1, L2 e L3.

Método		Deslocamento (mm)		
Método	Procedimento	L1	L2	L3
Normativo	NBR 6118	13,38	14,97	19,66
Computacional	NBR 6118	15,77	13,77	18,98
Diferença Computacional x Normativo (%)		15%	-9%	-4%

Fonte: Autor (2019).

4.2. Cargas de Ruptura

Esta seção aborda as cargas de ruptura das lajes modeladas, sendo que estas foram obtidas através dos gráficos obtidos da seção anterior. Estes valores são provenientes dos resultados obtidos através da modelagem computacional através do Abaqus e serão comparados nas tabelas 4.3 e 4.4 com as estimativas da norma NBR 6118 (2014, ABNT) e com a carga experimental, no caso da laje L1A.

4.2.1. Damasceno (2007)

A laje L1A mostrou maior carga de ruptura no método experimental (188,5kN), sendo 18% maior que o valor obtido através do método computacional. Tal comportamento pode ser explicado pelo baixo módulo de elasticidade encontrado por Damasceno (2007) em seu ensaio, esse valor conduz as equações de dano utilizadas no *CDP* a valores baixos, devido a pequena elasticidade do concreto.

A comparação entre os métodos normativos e computacional já apresenta uma diferença menor, sendo o computacional 2% maior que o normativo. Essa diferença também é encontrada entre o normativo e o experimental, de 20%. Tal comportamento demonstra que a norma está subestimando o valor da ruptura, sendo assim essa situação só é aceitável quando se trata de um projeto, haja vista que haverá majorações e minorações nos valores de solicitação e resistência

Tabela 4.3. Comparação cargas de ruptura da laje L1A.

Método		Carga de Ruptura (kN)
Método	Procedimento	L1A
Normativo	NBR6118 (2014)	156,52
Computacional	NBR6118	160
	Experimental	188,5
	Diferença Normativo x Computacional	2%
	Diferença Normativo x Experimental	20%
	Diferença Computacional x Experimental	18%

Fonte: Autor (2019).

4.2.2. Lajes Autorais

Nas lajes autorais percebem-se que os valores das cargas de ruptura das lajes L1 e L2 encontram-se bem próximos, estando a L2 com um valor 0,48% menor que a L1. Entretanto, a carga de ruptura da laje L3 estando 67% maior que a L2 e 66% maior que a L1, esse aumento pode ser relacionado com o aumento de rigidez na chapa de reação devido ao aumento do índice de retangularidade do pilar para 5.

As lajes L1 e L2 apresentaram carga de ruptura 11% e 24% menor que a estimativa de norma, o que demonstra que a NBR 6118 (2014, ABNT) está indo a favor da segurança. Entretanto, o valor da carga da L3 está 3% maior que a normativa.

Tabela 4.4. Comparação cargas de ruptura das lajes L1, L2 e L3.

Método		Carga de Ruptura (kN)		
Método	Procedimento	L1	L2	L3
Normativo	NBR 6118	185,18	206,28	269,56
Computacional	NBR 6118	167,48	166,67	277,78
	Diferença Computacional x Normativo (%)	11%	24%	-3%

Fonte: Autor (2019).

4.2.3. Comparação com outros autores

Visando validar os dados obtidos neste trabalho através da modelagem computacional buscou-se comparar os resultados com resultados obtidos experimentalmente por outros autores. Cabe destacar que as pesquisas de Silva (2005), Mouro (2006) e Moraes Neto (2007) possuem características geométricas semelhantes, destoando apenas a resistência do concreto utilizada por Silva (2005), Moraes Neto (2007) e Damasceno (2007).

As lajes ensaiadas por Mouro e Silva apresentaram valores, em média, 52% maiores que os resultados encontrados nas lajes, sendo os valores com IR 1 47% maiores e os valores com IR 2 58% maiores. As pesquisas de Moraes Neto (2007) e Damasceno (2007) foram as pesquisas experimentais que ficaram mais próximos do que o encontrado nesta pesquisa, para valores de IR 1 e IR 5. O resultado que apresentou maior proximidade foi a laje L3 em comparação com a L3MN e a L1AD, estando aquela 6% menor que estas.

Tabela 4.5. Comparação com a carga de ruptura de outras pesquisas.

	Lajes	Índice de Retangularidade	Carga de ruptura (kN)	Laje Autoral x Pesquisadores
Autorais	L1	1	167,48	-
	L2	2	166,67	-
	L3	5	277,78	-
Silva (2005) (exp)	L1S	1	273	-39%
	L2S	2	401	-58%
Mouro (2006) (exp)	L1M	1	375	-55%
	L5M	2,03	385	-57%
Moraes Neto (2007) (exp)	L1MN	1	224	-25%
	L3MN	5	294	-6%
Damasceno (2007) (exp)	L1AD	1	188,5	-11%
	L3AD	5	297	-6%

Fonte: Autor (2019)

5. Conclusão

5.1. Deslocamentos Verticais

A laje L1A analisada numericamente neste trabalho, mostrou proximidade com a laje analisada experimentalmente por Damasceno (2007), apresentando uma diferença de apenas 6% entre os deslocamentos. Em comparação ao valor estimado normativamente o deslocamento obtido computacional foi de 48% menor.

