



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CAMPUS BALSAS  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

**ADIEL KENNEDY COSTA DOS SANTOS**

**ANÁLISE COMPARATIVA DE LAJES POR ANALOGIA DE  
GRELHAS E MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS**

**BALSAS-MA  
2021**

ADIEL KENNEDY COSTA DOS SANTOS

Análise comparativa de lajes por analogia de grelhas e métodos de elementos finitos

Trabalho de Conclusão de Curso na modalidade Monografia, submetido à Coordenação de Engenharia Civil da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Esp. Willame Braga Lima

Co-orientador: Prof. Felipe Matias do N. Cardoso

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a). Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

COSTA DOS SANTOS, ADIEL KENNEDY.  
ANÁLISE COMPARATIVA DE LAJES POR ANALOGIA DE GRELHAS E  
MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS / ADIEL KENNEDY COSTA DOS  
SANTOS. - 2021.

42 p.

Coorientador(a): Felipe Matias do N. Cardoso.

Orientador(a): Willame Braga Lima.

Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Maranhão, Balsas-ma, 2021.

1. Analogia de Grelhas. 2. Elementos finitos. 3. Estrutura de concreto. 4. Lajes de pavimento. I. Braga Lima, Willame. II. do N. Cardoso, Felipe Matias. III. Título.

Análise comparativa de lajes por analogia de grelhas e métodos de elementos finitos

Trabalho de conclusão de curso na modalidade Monografia, submetido à Coordenação de Engenharia Civil da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

**Aprovado em:**06 de Maio de 2021

---

Prof. Esp. Willame Braga Lima – Orientador

---

Prof. Felipe Matias do N. Cardoso – Coorientador

---

Prof. Dr. Eduardo Aurélio Barros Aguiar – Examinador externo

---

Prof. Dr. Sebastião Ricardo Coelho Fonseca – Examinador externo

Balsas-MA  
2021

## RESUMO

Neste trabalho é proposto comparar os resultados obtidos por uma análise de um modelo de elementos finitos e pela análise de um modelo de elementos de grelha de uma estrutura composta por cinco lajes de forma retangular e não retangular. Em cada modelo é calculado os deslocamentos verticais e os momentos fletores resultantes. Embora os dois métodos sejam muito difundidos no meio da engenharia estrutural, importante saber quais as vantagens e desvantagens de cada método na utilização de dimensionamento de lajes usuais de concreto armado. O método de análise de grelhas foi testado utilizando o software brasileiro EBERICK da empresa AltoQi, e o método de elementos finitos foi testado utilizando o software alemão RISA 3D. A apresentação e comparação dos resultados é feita em três partes. Esta se inicia com a apresentação dos resultados gráficos gerados em cada software, posteriormente os dados são apresentados em tabelas e comparados em diferenças percentuais, a fim de obter as convergências e divergência entre os valores em cada laje. Na terceira parte é realizada uma comparação e análise gráfica dos resultados, com a finalidade de observar se há a existência de um padrão de variação entre os dados.

**Palavras-chave:** Elementos finitos, Analogia de Grelhas, lajes de pavimento, estrutura de concreto.

## **ABSTRACT**

In this work it is proposed to compare the results obtained by an analysis of a finite element model and by the analysis of a model of grid elements of a structure composed of five slabs of rectangular and non-rectangular shape. In each model, the vertical displacements and specific bending moments are located. Although the two methods are very widespread in the middle of structural engineering, it is important to know the advantages and disadvantages of each method in the use of dimensioning of reinforced concrete users. The grid analysis method was tested using the Brazilian software EBERICK from the company AltoQi, and the finite element method was tested using the German software RISA 3D. The presentation and comparison of results is done in three parts. This starts with the presentation of the graphical results generated in each software, afterwards the data are calculated in tables and compared in percentage differences, in order to obtain the convergences and divergences between the values in each slab. In the third part, a comparison and graphical analysis of the results is performed, with a pattern of observation if there is a pattern of variation between the data.

**Keywords:** Finite elements, grid analogy, pavement slabs, concrete structure.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1: Elementos mais usados no estudo de placas.....	8
Figura 4.2: Refinamento de malha.....	9
Figura 4.3 - Laje e Grelha equivalente.....	10
Figura 4.4- Grelha.....	11
Figura 4.5: Sistema com vigas independentes.....	11
Figura 4.6: Grelha estrutural.....	12
Figura 4.7 - Malha Retangular e Malha oblíqua Respectivamente.....	12
Figura 5.1- Modelo 3D da estrutura.....	15
Figura 5.2- Modelo 3D da estrutura com lajes em transparência.....	15
Figura 5.3- Planta de Formas do pavimento superior.....	16
Figura 5.4 - Pórtico 3D da estrutura no Eberick.....	19
Figura 5.5- Exemplar da grelha do modelo - Malha 50x50.....	20
Figura 5.6- Lajes e Pórtico 3D da estrutura com as lajes subdivididas em placas no Risa 3D.....	21
Figura 5.7- Lajes subdivididas em placas no Risa 3D - malha 20x20.....	21
Figura 6.1- Deformações nas lajes - Eberick e Risa3D, respectivamente.....	22
Figura 6.2- Momento Mx e My malha 20x20 no Eberick.....	23
Figura 6.3- Momento Mx e My - malha 20x20- no Eberick.....	23
Figura 6.4- Momento Mx e My malha 30x30 no Eberick.....	24
Figura 6.5- Momento Mx e My - malha 30x30- no Eberick.....	24
Figura 6.6- Momento Mx e My malha 50x50 no Eberick.....	25
Figura 6.7- Momento Mx e My - malha 50x50- no Eberick.....	25
Figura 6.8- Momento Mx malha 20x20 no Risa 3D.....	26
Figura 6.9- Momento My malha 20x20 no Risa 3D.....	26
Figura 6.10- Momento Mx malha 30x30 no Risa 3D.....	27
Figura 6.11- Momento My malha 30x30 no Risa 3D.....	27
Figura 6.12- Momento Mx malha 50x50 no Risa 3D.....	28
Figura 6.13- Momento My malha 50x50 no Risa 3D.....	28
Figura 6.14- Análise comparativa dos momentos fletores positivos da laje L1.....	30
Figura 6.15- Análise comparativa dos momentos fletores negativos da laje L1.....	31
Figura 6.16- Análise comparativa dos momentos fletores positivos da laje L2.....	31
Figura 6.17- Análise comparativa dos momentos fletores negativos da laje L2.....	32
Figura 6.18- Análise comparativa dos momentos fletores positivos da laje L3.....	32
Figura 6.19- Análise comparativa dos momentos fletores negativos da laje L3.....	33
Figura 6.20- Análise comparativa dos momentos fletores positivos da laje L4.....	33
Figura 6.21- Análise comparativa dos momentos fletores negativos da laje L4.....	34
Figura 6.22- Análise comparativa dos momentos fletores positivos da laje L5.....	34
Figura 6.23- Análise comparativa dos momentos fletores negativos da laje L5.....	35
Figura 6.24- Pontos de deformações máximas -malha 20x20 - Eberick.....	35
Figura 6.25- Pontos de deformações máximas -malha 30x30 - Eberick.....	36
Figura 6.26- Pontos de deformações máximas- malha 50x50 - Eberick.....	36
Figura 6.27- Deformações malha 20x20- Risa3D.....	37
Figura 6.28- Deformações malha 30x30- Risa3D.....	37
Figura 6.29- Deformações malha 50x50- Risa3D.....	38

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Dimensões dos pilares.....	16
Tabela 5.2 – Dimensões das vigas estruturais.....	16
Tabela 5.3 – Espessura das lajes de pavimento.....	16
Tabela 5.4 – Ações permanentes sobre a estrutura.....	17
Tabela 5.5 – Ações permanentes sobre as vigas de bordadura.....	17
Tabela 6.1 – Momentos fletores positivos máximo $M_x$ (kN·m/m) e diferenças percentuais.....	29
Tabela 6.2 – Momentos fletores positivo máximo $M_y$ (kN·m/m) e diferenças percentuais.....	29
Tabela 6.3 – Momentos fletores negativo máximo $M_x$ (kN·m/m) e diferenças percentuais.....	29
Tabela 6.4 – Momentos fletores negativo máximo $M_y$ (kN·m/m) e diferenças percentuais.....	30
Tabela 6.5 – Flechas elásticas (cm) e diferenças percentuais.....	38

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

AG - Análise de Grelhas

DXF - Drawing Exchange Format

ELS - Estado Limite de Serviço

ELU - Estado Limite Último

MEF - Métodos dos elementos finitos

NBR - Norma Brasileira

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>JUSTIFICATIVA.....</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>OBJETIVOS.....</b>	<b>6</b>
3.1	OBJETIVO GERAL.....	6
3.2	OBJETIVO ESPECÍFICO.....	6
<b>4</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>	<b>7</b>
4.1	TEORIA DA ELASTICIDADE.....	7
4.2	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	7
4.3	ANALOGIA DE GRELHA.....	10
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>14</b>
5.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	14
5.2	DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA.....	14
5.2.1	Aspectos Gerais.....	14
5.2.2	Elementos estruturais.....	16
5.3	AÇÕES CONSIDERADAS.....	17
5.4	MODELAÇÃO.....	18
5.4.1	Definição do material.....	18
5.4.2	Modelação de vigas e pilares.....	19
5.4.3	Modelação da laje de pavimento com elementos de grelha no Eberick.....	19
5.4.4	Modelação da laje de pavimento com elementos de laje no Risa 3D.....	20
<b>6</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>22</b>
6.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	22
6.2	VALORES DOS MOMENTOS FLETORES E DIFERENÇA DE PERCENTUAIS.....	22
6.3	FLECHAS MÁXIMAS.....	35
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>39</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>41</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Antes do desenvolvimento e aperfeiçoamento de ferramentas computacionais aplicáveis aos problemas de estrutura em edifícios, como lajes e vigas de concreto armado, os cálculos estruturais era feitos considerando as lajes como elementos isolados apoiados nos elementos rígidos, às vigas, o que simplificava os cálculos, porém não considerava a estrutura de forma integrada.

O avanço crescente dos computadores e softwares de análise estrutural nas últimas décadas tem possibilitado o cálculo estrutural integrado dos pavimentos como um todo, sendo que o processo de analogia de grelha tem sido bastante utilizado em softwares de análise estrutural e com boa aceitação pelos profissionais da engenharia e cálculo estrutural. Antes disso, as ferramentas de cálculo disponíveis eram insuficientes para que se projetasse uma estrutura relativamente complexa dentro de um prazo muito curto, tornando a elaboração de um sistema estrutural mais moderno praticamente inviável (AVANCINI, 2015).

Os métodos numéricos, como a analogia de grelha e elementos finitos, antes de complicada implementação de dados nos computadores, devido à baixa capacidade de processamento dos mesmos da época, hoje, são largamente utilizados nos programas comerciais de projetos estruturais, superando os antigos métodos como de Marcus e Czerny que não apresentam modelos tão realistas como os atuais.

E de acordo com Silva (2003), a analogia de grelha possui vantagens em relação a outros processos numéricos, entre os quais pode-se citar a sua formulação mais simples que conseqüentemente não requerer um elevado grau de especialização do usuário para realizar a modelagem e análise dos resultados.

E neste contexto, o presente trabalho pretende fazer uma comparação entre os modelos de grelha e elementos finitos com os resultados obtidos para os momentos fletores máximos positivos, negativos e os deslocamentos verticais (flechas) das lajes, a partir de um projeto definido. Para o dimensionamento das lajes de concreto armado, serão utilizados os softwares RISA 3D (Alemanha) e EBERICK da empresa AltoQi (Brasil), com o intuito de verificar qual método é mais vantajoso, para as inserções de dados, processamento e interpretações dos resultados.

## 2 JUSTIFICATIVA

Os métodos de análise visam determinar o comportamento dos vários sistemas estruturais, os resultados obtidos nessas análises ainda são aproximações: no entanto, quanto melhores forem os modelos matemáticos e físicos utilizados pelos métodos, mais próximas serão do comportamento real.

Vários autores têm estudado métodos numéricos que permitem análises mais precisas das estruturas em concreto armado para a obtenção de um melhor aproveitamento do material, buscando economia, segurança e durabilidade nas estruturas. Silva (2003) é um dos autores que têm estudado o método de analogia de grelhas, método no qual consiste em fazer a substituição do pavimento de laje por uma grelha equivalente, onde as barras equivalentes passam a representar os elementos estruturais (placas e vigas) do pavimento. E de acordo com este autor esse processo pode reproduzir o comportamento estrutural do pavimento de diversas formas geométricas.

Outro método numérico de grande relevância para a engenharia civil é o método dos elementos finitos, que vem sendo utilizado em vários softwares modernos de análise estrutural. E de acordo com Soriano (2009), esse é um método alternativo para obter uma solução analítica sem integrar a equação diferencial com o limite ou condições iniciais, é usar um método de aproximação que substitui o modelo de aproximação de grau infinito de liberdade do modelo contínuo por um número finito de parâmetros ou graus de liberdade a serem determinados.

Grande maioria dos programas utilizados para análise estrutural fornecem flechas imediatas e deferidas, calculadas considerando a hipótese de comportamento elástico-plástico do concreto armado, considerando o efeito de fissuração e a deformação lenta (fluência). Com utilização desses dois métodos numéricos nos atuais softwares de análises de estruturas, vários modelos estruturais podem ser criados permitindo fazer uma análise mais refinada. Com isso pode se verificar quais destes dois métodos são mais adequados para a determinação dos resultados dos esforços das lajes analisada e nas estruturas usuais prediais de concreto armado, nos ELU (estado limite último), momentos fletores  $M_x$ ,  $M_y$ , reações de apoio (não serão considerados os esforços cortantes nas lajes) e ELS (estado limite de serviço), incluindo a verificação de flechas, de acordo com a NBR 6118/2014.

Os softwares, EBERICK da Altoqi e RISA 3D do Grupo NEMETSCHKE SE, fazem os cálculos por analogia de grelhas (Eberick) e métodos de elementos finitos (Risa 3D). Sendo assim,

através das discretizações das lajes pelos dois métodos, analisam-se qual método é mais vantajoso, para as inserções de dados, processamento e interpretações dos resultados para edifícios usuais de concreto armado com lajes retangulares e não retangulares. Informando ao profissional recém-formado e aos profissionais que se iniciam como calculistas estruturais, qual o melhor método a utilizar.

### 3 OBJETIVOS

#### 3.1 OBJETIVO GERAL

Calcular os esforços de um pavimento de lajes em concreto armado, de formatos retangulares e não retangulares de um andar de um prédio de três pavimentos, utilizando o software RISA 3D do grupo Nemetschek que utiliza na sua configuração o método dos elementos finitos e o software EBERICK versão Plena 2018 da empresa AltoQi, que usa analogia de grelhas em suas bibliotecas. Comparar os resultados dos dois softwares, analisando cada laje nos relatórios gerados pelos mesmos, verificando os pontos de convergências e divergências quando houver.

#### 3.2 OBJETIVO ESPECÍFICO

- Abordar teoricamente os métodos de analogia de grelhas e métodos de elementos finitos;
- Calcular os esforços (momentos fletores, cortante, torção e os deslocamentos) de uma de laje de concreto armado utilizando os softwares RISA 3D e EBERICK;
- Melhor inserção de dados para obtenção dos resultados finais;
- Fazer uma análise comparativa dos resultados obtidos, para as diversas aberturas de malhas nos diferentes softwares.

## 4 REFERENCIAL TEÓRICO

### 4.1 TEORIA DA ELASTICIDADE

A Teoria da Elasticidade na sua forma mais explicativa é uma teoria aplicada em peças lineares. Na teoria das peças lineares, somente o seu eixo é representado no sistema a ser analisado. Nesta teoria ainda admite-se que, tanto as cargas como as condições de apoio, estão localizadas em pontos sobre esse mesmo eixo (NEVES, 2010).

Levando esta teoria, e suas considerações, para um sistema de peças laminares, como é o caso das lajes, somente o seu plano médio é representado, e admitindo-se nesse sistema que as condições de apoio existem apenas em pontos desse plano e que as cargas são tais que conduzem principalmente a esforços não existentes nesse plano (LEITÃO, V.; CASTRO, L, 2005).

A linearidade mencionada resulta de hipóteses simplificativas, tanto de ordem física como de ordem geométrica. A hipótese da linearidade física baseia-se em assumir para o material um comportamento elástico linear. Essa suposição simplifica as relações constitutivas, permitindo que o material apresente uma relação linear entre tensões e deformações (NEVES, 2010).

Na hipótese da linearidade geométrica, insere-se a hipótese dos pequenos deslocamentos. Admitindo isto, as relações deformações-deslocamentos passam a ser lineares, isto é, as componentes de deformação passam a serem combinações lineares de derivadas das componentes de deslocamento. É com base nessa configuração que são estabelecidas as condições de equilíbrio (OLIVEIRA, 1999) (CASTRO, 2009).

