

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**VICTOR BRUNO TEIXEIRA ALVES**

**SOLUÇÕES TIPO BURACO NEGRO E ONDAS  
GRAVITACIONAIS**

SÃO LUÍS  
2021

VICTOR BRUNO TEIXEIRA ALVES

SOLUÇÕES TIPO BURACO NEGRO E ONDAS  
GRAVITACIONAIS

Monografia apresentada ao programa de graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Física.

São Luís, 23 de Setembro de 2021.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes(Orientador)  
Universidade Federal do Maranhão

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Carneiro Feitosa  
Universidade Federal do Maranhão

---

Prof. Dr. Frederico Elias Passos dos Santos  
Universidade Federal do Maranhão

## AGRADECIMENTOS

Neste ponto gostaria de agradecer primeiro a Deus e a minha família, em especial Pai, Mãe, tias e avós, a todos estes devo muito e fico feliz em tê-los em minha vida. No meio profissional gostaria de agradecer ao professor Manoel por ter aberto a minha primeira oportunidade de contato com a pesquisa e motivação do Físico. Depois ao professor Casana por ter me ensinado muito desde sempre, mesmo antes de ser seu aluno propriamente dito, um dos meus exemplos de profissionais. Gostaria de agradecer também ao Alex Lucena e o André Cavalcante e ao Esdras, por usarem do seu tempo para me ensinar sempre que pedia ajuda a eles. Gostaria de agradecer ao professor Cleber, que foi um grande professor na matemática que me ensinou e me deu uma perspectiva diferente, ao longo do curso. No meio fraternal, gostaria de agradecer aos meus amigos de laboratório, Alex, Lucas, Filipe, Márcio e aos meus amigos que foram feitos na Física, Virna, Ismael, João Victor. Gostaria de agradecer aos meus amigos de vida Thiago e Fabiano. Gostaria também de agradecer aos meus amigos da capoeira, que nestes anos juntos me deram muito apoio. Em especial gostaria de agradecer ao professor Carlos Alberto, pois não saberia caracterizar entre profissional e fraternal, devido ao fato de ser tanto um bom professor, quanto bom amigo, este esteve presente sempre ajudando ao longo da graduação.

*“A vitória está reservada para  
aqueles que estão dispostos a pagar  
o preço”  
(Sun Tzu)*

# RESUMO

O conceito de tensor tem sua origem durante o desenvolvimento da geometria diferencial por Gauss, Riemann e Christoffel. O objetivo principal do cálculo tensorial é o estudo das relações ou estruturas matemáticas que permanecem invariantes ou válidas ainda quando mudamos de um sistema de coordenadas a outro. Esse é o caso das leis da Física que independem do referencial escolhido para a descrição de algum fenômeno ou evento físico. Desse modo, é esteticamente desejável e muitas vezes conveniente utilizar o cálculo tensorial como o ferramental matemático na formulação das leis físicas. Em particular, Einstein fez dele a ferramenta fundamental para a formulação da teoria da Relatividade Geral. Isso teve como resultado que o cálculo tensorial é agora uma ferramenta inestimável e ajuda no desenvolvimento de muitas áreas da Física Teórica. No contexto da Relatividade Geral, o Físico Karl Schwarzschild obteve a primeira solução analítica das equações de Einstein. Um buraco negro com simetria esférica. Isso abriu as portas para o estudo de outras soluções analíticas como, por exemplo, o buraco negro carregado de Reissner-Nordstrom. Em abril 2019, uma equipe de cerca de 200 cientistas conseguiu detectar a radiação que rodeava o horizonte de eventos de um buraco negro, de aproximadamente 6,5 bilhões de massas solares e um diâmetro de cerca de 40 bilhões de quilômetros. Por outro lado, Einstein propôs a existência de Ondas Gravitacionais (em princípio, criadas pela aceleração de corpos muito massivos) que foram detectadas em 2015.

**Palavras-chave:** Relatividade Geral, Buraco negro, Ondas Gravitacionais..

# ABSTRACT

The tensor concept has its origins during the development of differential geometry by Gauss, Riemann and Christoffel. The main objective of tensor calculus is the study of mathematical relations or structures that remain invariant or valid even when we change from one coordinate system to another. This is the case of the laws of Physics that do not depend on the reference chosen to describe some phenomenon or physical event. Thus it is aesthetically desirable and often convenient to use tensor calculus as the mathematical tool in the combination of physical laws. In particular, Einstein made him a fundamental tool for the theory of General Relativity. This has resulted in tensor calculus being now an invaluable tool to aid in the development of many areas of Theoretical Physics. In the context of General Relativity, Physicist Karl Schwarzschild received the first analytical solution of Einstein's equations, a black hole with spherical symmetry. This opens the door to the study of other analytical solutions such as, for example, the Reissner-Nordstrom charged black hole. In April 2019, a team of about 200 scientists managed to detect radiation surrounding the event horizon of a black hole of approximately 6.5 billion solar masses and a diameter of about 40 billion miles. On the other hand, Einstein proposed the existence of Gravitational Waves (in principle, high due to the acceleration of very massive bodies) that were detected in 2015.

**Keywords:** General Relativity. Black holes. Gravitational waves.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Resultados</b>	<b>4</b>
2.1	Intervalo relativístico	4
2.2	Espaço de Minkowski	5
2.3	4-vetores em Minkowski	7
2.4	Algumas propriedades do tensor métrico	7
2.4.1	Abaixamento de índice	8
2.4.2	Levantamento de índice	8
2.5	Produto escalar entre 4-vetores	8
2.6	Derivada Covariante	9
2.7	Manifold (Variedades)	11
2.8	Transporte paralelo e Equação geodésica	11
2.9	Tensor de Riemann	12
2.9.1	Tensor de Ricci	14
2.10	Tensor de Einstein	14
2.11	Equação de Einstein	15
2.12	Solução de Schwarzschild	19
2.12.1	Geodésica radial e Efeito Espaguete	22
2.13	Buraco negro de Reissner-Nordstrom	23
2.14	Conexão entre ondas gravitacionais e BH	32
2.15	Linearização do tensor de Einstein e equação de onda Gravitacional	33
2.16	Ondas gravitacionais	39
2.17	Polarização de ondas gravitacionais	40
<b>3</b>	<b>Conclusão</b>	<b>47</b>

# 1 Introdução

A cosmologia fornece indícios de que o espaço-tempo em grande escala (o universo) é aproximadamente plano, porém, ao observá-lo em escalas menores (por exemplo, no sistema solar, na vizinhança de um planeta ou estrela, etc) percebe-se que ele possui curvatura e esta é a área de atuação da relatividade geral. Utilizando conceitos de cálculo tensorial é possível obter as soluções e também é possível fazer uma breve análise acerca da obtenção das equações de campo de Einstein, obtidas através do princípio de mínima ação considerando a ação de Einstein-Hilbert, que regem a Relatividade Geral (TRG).

O estudo da relatividade geral tem aplicações em diversas áreas, como por exemplo nos GPS (sistema de posicionamento global), Lançamento de foguetes, mísseis e satélites em geral que são apenas algumas coisas que estão no nosso dia a dia. O cálculo tensorial é a ferramenta usada para que se possa acessar estes conhecimentos, de tal maneira que todo o estudo da TRG é feito através dessa linguagem, advinda da geometria diferencial e naturalmente dos conceitos abordados a posteriori que serão base para a construção da solução para o Buraco Negro.

Em 1915 o Físico suíço Karl Schwarzschild obteve a solução exata para um corpo de simetria esférica, sem momento angular, ou baixa rotação e carga, dado que a solução foi feita para o espaço livre de matéria (no entorno desses corpos mais especificamente vácuo). O ponto mais curioso desse estudo é que ele percebeu que uma das singularidades em sua solução iria gerar uma aproximação máxima com possibilidade de retorno Ref.[1].

No dia 10 de abril de 2019, uma equipe de cerca de 200 cientistas conseguiu com a sincronização de vários telescópios super poderosos ao longo do planeta, chamado Telescópio Horizonte de eventos (EHT) e com a utilização de mais de 16 softwares, detectar a radiação que rodeava o horizonte de eventos, cuja tal radiação advinha do disco de acreção, que no fundo são partículas capturadas de estrelas ou sistemas de gases e poeira cósmica, que são apanhados pelo buraco negro ( devido a sua velocidade de rotação, na média não caem no horizonte) e são aceleradas a velocidades muito próximas a da luz, fazendo assim que a matéria emita a radiação. O Buraco Negro (BH) detectado possuía cerca de 6.5 bilhões de massas solares e tem diâmetro de cerca de 40 bilhões de quilômetros Ref.[2].

Usando como base a geometria de Schwarzschild o Físico Gunnar Nordstrom e Hans Reissner fizeram uma adição que seria muito racional, por sinal, já que buracos negros são frutos do colapso de Estrelas, eles adicionaram carga na mistura e assim estudaram como a existência de um campo elétrico estático deveria influenciar na geometria do espaço-tempo.

O segundo sistema será o espaço-tempo em torno de corpos muito massivos que deformam (adicionam curvatura) o espaço ao seu redor. Com a detecção de ondas gravitacionais em 2015, pode ser proposto um tratamento a uma distância grande o suficiente para que a métrica do espaço seja aproximadamente a métrica da relatividade restrita (Minkowski), porém, com termos perturbativos, afim de que seja reproduzida a fenomenologia observada nos experimentos. Com

isso, já que está sendo feito este tratamento ondulatório, é natural que seja possível estudar as polarizações de uma onda gravitacional de maneira semelhante ao caso eletromagnético Ref.[3].

Neste trabalho, o foco principal será obter a solução de Schwarzschild e de Reissner-Nordstrom e fazer uma aplicação para observar como o tempo flui conforme nos aproximamos do horizonte. Dado que devido a distorção do espaço-tempo por estes corpos, deve ser possível ver como as partículas se movimentam nele. Logo depois, será observado como são obtidas as Informações destes corpos através das ondas gravitacionais que eles emitem ao se movimentarem. Linearizaremos as equações de Einstein, que naturalmente são não lineares e obteremos as equações de ondas Gravitacionais.

## 2 Resultados

### 2.1 Intervalo relativístico

Na TRG (Teoria da Relatividade Geral) utilizamos alguns conceitos que advêm da relatividade restrita (TRR), um deles é o intervalo relativístico, mas o que seria isso? Devido à necessidade de descrever um evento que ocorreu no espaço-tempo precisamos de uma quantidade que nos relate a posição e o instante do evento, que seria expresso pelo 4-vetor posição, dado por,

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad (2.1)$$

Já definida a localização e instante do evento no espaço 3 + 1 dimensional (3 coordenadas espaciais e uma temporal), ou, apenas espaço 4-dimensional tendo noção que existe uma coordenada com natureza diferente das outras três, podemos agora medir distâncias entre dois pontos (eventos) neste espaço. A ideia de intervalo relativístico nasce daí.

O intervalo relativístico equivale ao quadrado da "distância" entre dois eventos A e B no espaço-tempo 4-dimensional Ref.[3] . Dado pela seguinte forma,

$$\Delta S^2 = -c^2 \Delta (t_B - t_A)^2 + \Delta (x_B - x_A)^2 + \Delta (y_B - y_A)^2 + \Delta (z_B - z_A)^2. \quad (2.2)$$

Pelo fato do intervalo ser uma distância quadrática, podemos mostrar aplicando transformações de Lorentz que ele é um invariante relativístico, basta aplicar as transformações de Lorentz nele. Isso implica que ele possui a mesma forma matemática em todo e qualquer referencial inercial.

Agora classificaremos os intervalos relativísticos e essa classificação pode ser feita de 3 maneiras, intervalo relativístico tipo tempo, tipo espaço e tipo luz, discutiremos em seguida cada um.

**Os intervalos tipo tempo** São aqueles em que  $\Delta S^2 < 0$ , ou seja, o termo temporal  $-\Delta c^2 t^2$ , é dominante sobre os termos espaciais. Assim, os dois eventos estão conectados por sinais sub-luminais, isto é, a sua velocidade é menor que a velocidade da luz. Caracterizando assim que a partícula deve ser uma partícula massiva.

**Os intervalos tipo Luz** São aqueles intervalos em que  $\Delta S^2 = 0$ , ou seja, o termo temporal é igual aos termos espaciais. Assim, os dois eventos estão conectados por sinais em que a sua velocidade é igual a velocidade da luz, vemos isso observando que, se

$$\Delta S^2 = 0, \quad (2.3)$$

$$c^2 \Delta t^2 = \Delta x^2, \quad (2.4)$$

e podemos escrever que

$$\Delta x = v\Delta t \quad (2.5)$$

que seria a velocidade da partícula se movimentando em determinado instante, logo

$$v^2\Delta t^2 = c^2\Delta t^2, \quad (2.6)$$

isso só será verdade se  $v = c$ . Isso caracteriza que as partículas envolvidas são fótons, ainda não foram detectadas nem uma outra com essa velocidade, mas existem teorias que prevêem que o gráviton deva ter.

**Intervalos tipo espaço.** São aqueles em que  $\Delta S^2 > 0$ , ou seja, o termo temporal é menor que o termo espacial. Assim, os dois eventos estão conectados por sinais em que a sua velocidade é maior que a velocidade da luz,

$$\begin{aligned} v^2\Delta t^2 &> c^2\Delta t^2 \\ v &> c \end{aligned}$$

o que caracterizaria um táquion, partícula mais rápida que a luz.