Os deslocamentos verticais máximos obtidos na modelagem se apresentaram próximos as previsões normativas. Estando a L1 cerca de 15% maior que o valor previsto, valor que pode ter sido causado pelo alto deslocamento devido à baixa rigidez da chapa metálica utilizada para representar o pilar. Já os valores da laje L2 e L3 estavam menores que os normativos, o que indica que conduz a validação dos resultados da modelagem computacional.

5.2. Carga de Ruptura

A carga de ruptura da laje L1A apresentou-se menor que a laje experimental ensaiada por Damasceno (2007). Entretanto, este comportamento foi explicado pelo baixo módulo de elasticidade do modelo experimental. Quanto a comparação com a norma NBR 6118 (2014, ABNT), tanto o valor experimental quanto o computacional mostraram-se superiores, o que mostra o conservadorismo da norma.

Quanto as lajes autorais, as cargas de ruptura das lajes L1 e L2 tiveram seus valores aproximados entre um e outro, porém abaixo do limite normativo. Já a laje L3 apresentou valor 66% e 67% maiores que a L1 e L2 e também apresentou a cima do normativo. Esperava-se que as cargas últimas das lajes L1 e L2 fossem maiores e mais próximas as estimativas normativas.

Quando comparado com os resultados de outros pesquisadores a laje L3 foi a que apresentou melhores resultados, apresentando uma diferença de cerca de 6%. Embora os outros trabalhos utilizem concreto com resistências superiores ao desta pesquisa o módulo de elasticidade obtidos por eles foram menores que o desta, o que pode ter compensado a diferença.

5.3. Modelo computacional

O modelo computacional adotado se julga válido para a realização de análises numéricas não lineares de lajes lisas submetidas ao punção, devido à proximidade dos resultados da modelagem da laje L1A com os valores reais. Destaca-se que os resultados que foram obtidos com grande diferença quando comparado a outras pesquisas podem ser justificados pelas características e as propriedades dos materiais utilizados. O método torna-se mais eficiente com o uso de todos os dados dos materiais utilizados.

5.4. Sugestões para trabalhos futuros

Deixa-se a sugestão para trabalhos futuros que complementem ou utilizem os resultados e a metodologia deste. Sendo estes:

- Analisar a influência da armadura de punção em lajes lisas utilizando o Abaqus, variando a presença, quantidade e distribuição;
- Analisar a viabilidade do modelo computacional utilizando lajes lisas com concreto de alto desempenho;
- Desenvolver este trabalho aumentando a quantidade de lajes, para a ampliação dos resultados.

Referências Bibliográficas

ABAQUS, 2016. Abaqus. Abaqus 6.12 Documentation Manual, 2016. Downloaded: 12-012016.

ALBUQUERQUE, E. J. P. **Punção em lajes lisas com armadura de cisalhamento e pilares de centro retangulares**. 2010. 205p. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília.

ALFARAH, B.; LOPEZ-ALMANSA, F.; OLLER, S., 2017. New methodology for calculating damage variables evolution in plastic damage model for rc structures. *Engineering Structures*, v. 132, pp.70-86., 2017.

ALVES, Vinicius Sandovani da Silva. *et al.* **Avaliação de punção em lajes lisas variando o índice de retangularidade dos pilares através dos métodos de cálculo normativos e método dos elementos finitos**. In: 58 Congresso Brasileiro de Concreto, 2016, Belo Horizonte, Anais... Belo Horizonte, 2016.

ASSOCIACAO BRASILEIRA DE NORMAS TECNICAS. NBR 6118 - **Projeto de estruturas de concreto**. Rio de Janeiro, 2014.

BIRTEL, V.; MARK, P. **Parametrised finite element modelling of rc beam shear failure**. In: Abaqus Users Conference, 2006

CARVALHO, Roberto Chust. PINHEIRO, Libânio Miranda. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. vol.2. 1. ed. Pini, 2009.

CARVALHO, R. C., FILHO, J. R. de F, **Calculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado.**, Sao Paulo: Editora UFSCAR Sao Carlos 2015.

CHAUDHARI, S. V.; CHAKRABARTI, M. A. **Modeling of concrete for nonlinear analysis Using Finite Element Code ABAQUS**. International Journal of Computer Applications, n. 7, v. 44, p. 14-18, 2012.

DAMASCENO, L. S. R. **Analise experimental de lajes lisas unidirecionais de concreto armado com pilares retangulares ao puncionamento**. Dissertação de Mestrado. Centro Tecnológico, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós Graduação em engenharia Civil, Universidade Federal do Para, Belém. 2007.

FERREIRA, Maurício de Pina. **Análise experimental de lajes lisas unidirecionais de concreto armado ao puncionamento simétrico ou assimétrico**. 2006. 242p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Belém.