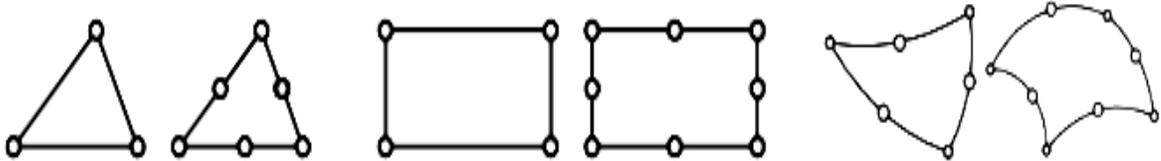
### 4.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos elementos finitos baseia-se na divisão do domínio em análise em um número finito de subdomínios e dimensões variadas, chamados de elementos finitos, considerando-se no seu interior a aplicação de leis simples de comportamento, que depende das variáveis em estudo. Nos elementos finitos as variáveis do problema são o valor das funções que se quer aproximar num determinado número de nós, dependendo do tipo de elemento utilizado (NEVES, 2010).

Cada nó e cada componente do resultado diferencial são associados a uma função de forma ou interpolação, com valor unitário no referido nó, sendo nulo nos restantes. A combinação linear destas funções define a solução do problema. A ligação entre os elementos é feita obrigando os nós coincidentes entre elementos a terem parâmetros iguais (AZEVEDO, 2003).

O método dos elementos finitos é uma ferramenta para análise numérica de estruturas em geral. Na aplicação do método dos elementos finitos a elementos de placa, substitui-se a placa por uma série de elementos de forma quadrangular ou triangular, podendo variar as dimensões e características de um elemento a outro (MONTROYA; MESEGUER; CABRÉ, 2000).

Figura 4.1: Elementos mais usados no estudo de placas



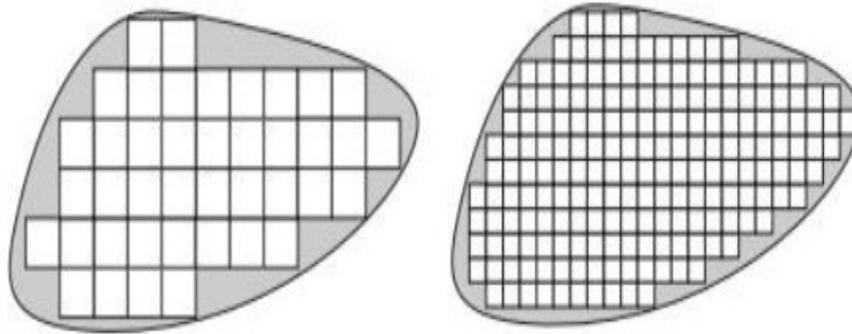
Fonte: imagens adaptadas de Araújo (2014).

O método dos elementos finitos aproxima o campo de deslocamentos independentes, obtendo posteriormente, o campo de tensões, através da aplicação das condições de compatibilidade e das condições de elasticidade. Com a utilização deste procedimento é gerado um erro associado à constante derivação. Fazendo com que, a qualidade de uma solução se degrade à medida que se calculam derivadas para passar do conhecimento de uma grandeza para outra que se quer determinar (NEVES, 2010).

Outra importante característica das soluções obtidas com recurso ao método dos elementos finitos é a de não satisfazer as condições de admissibilidade estática, pelo que o campo de esforços não satisfaz localmente as condições de equilíbrio. Segundo os teoremas da análise plástica limite, resulta uma solução contra a segurança do ponto de vista do dimensionamento de estruturas (CASTRO, 2009). O erro pode ser ligeiramente diminuído através do refinamento da malha com o aumento do número de graus de liberdade ou com uma distribuição mais refinada dos graus de liberdade pelo domínio (CASTRO, 2007).

Aumentando o número de elementos de uma malha, a convergência da solução também aumenta, e ao passo que o número de divisões tende a infinito, a solução do sistema de equações diferenciais parciais converge para o valor exato (HUTTON, 2004).

Figura 4.2: Refinamento de malha



Fonte: Hutton (2004)

Segundo Martha (2011), a modelagem computacional é a criação do modelo estrutural utilizando um software de modelagem de estrutura, cuja função é fornecer os deslocamentos, deformações, esforços externos e internos através de um método numérico como o método dos elementos finitos. No ramo da Engenharia de Estruturas, vários programas computacionais baseados no MEF podem ser citados, dentre eles: ANSYS, SAP2000, AUTODESK ROBOT, ABAQUS, STRAP, TQS entre outros, e nesse estudo, como mencionado anteriormente, utilizou-se o software RISA 3D do grupo Nemetschek.

Conhecendo toda essa facilidade e tecnologia apresentada, Azevedo (2003) alerta para as consequências do uso indiscriminado destes *softwares* e da importância da real compreensão de cada Método para uma correta interpretação dos resultados obtidos nesses softwares.

Para que possa dar resposta em tempo útil à necessidade de justificação da segurança de uma estrutura, um projetista que não conheça as técnicas correspondentes à formulação do MEF será tentado pela simples utilização de qualquer *software* de cálculo. Uma vez que não têm acesso aos modelos que estão programados, nem têm bases para a sua compreensão, procederá à utilização do *software* de acordo com o treino que recebeu ou com base em sucessivas improvisações. A tentação para aceitar os resultados provenientes do programa é grande, quaisquer que sejam esses resultados, uma vez que considera que o software escolhido tem elevada qualidade. Os potenciais perigos de uma utilização nestas condições são a não percepção de eventuais erros na introdução dos dados, a ausência de correspondência entre o modelo selecionado e a estrutura que está a ser analisada, o fato de serem desprezadas importantes condicionantes, etc. Na ausência de uma comparação dos resultados provenientes do MEF com os oriundos de outros modelos, existe o sério risco de a segurança de uma estrutura ser justificada com base em cálculos completamente inadequados. (AZEVEDO, 2003, p. iii).

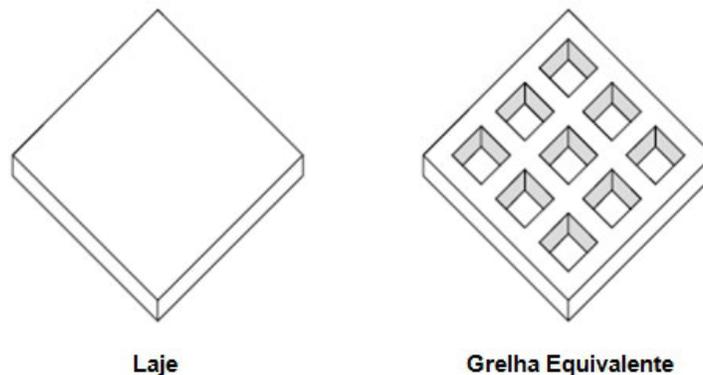
Com base na consideração, da deformação por esforço transversal, foram compostas diversas teorias sobre o comportamento elástico dos materiais, teorias como a Teoria de Euler-Bernoulli e a Teoria de Timoshenko para as vigas e a Teoria de Kirchhoff e Teoria de Reissner-

Mindlin para as lajes. Os efeitos do travamento que podem ocorrer na análise de vigas de Timoshenko e placas de Reissner-Mindlin não são tão triviais e, devido à sua importância, devem ser estudados com mais detalhes (NEVES, 2010).

#### 4.3 ANALOGIA DE GRELHA

No ramo da Engenharia Estrutural, uma grelha é composta por elementos estruturais lineares de um mesmo plano, que estão sujeitos a esforços não coplanares, compondo assim uma malha de vigas conectadas (SALES et al, 2005). A ideia de se interpretar uma laje através de uma grelha equivalente não é uma técnica inovadora, tendo sido utilizada por Marcus, que na época não dispunha da tecnologia dos computadores e, portanto, tinha que utilizar de processos aproximados para resolver as lajes de concreto armado. A analogia de grelha consiste em representar a laje através de uma série ortogonal de elementos de barra que simulam bandas de laje que se cruzam formando uma grelha sobre apoios (que representam os pilares), criando desse modo um modelo virtual equivalente à estrutura real do pavimento do edifício (Figura 4.2).

Figura 4.3 - Laje e Grelha equivalente

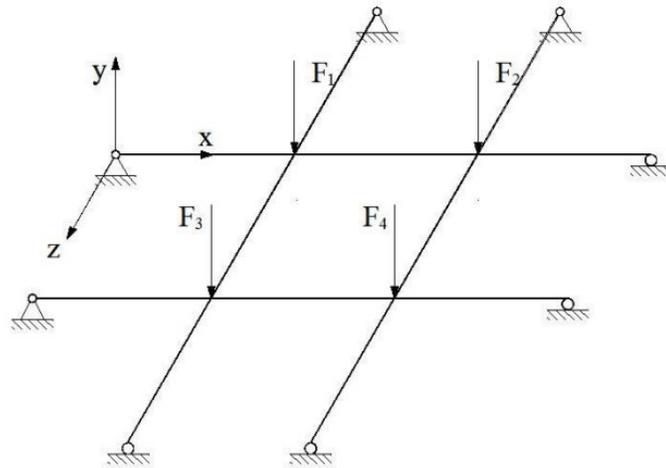


Fonte: Engel (1997)

É importante considerar que existem quatro esforços básicos a serem considerados no cálculo, sendo eles dois momentos (um torsor e um fletor) e dois esforços cortantes, e deve-se ainda considerar os deslocamentos.

De uma forma simplificada, a Figura 4.3 exemplifica uma grelha situada no plano  $(x,z)$ , submetida a carregamentos perpendiculares ao seu plano.

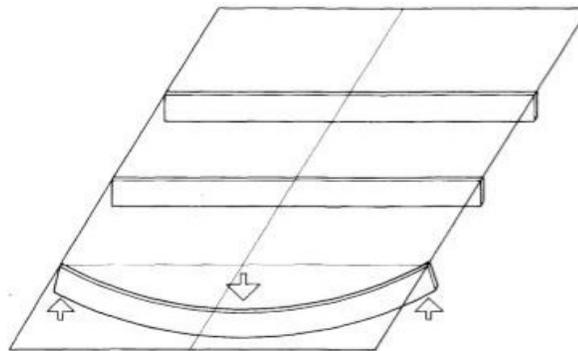
Figura 4.4- Grelha



Fonte: Imagem da Internet

A Figura 4.4 mostra um sistema estrutural composto por vigas independentes entre si. Nesse esquema é considerada uma carga pontual aplicada no meio do vão da viga da extremidade, conforme indica a imagem, somente esta viga apresentará deflexão, enquanto que as outras vigas paralelas não contribuem na resistência a força aplicada.

Figura 4.5: Sistema com vigas independentes



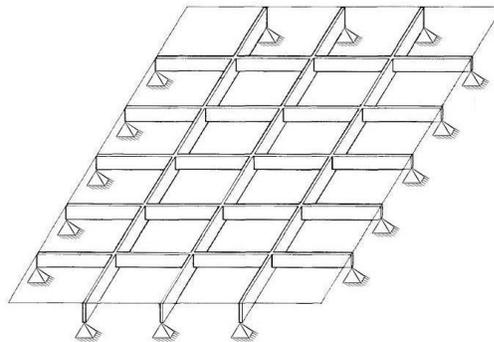
Fonte: Engel (1997)

Na Figura 4.5, é possível observar a inserção de uma viga transversal perpendicular às vigas paralelas, formando nesse caso uma grelha. Esta viga permite que parte do carregamento seja transmitida às vigas indiretamente carregadas, de forma que todas as vigas contribuam na resistência ao esforço, possibilitando desta forma, a utilização de vigas com menor seção transversal e maiores vãos. Por as intersecções serem rígidas, as vigas perpendiculares à

transversal, com exceção da viga da extremidade inferior, são torcidas pela ação do momento fletor atuante nas extremidades dos vãos da viga transversal (AVANCINI, 2015).

A resistência à torção das vigas perpendiculares agora pode ser comparada a uma situação de extremidade fixa, o que resulta em uma redução da flexão na viga transversal. De uma forma simplificada pode-se afirmar que, uma viga qualquer, sua flexão causa o efeito de torção nas vigas concorrentes a ela, sendo as mesmas perpendiculares ou não. Isto faz com que as grelhas apresentem uma alta utilização na construção civil, utilizadas principalmente em pisos e coberturas, como bases para lajes de concreto armado ou pré-moldadas (AVANCINI, 2015).

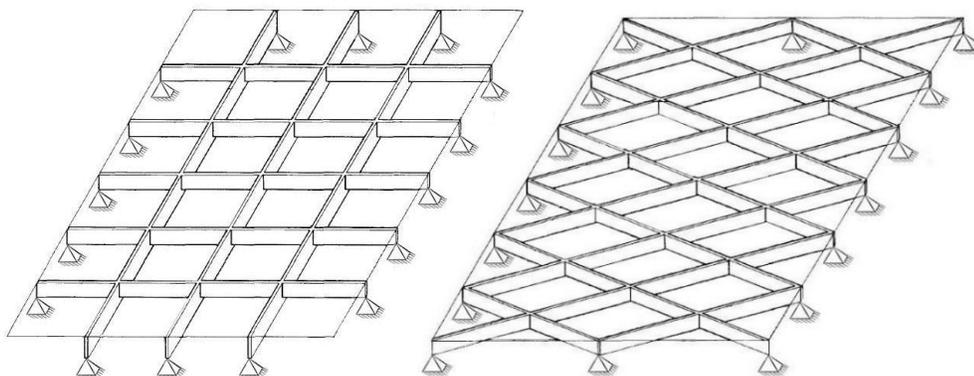
Figura 4.6: Grelha estrutural



Fonte: Engel (1997)

Em relação à geometria, as grelhas podem apresentar diversos formatos de acordo com a necessidade demandada pelo projeto. É comum utilizar malhas retangulares ou oblíquas. As figuras a seguir exemplificam os dois tipos de grelhas.

Figura 4.7 - Malha Retangular e Malha oblíqua Respectivamente.



Fonte: Engel (1997)

Em pavimentos retangulares onde um vão é maior que o outro, as vigas longitudinais das malhas retangulares apresentam pouca eficiência por causa da diminuição da rigidez. Com o objetivo de distribuir igualmente as cargas em todas as direções, as vigas mais longas devem ser enrijecidas. Já nas malhas oblíquas este fenômeno não ocorre, devido as vigas possuírem comprimentos iguais, e, além disso, é válido considerar que as vigas dos cantos possuem um incremento de rigidez semelhante a um apoio fixo, devido aos vãos serem menores nesta forma (ENGEL, 1997).

## 5 METODOLOGIA

### 5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O modelo em estudo, analisado no âmbito deste trabalho, foi criado a partir de um modelo de um prédio com elementos estruturais usuais (fundação direta, pilares, vigas e lajes). No decorrer desse trabalho, é dada maior importância à forma como foram tratadas as lajes do pavimento superior, abordando os demais elementos da estrutura de forma rápida e simplificada, considerando somente as informações cruciais para a análise das referidas lajes. O estudo é iniciado com a descrição da estrutura, desenhos de arquitetura e posteriormente especificações dos materiais e dos elementos estruturais e com os seus devidos carregamentos.

O passo seguinte consiste na modelação da estrutura nos programas de cálculo automático RISA 3D do grupo Nemetschek, que utiliza o método de elementos finitos, e EBERICK da empresa AltoQi, que utiliza método de grelhas, com a finalidade de avaliar o comportamento das lajes conjuntamente. Para isso se tornar necessário discretizar o pano em malhas espaçadas de 20x20, 30x30 e 50x50 e fazer um comparativo entre os dois modelos. Neste caso, os apoios são considerados deslocáveis e com rotações nos apoios simuladas através de engastamento perfeito.