## 2.2 Espaço de Minkowski

Agora iremos abordar acerca do espaço-tempo de Minkowski, começaremos definindo o intervalo relativístico em sua forma diferencial,

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.7)$$

assim está definido o elemento quadrático de distância do espaço de Minkowski. Sendo dois pontos vizinhos separados apenas por deslocamentos infinitesimais em cada componente. Para poder entender um pouco melhor, sabemos que para um espaço euclidiano  $n$ -dim livre de curvatura, o seu elemento de distância quadrático é dado por

$$ds^2 = \sum_{i=0}^n (dx^i)^2, \quad (2.8)$$

mas isso acontece porque todas as suas componentes tem a mesma natureza, isso elimina a necessidade de uma quantidade que represente a natureza das mesmas, porém, em espaços pseudo-euclidianos, como em Minkowski, temos que nem todas as coordenadas têm a mesma natureza, isso implica que é necessária uma grandeza que exprima isso em uma notação mais compacta. Devido a convenção do termo temporal do intervalo ter esse sinal diferente dos termos espaciais,

é garantida a sua invariância perante as transformações de Lorentz.

A grandeza que é responsável pela assinatura de qual seria a natureza do espaço é denominada de tensor métrico, que para Minkowski possui a seguinte forma,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

e isso faria com que a forma de escrever o elemento quadrático em uma notação mais compacta, também se alterasse, ficando da forma,

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.10)$$

dessa maneira, podemos agora nos preocupar apenas com o tensor métrico como característica principal do funcionamento do espaço (ponto a ponto) e veremos que buscar uma solução do tipo Buraco negro, seria buscar como este elemento, que é um tensor, funciona no entorno destes objetos. Afim de simplificar a notação, quando houverem índices repetidos desta maneira, será usada a convenção de Einstein, ficando da seguinte maneira,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

o tensor métrico possui duas representações mais utilizadas,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \text{ ou } g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (2.11)$$

vemos que a natureza diferente de uma das componentes também é representada pela segunda forma de escrever o mesmo tensor. Dada esta forma, o sinal negativo não necessita mais ser contabilizado no elemento  $dx^\mu$ , esta característica está embutida diretamente no tensor métrico, o 4-vetor posição no formalismo tensorial pode ser escrito da seguinte maneira,

$$x^\mu = (ct, c, y, z).$$

desta maneira percebemos que buscar a métrica do espaço é buscar o seu funcionamento ponto a ponto.

## 2.3 4-vetores em Minkowski

Existem duas formas de classificar um 4-vetor no espaço de Minkowski, isto é, vetores covariantes e contravariantes, o que os diferencia é basicamente a forma com que eles se transformam.

**Vetores covariantes** São aqueles que possuem índice subscrito e se transformam semelhante a vetores de base da seguinte maneira,

$$V_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} V_\beta. \quad (2.12)$$

**Vetores contravariantes** São aqueles que se transformam semelhante às coordenadas, eles possuem índice sobrescrito e se transformam da seguinte maneira,

$$V^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} V^\beta, \quad (2.13)$$

mas vale uma observação, aqui vimos que um vetor pode ser descrito das duas formas, tanto contravariantes como covariantes, por isso, quando falamos que um vetor é caracterizado de uma dessas formas, falamos acerca de suas componentes, não do vetor em si.

## 2.4 Algumas propriedades do tensor métrico

Dado que o tensor de ordem N é uma aplicação linear de N vetores em números reais. Um tensor de segunda ordem é uma aplicação de dois vetores em um número real. No caso do tensor métrico, temos um tensor de segunda ordem que está conectado com o produto interno do espaço, ou seja,

$$g_{\alpha\beta} = g(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta, \quad (2.14)$$

lembrando que de suas 16 componentes, em Minkowski, apenas a diagonal principal é não nula, devido a ortogonalidade do espaço. Tendo as seguintes propriedades,

$$g_{00} = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = -1, \quad (2.15)$$

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (2.16)$$

onde vemos que a natureza imaginária da coordenada temporal do intervalo relativístico, foi diretamente lançada para o tensor métrico, não mais sendo necessário falar acerca disso.

Agora serão definidas as operações abaixamento e levantamento de índices, no caso, seria como escrever um tensor covariante, ou, contravariantes em função do outro.

### 2.4.1 Abaixamento de índice

O abaixamento de índice, seria escrever um tensor covariante, como um produto de um tensor contravariante pelo tensor métrico, definido da seguinte maneira,

$$B_\alpha = g_{\alpha\beta} B^\beta, \quad (2.17)$$

onde, ocorreu uma contração do índice  $\beta$ , do vetor, com o do tensor métrico, onde, do lado direito sobrou apenas o índice  $\alpha$  livre e do outro foi refletida essa informação

### 2.4.2 Levantamento de índice

O levantamento de índice, seria escrever um tensor covariante, como o produto de um tensor covariante pelo tensor métrico, definido da seguinte maneira,

$$B^\alpha = g^{\alpha\beta} B_\beta, \quad (2.18)$$

onde,  $g^{\alpha\beta}$  é o tensor métrico inverso, da mesma maneira que acima houve a contração do  $\beta$ .

## 2.5 Produto escalar entre 4-vetores

Vimos que o tensor métrico é o fruto de um produto interno entre vetores de base, mas como seria feito o produto interno de 4-vetores em uma notação compacta e utilizando o que já sabemos acerca do tensor métrico? A resposta será revelada a seguir, mas antes, para evitar o uso de 16 componentes tendo apenas 4 possíveis não nulas, o produto interno é dado por uma contração nos índices, desta forma temos,

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = V^\alpha B_\alpha, \quad (2.19)$$

onde vemos que não possuímos nem um índice livre do lado direito da equação, isso também foi refletido no lado esquerdo já que o produto interno gera um escalar. Escrevendo os vetores como contrações entre as componentes e os vetores da base,

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = (V^\alpha \mathbf{e}_\alpha) \cdot (B^\beta \mathbf{e}_\beta), \quad (2.20)$$

$$= V^\alpha (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) B^\beta, \quad (2.21)$$

$$= V^\alpha g_{\alpha\beta} B^\beta, \quad (2.22)$$

e vendo que na eq (2.22) temos o equivalente a um abaixamento de índice. Podemos definir a norma quadrática de um vetor, dada por

$$(\mathbf{B})^2 = B^\alpha B_\alpha = -B_0^2 + (B_i)^2, \quad (2.23)$$

1) Se  $\mathbf{B}^2 < 0$ , o 4-vetor é tipo tempo, ou seja,

$$B_0 > |\mathbf{B}|, \quad (2.24)$$

2) Se  $\mathbf{B}^2 = 0$ , o 4-vetor é tipo luz, ou seja,

$$B_0 = |\mathbf{B}|, \quad (2.25)$$

3) Se  $\mathbf{B}^2 > 0$ , o 4-vetor é tipo espaço, ou seja,

$$B_0 < |\mathbf{B}|,$$

Como foi que definido o produto interno no espaço de Minkowski é possível agora definir a delta de Kronecker 4-dim. dada por,

$$g^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} = \delta_{\mu}^{\beta} \quad (2.26)$$

## 2.6 Derivada Covariante

Em um sistema de coordenadas qualquer, podemos ter que além das componentes dos vetores serem variáveis os próprios vetores de base também podem mudar conforme se muda a direção, de tal forma que para que a derivada de um vetor esteja completa em sua forma tensorial ela também precisa computar esta variação e mais, devido a ela ser um vetor no espaço, pode ser escrito como combinação linear dos vetores de base canônicos. Então seja um vetor qualquer

$$\mathbf{V} = V^{\alpha} e_{\alpha}, \quad (2.27)$$

então teremos que sua derivada seria,

$$\partial_{\beta} \mathbf{V} = (\partial_{\beta} V^{\alpha}) e_{\alpha} + V^{\alpha} (\partial_{\beta} e_{\alpha}),$$

reescrevendo o segundo termo, que em função dos vetores de base do próprio sistema de coordenadas, temos,

$$\partial_{\beta} e_{\alpha} = (\Gamma) e_{\mu}, \quad (2.28)$$

ou seja, escrevemos como uma combinação linear dos vetores de base do sistema, agora para escolher como os índices dessa função arbitrária devem ser escolhidos usaremos o outro lado da equação, temos que os índices  $\beta$  e  $\alpha$  estão livres e na parte inferior, então, escolheremos uma combinação de índices para esta função, de tal forma que ela satisfaça a equação,

$$\partial_{\beta} e_{\alpha} = (\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}) e_{\mu}, \quad (2.29)$$

fazendo a contração do índice  $\mu$ , tando resolveremos a questão da combinação dos vetores de base do espaço, quanto eliminaremos um índice que a priori estava livre, mas nao deveria. Retornando a equação inicial, temos que,

$$\partial_\beta \mathbf{V} = (\partial_\beta V^\alpha) e_\alpha + V^\alpha (\Gamma_{\alpha\beta}^\mu) e_\mu, \quad (2.30)$$

agora, temos que como, tanto o índice  $\mu$ , quanto o  $\alpha$ , estão contraídos, podemos renomealos para qualquer outro que não sejam os livres e iremos no segundo termo trocar  $\mu \rightarrow \alpha$  e o contrário também, ficando,

$$\partial_\beta \mathbf{V} = (\partial_\beta V^\alpha) e_\alpha + V^\mu (\Gamma_{\mu\beta}^\alpha) e_\alpha, \quad (2.31)$$

desta forma, teremos,

$$\partial_\beta (\mathbf{V}) = [\partial_\beta V^\alpha + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha] e_\alpha, \quad (2.32)$$

onde podemos reescrever da seguinte maneira,

$$\partial_\beta (\mathbf{V}) = (\nabla_\beta V^\alpha) e_\alpha \quad (2.33)$$

onde a forma para a derivada covariante de um vetor seria,

$$\nabla_\beta V^\alpha = \partial_\beta V^\alpha + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \quad (2.34)$$

que usando uma notação diferente, seria

$$V^\alpha_{;\beta} = V^\alpha_{,\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha. \quad (2.35)$$

Esta notação é comumente utilizada para facilitar a escrita, onde ";" refere-se a derivada covariante e "," refere-se a derivada parcial.

Seguindo o mesmo procedimento, podemos escrever a derivada covariante para um tensor de segunda ordem, que pode ser escrita da seguinte maneira. Seja um tensor qualquer de segunda ordem,

$$G_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu,$$

então, sua derivada covariante será

$$\nabla_\beta G_{\mu\nu} = \partial_\beta G_{\mu\nu} - G_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\nu\beta} - G_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\beta}. \quad (2.36)$$

Podemos também, escrever os simbolos de Christoffel como em função do tensor métrico, através da propriedade de que "Para espaços com torção nula a derivada covariante do tensor

métrico deve ser nula" Ref.[3]. Então seja a derivada covariante do tensor métrico, dada por,

$$\nabla_{\beta}g_{\alpha\mu} = 0$$

Faremos a derivada do tensor métrico, que seria,

$$\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta} = \partial_{\mu}g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu} - g_{\nu\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu},$$

e para obtermos um sistema de equações, faremos mais duas vezes com outros índices,

$$\nabla_{\beta}g_{\alpha\mu} = \partial_{\beta}g_{\alpha\mu} - g_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\beta} - g_{\nu\mu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta},$$

$$-\nabla_{\alpha}g_{\beta\mu} = -\partial_{\alpha}g_{\beta\mu} + g_{\beta\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha} + g_{\nu\mu}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha},$$

fazendo a soma, teremos que

$$\partial_{\mu}g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu} - g_{\nu\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} + \partial_{\beta}g_{\alpha\mu} - g_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\beta} - g_{\nu\mu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha}g_{\beta\mu} + g_{\beta\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha} + g_{\nu\mu}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} = 0,$$

$$\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma} (\partial_{\mu}g_{\alpha\beta} + \partial_{\beta}g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}g_{\beta\mu}).$$

Esta é a forma da derivada covariante escrita em função do tensor métrico.

## 2.7 Manifold (Variedades)

Como a TRG é construída por argumentos geométricos, ou seja, através de curvaturas geradas por um corpo massivo, no espaço-tempo. O princípio da equivalência, diz que a gravidade pode ser substituída localmente, devido ao fato que pode-se definir um referencial em queda livre (equivalente) que seja localmente inercial. Para distâncias infinitesimais, podemos utilizar de uma geometria que facilite os cálculos para descrever este problema. Uma delas é a geometria localmente plana. Desta forma, podemos definir um Manifold, como sendo um espaço contínuo e curvo, que localmente é plano.

Iremos trabalhar com Variedades diferenciáveis, variedades estas em que todos os seus pontos pode-se definir uma derivada e ela deve ser contínua e que nas proximidades de um ponto, pode-se definir um mapa contínuo, ou, uma transformação para o espaço plano, euclidiano, ou pseudoeuclidiano.