FERREIRA, Maurício de Pina. **Punção em lajes lisas de concreto armado com armaduras de cisalhamento e momentos desbalanceados**. 2010. 275p. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília.

FERREIRA, Micael Rodrigues. **Análise não-linear por elementos finitos de vigas de betão armado à torção**. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2016.

GENIKOMSOU, Aikaterini S.; POLAK, Maria A., **Damaged plasticity modelling of concrete finite element analysis of reinforced concrete slabs**. 9th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures. 2016, Berkley.

HAWKINS, N. M., FALSSSEN, H. B., HINOJOSA, R. C. **Influence of column rectangularity on the behavior of flat plate structures**. Publication SP-30, American Concrete Institute, Detroit, pp.127-146, 1971.

HEMZAH, S.A., AL-OBAIDI, Salam, SALIM, Thulfiqar. **Punching shear model for normal and high-strength concrete slabs reinforced with CFRP or steel bars**. In: Jordan Journal of Civil Engineering, N. 2, Vol. 13, Jordânia, pp. 250-268, 2019.

KIMURA, Alio – **Informática Aplicada em Estruturas de Concreto Armado**. São Paulo: Editora PINI Ltda., 2007.

LUBLINER, J.; OLIVER, J.; OLLER, S.; ONATE, E. **A plastic-damage model for concrete**. International Journal of Solids and Structures, no. 3, vol. 25, pp. 229-326, 1989.

MORAES NETO, Bernado Nunes de. **Análise experimental de lajes lisas bidirecionais de concreto armado com estribos inclinados e pilares retangulares sujeitas ao punçionamento simétrico**. 2007. 260p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Belém.

MOURO, Valéria Conceição. **Punção em lajes cogumelos: estudo da retangularidade dos pilares**. Dissertação de mestrado. Escola de engenharia civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2007.

MUTTONI, A. **Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement**. ACI Structural Journal, July/August 2008.

PINTO, V. C., **Punção em lajes lisas bidirecionais de concreto armado com furos e pilares com seção transversal em L**. Dissertação de Mestrado. Centro Tecnológico, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Para. Belém, Para. 2015.

REIS, Luciano Carneiro. **Análise não-linear de lajes em concreto armado com furos submetidas ao punçionamento**. Dissertação de mestrado, Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará, 2018.

SESSA, Thiago da Cruz. **Colapso Progressivo de edificações de concreto armado em construção**. 2017. 132p. Dissertação de Mestrado em Ciências em Engenharia Civil. Programa de Pós-graduação e pesquisa em engenharia (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SILVA, J.A.; GOMES, R. B., **Resistência à punção de lajes cogumelo de concreto armado com armadura de cisalhamento, furos e colunas retangulares**. V Simpósio epusp sobre estruturas de concreto, 2003, Goiás.

SOARES, Leide Manuel dos Santos. **Análise numérica não linear de ligações pilares laje fungiforme**. Dissertação de mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2016.

SUMER, Y.; AKTAS, M., **Defining parameters for concrete damage plasticity model**. Challenge Journal of Structural Mechanics, v. 1, n. 3, pp. 149-155. 2015.

TAO, Y. CHEN, J. F. **Concrete Damage Plasticity model for modeling FRP-to-Concrete bond behavior**. Journal of Composites for Construction, Vol. 19, N.1, Reston, VA, 2015.

VAZ, Ana Paula Rodrigues. **Resistência à punção em lajes cogumelo de concreto armado** – Uma contribuição para a definição de armadura mínima de cisalhamento. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2007.

WAHALATHANTRI, B.L., THAMBIRATNAM, D.P., CHAN, T.H.T., & FAWZIA, S. **A material model for flexural crack simulation in reinforced concrete elements using ABAQUS**. In: Proceedings of the First International Conference on Engineering, Designing and Developing the Built Environment for Sustainable Wellbeing. Queensland University of Technology, Brisbane, Qld, pp. 260-264, 2011.

WANG, Taijun. Hsu, Thomas T. C. **Non linear finite element analysis of concrete structures using new constitutive models**. Computers & Structures, v. 79, n. 32, pp. 2781-2791. 2001.

WINKLER, K.; STANGENBERG, F., **Numerical analysis of punching shear failure of reinforced concrete slabs**. Abaqus Users' Conference, pp. 1-15. 2008.

APÊNDICES

APÊNDICE A – DESLOCAMENTOS VERTICAIS COMPUTACIONAIS NO CENTRO DO VÃO DA LAJE L1A DAMASCENO (2007).