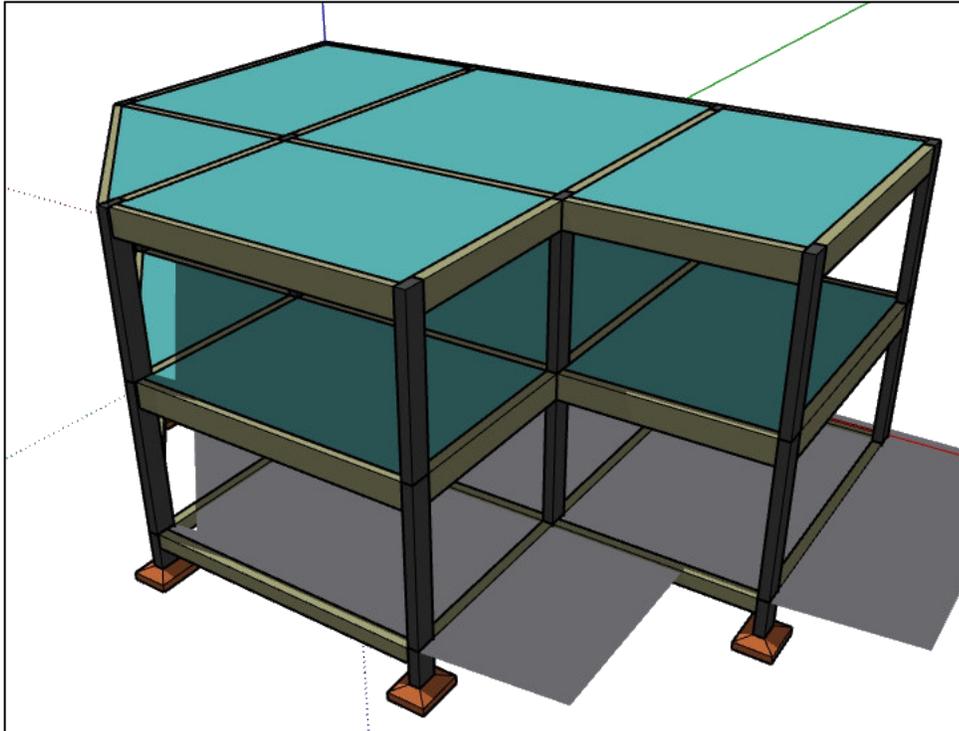
### 5.2 DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA

#### 5.2.1 Aspectos Gerais

Edifício em concreto armado que apresenta a seguinte configuração (Figura 5.1, Figura 5.1):

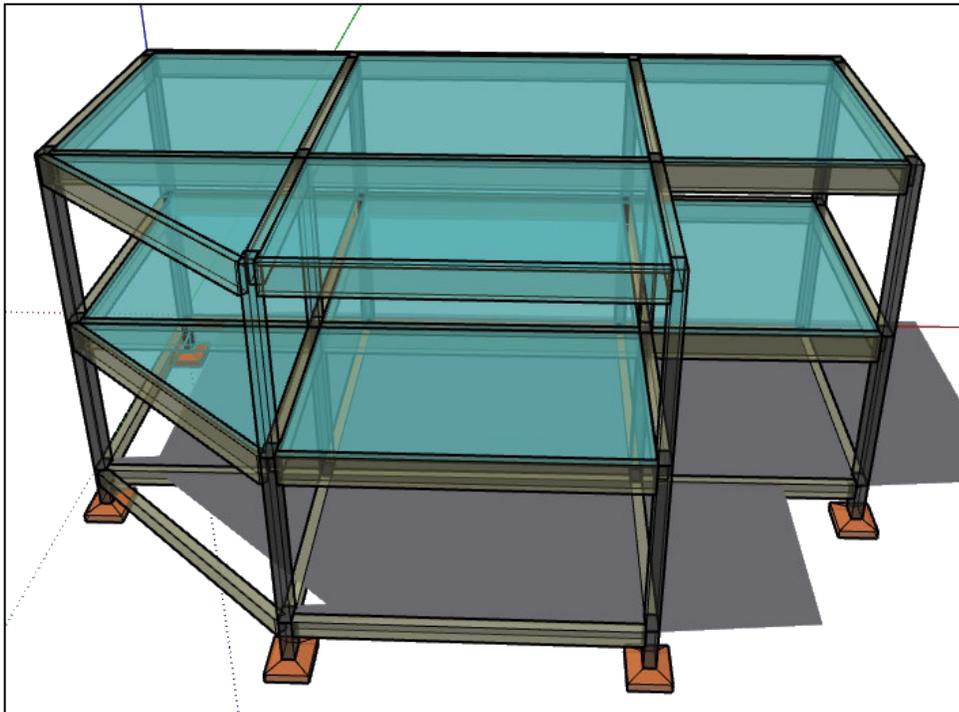
- O edifício destina-se à habitação, composto por 2 pisos;
- Possui uma área de implantação total de 123,68 m<sup>2</sup>.
- A altura total do edifício (contada entre a cota do piso 0 e a cota da face superior da laje de cobertura) é de 6,48 m.
- A planta de arquitetura apresenta um pé direito de 3,06 metros em toda a sua extensão.

Figura 5.1- Modelo 3D da estrutura



Fonte: O Autor (2021)

Figura 5.2- Modelo 3D as estrutura com lajes em transparência



Fonte: O Autor (2021)



### 5.3 AÇÕES CONSIDERADAS

Ação permanente refere-se a uma ação que não muda com o tempo durante a vida útil ou posição espacial da estrutura. Neste trabalho são consideradas as ações permanentes e acidental sobre a estrutura, no entanto, cada carregamento considerado neste estudo estão de acordo com a norma NBR6120/2017. Com ações permanentes sobre o piso, considerou-se o peso próprio da estrutura, o revestimento do piso e as paredes (Tabela 5.4).

Tabela 5.4 – Ações permanentes sobre a estrutura

<b>AÇÕES PERMANENTES</b>	<b>CARGA</b>
Carga acidental	2,0kN/m <sup>2</sup>
Revestimento do piso	1,0 kN/m <sup>2</sup>

Fonte: O Autor (2021)

Sobre as vigas de extremidade considerou-se o carregamento de parede com altura total  $h=2,56$  m, composta por alvenaria de tijolo furado de seis furos com peso específico de  $\gamma_p = 13$  kN/m<sup>3</sup> e espessura de  $e = 15$  cm resultando nos carregamentos abaixo sobre cada viga (Tabela 5.5).

$$G_p = \gamma_p \cdot e \cdot h \quad (5.1)$$

Tabela 5.5 – Ações permanentes sobre as vigas de bordadura

<b>VIGAS</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>V4</b>	<b>V5</b>	<b>V6</b>	<b>V7</b>	<b>V8</b>
<b>Paredes [KN/m]</b>	4,99	4,99	4,99	4,99	4,99	4,99	4,99	4,99

Fonte: O Autor (2021)

Para determinar o peso de cada elemento considerado neste estudo, o software de cálculo estrutural já possui todas as informações necessárias, pois os materiais constituintes dos elementos foram definidos e informados nos softwares. Nesse trabalho foi considerado o peso próprio da estrutura e foi desprezado a influência de ação variável de vento.

Como apresentado anteriormente, o edifício em questão destina-se à habitação, e os coeficientes a utilizar para a obtenção dos valores reduzidos a considerar para este tipo de sobrecarga são:

$$\Psi_0 = 0,4; \Psi_1 = 0,3; \Psi_2 = 0,2 \quad (5.2)$$

$\Psi_0$  – fator de redução de combinação para ELU

$\Psi_1$  – fator de redução de combinação frequente para ELS

$\Psi_2$  – fator de redução de combinação quase permanente para ELS

#### 5.4 MODELAÇÃO

Feita uma prévia análise estrutural do edifício, segue-se para a modelação da estrutura no programa de cálculo automático. A primeira etapa da modelação é a criação de conjunto de linhas de referência que têm como objetivo auxiliar a inserção dos elementos de estrutura no software. Após a definição da grelha tridimensional da estrutura, segue-se a definição das características do material e a definição das seções dos elementos estruturais, pilares e vigas, bem como das cargas aplicadas.

##### 5.4.1 Definição do material

O edifício em estudo é composto por elementos de concreto armado, sendo assim, foi necessário definir apenas um tipo de material, concreto C25, correspondente a um concreto de com  $F_{ck}$  igual a 25MPa, que foi usado para todos os elementos estruturais. Assim na inserção do material definido, introduzimos os seguintes valores:

a) Massa Específica Concreto  $\rho_c$ : 25KN/m<sup>3</sup>;

b) Módulo de Elasticidade  $E_c$ : 24150 MPa

Para  $f_{ck}$  de 20 MPa a 50 MPa temos:

$$E_{CI} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (5.3)$$

sendo:

$\alpha_E = 1,2$  para basalto e diabásio

$\alpha_E = 1,0$  para granito e gnaisse

$\alpha_E = 0,9$  para calcário

$\alpha_E = 0,7$  para arenito

c) Coeficiente de Poisson: admitiu-se um coeficiente de Poisson com o valor de 0,2.

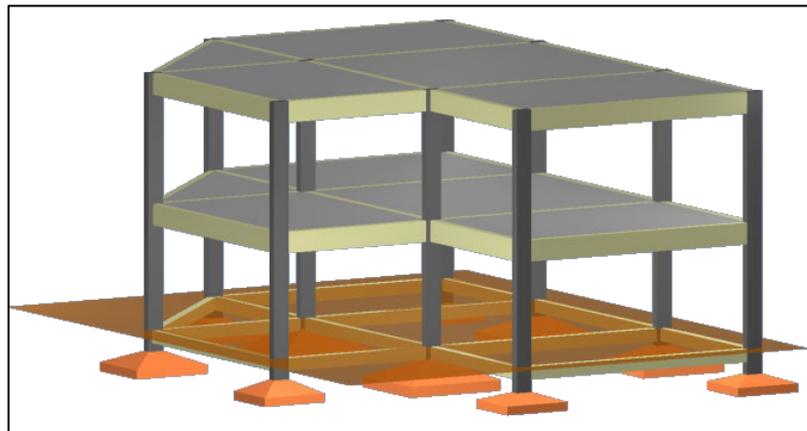
#### 5. 4. 2 **Modelação de vigas e pilares**

A inserção dos pilares e vigas foi executada de forma simples, bastou seleccionar cada peça, e indicar qual a localização exata dos pontos iniciais e finais no referido layout de arquitetura em cada software. Após a representação das vigas de bordadura estas foram sujeitas à carga uniformemente distribuída sob o eixo da respectiva viga (Tabela 5.5).

#### 5. 4. 3 **Modelação da laje de pavimento com elementos de grelha no Eberick**

Definido os materiais com suas propriedades e as seções transversais das peças estruturais utilizadas no modelo, e apresentadas nas tabelas 5.1, 5.2 e 5.3, inseriu-se as informações dos níveis e altura de pé direito de cada pavimento no modelo do software Eberick, logo após a definição do níveis dos pavimentos, através da ferramenta “importar” do software, foi importado o arquivo DXF, elaborado previamente no AutoCad, contendo a planta de arquitetura de cada pavimento para aba desenho, com a finalidade de auxiliar na locação dos pilares e na inserção das demais peças estruturais como as vigas e pilares. A próxima etapa foi o lançamento dos pilares de fundação e da viga baldrame com auxilio do croqui inserido na aba desenho; em seguida inserimos as vigas e as lajes do térreo e da cobertura.

Figura 5.4 - Pórtico 3D da estrutura no Eberick.

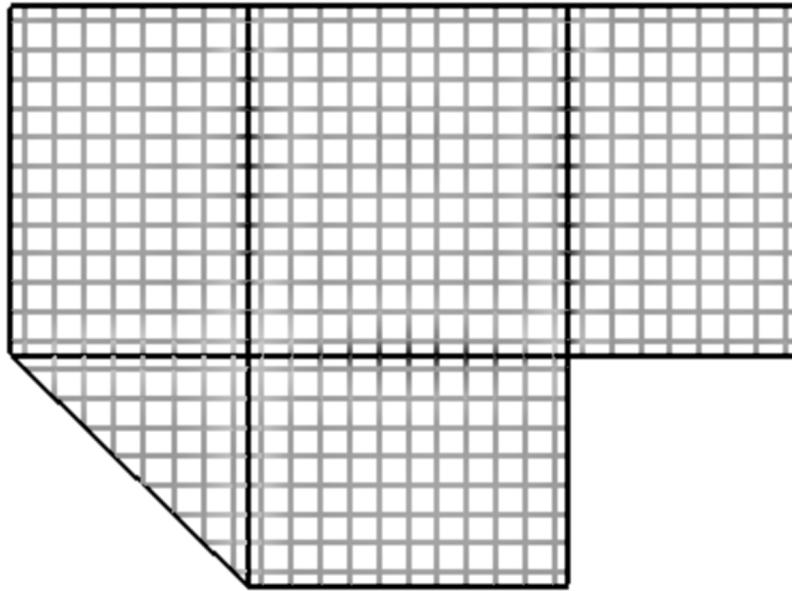


Fonte: O Autor (2021)

Após ter lançado toda a estrutura, desde a fundação ate a cobertura, configurou-se o espaçamento das grelhas de cada laje do modelo, criando uma malha quadrada regular de 50x50. A próxima etapa foi a definição e aplicação dos carregamentos nas vigas e lajes de acordo com as tabelas 5.4 e 5.5. Cada ação foi modelada como uma carga linear contínua ao longo dos elementos de vigas; e nos elementos de lajes, foram inseridos os carregamentos como carga de

superfície. O engastamento das lajes foi aplicado somente entre os contornos de lajes adjacentes. Para a simulação com as malhas 30x30 e 20x20 foi necessário somente alterar as configurações do espaçamento da grelha nas propriedades de cada elemento de laje (figura 5.5).

Figura 5.5- Exemplo da grelha do modelo - Malha 50x50.

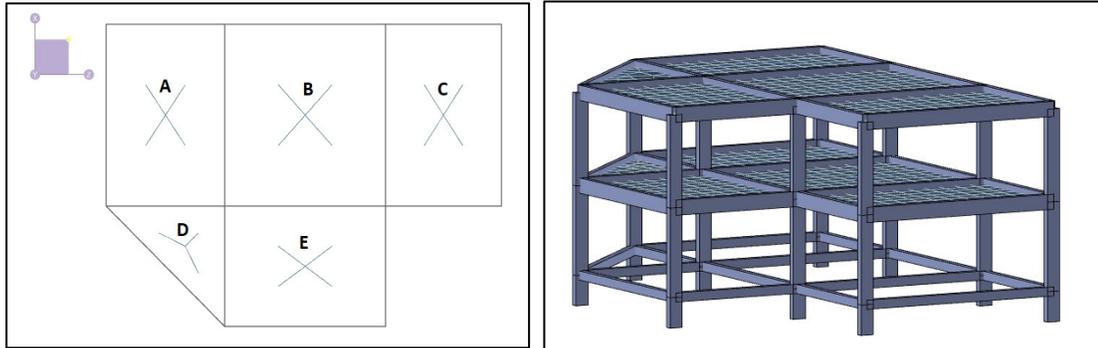


Fonte: O Autor (2021)

#### 5. 4. 4 **Modelação da laje de pavimento com elementos de laje no Risa 3D**

O procedimento de lançamento de estrutura no Risa 3D é muito parecido com os procedimentos do Eberick. O processo iniciou-se com a definição dos materiais com suas propriedades e as seções das peças estruturais a ser utilizada no modelo de acordo com as tabelas 5.1, 5.2 e 5.3. O diferencial desse software é a possibilidade de importar o arquivo com o pórtico unifilar em 3D no formato DXF (elaborado previamente no AutoCad), já com estrutura completa (figura 5.6), e não somente com a planta de cada pavimento como no Eberick, facilitando a tarefa de lançamento dos pilares, vigas e lajes através da simples seleção de cada linha do pórtico seguido da aplicação das seções e o tipo de material em cada linha, transformando-as, imediatamente, em elemento estruturas de vigas, pilares. As lajes do edifício, também são de fácil lançamento, bastando somente inserir o elemento de laje através da ferramenta “*plates*” e informar os pontos dos vértices de cada laje e por fim, introduzir a altura determinada de cada laje, aplicando seus respectivos nomes, como apresentado na figura 5.6, com a finalidade de facilitar a identificação das subdivisões dessas lajes durante a análise da estrutura.

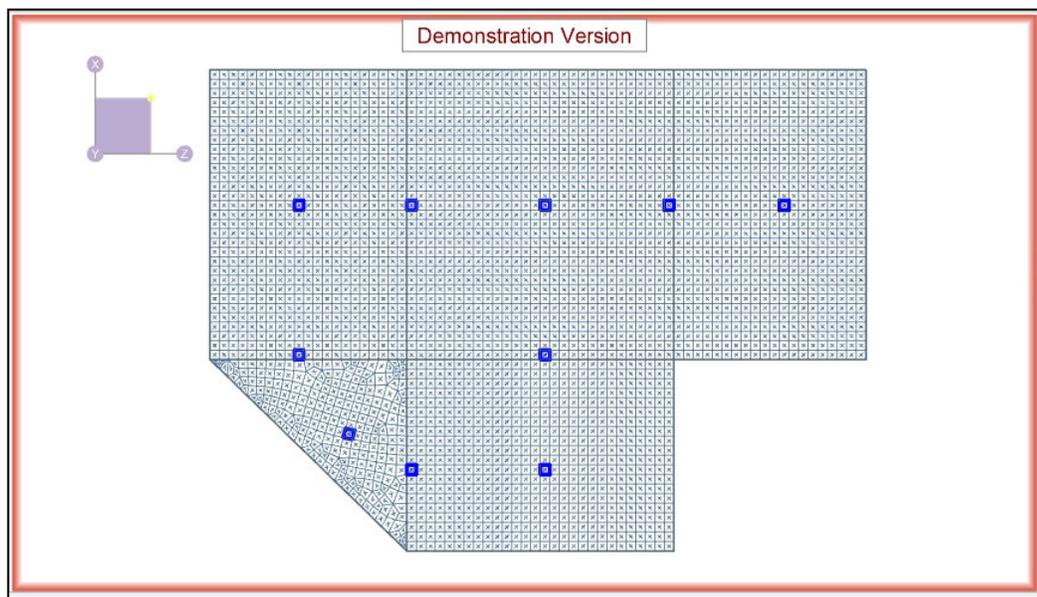
Figura 5.6- Lajes e Pórtico 3D da estrutura com as lajes subdivididas em placas no Risa 3D.



Fonte: O Autor (2021)

Por fim, introduziu-se o carregamento sobre a estrutura modelada, procedimento similar ao Eberick. Novamente, cada ação foi modelada como uma carga linear contínua ao longo dos elementos de vigas; e nos elementos de lajes, foram inseridos os carregamentos como carga de superfície. O engastamento das lajes também foi aplicado somente entre os contornos de lajes adjacentes. Para a subdivisão das lajes, com intuito de criar os elementos de lajes, utilizou-se a ferramenta *submesh plates*, que divide cada placa selecionada em vários elementos com as mesmas propriedades de material e de carregamento; esse procedimento foi utilizado para subdividir as placas em malhas 50x50, 30x30 e 20x20, conforme a ilustração abaixo.