## 2.8 Transporte paralelo e Equação geodésica

Para a obtenção da equação geodésica, poderíamos usar o princípio de mínima ação para descobrir qual a menor distância entre dois pontos, em um espaço curvo, mas podemos utilizar a idéia de transporte paralelo para a obtenção da mesma equação. A curvatura do espaço-tempo modifica

as componentes de um vetor quando este é transportado paralelamente ao longo de uma curva, determinar a influência da curvatura sobre as componentes do vetor transportado é de grande importância para o estudo da TRG. O ato de transportar paralelamente um vetor, sem modificações, é algo que fazemos intuitivamente quando começamos a estudar vetores, mas isso só é possível devido ao fato do espaço euclidiano ser livre de curvatura, quando temos essas variáveis em jogo, precisamos ter a cautela de verificar se e quais as propriedades modificadas. Algumas propriedades podem ser vistas analisando as geodésicas do espaço.

Definindo  $\mathbf{V}$  sendo um campo vetorial que atravessa uma curva com vetor tangente dado por,

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}, \quad (2.37)$$

dado que  $\lambda$  é o parâmetro da curva. No entorno de um ponto  $P$ , da curva, fixamos que as componentes de  $\mathbf{V}$  são constantes. Assim:

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = \frac{dV^\alpha dx^\beta}{dx^\beta d\lambda},$$

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = \partial_\beta V^\alpha U^\beta = \nabla_\beta V^\alpha U^\beta = 0, \quad (2.39)$$

que é a definição de transporte paralelo.

A geodésica de uma partícula livre diz as trajetórias possíveis para ela. Partículas livres se movem em uma variedade seguindo apenas sua curvatura, ou seja, o 4-vetor velocidade de uma partícula tangente a uma curva, sofre alteração ao longo do seu movimento devido unicamente à geometria do espaço-tempo, sendo esse o caminho possível para ela. Podemos descrever essa condição, estabelecendo que a partícula se mova através de uma curva que transporta paralelamente seu próprio vetor tangente. Da definição de transporte paralelo, temos que.

$$\begin{aligned} \nabla_\beta U^\alpha U^\beta &= 0, \\ U^\beta \partial_\beta U^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} U^\mu U^\beta &= 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Uma vez que  $\lambda$  é o parâmetro da curva de vetor tangente  $\mathbf{U}$ , a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.41)$$

## 2.9 Tensor de Riemann

O tensor de Riemann é uma quantidade que já existia antes de Einstein lançar a relatividade geral em 1915. Esta quantidade advém do cálculo tensorial e pode ser obtida fazendo um trans-

porte paralelo de um vetor, sobre uma variedade curva, dado que em cada ponto para os quais este vetor é transportado, ele deverá sofrer uma mudança em seu módulo (ou seja em suas componentes) de tal forma que usando a condição de que se a variedade for plana, então, a variação do módulo do vetor deve ser zero ao se transportar paralelamente, logo podemos obter a forma explícita do tensor de Riemann, dada por,

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = +\Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}, \quad (2.42)$$

percebe-se que ele é diretamente ligado às derivadas dos símbolos de Christoffel, que são as quantidades que exprimem a variação dos vetores de base espaço ponto a ponto. O tensor de Riemann também está conectado com a não comutação entre as derivadas covariantes, de tal forma que podemos obter a seguinte equação,

$$[\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}] V^{\mu} = R_{\nu\alpha\beta}^{\mu} V^{\nu}. \quad (2.43)$$

Com este tensor obtemos suas simetrias associadas aos símbolos de Christoffel, de tal maneira, que ele é simétrico nos índices alternados, e antisimétrico, nos índices consecutivos,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\nu\mu\beta}, \quad (2.44)$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}, \quad (2.45)$$

daqui, podemos obter algumas propriedades, como,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0, \quad (2.46)$$

outra coisa que é importante ressaltar é que como ele está conectado a curvatura (tensor de curvatura de Riemann) então possível mostrar que para planos, ou variedades planas,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0. \quad (2.47)$$

Este tensor tem algumas outras propriedades importantes, como a identidade de Bianchi que ocorre devida a simetria do tensor métrico. Então é também possível mostrar que,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0, \quad (2.48)$$

posteriormente, veremos uma importância maior para esta identidade, dado que ela será fundamental para a construção do tensor de Einstein.

### 2.9.1 Tensor de Ricci

O tensor de Ricci é uma contração dos índices do tensor de Riemann, de tal maneira que para manter as simetrias, o tensor de Ricci é a contração específica dos índices alternados, tanto devida a essa contração específica será obtido um tensor simétrico dado por,

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta}, \quad (2.49)$$

que será uma peça constituinte do chamado tensor de Einstein. vale ressaltar que para o vácuo  $R_{\mu\nu} = 0$ .

**Escalar de Ricci:** O escalar de Ricci é uma contração dupla dos índices do tensor de Riemann, dado por,

$$R = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta}, \quad (2.50)$$

outra peça fundamental que é constituinte do tensor de Einstein.

### 2.10 Tensor de Einstein

Então, como dito anteriormente, o tensor de Einstein pode ser obtido fazendo uma contração da chamada identidade de Bianchi, considerando as simetrias do tensor de Riemann com contrações nos seus índices de tal maneira que se tivermos,

$$g^{\alpha\mu} (R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}) = 0 \quad (2.51)$$

$$R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^\mu = 0, \quad (2.52)$$

e agora contraíremos os índices  $\beta$  e  $\nu$ ,

$$\begin{aligned} g^{\beta\nu} (R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^\mu) &= 0 \\ (R_{;\lambda} - R_{\lambda;\mu}^\mu - R_{\lambda;\mu}^\mu) &= 0 \\ (\delta_\lambda^\mu R - 2R_\lambda^\mu)_{;\mu} &= 0, \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde teremos que a parte de dentro da derivada é reconhecida como um tensor de segunda ordem, arbitrário, de tal maneira que podemos escrever,

$$\begin{aligned} \delta_\lambda^\mu R - 2R_\lambda^\mu &= -2G_\lambda^\mu \\ g^{\alpha\lambda} \delta_\lambda^\mu R - 2g^{\alpha\lambda} R_\lambda^\mu &= -2g^{\alpha\lambda} G_\lambda^\mu \\ \delta_\mu^\beta g^{\mu\alpha} R - 2\delta_\mu^\beta R^{\mu\alpha} &= -2\delta_\mu^\beta G^{\mu\alpha} \\ R^{\mu\alpha} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} R &= G^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

e este é o chamado tensor de Einstein, que possui a característica de ser um tensor simétrico, que carrega todas as características geométricas do espaço-tempo, este tensor está presente na equação de Einstein, ao relacionar os termos de matéria com os termos de curvatura.

## 2.11 Equação de Einstein

Será obtida a equação de Einstein no vácuo, então, da Lagrangeana de Einstein-Hilbert dada por  $\mathcal{L}_E = R - 2\Lambda$  e por uma Lagrangeana responsável pela fonte de campo devido a existência de matéria  $\mathcal{L}_m$ , logo a ação será escrita por,

$$S_{total} = S_E + S_M, \quad (2.55)$$

a ação advinda do termo de matéria, será responsável pelo tensor de energia momento  $T_{\mu\nu}$ , que neste caso será zero, então nossa relação se reduzirá apenas a  $S_{total} = S_E$ , onde,  $S_E$  é dado por,

$$S_E = \frac{1}{2\kappa} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.56)$$

dado que  $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{8\pi G c^{-4}}$ , além de tomarmos a constante cosmológica igual a zero,  $\Lambda = 0$ . Então a equação fica.

$$S_E = \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.57)$$

como sabemos pelo principio de mínima ação, considerando o tensor métrico, como o campo e como  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$ , temos.

$$\delta S_E = 0 \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\kappa} \int \delta (R \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int \delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu}^\alpha \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\alpha\nu}^\alpha \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{2\kappa} \int g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\alpha\nu}^\alpha) \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{2\kappa} \int g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu}^\alpha (\delta \sqrt{-g}) d^4x, \end{aligned} \quad (2.59)$$

Como no tratamento padrão a ideia será colocar termos que estão associados a variação do campo, em um só parênteses, para que seja nulo e dai retirarmos a equação de movimento. então serão resolvidas variadas essas 3 integrais,

$$\delta S_{E1} = \frac{1}{2\kappa} \int (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\alpha\nu}^\alpha \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.60)$$

$$\delta S_{E2} = \frac{1}{2\kappa} \int g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\alpha\nu}^\alpha) \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.61)$$

$$\delta S_{E3} = \frac{1}{2\kappa} \int g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu}^\alpha (\delta \sqrt{-g}) d^4x, \quad (2.62)$$

como  $\delta S_{E1}$ , já se encontra em função da variação do tensor métrico, então serão trabalhadas apenas  $\delta S_{E2}$  e  $\delta S_{E3}$ . Logo a  $\delta S_{E2}$ , pode ser escrita da seguinte forma,

$$\delta S_{E2} = \frac{1}{2\kappa} \int g_{\mu\nu} (\delta R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}) \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.63)$$

onde,

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = +\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu},$$

então,

$$\delta R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \delta\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \delta\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu},$$

após fazer comparações destes termos, com derivadas dos símbolos de Christoffel, cancelando os termos iguais e organizando os índices, podemos escrever que,

$$\delta R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \nabla_{\beta} \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu} \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}, \quad (2.64)$$

e agora, contraindo,  $\alpha = \beta$ ,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\alpha} \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu} \delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}, \quad (2.65)$$

então a integral fica,

$$\delta S_{E2} = \frac{1}{2\kappa} \int g^{\mu\nu} (\nabla_{\alpha} \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu} \delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}) \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.66)$$

$$= \frac{1}{2\kappa} \int \nabla_{\sigma} (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}) \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.67)$$

Nosso objetivo, agora é relacionar a variação dos símbolos de Christoffel com a variação do tensor métrico, de tal forma que se escrevermos,

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\beta} (g_{\nu\beta,\mu} + g_{\mu\beta,\nu} - g_{\mu\nu,\beta}), \quad (2.68)$$

e,

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}, \quad (2.69)$$

logo fazendo,

$$\delta (g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu}) = 0,$$

$$\delta g^{\beta\mu} = -g^{\nu\beta} g^{\alpha\mu} \delta g_{\alpha\nu}, \quad (2.70)$$

e considerando as expressões pra derivada covariante para vetores, podemos mostrar que,

$$\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \delta g^{\rho\beta} (g_{\nu\beta,\mu} + g_{\mu\beta,\nu} - g_{\mu\nu,\beta}) + \frac{1}{2} g^{\rho\beta} \left( (\delta g_{\nu\beta})_{,\mu} + (\delta g_{\mu\beta})_{,\nu} - (\delta g_{\mu\nu})_{,\beta} \right), \quad (2.71)$$

organizando os termos, temos que,

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\beta} \left[ (\delta g_{\nu\beta})_{,\mu} + (\delta g_{\mu\beta})_{,\nu} - (g_{\mu\nu})_{,\beta} - 2\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\delta g_{\alpha\beta} \right]. \quad (2.72)$$

escrevendo em função das derivadas covariantes, temos que,

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = -\frac{1}{2} \left[ g_{\alpha\nu}\nabla_{\mu}(\delta g^{\alpha\rho}) + g_{\alpha\mu}\nabla_{\nu}(\delta g^{\alpha\rho}) - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\nabla^{\rho}(\delta g^{\alpha\beta}) \right] \quad (2.73)$$

feito isso, será trabalhado o termo referente a variação do determinante do tensor métrico, de tal maneira que se tivermos uma matriz quadrada de determinante não nulo, então vale a seguinte relação,

$$\ln(\det M) = Tr(\ln(M)), \quad (2.74)$$

logo variando essa equação, temos que,

$$\frac{1}{\det M}\delta(\det M) = Tr(M^{-1}\delta M), \quad (2.75)$$

$$\frac{1}{g}\delta g = Tr(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}), \quad (2.76)$$

dado que a  $g$ , é o determinante do tensor métrico. Foi usada a propriedade cíclica, considerando que  $g^{\mu\nu}$  e  $\delta g_{\mu\nu}$  não comutam, logo,

$$\delta g = g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}), \quad (2.77)$$

$$= -g(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}), \quad (2.78)$$

agora, será usado este resultado para calcular,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g, \quad (2.79)$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (2.80)$$

logo, organizando para que seja posto no formato de derivada funcional da ação de modo que seja satisfeita, temos,

$$\delta S = \int \sum_i \left( \frac{\delta S}{\delta\Phi^i} \delta\Phi^i \right) d^n x, \quad (2.81)$$

onde  $\Phi^i$ , é o conjunto de campos sendo variados, no nosso caso apenas  $g_{\mu\nu}$  e para pontos estacionários e uma variação arbitrária em relação a métrica, juntando os resultados, temos que como a primeira já se encontra escrita em função da variação do campo.

$$\delta S_{E1} = \frac{1}{2\kappa} \int (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} \sqrt{-g} d^4 x, \quad (2.82)$$

a segunda integral usando o teorema de Stokes, o fato da derivada covariante da métrica ser igual a zero e algumas mudanças de índices ao longo do calculo, obtemos que,

$$\delta S_{E2} = \frac{1}{2\kappa} \int \nabla_\sigma (g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \delta g^{\lambda\sigma}) \sqrt{|g|} d^4x \quad (2.83)$$

$$= \frac{1}{2\kappa} \int n_\sigma (g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \delta g^{\lambda\sigma}) \sqrt{|g|} d^3x, \quad (2.84)$$

agora como o termo deste lado é uma derivada covariante e lembrando que a variação da métrica sobre a fronteira de uma variedade plana  $V$  é nula, onde  $n_\alpha$  é o vetor normal a fronteira  $\partial M$  e  $g_{ij}$  é o tensor métrico induzida em  $\partial M$ , temos,

$$\delta S_{E2} = 0, \quad (2.85)$$

logo, juntando os resultados da  $\delta S_{E1}$  com a  $\delta S_{E3}$ , temos que,

$$\delta S_{E1} = \frac{1}{2\kappa} \int (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\alpha\nu}^\alpha \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.86)$$

$$\delta S_{E3} = -\frac{1}{2\kappa} \int g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu}^\alpha \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) d^4x, \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \delta S_{total} &= \frac{1}{2\kappa} \int (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\alpha\nu}^\alpha - g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu}^\alpha \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int (\delta g^{\mu\nu}) \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0, \end{aligned} \quad (2.88)$$

e pela comparação com a ação, temos a equação de movimento para o Vácuo, dada pela equação de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0, \quad (2.89)$$

esta equação considerando fontes, tendo que da equação (2.57), e repetindo o processo acima, obteríamos,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\kappa} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_E}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}},$$

que o segundo termo já sabemos que resultará na equação do tensor de Einstein. Após a variação da ação, no segundo termo, será usado o seu formato padrão da literatura, definido por. Ref.[1]

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.90)$$

que após a variação irá gerar,

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.91)$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.92)$$

onde, de um lado da equação temos o tensor de Einstein que tem características puramente geométricas descrito apenas por contrações do tensor de Riemann e do outro, o tensor energia momento, que é advindo do termo de fontes de matéria na Lagrangeana do modelo, fazendo assim a total conexão entre geometria e matéria. A equação de Einstein será explorada para a obtenção das ondas gravitacionais, assim como no eletromagnetismo.