Carga (kN)	Deslocamento (mm)	Carga (kN)	Deslocamento (mm)	Carga (kN)	Deslocamento (mm)
0	0	85	4,738848	122,5	8,745984
50	1,4158208	87,5	4,979264	125	9,050112
52,5	1,4158208	90	5,2256576	127,5	9,350656
55	2,2549888	92,5	5,4802688	130	9,652288
57,5	2,5123008	95	5,7211712	132,5	9,960512
60	2,694592	97,5	5,9892096	135	10,26752
62,5	2,7750976	100	6,238464	137,5	10,578688
65	2,8962432	102,5	6,496384	140	10,88736
67,5	3,0862528	105	6,77632	142,5	11,202624
70	3,4299136	107,5	7,033664	145	11,516864
72,5	3,6590272	110	7,31264	147,5	11,830976
75	3,84592	112,5	7,585408	150	12,152704
77,5	4,0643072	115	7,866304	152,5	12,471616
80	4,2783872	117,5	8,157376	155	12,78464
82,5	4,5096512	120	8,445376	157,5	13,118144
				160	13,33824

APÊNDICE B – DESLOCAMENTOS VERTICAIS EXPERIMENTAIS NO CENTRO DO VÃO DA LAJE L1A DAMASCENO (2007).

Carga (kN)	Deslocamento (mm)
0,0	0,00
10,0	0,18
20,0	0,56
30,0	1,01
40,0	1,80
50,0	2,60
60,0	3,45
70,0	4,38
80,0	5,30
90,0	6,20
100,0	7,07
110,0	7,90
120,0	8,78
130,0	9,67
140,0	10,58
150,0	11,45
160,0	12,40
170,0	13,28
180,0	14,18

APÊNDICE C – DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO CENTRO DO VÃO DA LAJE

L1

Carga (kN)	Deslocamento (mm)	Carga (kN)	Deslocamento (mm)	Carga (kN)	Deslocamento (mm)
0	0	64,7432	2,42354	113,953 6	6,28924
20	0,54124	65,2184	2,491432	122,622 8	7,12244
40	1,215188	65,9312	2,562088	135,626 8	8,46912
47,5	1,507624	67	2,643464	140,503 2	8,99852
53,1252	1,742984	68,6036	2,74824	142,332	9,20196
58,75	1,994144	71,0092	2,896684	143,017 6	9,279
60,8592	2,090192	74,6172	3,12244	144,046 4	9,39584
61,6504	2,126468	80,0296	3,4968	145,589 2	9,57396
62,8368	2,181304	88,1476	4,10764	147,903 6	9,84764
63,282	2,20184	91,192	4,34156	151,375 2	10,27408
63,4488	2,209452	95,7588	4,70576	156,582 8	10,96388
63,6992	2,24168	99,1836	4,9862	164,394	12,78788
64,0744	2,287632	101,752 4	5,20176	165,126 4	13,02544
64,2152	2,319084	104,320 8	5,422	166,224 8	13,61624
64,4264	2,360228	108,174	5,76096	166,636 8	13,89676
				167,254 4	15,19392
				167,486	15,76796

APÊNDICE C - DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO CENTRO DO VÃO DA LAJE

L2

Força (kN)	Deslocamento (mm)	Força (kN)	Deslocamento (mm)	Força (kN)	Deslocamento (mm)
0	0	52,248 33	2,126016	86,347 67	4,59852
16,666 67	0,508204	52,916 33	2,162104	87,871 67	4,73096
33,333 33	1,226232	53,918 67	2,216928	90,157 33	4,93328
34,896	1,294072	55,422	2,301512	93,586 33	5,24392
37,239 67	1,397508	57,677 33	2,437536	98,729 33	5,722
40,755 33	1,557896	61,059 67	2,651888	106,44 4	6,4674
46,028 67	1,809612	66,133 67	2,9897	118,01 63	7,64936
48,006 33	1,906188	67,085	3,054436	122,35 57	8,10476
48,747 67	1,942844	68,036 33	3,121184	128,86 5	8,81536
49,026	1,956708	69,463 67	3,22614	133,74 7	9,36412
49,443	1,977796	71,604	3,391004	138,62 9	9,931
49,599 33	1,985744	74,815	3,64504	145,95 2	10,81904
49,834	1,997768	79,631 33	4,03552	156,93 67	12,26672
50,186	2,016064	80,534 33	4,1088	166,66 67	13,76624
50,714	2,043928	81,437 33	4,18312		
51,506	2,08618	82,792	4,29604		
51,802 67	2,10208	84,823 67	4,468		

APÊNDICE D - DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO CENTRO DO VÃO DA LAJE

L3

Carga (kN)	Deslocamento (mm)	Carga (kN)	Deslocamento (mm)	Carga (kN)	Deslocamento (mm)
0	0	94,361 11	3,56188	203,35 11	11,64884
27,777 78	0,803173	95,846 11	3,638579	213,51 06	12,56969
55,555 56	1,736077	98,073 33	3,754898	228,74 94	13,99769
65,972 22	2,116835	101,41 39	3,935169	251,60 78	16,2484
69,878 33	2,391536	106,42 56	4,220762	252,01 67	16,28851
75,737 78	2,679565	113,94 22	4,667656	252,63 06	16,34885
80,132 22	2,882089	119,58	5,015976	253,55 06	16,44027
84,526 67	3,084193	125,21 78	5,387515	254,93 06	16,57824
86,175	3,160857	129,44 61	5,680815	257,00 06	16,78719
86,792 78	3,189865	133,67 44	5,982781	260,10 56	17,10429
87,72	3,233979	140,01 67	6,447147	264,76 33	17,58764
89,11	3,301137	149,53 06	7,15967	271,74 94	18,32901
91,196 11	3,403379	153,09 78	7,43162	277,77 78	18,98393
91,978 33	3,44197	158,44 94	7,8498		
92,271 67	3,456474	166,47 67	8,49464		
92,711 11	3,478328	178,51 72	9,49025		
93,371 11	3,511473	196,57 83	11,04992		