Figura 5.7- Lajes subdivididas em placas no Risa 3D - malha 20x20



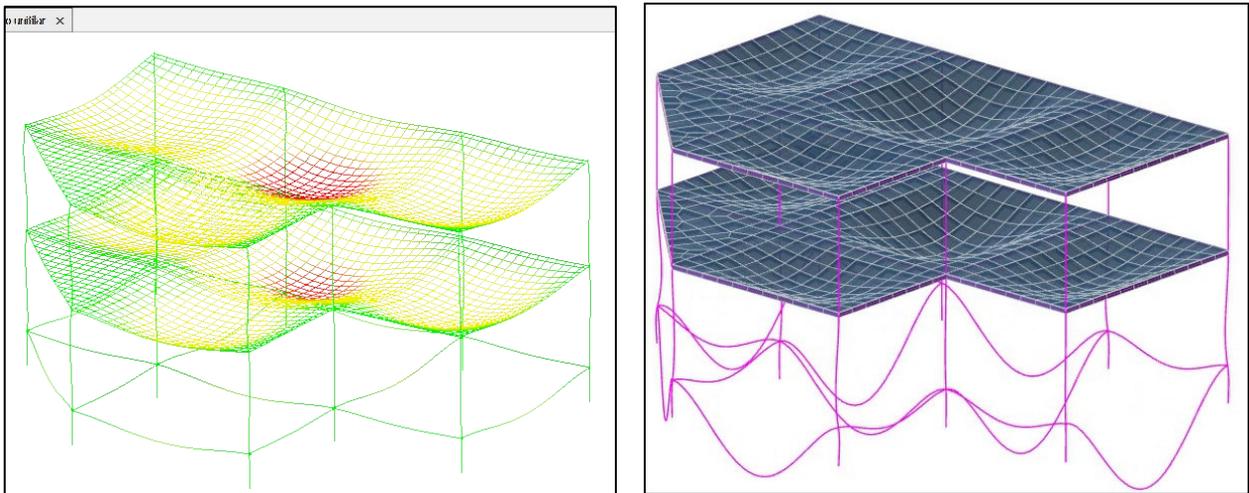
Fonte: O Autor (2021)

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 6.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nesse estudo foram consideradas nos cálculos e nos comparativos somente as lajes tipo do último pavimento, visto que a laje do pavimento 01 apresentou resultados similares, uma vez que são lajes análogas ou seja, lajes de mesmas dimensões e carregamento (figura 6.1).

Figura 6.1- Deformações nas lajes - Eberick e Risa3D, respectivamente.



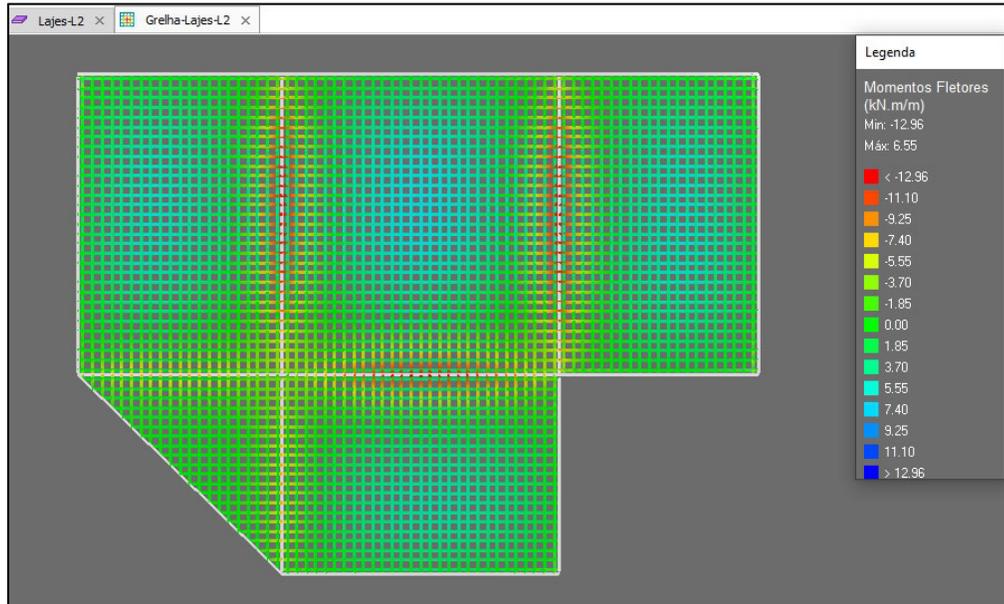
Fonte: O Autor (2021)

AltoQi e RISA 3D da NEMETSCHEK, avaliando-se qual dos métodos apresentam resultados mais satisfatórios para a utilização em estruturas usuais de lajes de concreto armado, levando em consideração a entrada e saída de dados dos elementos necessários para o correto processamento das lajes.

### 6.2 VALORES DOS MOMENTOS FLETORES E DIFERENÇA DE PERCENTUAIS

Inicialmente apresenta-se os resultados gráficos obtidos nos softwares. Posteriormente os dados são tabelados e comparados em diferenças percentuais, a fim de analisarmos a divergência entre os valores resultantes de cada método.

Figura 6.2- Momento Mx e My malha 20x20 no Eberick



Fonte: O Autor (2021)

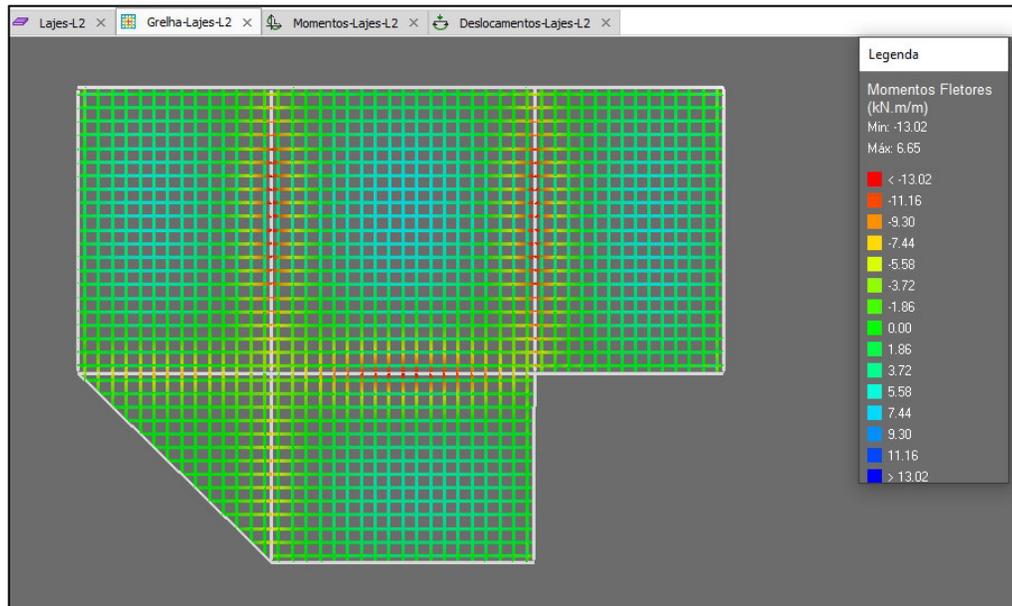
Imagem da grelha extraída do programa Eberick com os valores dos momentos fletores, máximos e mínimos totais e não por laje. Para melhor visualização separou-se os valores de cada laje, conforme se apresenta nas fig.6.3

Figura 6.3- Momento Mx e My - malha 20x20- no Eberick



Fonte: O Autor (2021)

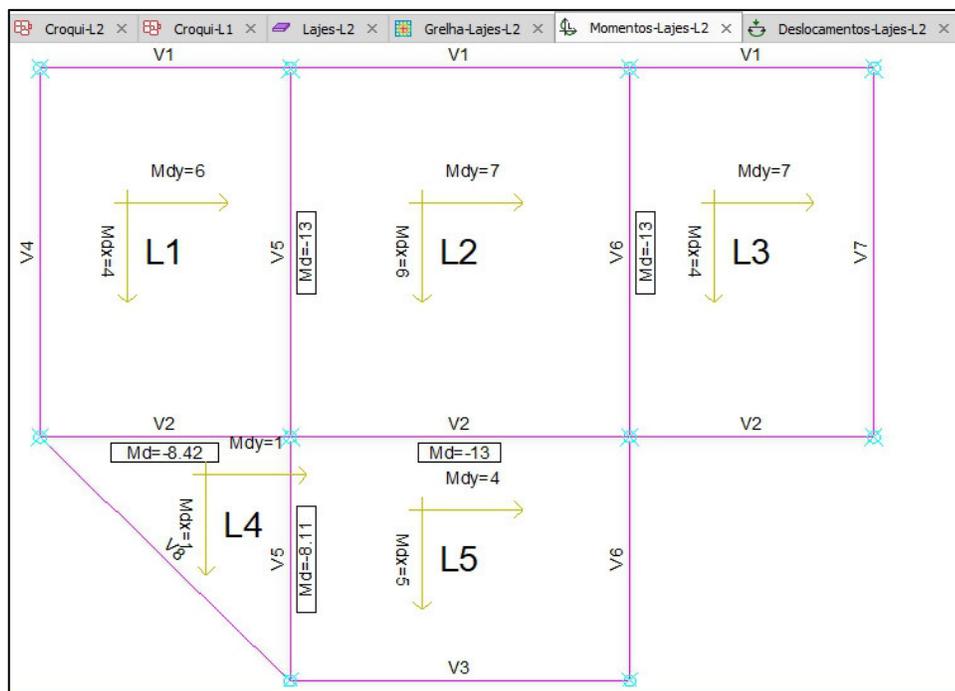
Figura 6.4- Momento Mx e My malha 30x30 no Eberick



Fonte: O Autor (2021)

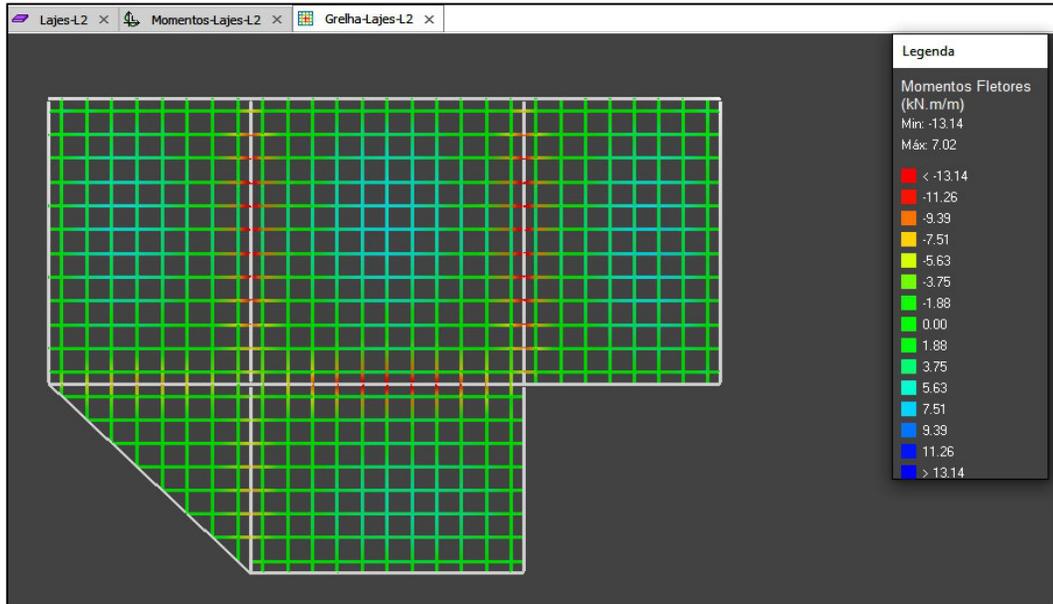
Imagem da grelha extraída do programa Eberick com os valores dos momentos fletores, máximos e mínimos totais e não por laje. Para melhor visualização separou-se os valores de cada laje, conforme se apresenta nas fig.6.5

Figura 6.5- Momento Mx e My - malha 30x30- no Eberick



Fonte: O Autor (2021)

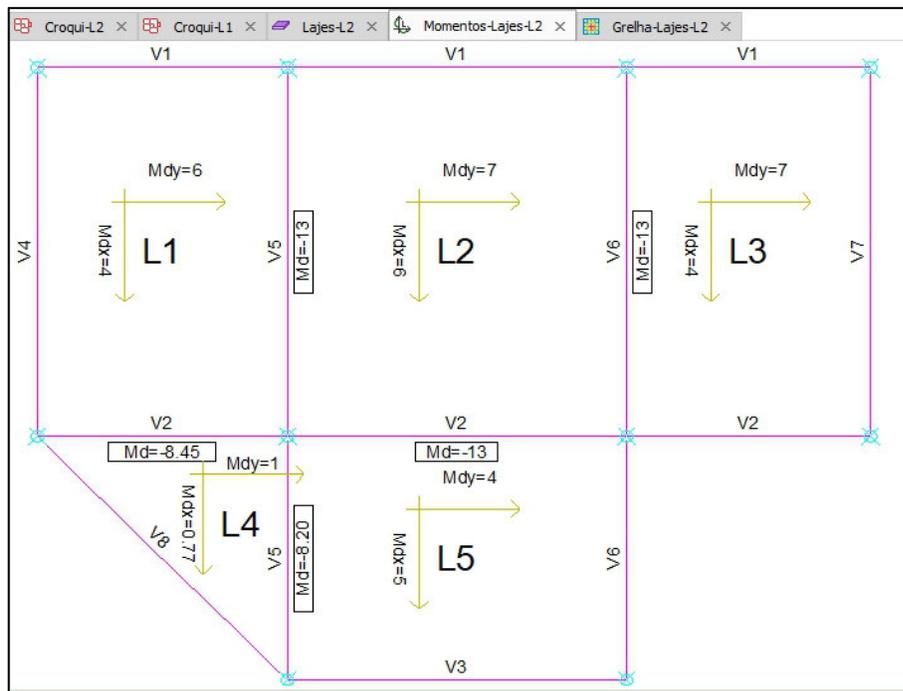
Figura 6.6- Momento Mx e My malha 50x50 no Eberick



Fonte: O Autor (2021)

Imagem da grelha extraída do programa Eberick com os valores dos momentos fletores, máximos e mínimos totais e não por laje. Para melhor visualização separou-se os valores de cada laje, conforme se apresenta nas fig.6.5

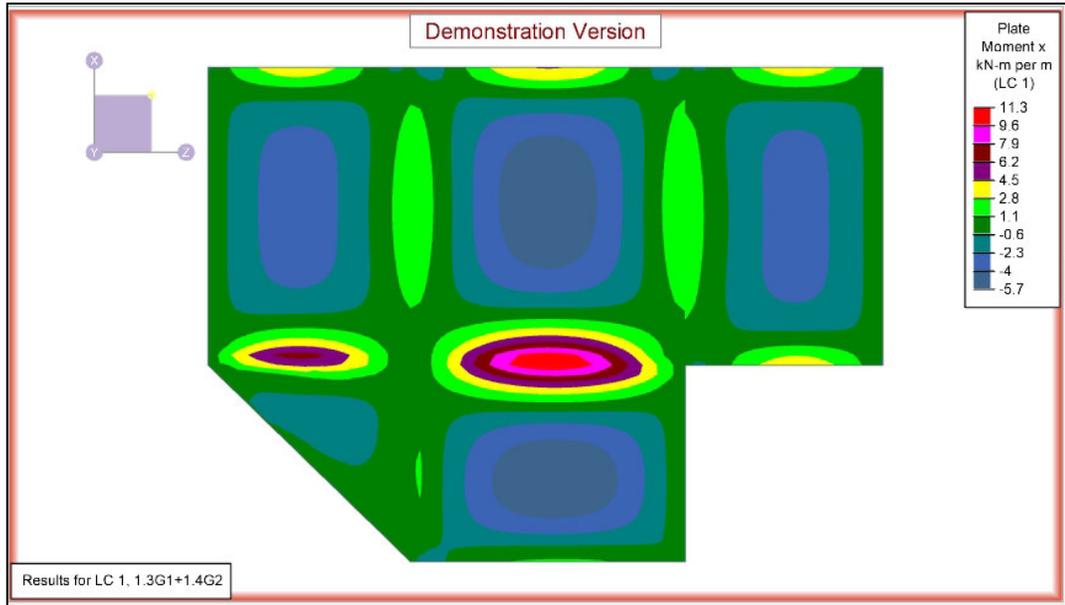
Figura 6.7- Momento Mx e My - malha 50x50- no Eberick



Fonte: O Autor (2021)

No programa RISA 3D, os valores dos momentos fletores  $M_x$  apresentados em região com isovalores, que serão separados por lajes nas tabelas 6.1 e 6.3.