## 2.12 Solução de Schwarzschild

Naturalmente para que se possa estudar as soluções de buraco negro a primeira coisa a se fazer seria buscar por soluções mais simples, como a solução simetricamente esférica. Devido a não linearidade das equações de Einstein torna-se trabalhoso obter soluções analíticas para sistemas tendo uma densidade de matéria, por isso é melhor trilhar em busca de soluções que representem as modificações que um corpo massivo produz no espaço vazio, podendo ser uma estrela, um planeta, ou um Buraco negro, desde que sua simetria seja esférica, a solução de Schwarzschild pode ser modificada, para cada especialidade Ref.[1]. Neste caso, consideraremos apenas a solução estática do problema, ou seja, temos que o tensor métrico deve ser independente do tempo, o que implicaria que toda a primeira linha da matriz seja nula, a menos do primeiro termo, já que o  $g_{00}$ , está conectado com o potencial gravitacional Newtoniano, não pode ser zerado, porém será modificado por um termo que só dependa de  $r$  e que estes termos devem sumir para uma distância muito grande da fonte de curvatura. Então o anzats inicial pode ser do tipo

$$ds^2 = U dt^2 - V dr^2 - W r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2), \quad (2.93)$$

existem algumas formas de obter qual é a cara das funções  $U(r)$ ,  $V(r)$  e  $W(r)$ , mas para simplificar um processo um pouco longo, usaremos a proposição de que afim de manter a simetria esférica, as funções precisem se manter perante derivadas e que elas decaiam quando  $r \rightarrow \infty$ , elas são modificadas para.

$$ds^2 = e^{2v} dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2), \quad (2.94)$$

$U = e^{2v}$ ,  $V = e^\lambda$ ,  $W = 1$ . O setor angular não é tão interessante que seja modificado, devido a simetria radial, já que não estamos considerando momento angular, no problema. Considerando

que as funções  $\lambda, v$ , ambas dependem de  $r$ , temos nosso novo tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \text{ e } g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-2v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

Obtemos os chamados símbolos de Christoffel, não nulos, para esse tensor métrico, temos,

$$\Gamma_{00}^1 = v' e^{2v-2\lambda}, \Gamma_{11}^1 = \lambda', \Gamma_{22}^1 = -r' e^{-2\lambda}, \Gamma_{33}^1 = v' e^{2v-2\lambda}, \quad (2.96)$$

$$\Gamma_{10}^0 = v', \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \Gamma_{23}^3 = \cot(\theta), \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \Gamma_{33}^2 = -\sin(\theta) \cos(\theta), \quad (2.97)$$

e usando estes resultados para calcular os tensores de Ricci, não nulos, dadas pela relação de sessões anteriores, temos que

$$R_{00} = \left( -v'' + \lambda' v' - v'^2 - \frac{2v'}{r} \right) e^{2v-2\lambda}, \quad (2.98)$$

$$R_{11} = \left( v'' - \lambda' v' + v'^2 - \frac{2\lambda'}{r} \right), \quad (2.99)$$

$$R_{22} = (1 + rv' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1, \quad (2.100)$$

$$R_{33} = [(1 + rv' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1] \sin^2(\theta), \quad (2.101)$$

$$= R_{22} \sin^2(\theta), \quad (2.102)$$

então temos que destas equações e da condição citada no começo da sessão de espaço vazio, dada por,  $R_{\mu\nu} = 0$ , temos que,

$$-v'' + \lambda' v' - v'^2 - \frac{2v'}{r} = 0, \quad (2.103)$$

$$v'' - \lambda' v' + v'^2 - \frac{2\lambda'}{r} = 0, \quad (2.104)$$

$$(1 + rv' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1 = 0, \quad (2.105)$$

na ultima temos que a solução para  $\theta = 0, \pi$ , é muito particular, trataremos o outro caso, apenas. Se somarmos a primeira e a segunda, obteremos a seguinte condição

$$\lambda' + v' = 0, \quad (2.106)$$

se integrarmos, em relação a  $r$ , teremos que,

$$\lambda + v = cte, \quad (2.107)$$

porém, da condição de que para  $r$  muito grande esses valores se anulam, segue que,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda + v = cte &= 0 \\ cte &= 0, \end{aligned} \quad (2.108)$$

ou seja,

$$\lambda + v = 0, \quad (2.109)$$

agora da terceira, temos que,

$$(1 + r(v' - \lambda')) e^{-2\lambda} = 1, \quad (2.110)$$

$$e^{2v} = 1 + \frac{k}{r}, \quad (2.111)$$

que para que obtenhamos o potencial dado pela relatividade geral, e ou pelo limite pós newtoniano Ref.[3], temos que,

$$g_{oo} = 1 + 2V, \quad (2.112)$$

e temos que,  $k = -2m$ , para que o potencial seja  $V = \frac{Gm'}{r}$  e daí segue,

$$g_{oo} = e^{2v} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (2.113)$$

e a solução de Schwarzschild é dada por,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.114)$$

Fazendo o termo,  $\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$ , igual a zero, temos que o ponto singular se encontra em  $r = 2m$ , essa é a equação de uma superfície esférica de raio  $2m$ , e por sinal ela é uma superfície singular. Observamos que o coeficiente de  $dt^2$ , vemos que a coordenada tempo será sempre do tipo tempo, e o termo radial sempre negativo, implicando que suas coordenadas são tipo espaço. Isso implica dizer que a singularidade não está sempre no futuro da partícula em queda, logo temos que a singularidade é evitável para partículas que saem da zona de estabilidade, porém ao cair no horizonte as suas naturezas mudam e a inversão entre as coordenadas ocorre, fazendo o tempo ser tipo espaço e o espaço ser tipo tempo, tornando a singularidade inevitável para as partículas que uma vez estão no interior do Buraco negro. Dada que esta análise é em suma geométrica, ou seja, não depende do tipo de partícula analisada, vemos que ela serve tanto para partículas massivas,

quanto não massivas. Essa é a solução simetricamente esférica de Schwarzschild. Que representa a solução para o espaço no entorno de um objeto com simetria esférica, estático e para o espaço livre de matéria. Esta solução faz algumas correções na teoria Newtoniana e o mais belo dela, foi obtida analiticamente por Karl Schwarzschild.

### 2.12.1 Geodésica radial e Efeito Espaguete

Neste ponto, após a obtenção da solução de simetria esférica, percebemos que a solução acima, possui duas singularidades, uma em  $2m$ , que é removível, ou seja, uma mudança no sistema de coordenadas resolve, porém a outra é essencial, que advém de um problema matemático, já a singularidade removível possui uma física mais visível atrelada a ela, neste caso, a solução está conectada com o raio de Schwarzschild, que representa a máxima aproximação com possibilidade de retorno, para uma partícula com velocidade menor que a da luz. Que está localizado em  $r = 2m$ . para analisarmos um dos efeitos físicos ao se aproximar da singularidade, calculado o efeito na coordenada espacial dado pela queda de uma partícula em direção ao centro, apenas se deslocando na direção do raio do buraco negro, temos que é de se esperar uma coisa, o espaço sofre efeitos de deformação quanto mais próximo do horizonte de eventos, este efeito deve ser refletido na geodésica.

Seja a métrica dada por,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.115)$$

temos que considerando uma partícula caindo apenas na direção radial, as variações em outras direções se anulam.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (2.116)$$

então, calculando a geodésica, temos,

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dt^2}{ds^2} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{ds^2} \quad (2.117)$$

$$t = 2m \ln |r - 2m| + r + cte \quad (2.118)$$

e se observarmos o gráfico obtido [Figura 1], percebemos que as geodésicas possuem uma singularidade natural para  $2m$ . Existe uma certa convergência para esse valor, de ambos os lados, implicando que a tendência delas é levarem em direção ao horizonte. Devido ao fato da angulação vir mudando drasticamente com o tempo, observa-se que é como se o espaço se "esticasse" ao se aproximar do horizonte, fazendo com que as partículas que compõem corpos mesmo que pequenos

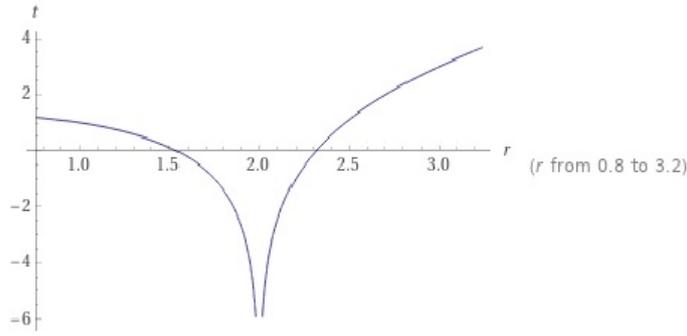


Figura 1: Geodésica no entorno do horizonte

se desloquem com acelerações muito diferentes, por exemplo um astronauta seria esticado como um espaguete, daí o nome do efeito.

### 2.13 Buraco negro de Reissner-Nordstrom

Neste ponto do trabalho chegamos a um dos ápices, pois se o buraco negro de Schwarzschild era a base, o de RN (Reissner-Nordstrom) é o primeiro degrau, devido ao fato de que a estrutura base para ele é o buraco negro anterior, porém com uma diferença, este possui carga, então o seu tensor energia momento não será mais nulo e com isso, observaremos que agora, a presença de um campo elétrico, que deve influenciar em propriedades geométricas fundamentais do espaço-tempo.

Buracos negros, sendo frutos do colapso de estrelas, nuvens de poeira cósmica, ou quais quer outras estruturas que tenham massa suficiente e associado ao fato de os mesmos estarem sempre se alimentando de matéria, é natural de se imaginar que sua carga líquida seja não nula e por sinal deve ser gigantesca. Mas uma coisa que não fora discutida antes é o porquê de sempre buscarmos a solução estática, isso ocorre por conta do fato de que as soluções dependentes do tempo recorrem a buracos negros que acabaram de vir do colapso e graças a isso suas soluções ainda não estão estáveis. Isto se reflete no teorema de Birkhoff Ref[4]. Então, usando o tensor métrico,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (2.119)$$

associado a relação principal dos símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}),$$

então calculando o primeiro símbolo,

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}g^{\alpha 1} (g_{\alpha 0,0} + g_{\alpha 0,0} - g_{00,\alpha}),$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1}) \\ &= \frac{1}{2}g^{11} (-g_{00,1}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{B} A',\end{aligned}\tag{2.120}$$

e os outros se anulam, por serem multiplicados por componentes nulas de  $g^{\alpha 1}$ .

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{\alpha 1} (g_{\alpha 1,1} + g_{\alpha 1,1} - g_{11,\alpha}),\tag{2.121}$$

então para  $\alpha = 0$ , temos que os termos são nulos, devido a estarem multiplicados por zero. Então calcularemos para  $\alpha = 1$ ,

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (g_{11,1}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{B} B',\end{aligned}\tag{2.122}$$

os outros serão nulos devido aos  $g^{\alpha 1}$ , todos serem nulos. Calculando o próximo.

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}g^{\alpha 1} (g_{\alpha 2,2} + g_{\alpha 2,2} - g_{22,\alpha}),\tag{2.123}$$

usando o que já sabemos, temos noção de que apenas o termo  $g^{11}$  e o  $g^{01}$  tem chances de não serem nulos, porém o  $g^{01}$  faz com que os termos todos tenham as dependências temporais sejam em derivadas, quanto nos próprios elementos da matriz, isso fará com que elas sejam naturalmente nulas. Então usaremos o que possui  $g^{11}$ .