APÊNDICE E – DADOS ABAQUS PARA O CDP DA LAJE L1A DE DAMASCENO (2007).

Compressão (ABNT)		
Yielt Stress	Inelastic Strain	Dt
19,2761164	0	0
21,9153864	7,52E-05	0
24,3823788	0,00010489	0
26,6737422	0,00013957	0
28,7860376	0,00017935	0
30,7157356	0,00022434	0
32,4592136	0,00027464	0
34,0127523	0,00033035	0
35,372533	0,00039158	0
36,5346336	0,00045845	0
37,4950256	0,00053107	0
38,2495704	0,00060956	0
38,794015	0,00069404	0,01123958
39,1239893	0,00078463	0,00282938
39,235	0,00088147	0,00284864
39,1224281	0,00098468	0,00286917
38,7815237	0,0010944	0,01155795
38,2074012	0,00121076	0,02619087
37,3950349	0,00133392	0,04689601
36,3392534	0,00146402	0,07380519
35,0347346	0,00160121	0,10705404
33,4760002	0,00174565	0,1467822
31,6574098	0,00189749	0,19313343
29,5731548	0,00205691	0,24625577
27,2172522	0,00222408	0,30630172
24,5835382	0,00239916	0,37342836
21,6656608	0,00258234	0,44779761

Tração (ABNT)		
Yielt Stress	Crack Strain	Dt
3,58444	0	0
2,9959314	7,46E-05	0,1641842
2,9241544	8,66E-05	0,1842088
2,7401092	0,0001219	0,2355544
2,3298682	0,0002336	0,3500049
2,0766144	0,0003408	0,4206586
1,7657099	0,0005497	0,5073958
1,5737794	0,0007551	0,5609413
1,4393946	0,000959	0,5984325
1,3381579	0,0011619	0,6266759
1,2238927	0,0014651	0,658554
0,756122	0,0049784	0,7890544
0,5730333	0,0099837	0,8401331
0,2281287	0,0999935	0,9363558

Propriedades		
fck (MPa)	fct (MPa)	Ecs (MPa)
41,3	2,2	26500

APÊNDICE F – DADOS ABAQUS PARA O CDP DAS LAJES L1, L2 E L3.

Compressão (ABNT)		
Yield Stress	Inelastic Strain	Dt
13,2425	0	0
15,33609	8,70E-05	0
17,25698	0,000123	0
19,01002	0,000164	0
20,59989	0,000211	0
22,03111	0,000263	0
23,30801	0,00032	0
24,43478	0,000383	0
25,41545	0,00045	0
26,25393	0,000522	0
26,95396	0,000598	0
27,51917	0,000679	0
27,95306	0,000765	0
28,259	0,000855	0,008456
28,44026	0,000949	0,002096
28,5	0,001047	0,002079
28,44126	0,001149	0,002061
28,26699	0,001254	0,008176
27,98004	0,001364	0,018244
27,58317	0,001477	0,032169
27,07905	0,001594	0,049858
26,47025	0,001715	0,071219
25,75929	0,001838	0,096165
24,94857	0,001965	0,124612
24,04045	0,002096	0,156476
23,03719	0,002229	0,191677
21,94101	0,002366	0,23014
20,75403	0,002506	0,271788
19,47832	0,002648	0,31655
18,1159	0,002794	0,364354
16,66871	0,002942	0,415133

Tração (ABNT)		
Yield Stress	Crack Strain	Dt
2,896468	0	0
2,369868	8,07E-05	0,181808
2,31309	9,26E-05	0,20141
2,167505	0,000127	0,251673
1,842993	0,000238	0,36371
1,642662	0,000345	0,432874
1,396727	0,000553	0,517783
1,244905	0,000758	0,570199
1,138602	0,000962	0,6069
1,058521	0,001165	0,634548
0,968134	0,001468	0,665754
0,598114	0,00498	0,793502
0,453286	0,009985	0,843504
0,180456	0,099994	0,937698

Propriedades		
fck (MPa)	fct (MPa)	Ecs (MPa)
30	2,8965	30672,5
fc (MPa)	fct'(MPa)	Ecs' (MPa)
28,5	2,8965	29895,8

APÊNDICE G – CÁLCULO PARA CARGAS DE FISSURAÇÃO E PREVISÃO DE FLECHAS

Laje L1A - Damasceno (2017)