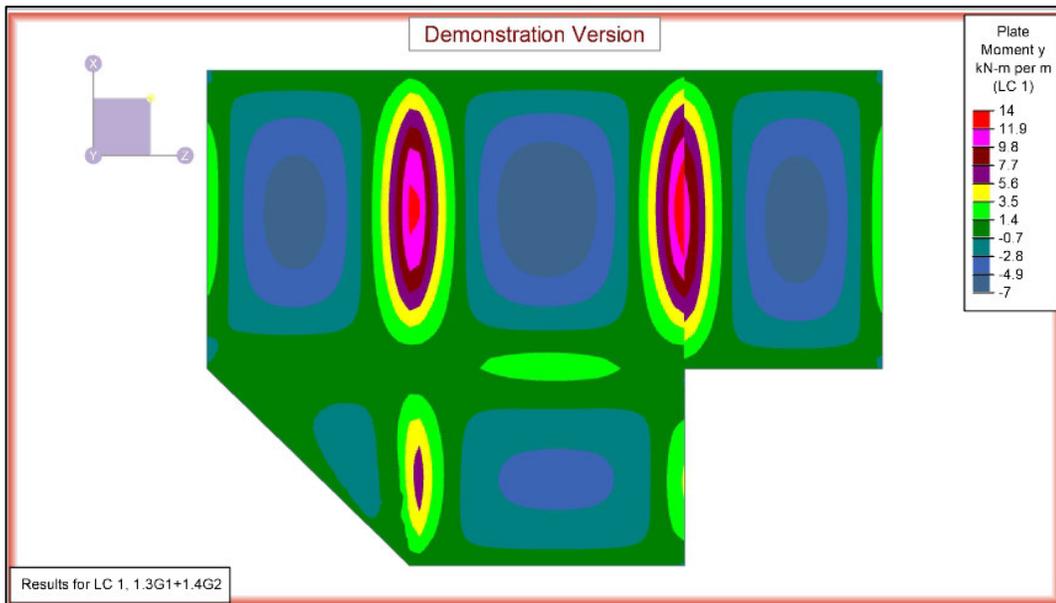
Figura 6.8- Momento  $M_x$  malha 20x20 no Risa 3D



Fonte: O Autor (2021)

No programa RISA 3D, os valores dos momentos fletores  $M_y$  apresentados em região com isovalores, que serão separados por lajes nas tabelas 6.2 e 6.4.

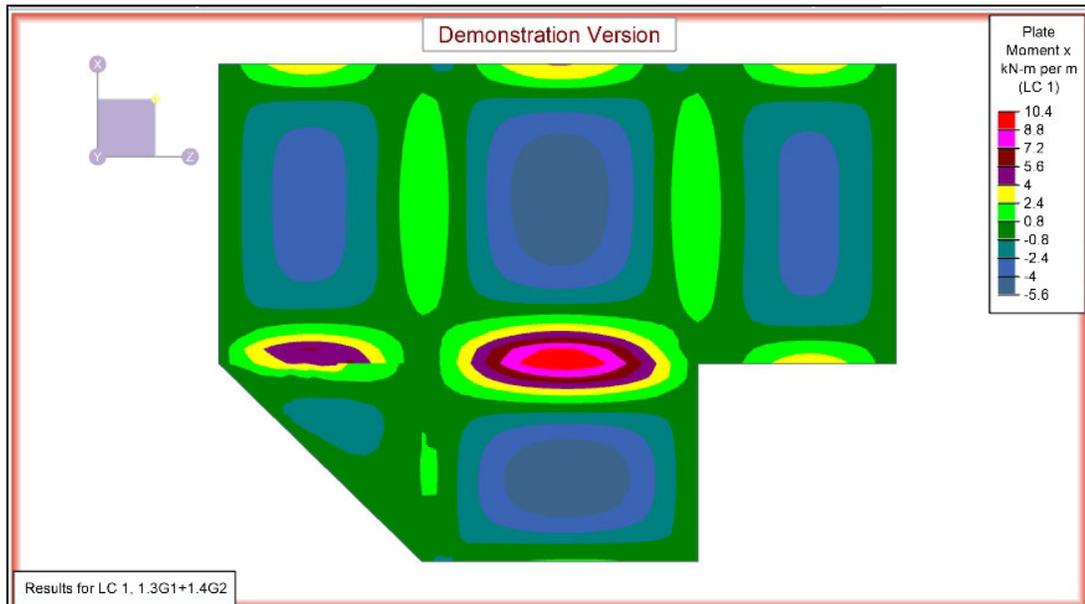
Figura 6.9- Momento  $M_y$  malha 20x20 no Risa 3D



Fonte: O Autor (2021)

No programa RISA 3D, os valores dos momentos fletores  $M_x$  apresentados em região com isovalores, que serão separados por lajes nas tabelas 6.1 e 6.3.

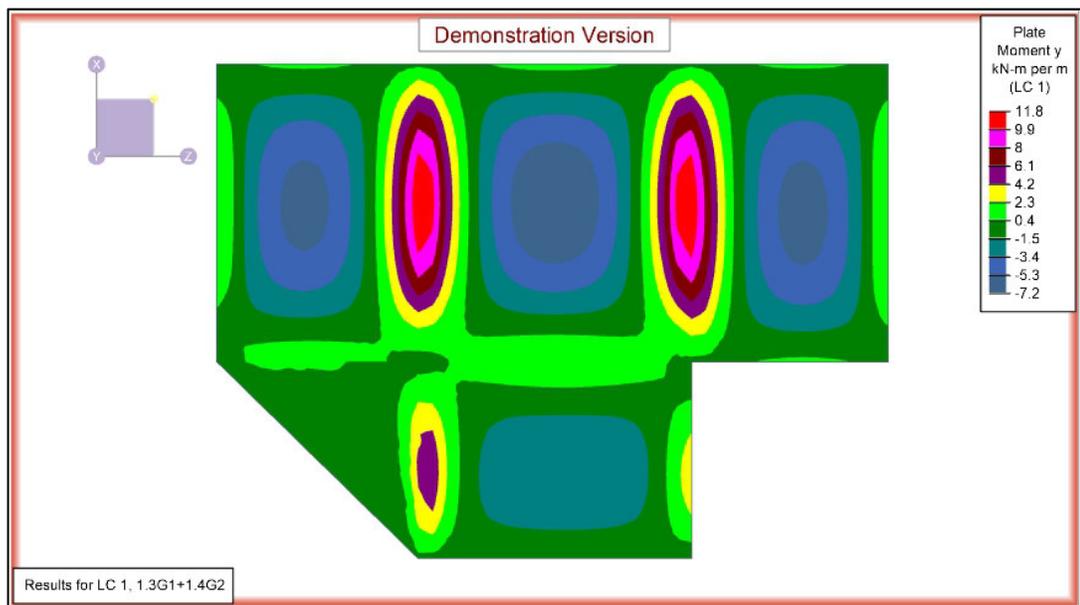
Figura 6.10- Momento  $M_x$  malha 30x30 no Risa 3D



Fonte: O Autor (2021)

No programa RISA 3D, os valores dos momentos fletores  $M_y$  apresentados em região com isovalores, que serão separados por lajes nas tabelas 6.2 e 6.4.

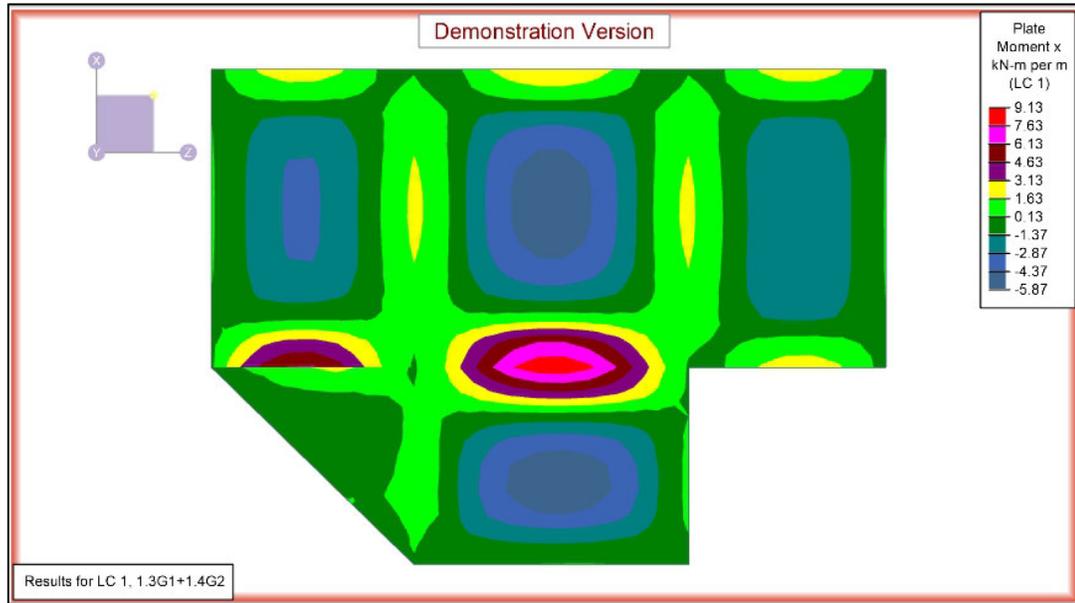
Figura 6.11- Momento  $M_y$  malha 30x30 no Risa 3D



Fonte: O Autor (2021)

No programa RISA 3D, os valores dos momentos fletores  $M_x$  apresentados em região com isovalores, que serão separados por lajes nas tabelas 6.1 e 6.3.

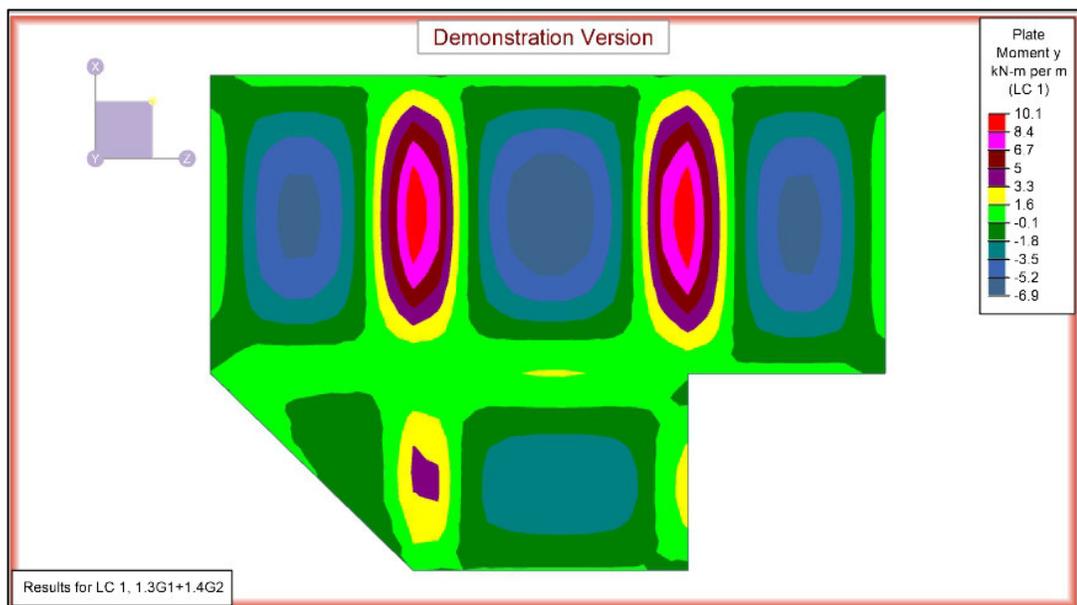
Figura 6.12- Momento  $M_x$  malha 50x50 no Risa 3D



Fonte: O Autor (2021)

No programa RISA 3D, os valores dos momentos fletores  $M_y$  apresentados em região com isovalores, que serão separados por lajes nas tabelas 6.2 e 6.4.

Figura 6.13- Momento  $M_y$  malha 50x50 no Risa 3D



Fonte: O Autor (2021)

Tabela 6.1 – Momentos fletores positivos máximo  $M_x$  (kN·m/m) e diferenças percentuais

LAJE	AG			MEF			Diferenças percentuais (%)		
	Malha (cm)			Malha (cm)			Malha (cm)		
	20X20	30X30	50X50	20X20	30X30	50X50	20X20	30X30	50X50
L1	4,40	4,41	4,40	3,17	3,15	3,10	-28,0%	-28,6%	-29,5%
L2	6,36	6,37	6,37	5,33	5,34	5,33	-16,2%	-16,2%	-16,3%
L3	4,28	4,27	4,24	2,88	2,86	2,82	-32,7%	-33,0%	-33,5%
L4	1,25	1,06	0,77	1,46	1,30	1,36	16,8%	22,6%	76,6%
L5	5,02	5,07	5,28	5,64	5,60	5,63	12,4%	10,5%	6,6%

Fonte: O Autor (2021)

Tabela 6.2 – Momentos fletores positivo máximo  $M_y$  (kN·m/m) e diferenças percentuais

LAJE	AG			MEF			Diferenças percentuais (%)		
	Malha (cm)			Malha (cm)			Malha (cm)		
	20X20	30X30	50X50	20X20	30X30	50X50	20X20	30X30	50X50
L1	6,11	6,18	6,37	6,05	6,01	6,08	-1,0%	-2,8%	-4,6%
L2	6,55	6,59	6,69	7,00	7,03	7,07	6,9%	6,7%	5,7%
L3	6,45	6,56	6,76	6,15	6,13	6,15	-4,7%	-6,6%	-9,0%
L4	1,60	1,45	1,30	1,44	1,39	1,16	-10,0%	-4,1%	-10,8%
L5	4,35	4,35	4,41	3,33	3,30	3,28	-23,4%	-24,1%	-25,6%

Fonte: O Autor (2021)

Tabela 6.3 – Momentos fletores negativo máximo  $M_x$  (kN·m/m) e diferenças percentuais

LAJE	AG			MEF			Diferenças percentuais (%)		
	Malha (cm)			Malha (cm)			Malha (cm)		
	20X20	30X30	50X50	20X20	30X30	50X50	20X20	30X30	50X50
L1	8,39	8,42	8,45	8,26	7,55	6,16	-1,5%	-10,3%	-27,1%
L2	12,81	12,83	12,89	12,01	11,30	9,58	-6,2%	-11,9%	-25,7%
L3	6,77	5,62	3,92	4,50	4,0	3,13	-33,5%	-28,8%	-20,2%
L4	7,56	7,55	7,53	8,26	7,55	6,16	9,3%	0,0%	-18,2%
L5	12,60	12,62	12,67	12,01	11,30	9,58	-4,7%	-10,5%	-24,4%

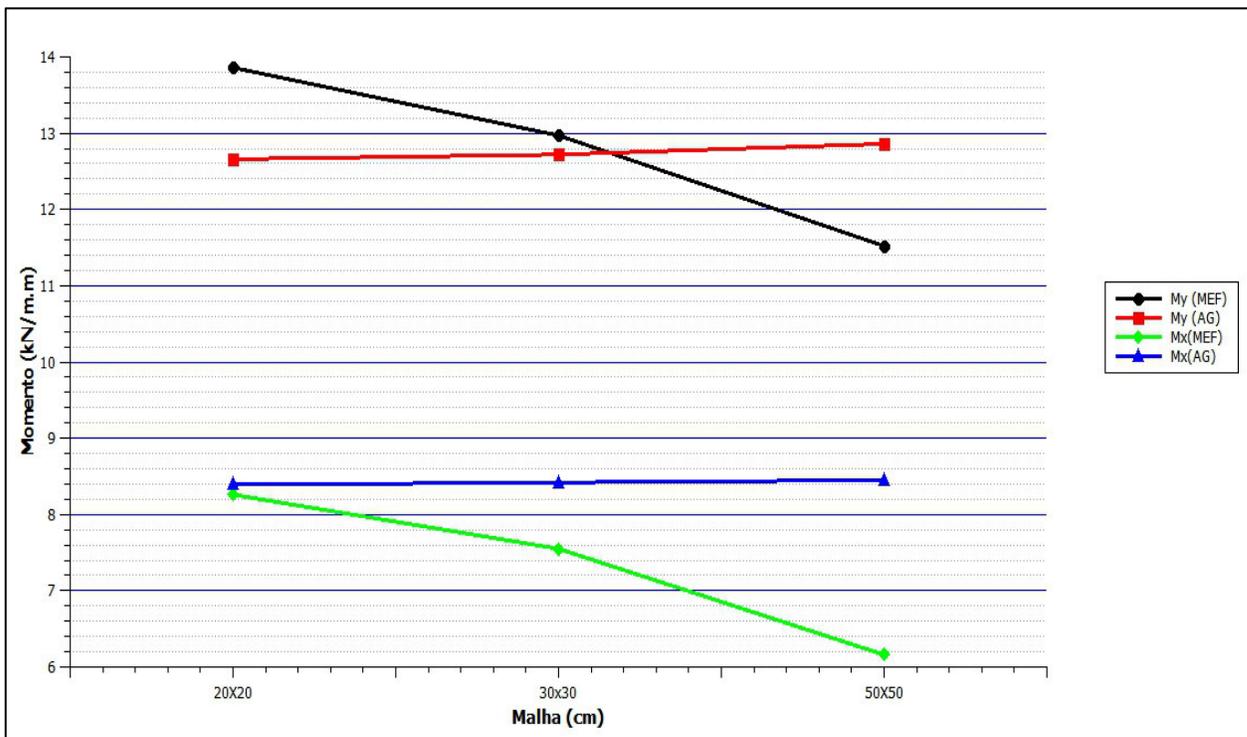
Fonte: O Autor (2021)