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}) \\ &= -\frac{r}{B},\end{aligned}\tag{2.124}$$

agora o próximo

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2}g^{\alpha 1} (g_{\alpha 3,3} + g_{\alpha 3,3} - g_{33,\alpha}),\tag{2.125}$$

pelo mesmo motivo acima, testaremos o  $g^{11}$

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{13,3} + g_{13,3} - g_{33,1}) \\ &= -\frac{r^2 \sin^2 \theta}{B},\end{aligned}\tag{2.126}$$

agora para

$$\Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2}g^{\alpha 0}(g_{\alpha 1,0} + g_{\alpha 0,1} - g_{10,\alpha}),\tag{2.127}$$

analisando, Logo para  $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}\Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(g_{00,1}), \\ \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2}\frac{1}{A}A',\end{aligned}\tag{2.128}$$

agora para

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{\alpha 2}(g_{\alpha 1,2} + g_{\alpha 2,1} - g_{12,\alpha}),\tag{2.129}$$

temos que a única possibilidade não nula será é para  $\alpha = 2$

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^2 &= -r^{-2}(-r) \\ &= r^{-1},\end{aligned}\tag{2.130}$$

e para

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{33,1}) \\ &= \frac{1}{2} - r^{-2} \sin^{-2}(\theta) (-2r \sin^2(\theta)) \\ &= r^{-1},\end{aligned}\tag{2.131}$$

para

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2}g^{\alpha 3}(g_{\alpha 2,3} + g_{\alpha 3,2} - g_{23,\alpha}),\tag{2.132}$$

aqui será para  $g^{33}$ , então teremos

$$\begin{aligned}\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{32,3} + g_{33,2} - g_{23,3}) \\ &= \frac{1}{2} \sin^{-2}(\theta) (\partial_\theta \sin^2(\theta)) \\ &= \sin^{-1}(\theta) * \cos(\theta) \\ &= \cot(\theta),\end{aligned}\tag{2.133}$$

e por ultimo adiantando para  $\alpha = 2$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} (g_{23,3} + g_{23,3} - g_{33,2}) \\
&= \frac{1}{2} (-r^{-2} (\partial_\theta r^2 \sin^2 \theta)) \\
&= -\sin \theta \cos \theta,
\end{aligned} \tag{2.134}$$

Seja a relação para os Ricci, dado por

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma, \tag{2.135}$$

então a partir dos símbolos já calculados, obteremos os riccis

$$\begin{aligned}
R_{00} &= +\partial_\sigma \Gamma_{00}^\sigma - \Gamma_{0\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\sigma + \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \\
&= \partial_\sigma \Gamma_{00}^\sigma - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1
\end{aligned} \tag{2.136}$$

$$+ \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho 0}^0 + \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho 1}^1 + \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho 2}^2 + \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho 3}^3, \tag{2.137}$$

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB}, \tag{2.138}$$

agora o próximo

$$R_{11} = \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{11}^\sigma + \Gamma_{1\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 1}^\sigma \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma, \tag{2.139}$$

e repetindo o mesmo processo de abrir os índices contraídos teremos

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB}, \tag{2.140}$$

em seguida

$$R_{22} = \partial_\theta \Gamma_{\theta\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\theta\theta}^\sigma + \Gamma_{\theta\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\theta}^\sigma \Gamma_{\theta\theta}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma, \tag{2.141}$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right), \tag{2.142}$$

e depois

$$R_{33} = \partial_\phi \Gamma_{\phi\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\phi\phi}^\sigma + \Gamma_{\phi\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\phi}^\sigma \Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma, \tag{2.143}$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}, \tag{2.144}$$

agora obteremos as soluções para Reissner e dada a equação de Einstein que é

$$G^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta}, \quad (2.145)$$

dado que o tensor Energia momento também pode ser escrito por,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left( F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right), \quad (2.146)$$

e

$$G_{\beta}^{\alpha} = R_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\beta}^{\alpha} R. \quad (2.147)$$

Utilizando os resultados do eletromagnetismo para uma carga pontual, já que toda a matéria em um buraco negro deve estar concentrada entorno de um único ponto, usaremos o tensor eletromagnético da carga pontual, mas lembrando que ele está conectado intimamente com as propriedades do espaço-tempo devido a identidade de Bianchi, por isso, perceberemos o reflexo disso na forma do campo. Sendo  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ , onde  $A_{\mu}$  é o 4-potencial eletromagnético,

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.148)$$

Considerando que estamos tomando a solução para o lado de fora do buraco negro, temos que a densidade de corrente é nula, então temos que o  $j^{\mu}$  é nulo e as equações de Maxwell ficam,

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.149)$$

$$\nabla_{\sigma} F_{\mu\nu} + \nabla_{\nu} F_{\sigma\mu} + \nabla_{\mu} F_{\nu\sigma} = 0, \quad (2.150)$$

as propriedades do espaço naturalmente irão aparecer no tensor energia momento (através do tensor métrico), porém, fica mais difícil observar como as propriedades do espaço irão aparecer de maneira matemática no campo, neste caso, os nossos pré-requisitos de que a simetria seja esféricamente simétrica e estático irão nos fornecer uma forma genérica de potencial eletromagnético, que deve ser da seguinte maneira,

$$[A^{\mu}] = \left( \frac{\phi(r)}{c}, a(r), 0, 0 \right), \quad (2.151)$$

onde para  $r$  uma distancia muito grande da fonte, devemos ter o potencial eletromagnético padrão, para uma carga pontual, o  $c$ , é devido a natureza do espaço de Minkowski.

Então devemos usar as equações de Maxwell e de Einstein para podermos obter as nossas variáveis  $A(r)$ ,  $B(r)$  e  $E(r)$ , e inicialmente conseguiremos colocar a terceira variavel em função

das outras duas, usando Maxwell, logo

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0, \quad (2.152)$$

esta forma usada acima, para o divergente covariante, é possível devido ao fato do  $F^{\mu\nu}$  ser antisimétrico. Sendo

$$g = AB r^4 \sin^2(\theta), \quad (2.153)$$

e devido aos elementos não nulos do tensor eletromagnético serem os mistos entre radial e temporal, temos que usando o  $F^{10}$ , teremos

$$\partial_1 (\sqrt{AB} r^2 F^{10}) = 0, \quad (2.154)$$

afim de facilitar o cálculo, temos que

$$F^{10} = g^{1\mu} g^{0\nu} F_{\mu\nu} = g^{11} g^{00} F_{10} = \frac{-E}{AB}, \quad (2.155)$$

então teremos que

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{E}{\sqrt{AB}} \right) = 0, \quad (2.156)$$

por integração direta, teremos, onde  $k$  é a constante de integração

$$E(r) = \frac{k \sqrt{A(r) B(r)}}{r^2}, \quad (2.157)$$

Se considerarmos que a métrica é aproximadamente plana quando  $r$  tende ao infinito, então ela deve bater com o campo elétrico clássico,

$$A = c^2, \quad (2.158)$$

$$B = 1, \quad (2.159)$$

logo

$$k = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c}, \quad (2.160)$$

então aplicando a relação para o tensor energia momento obtemos, onde fora usado que,  $\frac{1}{\mu_0\epsilon_0} = c^2$  e  $F_0^1 = g^{11} F_{01} = -E/B$  e  $F_{10} = E/A$ ,

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}c^2\epsilon_0\frac{E^2}{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}c^2\epsilon_0\frac{E^2}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}c^2\epsilon_0\frac{E^2}{BA}r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin^2\theta\frac{1}{2}c^2\epsilon_0\frac{E^2}{BA}r^2 \end{pmatrix}, \quad (2.161)$$

e da equação de movimento temos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.162)$$

então como a solução é para a região externa ao buraco negro, temos que,

$$T = 0, \quad (2.163)$$

o que resultará em,

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}4R = \kappa T_{\nu}^{\mu} \quad (2.164)$$

$$R = 0, \quad (2.165)$$

essa é uma característica própria do tensor energia momento eletromagnético. Restando assim, apenas,

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.166)$$

então de termos que,

$$R_{00} = \kappa T_{00}, \quad (2.167)$$

$$R_{11} = \kappa T_{11}, \quad (2.168)$$

$$R_{22} = \kappa T_{22}, \quad (2.169)$$

$$R_{33} = \kappa T_{33}, \quad (2.170)$$

então, substituindo, temos,

$$-\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB} = -\frac{1}{2}\kappa c^2 \epsilon_0 \frac{E^2}{B}, \quad (2.171)$$

$$\frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB} = +\frac{1}{2}\kappa c^2 \epsilon_0 \frac{E^2}{A}, \quad (2.172)$$

$$\frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) = -\frac{1}{2}\kappa c^2 \epsilon_0 r^2 \frac{E^2}{AB}, \quad (2.173)$$

$$\frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \sin^2 \theta = -\kappa \sin^2 \theta \frac{1}{2} c^2 \epsilon_0 \frac{E^2}{BA} r^2,$$

o que torna ela proporcional a anterior. então para resolver inicialmente usaremos a (2.169) e a

(2.170). dividindo a (2.169) por a e a (2.170) por B temos,

$$-\frac{A''}{2AB} + \frac{A'}{4AB} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rAB} = -\frac{1}{2} \kappa c^2 \epsilon_0 \frac{E^2}{AB}, \quad (2.174)$$

$$\frac{A''}{2AB} - \frac{A'}{4AB} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rBB} = \frac{1}{2} \kappa c^2 \epsilon_0 \frac{E^2}{BA}, \quad (2.175)$$

e somando, teremos que,

$$\begin{aligned} & \frac{A''}{2AB} - \frac{A''}{2AB} - \frac{A'}{4AB} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{4AB} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \\ & - \frac{B'}{rBB} - \frac{A'}{rAB} = \frac{1}{2} \kappa c^2 \epsilon_0 \frac{E^2}{BA} - \frac{1}{2} \kappa c^2 \epsilon_0 \frac{E^2}{AB} \\ & \frac{B'}{rBB} + \frac{A'}{rAB} = 0, \end{aligned} \quad (2.176)$$

$$\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} = 0, \quad (2.177)$$

logo, temos que resolvendo essa EDO simples,

$$AB = cte, \quad (2.178)$$

e olhando a equação  $E(r) = \frac{k\sqrt{A(r)B(r)}}{r^2}$ , vemos que o produto precisa ser igual a  $c^2$  ( velocidade da luz),

$$AB = c^2, \quad (2.179)$$

e então temos que  $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  e substituindo na terceira e depois lembrando que  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) &= -\frac{1}{2} \kappa c^2 \epsilon_0 r^2 \frac{E^2}{AB} \\ -1 + \frac{1}{B} \left( 1 + r \left( \frac{A'}{A} \right) \right) &= -\frac{1}{2} \kappa c^2 \epsilon_0 k^2 \frac{AB}{r^2} \\ A + rA' &= AB \left( 1 - \kappa c^2 \epsilon_0 k^2 \frac{AB}{r^2} \right) \\ (Ar)' &= c^2 \left( 1 - \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4} \frac{1}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (2.180)$$

e integrando temos que

$$A(r) = c^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4} \frac{1}{r^2} \right), \quad (2.181)$$

e a constante de integração foi fixada como  $\frac{-2GM}{c^2}$ , devido ao fato de que se fixarmos a carga como zero deve voltar a ser Schwarzschild. Portanto a solução para um corpo simetricamente esférico

carregado com carga  $Q$  e massa  $M$  considerando uma renomeação das constantes,

$$ds^2 = c^2 \left( 1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.182)$$

sendo que  $\mu = \frac{-GM}{c^2}$  e  $q = \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4}$ .

A partir desta métrica, é possível assim como em Schwarzschild obter o ponto, ou melhor, os pontos singulares, usando o mesmo procedimento usado pro buraco negro anterior.

$$1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2} = 0, \quad (2.183)$$

temos que,

$$r^2 - 2\mu r + q^2 = 0, \quad (2.184)$$

e a solução será,

$$r_{\pm} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - q^2}, \quad (2.185)$$

então temos dois pontos singulares por coordenadas e um ponto singular por divergência, que seria o,

$$\lim_{r \rightarrow 0} 1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2}, \quad (2.186)$$

e no segundo caso revela que ela é uma singularidade intrínseca da geometria. Esse resultado pode ser obtido calculando o Escalar de Riemann. Seria lá onde que todas as cargas devam estar localizadas dada à fenomenologia do problema. Esta métrica é válida para todos os,  $r > 0$ .

Agora que temos as duas superfícies singulares, temos que analisar os casos possíveis.

Caso 1  $\mu^2 < q^2$ : Neste caso temos que as duas superfícies são imaginárias, ou seja, não são fisicamente possíveis. Porém analisando o resultado para aprimorar o método, temos que se observarmos,

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \mu \pm \sqrt{\mu^2 - q^2} \\ &= \mu \pm i\sqrt{f(\mu, q)}, \end{aligned} \quad (2.187)$$

logo não teremos singularidades nas coordenadas, ou seja, a métrica é regular para todos os,  $r > 0$ . Como o  $r$  é sempre positivo, se fizermos o intervalo relativístico, perceberemos que a coordenada tempo será sempre tipo tempo e a coordenada radial sempre será tipo espaço e como a única singularidade intrínseca é em  $r = 0$ , o que isso quer dizer? devido a singularidade na coordenada tempo, não ser tipo espaço, ou seja, estar sempre no futuro das coordenadas, a priori, pode ser contornada. Mas, na falta de quais quer horizontes de evento, temos que o polo em,  $r = 0$ , é um uma singularidade nua, ou seja, todos os referencias devem saber que ela existe ali naquele ponto Ref.[4].