1. Dados da laje

$$\begin{aligned} a &:= 85 \text{ mm} \\ b &:= 85 \text{ mm} \\ l &:= 1800 \text{ mm} \\ \rho &:= 1.22\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &:= 89.3 \text{ mm} \\ h &:= 110 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{ck} &:= 41.3 \text{ MPa} \\ E_s &:= 210000 \text{ MPa} \\ E_{cs} &:= 26500 \text{ MPa} \\ f_{ctm} &:= 2.2 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &:= 1 \\ \mu_x &:= 4.41 \end{aligned}$$

$$A_s := \rho \cdot l \cdot d = 19.61 \text{ cm}^2 \quad A_t := \frac{\pi \cdot 20 \cdot (1 \text{ cm})^2}{4} = 15.71 \text{ cm}^2 \quad a_s := \frac{A_t}{(1.8)} = 8.73 \text{ cm}^2$$

2. Perímetro crítico

$$u_1 := ((2 \cdot a) + (2 \cdot b) + (2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot d)) = 1462.18 \text{ mm}$$

3. Estimativa de carga de ruptura NBR 6118 (2014, ABNT)

$$\tau_{rd1} := 0.13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200 \text{ mm}}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{\frac{2}{3}} \text{ MPa}^{\frac{2}{3}} = 1.2 \text{ MPa}$$

$$V_u := \tau_{rd1} \cdot u_1 \cdot d = 156.52 \text{ kN}$$

4. Momento de fissuração

$$x_1 := \frac{h}{2} = 55 \text{ mm}$$

$$I_1 := \frac{1000 \cdot h^3}{12} \cdot \text{mm} = 110916666.67 \text{ mm}^4$$

$$\alpha := 1.3$$

$$M_r := \frac{I_1 \cdot \alpha \cdot f_{ctm}}{x_1} = 5.77 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

5. Carga de Fissuração

$$p_{fiss} := \frac{100 \cdot M_r \cdot \text{m}}{\mu_x \cdot l^2} = 40.37 \text{ kN}$$

6. Cálculo da flecha

$$p_{L1A} := 180 \text{ kN}$$

7. Cargas de punção distribuídas uniformemente nas lajes

$$M_{xL1A} := \frac{p_{L1A} \cdot l}{8} = 40.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

8. Estádio II

$$\alpha_e := \frac{Es}{Ecs} = 7.92$$

$$x_2 := \frac{-(\alpha_e \cdot as) + \sqrt{(\alpha_e \cdot as)^2 - 4 \cdot \frac{l}{2} \cdot (-\alpha_e \cdot as \cdot d)}}{l} = 22.63 \text{ mm}$$

$$I_2 := \frac{l \cdot (x_2)^3}{3} + \alpha_e \cdot as \cdot (d - x_2)^2 = 3769.2 \text{ cm}^4$$

$$I_m := \left(\frac{Mr}{M_{xL1A}} \right)^3 \cdot I_1 + \left(1 - \left(\frac{Mr}{M_{xL1A}} \right)^3 \right) \cdot I_2 = 0 \text{ m}^4$$

9. Cargas distribuidas na

laje

$$p_{disL1A} := \frac{p_{L1A}}{l^2} = 55.56 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

10. Cálculo da flecha

$$\alpha_{L1A} := \frac{4.67 \cdot p_{disL1A} \cdot l^4}{100 \cdot Ecs \cdot I_m} \cdot m = 27.12 \text{ mm}$$

Laje L1 - Autor (2019)

1. Dados da laje

$$\begin{aligned} a &:= 95 \text{ mm} & d &:= 102.5 \text{ mm} & f_{ck} &:= 30 \text{ MPa} \\ b &:= 95 \text{ mm} & h &:= 125 \text{ mm} & f_{c'} &:= 0.95 \cdot f_{ck} = 28.5 \text{ MPa} \\ l &:= 1800 \text{ mm} & E_s &:= 210000 \text{ MPa} & E_{cs} &:= 5600 \cdot \sqrt{f_{c'}} \cdot \text{MPa} = 29895.82 \text{ MPa} \\ \rho &:= 1.4\% & \lambda &:= 1 & \mu_x &:= 4.41 \\ & & & & f_{ctm} &:= 0.3 \cdot \sqrt[3]{f_{c'}^2} \cdot \text{MPa} = 2.8 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$A_s := \rho \cdot l \cdot d = 25.83 \text{ cm}^2 \quad A_t := \frac{\pi \cdot 21 \cdot (1.25 \text{ cm})^2}{4} = 25.77 \text{ cm}^2 \quad a_s := \frac{A_t}{(1.8)} = 14.32 \text{ cm}^2$$

2. Perímetro crítico

$$u_1 := ((2 \cdot a) + (2 \cdot b) + (2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot d)) = 1668.05 \text{ mm}$$