Tabela 6.4 – Momentos fletores negativo máximo  $M_y$  ( $\text{kN}\cdot\text{m}/\text{m}$ ) e diferenças percentuais

LAJE	AG			MEF			Diferenças percentuais (%)		
	Malha (cm)			Malha (cm)			Malha (cm)		
	20X20	30X30	50X50	20X20	30X30	50X50	20X20	30X30	50X50
L1	12,66	12,72	12,86	13,86	12,97	11,52	9,5%	2,0%	-10,4%
L2	12,96	13,02	13,14	13,86	12,97	11,52	6,9%	-0,4%	-12,3%
L3	12,60	12,67	12,85	13,86	12,97	11,52	10,0%	2,4%	-10,4%
L4	7,42	7,45	7,52	8,03	7,33	6,00	8,2%	-1,6%	-20,2%
L5	8,09	8,11	8,20	8,03	7,33	6,00	-0,7%	-9,6%	-26,8%

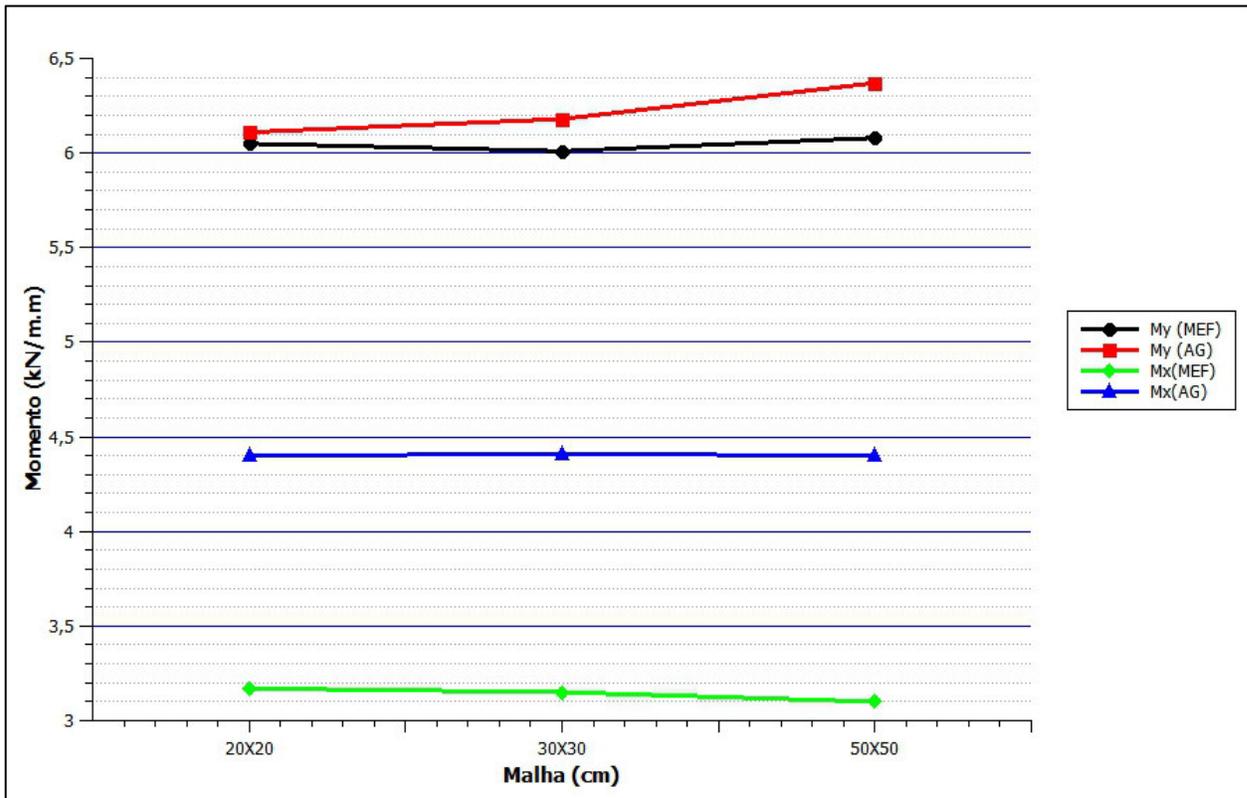
Fonte: O Autor (2021)

Figura 6.14- Análise comparativa dos momentos fletores positivos da laje L1



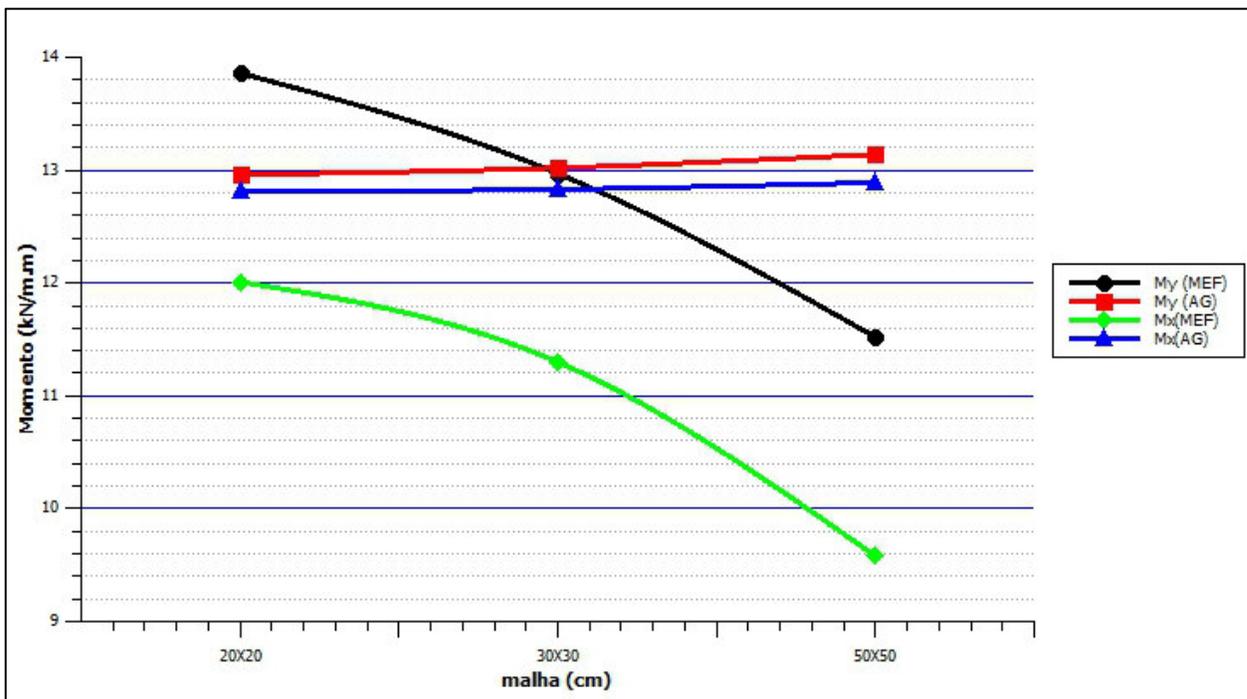
Fonte: O Autor (2021)

Figura 6.15- Análise comparativa dos momentos fletores negativos da laje L1



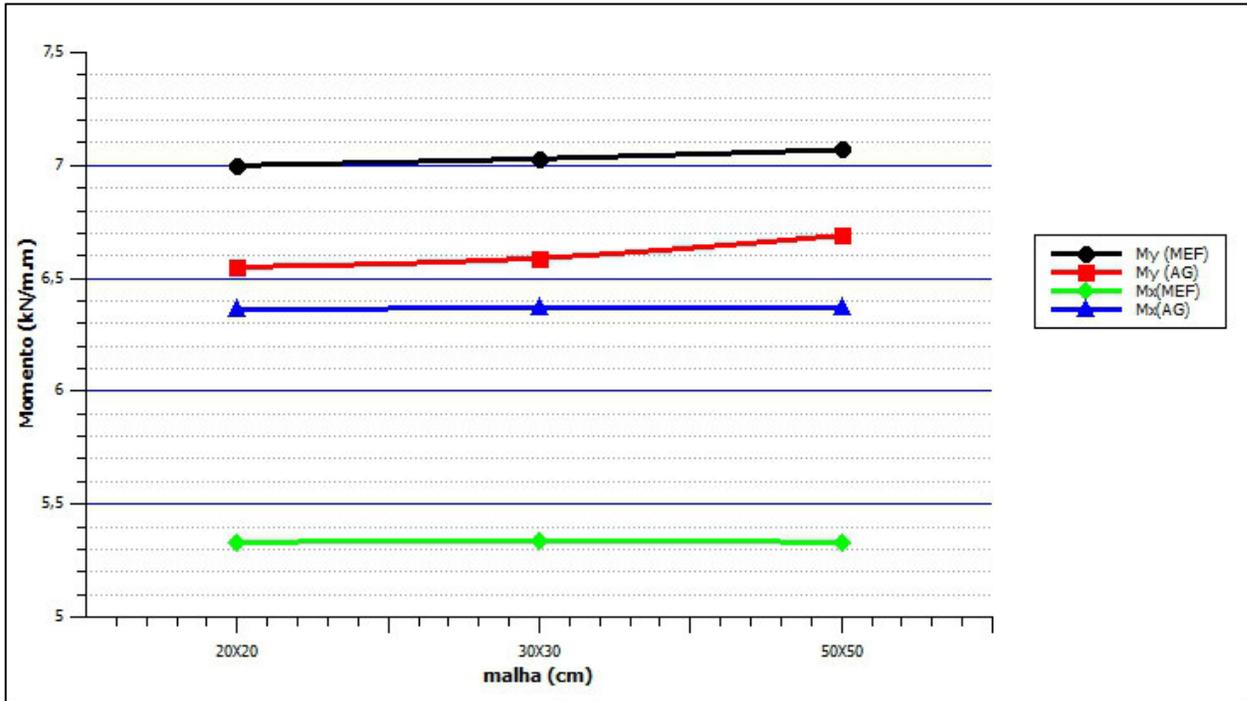
Fonte: O Autor (2021)

Figura 6.16- Análise comparativa dos momentos fletores positivos da laje L2



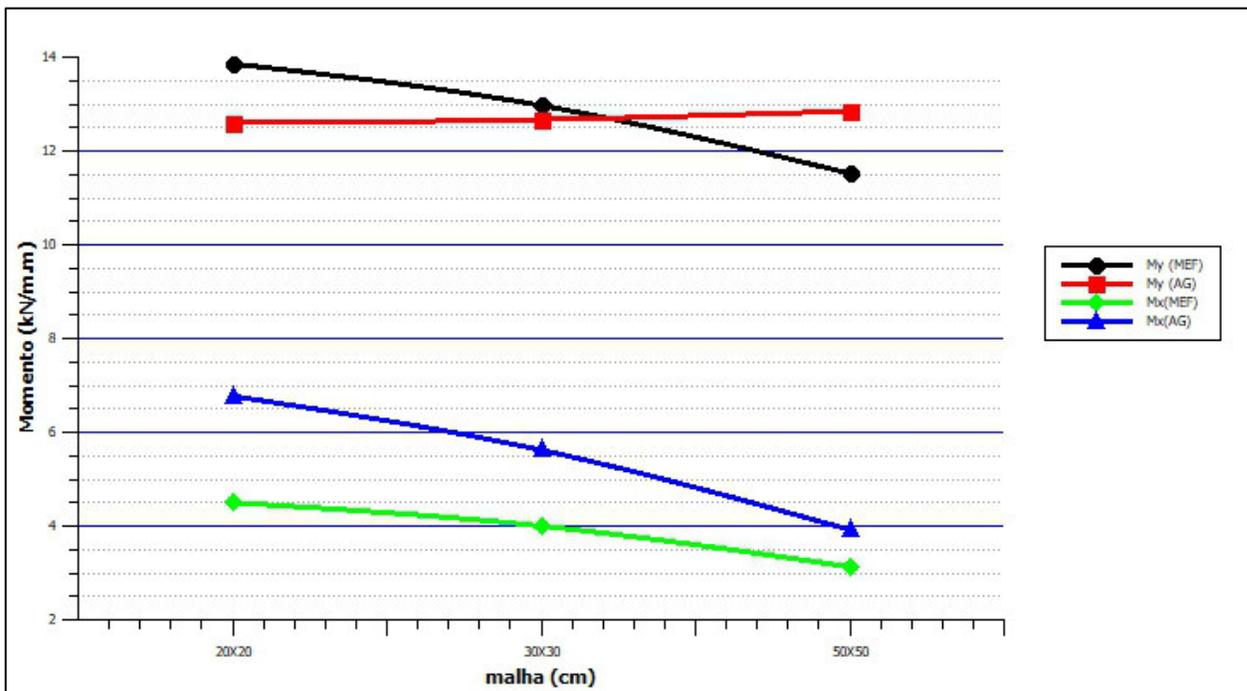
Fonte: O Autor (2021)

Figura 6.17- Análise comparativa dos momentos fletores negativos da laje L2



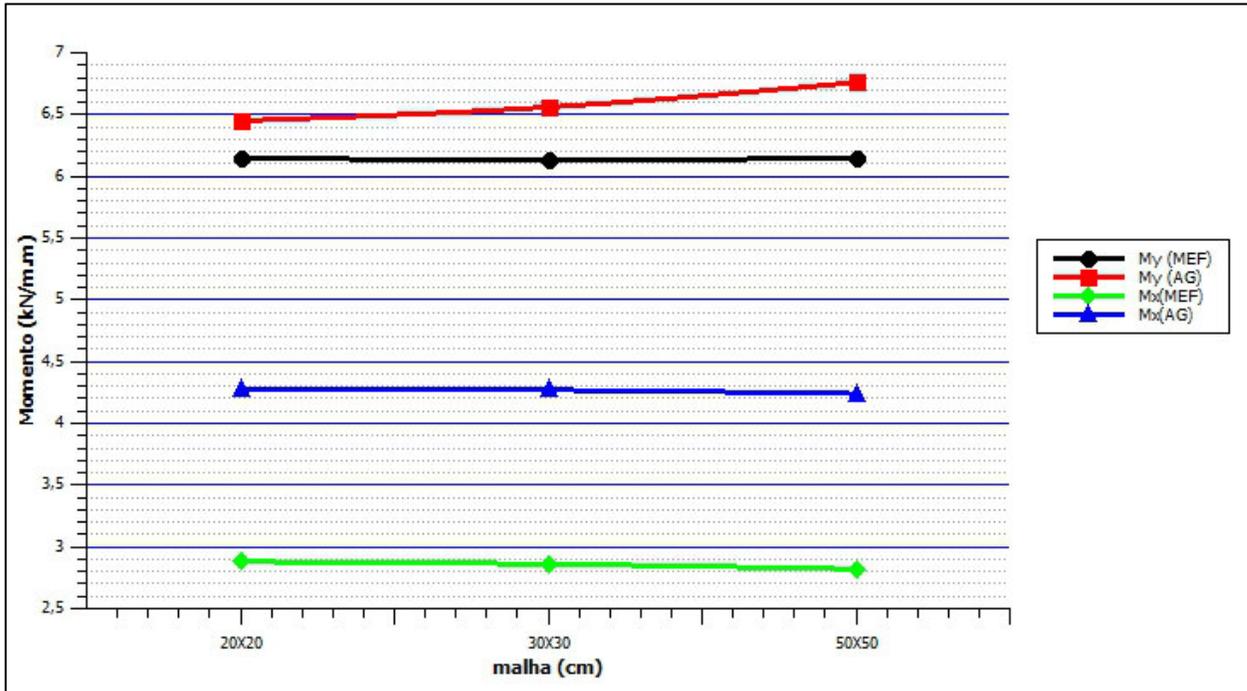
Fonte: O Autor (2021)