Caso 2  $\mu^2 > q^2$  : Neste caso as duas superfícies singulares são reais,

$$r_{\pm} = \mu \pm \sqrt{f(\mu, q)}, \quad (2.188)$$

logo existem duas singularidades coordenadas, em,  $r_+$  e  $r_-$ . Na primeira, teremos que o nosso  $r$  sempre será positivo, ou seja, se analisarmos o intervalo, veremos  $g_{00}$  sempre será positivo e  $g_{11}$  sempre será negativo, para  $r > r_+$ , este caso é muito semelhante a Schwarzschild implicando que suas coordenadas  $t$  e  $r$  tempo e espaço respectivamente, como naquele caso. Já na região  $r_- < r < r_+$ , a função,  $1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2}$ , é negativa, o que irá fazer com que as naturezas das coordenadas tempo e espaço sejam trocadas, ou seja, uma partícula massiva, ou fóton que entra em,  $r_+$ , vindo de fora, deve mover-se necessariamente para a direção de  $r$  decrescente, como em Schwarzschild, até o ponto que isso não seja mais obrigatório, que seria a chegada em  $r_-$ . Por isso que esta superfície é um horizonte de eventos. A diferença de Schwarzschild em relação a este modelo, seria que a partícula ao mover-se em direção a,  $r = r_-$ , chegando nesta superfície as coordenadas  $t$  e  $r$  recuperam a natureza tipo tempo e espaço respectivamente permitindo a possibilidade de retorno. queda, ou, de um repouso, dependendo da energia que ela tenha para tal, podendo assim evitar a singularidade intrínseca de,  $r = 0$ , o que bate com o fato de que na origem temos que Devido coordenada temporal é tipo tempo, ou seja, a singularidade não está obrigatoriamente no futuro da partícula.

O caso mais estranho e curioso seria o que acontece se "alguém que esteja dentro da superfície  $r_-$ , resolva viajar para fora", fazendo a análise segundo Kruskal Ref.[4], descobrimos que pode-se cruzar novamente  $r_-$ , vindo de dentro, se movimentando em uma linha em q  $r$  é tipo espaço para um local em ela se torna tipo tempo, mas desta vez o sentido é invertido o que ejetaria a partícula para fora de  $r_+$ , agindo como um horizonte de eventos de "dentro para fora". Claro que isso seria fisicamente não observável, Ref[4].

Caso 3  $\mu^2 = q^2$  : Este é o ultimo caso, chamado buraco negro extremo de Reissner-Nordstrom, a função  $1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2}$ , em todos os pontos, exceto em,

$$r = \mu,$$

que ela se anula, logo a coordenada  $r$  é tipo espaço em todos os lugares, exceto em  $r = \mu$ , onde é igual a zero, o que implicaria que  $r = \mu$  é um horizonte de eventos, ou seja, o caso 3 é basicamente o caso 2, removendo-se a região entre as superfícies  $r_+$  e  $r_-$ .

## 2.14 Conexão entre ondas gravitacionais e BH

Agora queremos associar a ideia dos buracos negros a ideia de ondas gravitacionais. O tensor métrico que obtivemos na sessão anterior que é a para buracos negros será chamado de  $g_{\mu\nu}$ , e

separaremos em 3 partes. Para o tensor métrico em uma distância intermediária ao buraco negro teremos que é aproximadamente,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}, \quad (2.189)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$ , é o tensor métrico de Minkowski e  $\bar{h}_{\mu\nu}$  são as possíveis perturbações advindas de outros corpos e  $\bar{g}_{\mu\nu}$  seria o tensor métrico geral para este ponto. Próximo ao buraco negro, temos que os outros dois termos serão desprezíveis, devido à influência da métrica, então, próximo dele a métrica fica,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \quad (2.190)$$

porém, quanto mais nos afastamos do buraco negro, os outros termos começam a se tornar cada vez mais relevantes, enquanto a métrica do buraco negro se torna cada vez mais fraca, até se tornar apenas uma perturbação do tipo

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}, \quad (2.191)$$

onde  $g'_{\mu\nu}$  são as perturbações advindas do buraco negro. Assim, numa distância cósmica um pouco maior teremos, que a métrica nova será a soma das duas perturbações e Minkowski, sendo que  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , terá uma influência quase desprezível e assim ela será,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.192)$$

dado  $h_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}$  que nessa perturbação haverá as informações acerca do buraco negro que serão detectadas pelo interferômetro aqui na terra. Estas informações que batem com as simulações feitas pelos físicos do LIGO. Sobre esta métrica que trabalharemos a obtenção das equações de ondas gravitacionais.

## 2.15 Linearização do tensor de Einstein e equação de onda Gravitacional

Conhecendo as identidades tensoriais progressas, temos que considerar um novo tensor  $\bar{h}$  que possui uma transformação, tal que possamos obter a equação de Einstein em função dele e esta equação esteja pronta para que se reduzam seus graus de liberdade a ponto de que se encontrem todas as componentes capazes de descrever a propagação e polarização de uma onda, então, dadas as equações Ref[3],

$$g^{\alpha\gamma} = \eta^{\alpha\gamma} - h^{\alpha\gamma}, \quad (2.193)$$

$$g_{\alpha\gamma} = \eta_{\alpha\gamma} + h_{\alpha\gamma}, \quad (2.194)$$

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R, \quad (2.195)$$

$$R_{\gamma\delta\rho\nu} = \frac{1}{2}(h_{\gamma\nu,\delta\rho} + h_{\delta\rho,\gamma\nu} - h_{\gamma\rho,\delta\nu} - h_{\delta\nu,\gamma\rho}), \quad (2.196)$$

o tensor de riemann contravariante é dado por,

$$R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\nu,\beta\mu} - g^{\alpha\mu,\beta\nu} + g^{\beta\mu,\alpha\nu} - g^{\beta\nu,\alpha\mu}), \quad (2.197)$$

sabemos que,

$$\begin{aligned} R^{\alpha\mu} &= g_{\beta\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}, \\ &= g_{\beta\nu}\frac{1}{2}(\partial^\beta\partial^\nu g^{\alpha\mu} + \partial^\alpha\partial^\mu g^{\beta\nu} - \partial^\beta\partial^\mu g^{\alpha\nu} - \partial^\alpha\partial^\nu g^{\mu\beta}), \end{aligned} \quad (2.198)$$

desprezando os termos que são proporcionais a  $h^2$  e lembrando que as derivadas de  $g$  são nulas, temos,

$$= \frac{1}{2}(\eta_{\beta\nu}(-\partial^\beta\partial^\nu h^{\alpha\mu} - \partial^\alpha\partial^\mu h^{\beta\nu} + \partial^\beta\partial^\mu h^{\alpha\nu} + \partial^\alpha\partial^\nu h^{\mu\beta})),$$

$$R^{\alpha\mu} = \frac{1}{2}(-\square h^{\alpha\mu} - \partial^\alpha\partial^\mu h + \partial^\beta\partial^\mu h_\beta^\alpha + \partial^\alpha\partial^\nu h_\nu^\mu), \quad (2.199)$$

onde  $\square$  é o d'alembertiano. agora fazendo o escalar de Ricci,

$$\begin{aligned} g_{\beta\nu}g_{\alpha\mu}R^{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial^\beta\partial^\nu g^{\alpha\mu} + \partial^\alpha\partial^\mu g^{\beta\nu} - \partial^\beta\partial^\mu g^{\alpha\nu} - \partial^\alpha\partial^\nu g^{\mu\beta}), \\ &= \frac{1}{2}(\eta_{\beta\nu} + h_{\beta\nu})(\eta_{\alpha\mu} + h_{\alpha\mu})(\partial^\beta\partial^\nu g^{\alpha\mu} + \partial^\alpha\partial^\mu g^{\beta\nu} - \partial^\beta\partial^\mu g^{\alpha\nu} - \partial^\alpha\partial^\nu g^{\mu\beta}), \end{aligned} \quad (2.200)$$

simplificando alguns cálculos, temos a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} R &= -\partial_\nu\partial^\nu h - h_{\alpha\mu}\partial^\alpha\partial^\mu h - h_{\beta\nu}\partial_\mu\partial^\mu h^{\beta\nu} + \partial_\nu\partial_\alpha h^{\alpha\nu} \\ &\quad + h_{\beta\nu}\partial^\beta\partial_\alpha h^{\nu\alpha} + \frac{1}{2}(h_{\alpha\mu}\partial^\alpha\partial_\beta h^{\mu\beta} + h_{\beta\nu}\partial_\mu\partial^\nu h^{\mu\beta}), \end{aligned} \quad (2.201)$$

agora argumentando, temos que os termos que possuem  $h\partial h = 0$ , pois será proporcional à uma potência de  $h^2$  resultando em,

$$R = -\square h + \partial_\nu\partial_\alpha h^{\alpha\nu}, \quad (2.202)$$

como o tensor de Einstein é dado por,

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R, \quad (2.203)$$

e o mesmo é simétrico, temos que,

$$\begin{aligned}
&= G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( -\square h^{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial^\beta h + \partial^\nu \partial^\beta h_\nu^\alpha + \partial^\alpha \partial^\mu h_\mu^\beta \right) - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R, \\
&= \frac{1}{2} \left( -\square h^{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial^\beta h + \partial^\nu \partial^\beta h_\nu^\alpha + \partial^\alpha \partial^\mu g_\mu^\beta \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( -\eta^{\alpha\beta} \square h + \partial_\nu \partial^\beta h^{\alpha\nu} \right),
\end{aligned} \tag{2.204}$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\square h^{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial^\beta h + \partial^\nu \partial^\beta h_\nu^\alpha + \partial^\alpha \partial^\mu h_\mu^\beta + \eta^{\alpha\beta} \square h - \partial_\nu \partial^\beta h^{\alpha\nu} \right), \tag{2.205}$$

sabe-se que  $h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \bar{h}$ , e que,  $-h = \bar{h}$ , então escrevendo os tensores em função do novo tensor  $\bar{h}$

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( -\square h^{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial^\beta h + \partial^\nu \partial^\beta h_\nu^\alpha + \partial^\alpha \partial^\nu h_\nu^\beta \right),$$

e considerando

$$\begin{aligned}
R^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( -\square h^{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial^\beta h + \partial^\nu \partial^\beta \left( \bar{h}_\nu^\alpha + \frac{1}{2} \eta_{\lambda\nu} \eta^{\alpha\lambda} h \right) + \partial^\alpha \partial^\nu \left( \bar{h}_\nu^\beta + \frac{1}{2} \eta_{\lambda\nu} \eta^{\lambda\beta} h \right) \right), \\
&= \frac{1}{2} \left( -\square h^{\alpha\beta} + \partial^\nu \partial^\beta \bar{h}_\nu^\alpha + \partial^\alpha \partial^\nu \bar{h}_\nu^\beta \right),
\end{aligned} \tag{2.206}$$

agora o escalar de Ricci em função do  $\bar{h}$ ,

$$\begin{aligned}
R &= -\frac{1}{2} \square h + \partial_\nu \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu}, \\
&= \frac{1}{2} \left( -\square h + 2 \partial_\nu \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} \right),
\end{aligned} \tag{2.207}$$

logo o tensor de Einstein fica,

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( -\square h^{\alpha\beta} + \partial^\nu \partial^\beta \bar{h}_\nu^\alpha + \partial^\alpha \partial^\nu \bar{h}_\nu^\beta \right) - \frac{1}{4} \left( \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \right) \left( -\square h + 2 \partial_\nu \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} \right), \tag{2.208}$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\square h^{\alpha\beta} + \partial^\nu \partial^\beta \bar{h}_\nu^\alpha + \partial^\alpha \partial^\nu \bar{h}_\nu^\beta \right) - \frac{1}{4} \left( -\eta^{\alpha\beta} \square h + 2 \eta^{\alpha\beta} 2 \partial_\nu \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} \right), \tag{2.209}$$

agora substituindo,  $h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h$ , temos,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left( -\square \left( \bar{h}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h \right) + \partial^\nu \partial^\beta \bar{h}_\nu^\alpha + \partial^\alpha \partial^\nu \bar{h}_\nu^\beta \right) \\
&\quad - \frac{1}{4} \left( -\eta^{\alpha\beta} \square h + 2 \eta^{\alpha\beta} 2 \partial_\nu \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} \right),
\end{aligned} \tag{2.210}$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\square \bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \square h + \partial^\nu \partial^\beta \bar{h}_\nu^\alpha + \partial^\alpha \partial^\nu \bar{h}_\nu^\beta + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \square h - \eta^{\alpha\beta} 2 \partial_\nu \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} \right), \tag{2.211}$$

$$\bar{G}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( -\square \bar{h}^{\alpha\beta} + \partial^\nu \partial^\beta \bar{h}_\nu^\alpha + \partial^\alpha \partial^\nu \bar{h}_\nu^\beta - \eta^{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} \right), \quad (2.212)$$

dada a transformação de coordenadas do tipo,

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi(x^\beta), \quad (2.213)$$

então temos que

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \partial_\beta x^\alpha + \partial_\beta \xi(x^\beta), \quad (2.214)$$

$$= \delta_\beta^\alpha + \partial_\beta \xi(x^\beta), \quad (2.215)$$

fazendo a transformação de coordenada da métrica, temos

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\beta} g_{\gamma\rho}, \quad (2.216)$$

$$(\eta'_{\alpha\beta'} + h'_{\alpha\beta}) = (\delta_\alpha^\gamma - \partial_\alpha \xi^\gamma) (\delta_\beta^\rho - \partial_\beta \xi^\rho) (\eta_{\gamma\rho} + h_{\gamma\rho}), \quad (2.217)$$