3. Estimativa de carga de ruptura NBR 6118 (2014, ABNT)

$$\tau_{rd1} := 0.13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200 \text{ mm}}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} \cdot \text{MPa}^{\frac{2}{3}} = 1.08 \text{ MPa}$$

$$Vu := \tau_{rd1} \cdot u_1 \cdot d = 185.18 \text{ kN}$$

4. Momento de fissuração

$$\begin{aligned} x_1 &:= \frac{h}{2} = 62.5 \text{ mm} \\ I_1 &:= \frac{1000 \cdot h^3}{12} \cdot \text{mm} = 162760416.67 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\alpha := 1.3$$

$$Mr := \frac{I_1 \cdot \alpha \cdot f_{ctm}}{x_1} = 9.48 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

5. Carga de Fissuração

$$p_{fiss} := \frac{100 \cdot Mr \cdot \text{m}}{\mu_x \cdot l^2} = 66.32 \text{ kN}$$

6. Cálculo da flecha

$$p_{L1} := Vu = 185.18 \text{ kN}$$

7. Cargas de punção distribuídas uniformemente nas lajes

$$M_{xL1} := \frac{p_{L1} \cdot l}{8} = 41.67 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\alpha := 1$$

$$Mr :=$$

5. Ca

$$p_{fiss} :=$$

6. Cá

$$p_{L1} :=$$

7. Ca

$$M_{xL1} :=$$

8. Estádio II

$$\alpha_e := \frac{Es}{Ecs} = 7.02$$

$$x_2 := \frac{-(\alpha_e \cdot as) + \sqrt{(\alpha_e \cdot as)^2 - 4 \cdot \frac{I}{2} \cdot (-\alpha_e \cdot as \cdot d)}}{I} = 28.71 \text{ mm}$$

$$I_2 := \frac{I \cdot (x_2)^3}{3} + \alpha_e \cdot as \cdot (d - x_2)^2 = 6895.84 \text{ cm}^4$$

$$I_m := \left(\frac{Mr}{M_{xL1}} \right)^3 \cdot I_1 + \left(1 - \left(\frac{Mr}{M_{xL1}} \right)^3 \right) \cdot I_2 = 7006.18 \text{ cm}^4$$

9. Cargas distribuidas na

laje

$$p_{disL1} := \frac{p_{L1}}{l^2} = 57.16 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

10. Cálculo da flecha

$$\alpha_{L1} := \frac{4.67 \cdot p_{disL1} \cdot l^4}{100 \cdot Ecs \cdot I_m} \cdot m = 13.38 \text{ mm}$$

Laje L2 - Autor (2019)

1. Dados da laje

$$\begin{aligned} a &:= 95 \text{ mm} & d &:= 102.5 \text{ mm} & f_{ck} &:= 30 \text{ MPa} \\ b &:= 190 \text{ mm} & h &:= 125 \text{ mm} & f_{c'} &:= 0.95 \cdot f_{ck} = 28.5 \text{ MPa} \\ l &:= 1800 \text{ mm} & E_s &:= 210000 \text{ MPa} & E_{cs} &:= 5600 \cdot \sqrt{f_{c'}} \cdot \text{MPa} = 29895.82 \text{ MPa} \\ \rho &:= 1.4\% & \lambda &:= 1 & \mu_x &:= 4.41 \\ & & & & f_{ctm} &:= 0.3 \cdot \sqrt[3]{f_{c'}^2} \cdot \text{MPa} = 2.8 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$A_s := \rho \cdot l \cdot d = 25.83 \text{ cm}^2 \quad A_t := \frac{\pi \cdot 21 \cdot (1.25 \text{ cm})^2}{4} = 25.77 \text{ cm}^2 \quad a_s := \frac{A_t}{(1.8)} = 14.32 \text{ cm}^2$$

2. Perímetro crítico

$$u_1 := ((2 \cdot a) + (2 \cdot b) + (2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot d)) = 1858.05 \text{ mm}$$

3. Estimativa de carga de ruptura NBR 6118 (2014, ABNT)

$$\tau_{rd1} := 0.13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200 \text{ mm}}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} \cdot \text{MPa}^{\frac{2}{3}} = 1.08 \text{ MPa}$$

$$Vu := \tau_{rd1} \cdot u_1 \cdot d = 206.28 \text{ kN}$$

4. Momento de fissuração

$$\begin{aligned} x_1 &:= \frac{h}{2} = 62.5 \text{ mm} \\ I_1 &:= \frac{1000 \cdot h^3}{12} \cdot \text{mm} = 162760416.67 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\alpha := 1.3$$

$$Mr := \frac{I_1 \cdot \alpha \cdot f_{ctm}}{x_1} = 9.48 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

5. Carga de Fissuração

$$p_{fiss} := \frac{100 \cdot Mr \cdot m}{\mu_x \cdot l^2} = 66.32 \text{ kN}$$

6. Cálculo da flecha

$$p_{L2} := Vu = 206.28 \text{ kN}$$

7. Cargas de punção distribuídas uniformemente nas lajes

$$M_{xL2} := \frac{p_{L2} \cdot l}{8} = 46.41 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