Figura 6.18- Análise comparativa dos momentos fletores positivos da laje L3



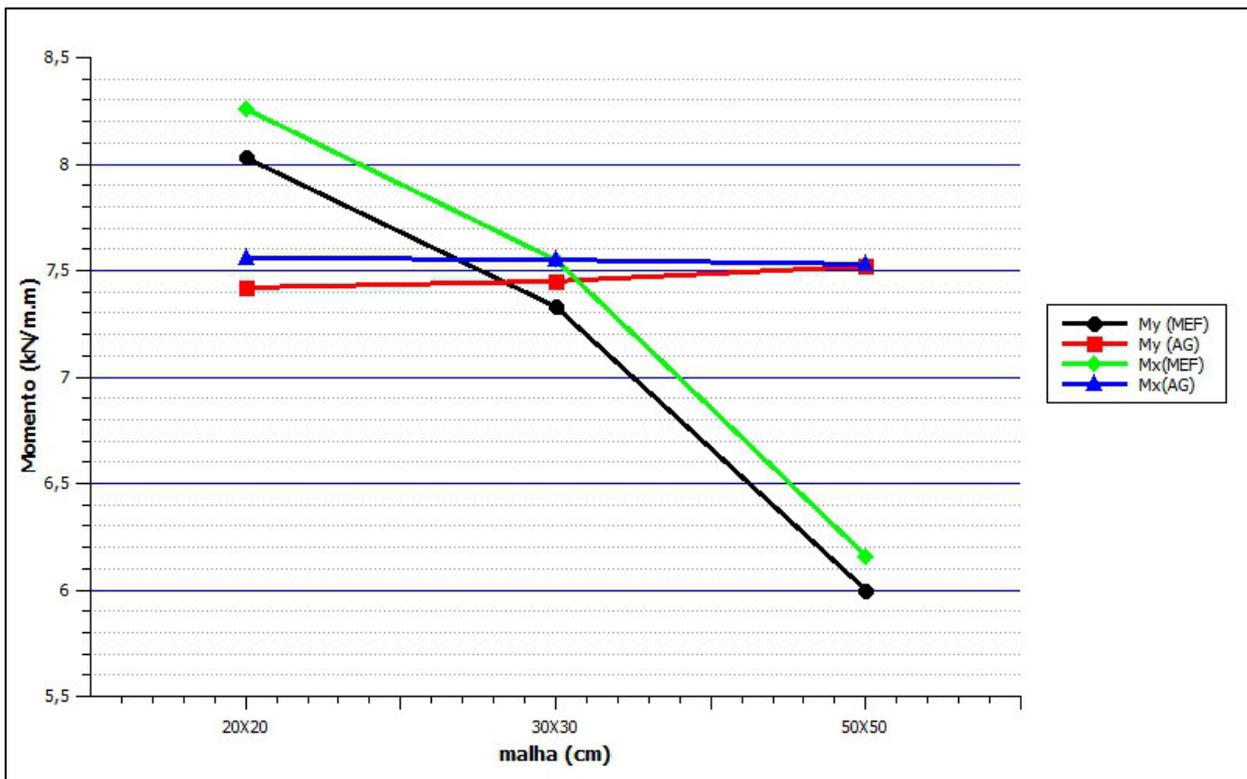
Fonte: O Autor (2021)

Figura 6.19- Análise comparativa dos momentos fletores negativos da laje L3



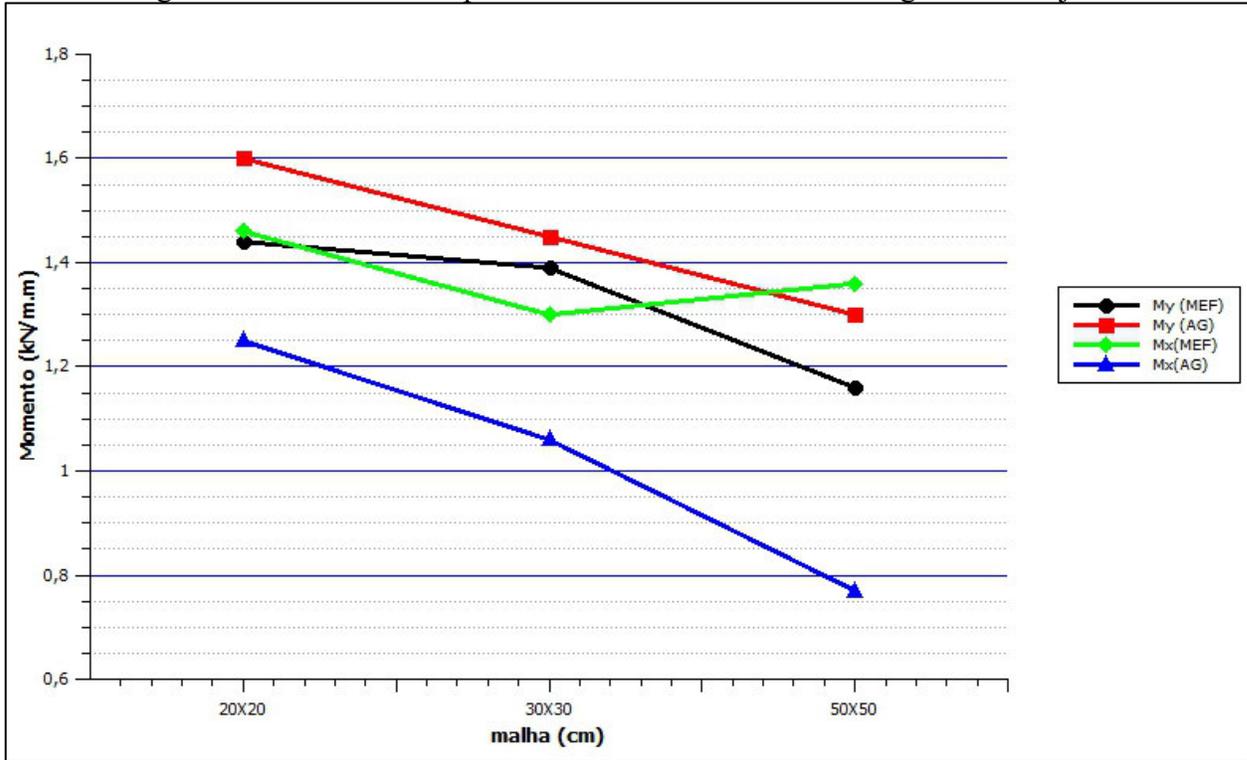
Fonte: O Autor (2021)

Figura 6.20- Análise comparativa dos momentos fletores positivos da laje L4



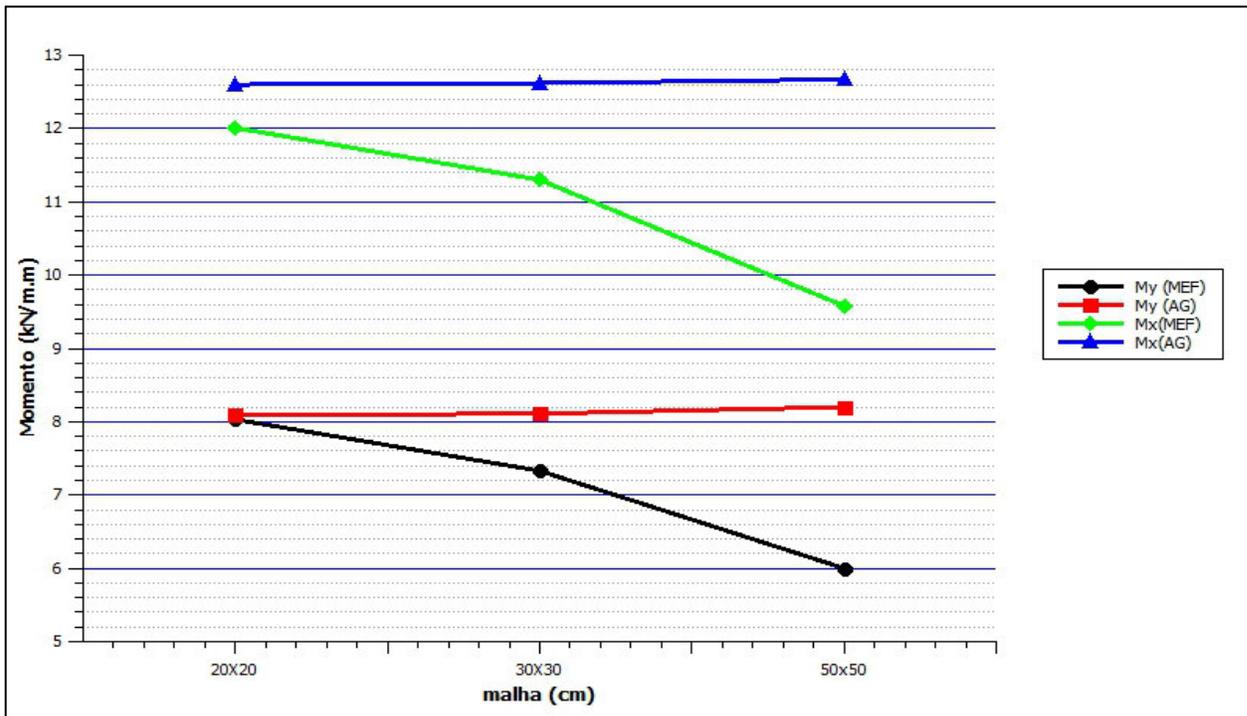
Fonte: O Autor (2021)

Figura 6.21- Análise comparativa dos momentos fletores negativos da laje L4



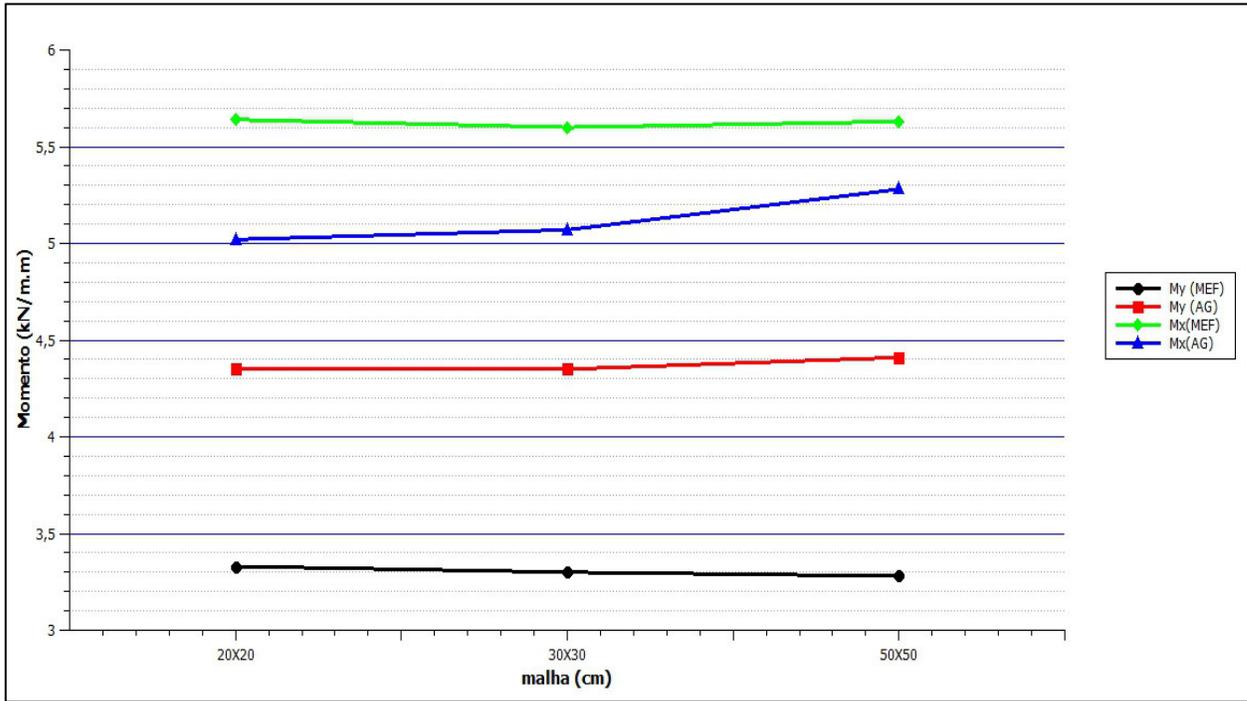
Fonte: O Autor (2021)

Figura 6.22- Análise comparativa dos momentos fletores positivos da laje L5



Fonte: O Autor (2021)

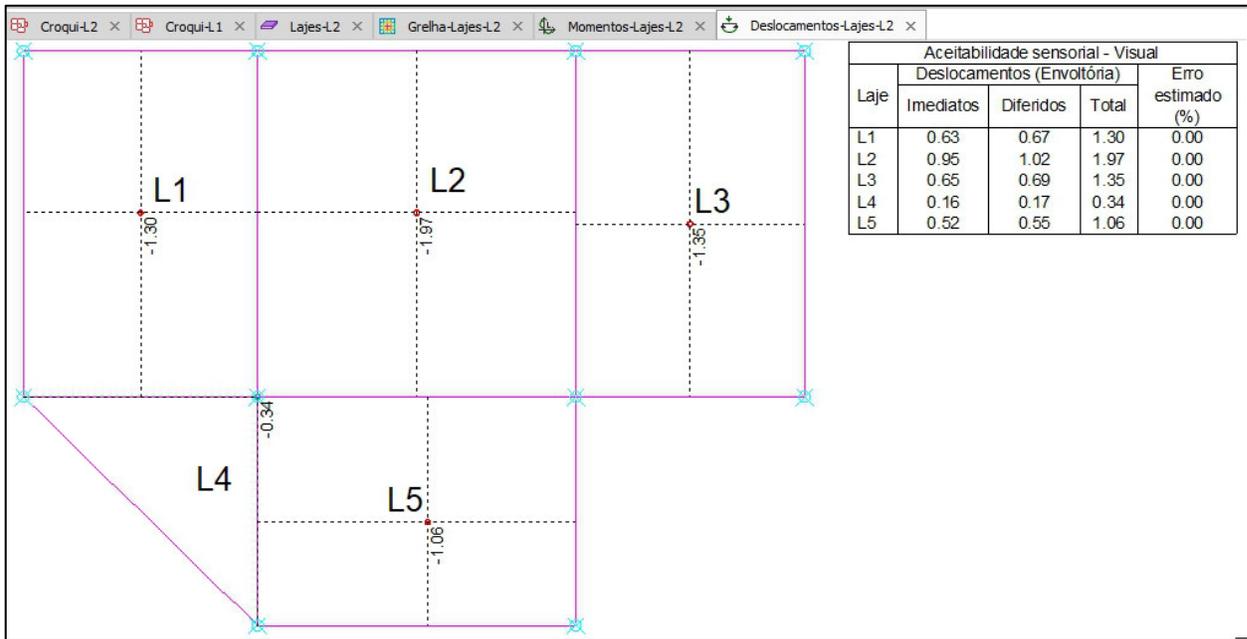
Figura 6.23- Análise comparativa dos momentos fletores negativos da laje L5



Fonte: O Autor (2021)

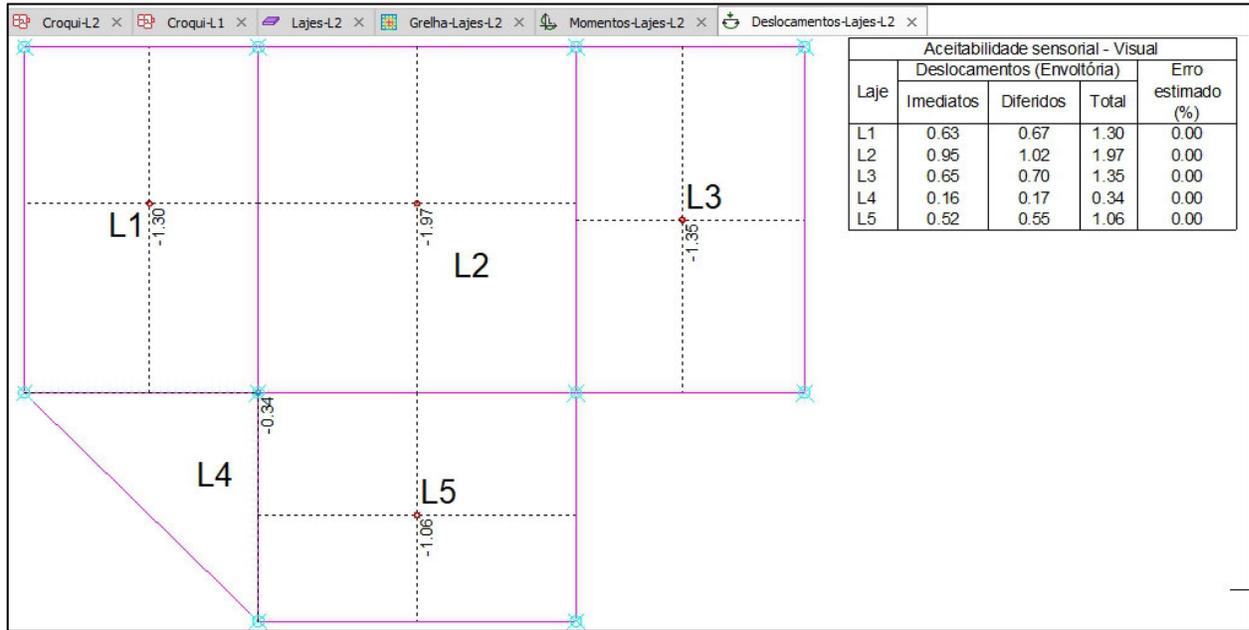
### 6.3 FLECHAS MÁXIMAS

Figura 6.24- Pontos de deformações máximas -malha 20x20 - Eberick



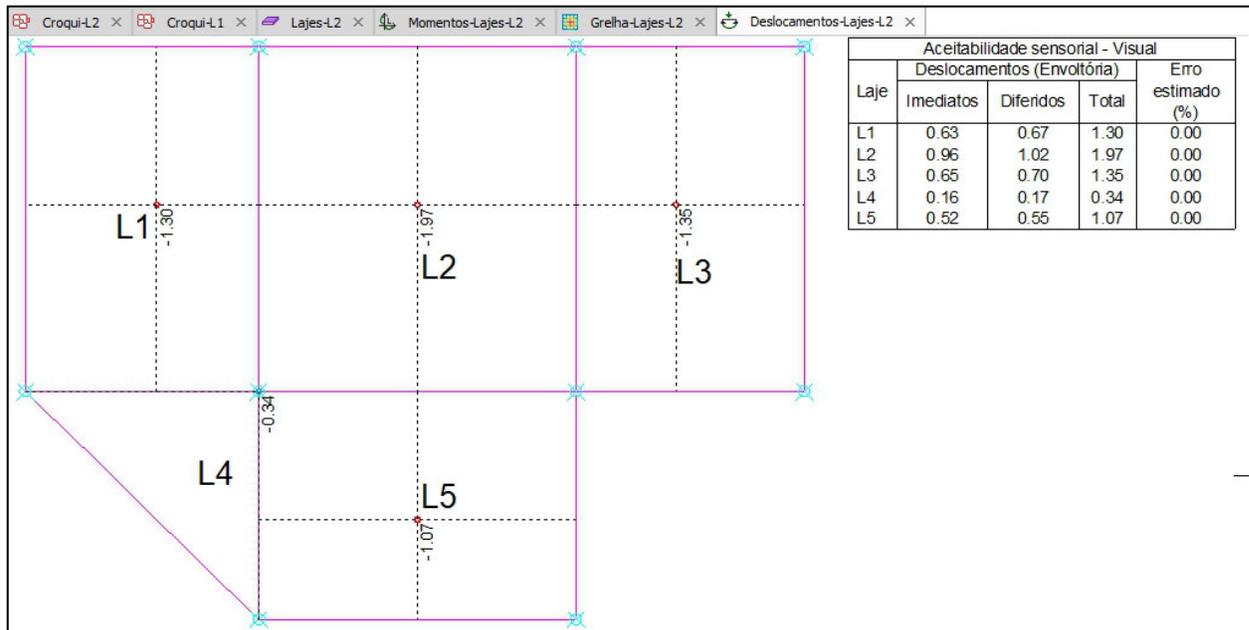
Fonte: O Autor (2021)