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha, \quad (2.218)$$

considerando que como o  $|\xi^\rho|$  e  $|h_{\beta\alpha}|$  são ambos muito menores que 1, então termos de ordens superiores serão desprezados, e como  $\eta_{\alpha'\beta'}$  =  $\eta'_{\alpha'\beta'}$  agora considerando a equação de Einstein linearizada e com a transformação de coordenadas feitas, temos que,

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( -\square \bar{h}^{\alpha\beta} + \partial^\nu \partial^\beta \bar{h}_\nu^\alpha + \partial^\alpha \partial^\nu \bar{h}_\nu^\beta - \eta^{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} \right), \quad (2.219)$$

para que a equação satisfaça uma equação de onda, dado o tratamento perturbativo feito, é necessário que seja fixado um Gauge, este gauge é chamado gauge de Lorentz,

$$\bar{h}_{\beta,\alpha}^\alpha = 0 = \partial_\alpha \bar{h}_\beta^\alpha, \quad (2.220)$$

agora, retomando a mudança de coordenadas, do tipo  $x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta)$ , então,

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha + \xi_{,\beta}^\alpha, \quad (2.221)$$

e fazendo uma inversão, utilizando uma expansão, temos que,

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^{\beta'}} = \delta_\beta^\alpha - \xi_{,\beta}^\alpha, \quad (2.222)$$

e utilizando as transformações de gauge no tensor de Riemann, com a nova métrica, dado que as

derivadas de  $\eta$  são nulas, ele se reduz a,

$$R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( h'^{\alpha\nu, \beta\mu} - h'^{\alpha\mu, \beta\nu} + h'^{\beta\mu, \alpha\nu} - h'^{\beta\nu, \alpha\mu} \right), \quad (2.223)$$

e das transformações de coordenadas, temos que  $h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha$ , então percebe-se que,

$$R'^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & (h^{\alpha\nu} - \partial^\alpha \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\alpha)^{\beta\mu} - (h^{\alpha\mu} - \partial^\alpha \xi^\mu - \partial^\mu \xi^\alpha)^{\beta\nu} \\ & + (h^{\beta\mu} - \partial^\beta \xi^\mu - \partial^\mu \xi^\beta)^{\alpha\nu} - (h^{\beta\nu} - \partial^\beta \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\beta)^{\alpha\mu} \end{aligned} \right], \quad (2.224)$$

separando apenas os termos de  $h$ , temos que,

$$\begin{aligned} R'^{\alpha\beta\mu\nu} = & \frac{1}{2} \left[ (h^{\alpha\nu})^{\beta\mu} - (h^{\alpha\mu})^{\beta\nu} + (h^{\beta\mu})^{\alpha\nu} - (h^{\beta\nu})^{\alpha\mu} \right] + \\ & \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & (-\xi^{\nu, \beta\mu\alpha} - \xi^{\alpha, \beta\mu\nu}) - (-\xi^{\mu, \beta\nu\alpha} - \xi^{\alpha, \beta\nu\mu}) \\ & + (-\xi^{\mu, \alpha\nu\beta} - \xi^{\beta, \alpha\nu\mu}) - (-\xi^{\nu, \alpha\mu\beta} - \xi^{\beta, \alpha\mu\nu}) \end{aligned} \right], \end{aligned} \quad (2.225)$$

então temos que pela permutação das derivadas, o segundo termo é zero, mostrando que o tensor de Riemann é invariante devida a essa transformação de coordenadas, logo o escalar de Ricci e o tensor de Riemann também são. Levando em conta que o tensor métrico também é invariante por esta mudança de coordenadas.

$$R'^{\alpha\beta\mu\nu} = R^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & -\xi^{\nu, \beta\mu\alpha} - \xi^{\alpha, \beta\mu\nu} + \xi^{\mu, \beta\nu\alpha} \\ & + \xi^{\alpha, \beta\nu\mu} - \xi^{\mu, \alpha\nu\beta} - \xi^{\beta, \alpha\nu\mu} + \xi^{\nu, \alpha\mu\beta} + \xi^{\beta, \alpha\mu\nu} \end{aligned} \right], \quad (2.226)$$

$$R'^{\alpha\beta\mu\nu} = R^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (2.227)$$

então, seja a mudança de coordenadas feita anteriormente e usando o tensor novo  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  e usando que,  $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h$ ,

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha + \eta_{\alpha\beta} \xi_{,\gamma}^\gamma, \quad (2.228)$$

queremos saber como o gauge de Lorentz fica para esta mudança de coordenadas.

$$\bar{h}'^\alpha_\beta = h^\alpha_\beta - \partial^\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi^\alpha + \eta^\alpha_\beta \xi_{,\gamma}^\gamma, \quad (2.229)$$

$$h^\alpha_{\beta, \alpha} = h^\alpha_{\beta, \alpha} - \partial_\alpha \partial^\alpha \xi_\beta - \partial_\alpha \partial_\beta \xi^\alpha + \eta^\alpha_{\beta, \alpha} \xi_{,\gamma}^\gamma, \quad (2.230)$$

$$\bar{h}'^\alpha_{\beta, \alpha} = h'^\alpha_{\beta, \alpha} - \partial_\alpha \partial^\alpha \xi_\beta,$$

e da mudança de coordenadas, temos então que,

$$h'_{\beta,\alpha} = 0 \quad (2.231)$$

$$\bar{h}_{\beta,\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \partial^\alpha \xi_\beta = 0 \quad (2.232)$$

$$\bar{h}_{\beta,\alpha}^\alpha = \square \xi_\beta = 0, \quad (2.233)$$

aqui, temos uma típica equação de onda, onde o  $\bar{h}_{\beta,\alpha}^\alpha$  funciona como um termo de fonte. Então escrevendo o tensor de Einstein considerando o gauge de Lorentz, temos,

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( -\square \bar{h}^{\alpha\beta} + \partial^\nu \partial^\beta \bar{h}_\nu^\alpha + \partial^\alpha \partial^\nu \bar{h}_\nu^\beta - \eta^{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} \right), \quad (2.234)$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\square \bar{h}^{\alpha\beta} \right), \quad (2.235)$$

tal que para  $T^{\alpha\beta} = 0$ , ou seja, para o espaço sem matéria ou possíveis fontes de curvatura,

$$G^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.236)$$

$$\frac{1}{2} \left( -\square \bar{h}^{\alpha\beta} \right) = 0 \quad (2.237)$$

$$\square \bar{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.238)$$

isso representa uma equação de onda para o campo  $h$ , como o  $\square = -\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ , agora, voltando para o tensor  $h$  onde é definida a perturbação no tensor métrico de Minkowski,

$$\square \bar{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.239)$$

$$\square \left( h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h \right) = \square h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \square h, \quad (2.240)$$

agora, para calcular o  $\square h$ , temos que,

$$\square \bar{h}^{\alpha\beta} = \square \left( h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h \right) = 0 \quad (2.241)$$

$$\begin{aligned} \eta_{\beta\alpha} \square \bar{h}^{\alpha\beta} &= \eta_{\beta\alpha} \square \left( h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h \right) \\ 0 &= \square (h - 2h) = \square h = 0, \end{aligned} \quad (2.242)$$

usando este resultado, temos que,

$$\square h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \square h = 0 \quad (2.243)$$

$$\square h^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.244)$$

e aqui, temos que a perturbação direta no tensor métrico devido ao campo  $h_{\alpha\beta}$ , satisfaz uma equação de onda, quando fixado o gauge de Lorentz. Agora, considerando que o campo  $h_{\mu\nu}$  satisfaz uma equação de onda, resta saber com que velocidade essa onda viaja, então o ansatz genérico seria dizer que a solução é do tipo,

$$\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (2.245)$$

onde  $k$  tem apenas componentes reais e  $A^{\mu\nu}$  pode possuir componentes complexas. substituindo de volta na equação de onda, temos que,

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} h^{\mu\nu} = 0, \quad (2.246)$$

$$= -k^\alpha k_\alpha h^{\mu\nu} = 0, \quad (2.247)$$

$$= k^\alpha k_\alpha = 0, \quad (2.248)$$

e desta equação de dispersão, temos que a velocidade de uma onda gravitacional é igual a velocidade da luz, devido a sua forma e ao gauge, temos que as polarizações obrigatoriamente tem que ser no eixo transversal a propagação. O resultado das polarizações estará conectado ao  $A^{\mu\nu}$ , que por si só estará também conectado ao  $h_{\mu\nu}$ , devido ao fato de existir a transformação entre  $\bar{h}^{\mu\nu}$  e  $h_{\mu\nu}$ , o fator da exponencial deve estar conectado apenas com a propagação das ondas.

## 2.16 Ondas gravitacionais

As ondas gravitacionais, detectadas diretamente em 14 de setembro de 2015 foram uma das maiores confirmações já feitas acerca da TRG de Einstein, além de revelar outro fator que era a colisão e fusão de um par de buracos negros.

Devido ao evento da colisão e fusão dos buracos negros, que estavam em uma galáxia a mais de um bilhão de anos-luz de distância da terra, houve a previsão de que a energia de pico liberada neste evento, sob a forma de ondas gravitacionais durante os últimos instantes da fusão dos buracos negros, deveria ser dez vezes maior que a luminosidade combinada de todas as galáxias do universo observável (dados advindos da [Ref.5]). Que marca uma nova forma de exploração do universo através das ondas gravitacionais.

Ondas gravitacionais são perturbações geradas no tecido do espaço-tempo devido ao movimento de corpos massivos através dele, um corpo massivo por exemplo uma estrela, ou planeta, ao girar em torno do seu próprio eixo e ao transladar pelo seu sistema, emite ondas gravitacionais, no primeiro caso é devido a torção que ela cria em um ponto do espaço, já o segundo caso é devido a translação. A existência desse fenômeno foi prevista por Einstein em 1916, quando ele mostrou que objetos acelerados distorcem o espaço-tempo, causando irradiação de ondas gravitacionais, semelhante ao caso eletromagnético, onde ao acelerar uma partícula carregada, será irradiada

uma onda de natureza eletromagnética, onde ambas viajam com velocidade igual a velocidade da luz no vácuo, carregando informações sobre suas fontes.

O LIGO é um conjunto de detectores localizados um em Livingston, Louisiana, e o outro em Hanfordm, Washington, o interferômetro funciona utilizando o mesmo princípio do Interferômetro de Michelson e Morley, só que voltado para as propriedades do espaço, que devido a passagem das ondas gravitacionais pelos braços, que neste caso possuem 4 km, para melhorar a detecção, com o estiramento e contração do espaço-tempo de maneira diferente nos dois braços, os lasers não continuarão em fase, gerando um padrão de interferência. O padrão é regido pela Amplitude de Onda gravitacional que é da ordem de um milésimo do diâmetro de um próton.

Os resultados obtidos acerca dos padrões de interferência corroboram com os valores estimados pela literatura, dentro da margem de erro, de tal maneira que apontam para a fusão de buracos negros, dado que antes de completo o estado de fusão oscila. Esses resultados implicam que já se está utilizando a detecção de ondas gravitacionais para vislumbrar o que está acontecendo no cosmos, de maneira que no futuro, as tecnologias desenvolvidas para a melhoria das detecções, podem acabar sendo aplicadas diretamente na sociedade.