8. Estádio II

$$\alpha_e := \frac{Es}{Ecs} = 7.02$$

$$x_2 := \frac{-(\alpha_e \cdot as) + \sqrt{(\alpha_e \cdot as)^2 - 4 \cdot \frac{l}{2} \cdot (-\alpha_e \cdot as \cdot d)}}{l} = 28.71 \text{ mm}$$

$$I_2 := \frac{l \cdot (x_2)^3}{3} + \alpha_e \cdot as \cdot (d - x_2)^2 = 6895.84 \text{ cm}^4$$

$$I_m := \left(\frac{Mr}{M_{xL2}} \right)^3 \cdot I_1 + \left(1 - \left(\frac{Mr}{M_{xL2}} \right)^3 \right) \cdot I_2 = 6975.68 \text{ cm}^4$$

9. Cargas distribuídas na laje

$$\rho_{disL2} := \frac{p_{L2}}{l^2} = 63.67 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

10. Cálculo da flecha

$$\alpha_{L2} := \frac{4.67 \cdot \rho_{disL2} \cdot l^4}{100 \cdot Ecs \cdot I_m} \cdot m = 14.97 \text{ mm}$$

1. Dados da laje

$$\begin{aligned}
 a &:= 95 \text{ mm} & d &:= 102.5 \text{ mm} & f_{ck} &:= 30 \text{ MPa} \\
 b &:= 475 \text{ mm} & h &:= 125 \text{ mm} & f_{c'} &:= 0.95 \cdot f_{ck} = 28.5 \text{ MPa} \\
 l &:= 1800 \text{ mm} & E_s &:= 210000 \text{ MPa} & E_{cs} &:= 5600 \cdot \sqrt{f_{c'}} \cdot \text{MPa} = 29895.82 \text{ MPa} \\
 \rho &:= 1.4\% & \lambda &:= 1 & \mu_x &:= 4.41 \\
 & & & & f_{ctm} &:= 0.3 \cdot \sqrt[3]{f_{c'}^2} \cdot \text{MPa} = 2.8 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

$$A_s := \rho \cdot l \cdot d = 25.83 \text{ cm}^2 \quad A_t := \frac{\pi \cdot 21 \cdot (1.25 \text{ cm})^2}{4} = 25.77 \text{ cm}^2 \quad a_s := \frac{A_t}{(1.8)} = 14.32 \text{ cm}^2$$

2. Perímetro crítico

$$u_1 := ((2 \cdot a) + (2 \cdot b) + (2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot d)) = 2428.05 \text{ mm}$$

3. Estimativa de carga de ruptura NBR 6118 (2014, ABNT)

$$\tau_{rd1} := 0.13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{200 \text{ mm}}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}} \text{ MPa}^{\frac{2}{3}} = 1.08 \text{ MPa}$$

$$Vu := \tau_{rd1} \cdot u_1 \cdot d = 269.56 \text{ kN}$$

4. Momento de fissuração

$$x_1 := \frac{h}{2} = 62.5 \text{ mm}$$

$$I_1 := \frac{1000 \cdot h^3}{12} \cdot \text{mm} = 162760416.67 \text{ mm}^4$$

$$\alpha := 1.3$$

$$M_r := \frac{I_1 \cdot \alpha \cdot f_{ctm}}{x_1} = 9.48 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

5. Carga de Fissuração

$$p_{fiss} := \frac{100 \cdot M_r \cdot \text{m}}{\mu_x \cdot l^2} = 66.32 \text{ kN}$$

6. Cálculo da flecha

$$p_{L3} := Vu = 269.56 \text{ kN}$$

7. Cargas de punção distribuídas uniformemente nas lajes

$$M_{xL3} := \frac{p_{L3} \cdot l}{8} = 60.65 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

8. Estádio II

$$\alpha_e := \frac{Es}{Ecs} = 7.02$$

$$x_2 := \frac{-(\alpha_e \cdot as) + \sqrt{(\alpha_e \cdot as)^2 - 4 \cdot \frac{I}{2} \cdot (-\alpha_e \cdot as \cdot d)}}{I} = 28.71 \text{ mm}$$

$$I_2 := \frac{I \cdot (x_2)^3}{3} + \alpha_e \cdot as \cdot (d - x_2)^2 = 6895.84 \text{ cm}^4$$

$$I_m := \left(\frac{Mr}{M_{xL3}} \right)^3 \cdot I_1 + \left(1 - \left(\frac{Mr}{M_{xL3}} \right)^3 \right) \cdot I_2 = 6931.62 \text{ cm}^4$$

9. Cargas distribuidas na laje

$$p_{disL3} := \frac{p_{L3}}{l^2} = 83.2 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

10. Cálculo da flecha

$$\alpha_{L3} := \frac{4.67 \cdot p_{disL3} \cdot l^4}{100 \cdot Ecs \cdot I_m} \cdot m = 19.68 \text{ mm}$$