Figura 6.25- Pontos de deformações máximas -malha 30x30 - Eberick



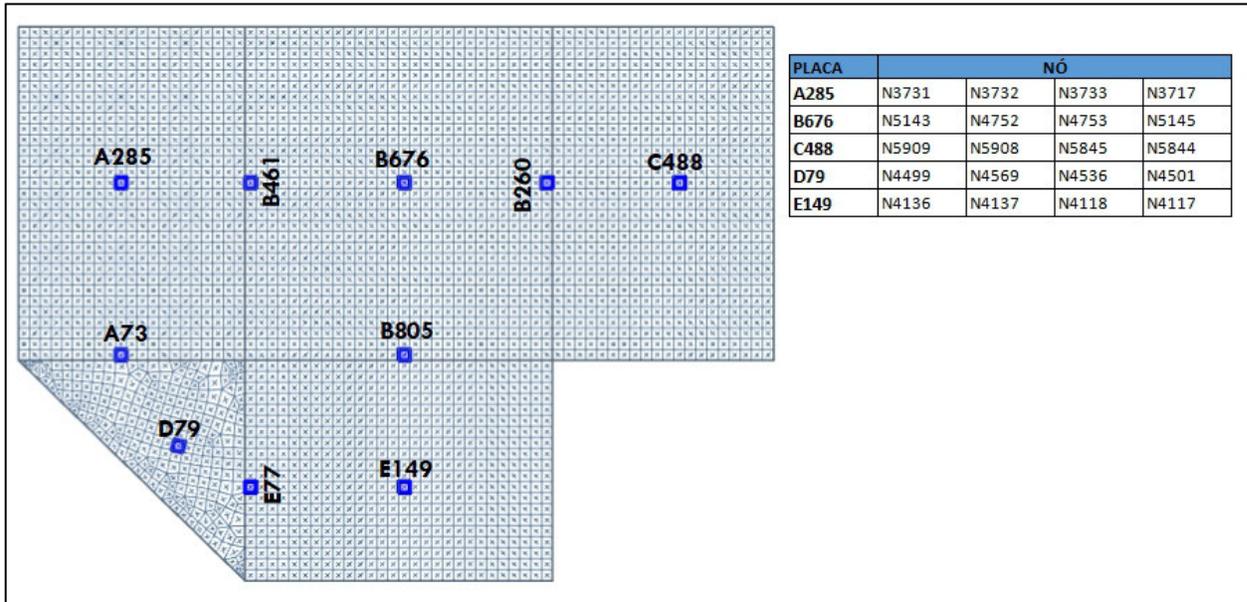
Fonte: O Autor (2021)

Figura 6.26- Pontos de deformações máximas- malha 50x50 - Eberick



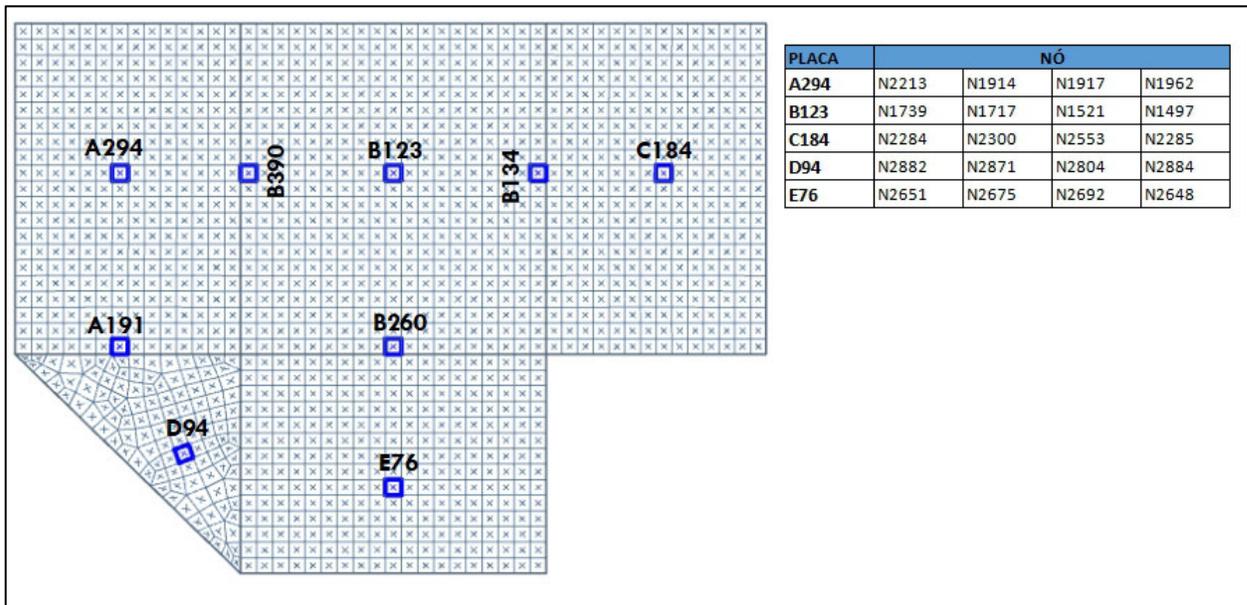
Fonte: O Autor (2021)

Figura 6.27- Deformações malha 20x20- Risa3D



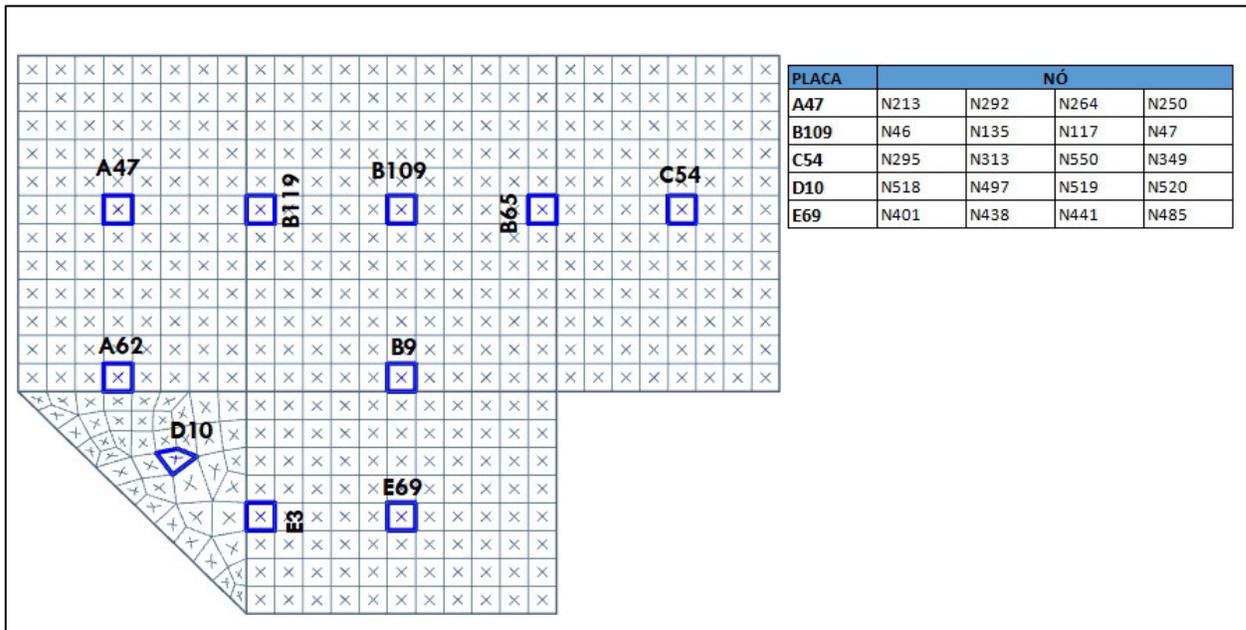
Fonte: O Autor (2021)

Figura 6.28- Deformações malha 30x30- Risa3D



Fonte: O Autor (2021)

Figura 6.29- Deformações malha 50x50- Risa3D



Fonte: O Autor (2021)

Tabela 6.5 – Flechas elásticas (cm) e diferenças percentuais

LAJE	AG			MEF			Diferenças Percentuais (%)		
	Malha (cm)			Malha (cm)			Malha (cm)		
	20X20	30X30	50X50	20X20	30X30	50X50	20X20	30X30	50X50
L 01	0,63	0,63	0,63	0,18	0,21	0,20	-71,4%	-66,7%	-68,3%
L 02	0,95	0,95	0,96	0,38	0,38	0,37	-60,0%	-60,0%	-61,5%
L 03	0,65	0,65	0,65	0,21	0,21	0,20	-67,7%	-67,7%	-69,2%
L 04	0,16	0,16	0,16	0,018	0,015	0,016	-88,8%	-90,6%	-90,0%
L 05	0,52	0,52	0,52	0,19	0,19	0,18	-63,5%	-63,5%	-65,4%

Fonte: O Autor (2021)

## 7 CONCLUSÃO

Métodos mais sofisticados são muito úteis para a construção de pavimentos integrados, que visam entender o comportamento da estrutura de forma unificada (como um todo), além de fornecerem os resultados de esforços e deformações de cada parte da estrutura individualmente, não se limitando a momentos e deslocamentos máximos.

Para as lajes estudadas, observa-se que os resultados convergem em algumas lajes nos momentos  $M_x$ ,  $M_y$  e divergem para outras. Como apresentados nas tabelas e nos gráficos acima. Observa-se as seguintes convergências: - para os momentos fletores positivos máximos  $M_x$  a única laje que apresentou convergência foi a laje L5 na malha 50x50 de AG e MEF, - para os momentos fletores positivos máximos  $M_y$  as lajes L1, L2 e L3 apresentaram convergências satisfatórias em todas as malhas, com destaque na malha 20x20 que teve as menores divergências, não ultrapassando os 7% de variação em relação ao método de AG - para os momentos fletores negativos máximos  $M_x$  as lajes que apresentaram convergência foram as lajes L1, L2 e L5 na malha 20x20, a laje L4 não apresentou divergência de valor na malha 30x30, - para os momentos fletores negativos máximos  $M_y$  a malha 30x30 apresentou convergência satisfatória em praticamente todas as lajes, exceto na laje L5 que apresentou valor de convergência satisfatória na malha 20x20.

Analisando os gráficos comparativos é possível observar que de maneira similar ao método de análise de grelhas, o método de elementos finitos não possui um padrão de comportamento. Pode se observar que as divergências nas deformações entre os métodos é devido a influencia da rigidez das barras que compõe as grelhas no Eberick e já no método de elementos finitos as placas não são elementos lineares não necessitando de configuração dos parâmetros de rigidez.

De maneira geral, bastou-se utilizar malhas bem refinadas para se obter resultados aceitáveis. É notável que, como foi observado nas tabelas 6.1, 6.2 6.3 e 6.4, ocorreram situações em que as malhas menos espaçadas não apresentaram os melhores resultados, porém, de modo geral, o melhor seria escolhê-las, pois apesar das divergências, favoreceram a segurança da estrutura em todas as situações simuladas.

Outro fator responsável pelas divergências de valores foi as diferentes deformabilidades dos pórticos em cada método, em que se pode observar na figura 6.1. No software Eberick não se pode alterar os parâmetros de rigidez das barras das grelhas, como se pode alterar no Risa3D,

sendo isto, mais um fator que pode ocasionar a disparidade dos valores encontrados. Entretanto, mesmo com essa disparidade nos valores, os dois métodos são bastante eficientes quando corrigidos os fatores de rigidezes das lajes em questão. Ficando para trabalho futuro uma análise de lajes usuais de edifícios, considerando rigidez elevada das vigas ou do pórtico para não influenciar na deslocabilidade das lajes.

Outra vantagem do MEF é a apresentação dos resultados em escala de cores, que ajuda a compreender a distribuição dos esforços na superfície do pavimento. E nos quesitos facilidade de entrada de dados e análise dos resultados, opta-se pelo método de analogias de grelhas, para lajes usuais de concreto armado das formas apresentadas neste trabalho.

Apesar de todas essas vantagens mencionadas, vale lembrar que tais métodos nem sempre fornecem os melhores resultados a partir de um padrão único de modelagem, e vale lembrar, conforme afirma Azevedo (2003), que é de extrema importância a real compreensão de cada Método para uma correta interpretação dos resultados obtidos nesses softwares.

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J.M. (2014). **Curso de Concreto Armado**. Editora Dunas, Rio Grande, RS, Brasil. Disponível em: <<http://editoradunas.com.br/dunas/V2.pdf>>. Acesso em: 01 maio. 2021.
- AVANCINI, G. **Formulação do Método dos Elementos Finitos para a análise elástica linear de grelhas**. 2015. 91 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2015.
- AZEVEDO, Á. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. 1ª. ed. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.
- CASTRO, L. M. S. **Elementos Finitos para a Análise Elástica de Lajes**. Lisboa: IST, 2007.
- CASTRO, L. M. S. **Método dos Elementos Finitos - Análise de Pórticos Planos**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2009.
- DUARTE, LEONARDO SALES. **Estudo Comparativo De Métodos De Cálculo Para Lajes Maciças Retangulares De Concreto Armado**.XXXVII Jornadas sudamericanas de ingeniería estructural, p.1-15, novembro,2016.
- ENGEL, H.; HATJE, V. G. **Sistemas Estruturais**. 1. ed. Barcelona: Gustavo Gili, 2001.
- GONÇALVES, R. R.. **O Déficit Habitacional Brasileiro: um mapeamento por unidades da federação e por níveis de renda domiciliar**. Textos Para Discussão: IPEA, Rio de Janeiro, abr. 1998. Disponível em: <[https://www.ipea.gov.br/portal/index.php?option=com\\_content&](https://www.ipea.gov.br/portal/index.php?option=com_content&)
- HANSEN, K; Kent Zenobia (2011). **Civil Engineer's Handbook of Professional Practice** (em inglês). [S.l.]: John Wiley & Sons. 744 páginas.
- HUTTON, D.V. **Fundamentals of Finite Element Analysis**. 1. ed. The McGraw-Hill, 2004.
- LEITÃO, V.; CASTRO, L. **Análise de Estruturas I - Apontamentos sobre análise de lajes**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2005.
- MARTHA, L. F.. **Análise de Estruturas – Conceitos e Métodos Básicos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.
- MONTOYA, P.J; MESEGUER. A. G.; CABRÉ F.M **Hormigón Armado**. Barcelona: Gustavo Gili, 2000.
- NEVES, L. F **Comparação de modelos de grelha e de elementos finitos de laje na modelação de estruturas de edifícios de betão armado**. 2010 Tese (Mestrado em engenharia militar) - Instituto superior técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- OLIVEIRA, E. R. D. A. E. **Elementos da Teoria da Elasticidade**. Lisboa: IST Press, 1999.

SALES, J.J. et al. **Sistemas Estruturais: Teoria e Exemplos**. 1. ed. São Carlos: EESCUSP, 2005.

SILVA, M.A.F. **A utilização da analogia de grelhas para análise de pavimentos de edifícios em concreto armado**. In: SIMPÓSIO EPUSP SBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 5., 2003, São Carlos. **Anais...** São Carlos. EPUSP. 2003.

SORIANO, H.L **Elementos Finitos: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.