## 2.17 Polarização de ondas gravitacionais

Como já foi visto, temos que as ondas gravitacionais tem uma direção fixada de polarização, dada a sua direção de propagação, como elas são ondas transversais e a Ansatz é a solução para a onda plana. Será fixado então, que elas tenham a direção de movimento no eixo x e conseqüentemente oscilando em y-z, teremos que o campo  $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(x, t)$  tal que ele sendo funções de x e t, ocorrerá que todas as derivadas do campo  $h_{\mu\nu}$ , em relação a y e z, serão nulas, assim reescrevendo o tensor de Riemann e obtendo as componentes não nulas, temos que,

$$R_{0202} = \frac{1}{2}h_{22,00}, R_{0203} = -\frac{1}{2}h_{23,00}, \quad (2.249)$$

$$R_{0212} = -\frac{1}{2}h_{22,01}, \quad (2.250)$$

$$R_{0213} = -\frac{1}{2}h_{23,01}, R_{1313} = -\frac{1}{2}h_{33,11}, \quad (2.251)$$

e os outros termos não nulos vem das propriedades de simetria do tensor de Riemann,

$$R_{0303} = -\frac{1}{2}h_{33,00}, R_{1313} = -\frac{1}{2}h_{33,01}, \quad (2.252)$$

$$R_{1212} = -\frac{1}{2}h_{22,11}, R_{1213} = -\frac{1}{2}h_{23,11}, \quad (2.253)$$

e considerando que a transformação de retorno é dada por,  $h^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\bar{h}$  e utilizando o gauge de Lorentz o temos que o tensor  $\bar{h}^{\mu\nu}$ , também é de traço nulo, logo  $\bar{h}$  é igual a zero, nos permitindo usar a seguinte identidade  $h^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu}$ , com isso, utilizando os resultados do tensor de Riemann

e de sua direção de oscilação, temos que ele só depende dos termos que tem  $h_{22}, h_{23}, h_{32}, h_{33}$ , adiantando que como o tensor métrico é simétrico e ele é escrito em função da matriz  $h$ , então o  $h$  é simétrico por construção, logo o tensor de Riemann, no fundo, é função apenas de  $h_{23}, h_{33}, h_{22}$ . Então é razoável que seja possível escrever a matriz  $h$ , da seguinte maneira,

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (2.254)$$

onde,

$$h_{\mu\nu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix}, h_{\mu\nu}^{(2)} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & 0 & 0 \\ h_{30} & h_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.255)$$

então, como as componentes não nulas do tensor de Riemann, estão presentes no  $\bar{h}_{\mu\nu}^{(1)}$ , e considerando que o tensor de Riemann é uma quantidade invariante, deve existir um sistema de coordenadas no qual o tensor  $\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}^{(1)}$ , se isso é possível, será procurada a condição para que seja verdade. Então, para uma onda se propagando no eixo  $x$  positivo, temos que a nossa matriz  $h^{\mu\nu}$ , seja da forma  $h = h(t - x)$ , isto devido ao fato de ela não depender de  $y$  e  $z$ , então, do gauge de Einstein ficará da forma,

$$\bar{h}_{\beta,\alpha}^{\alpha} = h_{\beta,\alpha}^{\alpha} - \frac{1}{2}h_{,\beta}, \quad (2.256)$$

$$h_{\beta,\alpha}^{\alpha} - \frac{1}{2}h_{,\beta} = 0, \quad (2.257)$$

esta proposição pode ser vista como tendo que a outra matriz nos índices dos seus termos possuem pelo menos 0 ou 1, então ela deve ser responsável pela propagação do campo.

$$\begin{aligned} h_{00,0} - h_{10,1} - \frac{1}{2}h_{,0} &= 0, \\ h_{01,0} - h_{11,1} - \frac{1}{2}h_{,1} &= 0, \\ h_{02,0} - h_{12,1} &= 0, \\ h_{03,0} - h_{13,1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.258)$$

então fazendo uma transformação nas derivadas, de tal modo que as derivadas em relação a  $x$  e a  $t$  estejam em na mesma derivada, temos que,

$$\frac{\partial}{\partial(t-x)} = \frac{\partial}{\partial(t-x)} \frac{\partial(t-x)}{\partial x^{\alpha}}, \quad (2.259)$$

onde as derivadas em relação a  $x$ , resultarão em,

$$= \frac{\partial}{\partial(t-x)} \frac{\partial(t-x)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial(t-x)}, \quad (2.260)$$

e em relação a  $t$  será,

$$\frac{\partial}{\partial(t-x)} \frac{\partial(t-x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial(t-x)}, \quad (2.261)$$

reescrevendo as equações advindas da condição de gauge, para que pudesse reduzir graus de liberdade nas soluções e integrando, teremos

$$\begin{aligned} h'_{00} + h'_{10} - \frac{1}{2}h' &= 0, \\ h'_{01} + h'_{11} + \frac{1}{2}h' &= 0, \\ h'_{02} + h'_{12} &= 0, \\ h'_{03} + h'_{13} &= 0, \end{aligned} \quad (2.262)$$

fazendo uma integração em relação a  $d(t-x)$ , teremos,

$$\begin{aligned} h_{00} + h_{10} - \frac{1}{2}h &= a(y, z), \\ h_{01} + h_{11} + \frac{1}{2}h &= b(y, z), \\ h_{02} + h_{12} &= c(y, z), \\ h_{03} + h_{13} &= d(y, z), \end{aligned} \quad (2.263)$$

agora, lembrando que em  $x=0$  e em  $x=\infty$ , temos que  $\bar{h}_{\alpha\beta} = 0$ , então essas funções tem que ser iguais a uma constante, que nesse caso é nula, para satisfazer as duas condições simultaneamente, então temos que,

$$\begin{aligned} h_{00} + h_{10} - \frac{1}{2}h &= 0, \\ h_{01} + h_{11} + \frac{1}{2}h &= 0, \\ h_{02} + h_{12} &= 0, \\ h_{03} + h_{13} &= 0, \end{aligned} \quad (2.264)$$

dado isto, temos que apenas resolver os sistemas para conectar os elementos da nossa matriz  $h$ , de tal forma que obtemos.

$$h_{02} = -h_{12}, \quad (2.265)$$

$$h_{03} = -h_{13}, \quad (2.266)$$

$$h_{01} = -\frac{1}{2}(h_{00} + h_{11}), \quad (2.267)$$

e considerando que  $h = \eta_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} = h_{00} - (h_{11} + h_{22} + h_{33})$ , obtemos que  $h_{22} = -h_{33}$ , então a nova matriz  $h_{\mu\nu}$  fica,

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{00} & -\frac{1}{2}(h_{00} + h_{11}) & h_{02} & h_{03} \\ -\frac{1}{2}(h_{00} + h_{11}) & h_{11} & -h_{02} & -h_{03} \\ h_{20} & -h_{02} & h_{22} & h_{23} \\ h_{03} & -h_{03} & h_{23} & -h_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.268)$$

como vimos que devido a fixação de calibre a matriz  $h_{\mu\nu}^{(1)}$ , só dependem dos termos  $h_{22}$  e  $h_{23}$ , como foi proposto, será procurado o referencial em que  $h_{\mu\nu}$  seja  $h_{\mu\nu}^{(1)}$ , então fazendo uma transformação de sistema de coordenadas da forma na qual,

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}, \quad (2.269)$$

com  $\square\xi_\alpha = 0$ , dado o gauge de Einstein, como já foi mostrado, será escolhido um  $\xi_\alpha$  em que  $h_{00} = h_{02} = h_{03} = h_{11} = 0$ , logo da própria transformação de coordenadas proposta, temos que,

$$h'_{00} = h_{00} - 2\xi_{0,0} = 0, \quad (2.270)$$

$$h'_{02} = h_{02} - 2\xi_{0,2} = 0, \quad (2.271)$$

$$h'_{03} = h_{03} - 2\xi_{0,3} = 0, \quad (2.272)$$

$$h'_{11} = h_{11} - 2\xi_{1,1} = 0, \quad (2.273)$$

então da mudança nas derivadas e que  $\xi_\alpha = \xi_\alpha(t-x) = (f_\alpha(t-x))$ , e fazendo com que  $u = t-x$  temos que,

$$h_{11} = -2\frac{df_1}{du}, \quad (2.274)$$

$$h_{00} = 2\frac{df_0}{du}, \quad (2.275)$$

$$h_{02} = 2\frac{df_2}{du}, \quad (2.276)$$

$$h_{03} = 2\frac{df_3}{du}, \quad (2.277)$$

então satisfeita a condição, que pode ser vista como uma condição bem razoável, devido a generalidade das funções  $f_\alpha$  então podemos trabalhar apenas com a matriz  $h^{(1)}(t-x)$ .

$$h_{\mu\nu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{23} & -h_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.278)$$

se zerarmos o termo  $h_{23}$ , teremos a matriz,

$$h_{\mu\nu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.279)$$

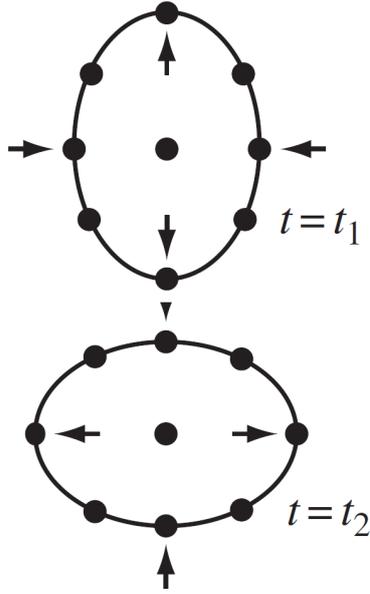


Figura 2: Polarização +

e ao calcular o elemento de distancia infinitesimal obtemos,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.280)$$

$$= dt^2 - dx^2 - [1 - h_{22}(t - x)] dy^2 - [1 + h_{22}(t - x)] dz^2, \quad (2.281)$$

então, observando apenas o eixo  $yz$ , veremos que a variação de comprimento no eixo  $y$ , pode ser dada por,

$$ds^2 = [1 - h_{22}(t - x)] dy^2 \quad (2.282)$$

para  $h = 0$ ,  $h < 0$  e  $h > 0$  temos que a distancia diretamente do elemento varia, para cada  $x$  e para cada  $t$ , assim como no eixo- $z$ , que,

$$ds^2 = [1 + h_{22}(t - x)] dz^2, \quad (2.283)$$

ocorrerá o mesmo processo, de tal maneira que em cada ponto no espaço, devido as perturbações geradas por  $h$ , os elementos de distancia em  $y$  e  $z$ , variam da seguinte maneira, E estas foram as polarizações do tipo mais Figura 2. Agora serão tratadas as polarizações do tipo cruzada que na matriz  $h_{\mu\nu}$ , será feito o elemento  $h_{22} = 0$  em que ao escrever o elemento de distância, percebe-se ao fazer uma mudança de sistema de coordenadas em que  $y$  será mudado para o  $\bar{y}$  barra e o  $z$  para um  $\bar{z}$  para obtenção da equação característica do elemento distância semelhante ao do sistema

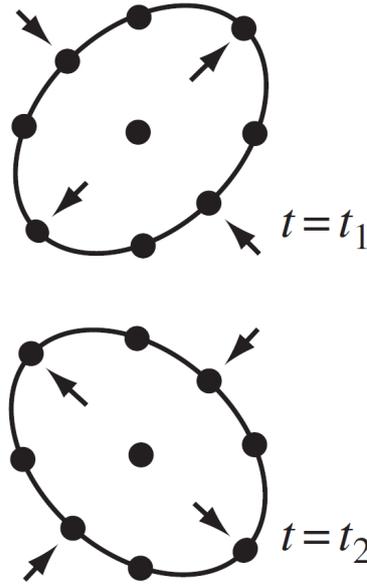


Figura 3: Polarização  $x$

anterior.

$$h_{\mu\nu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.284)$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.285)$$

$$= dt^2 - dx^2 - h_{23}(t-x)dydz - dy^2 - dz^2, \quad (2.286)$$

que ao fazermos a transformação da forma,

$$\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z), \quad (2.287)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y+z), \quad (2.288)$$

e o elemento de distancia se tornará,

$$dt^2 - dx^2 - [1 - h_{23}(t-x)]d\bar{y}^2 - [1 + h_{22}(t-x)]d\bar{z}^2, \quad (2.289)$$

que é a mesma equação, só que rotacionada 45 graus vide Figura 3, devido ao fator  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , na mudança de coordenadas, ou seja o que foi feito, foi apenas uma rotação, esta equação também representa uma polarização  $+$ , só que nos novos eixos. a idéia é que assim como no eletromagnetismo o que faz a luz se polarizar é ela atravessar um campo, que possua uma geometria de tal forma que a

luz seja polarizada, na relatividade geral, este mesmo campo, pode ser gerado por uma nuvem de gás e poeira cósmica, com altas concentrações de matéria.

### 3 Conclusão

Vimos que através do estudo de tensores e da ação de Einstein-Hilbert, obtivemos os resultados que são de forte impacto, devido ao fato de que em 2015 e depois em 2020 foram obtidas duas detecções, uma de ondas gravitacionais e a outra foi a foto do buraco negro. Os resultados se sucederam da seguinte maneira. Antes de tudo, foi feita uma breve apresentação de resultados advindos do cálculo tensorial, A obtenção da equação de movimento que rege a relatividade geral, ou equação de campo de Einstein, através da variação da ação de Einstein-Hilbert, depois usamos os conceitos de simetria esférica e corpo estático, para calcular a solução de Schwarzschild, estudamos seu horizonte de eventos e a não possibilidade de retorno, uma vez dentro do do BH, obtivemos suas geodésicas e vimos que conforme um corpo se aproxima do horizonte de eventos, o tempo para ele começa a se dilatar, tendendo ao infinito. Com a solução de Schwarzschild em mãos, pudemos dar um passo adiante construindo agora o buraco negro de Reissner-Nodstom que seria a adição de carga ao buraco negro base, com isso, analisamos os possíveis casos de singularidades e seus significados além de percebermos que com adição da variável carga o buraco negro de RN possui dois horizontes de eventos, além de que a singularidade essencial, pode ser evitada, uma vez dentro do horizonte, diferente do BH de Schwarzschild que dentro do horizonte a singularidade intrínseca não pode ser evitada. Logo depois, mostramos como são feitas as conexões entre buracos negros e ondas gravitacionais através de como os tensores métricos se comportam em distâncias cósmicas. Tendo a associação feita, fomos capazes de linearizar as equações de campo de Einstein e obter as relações de ondas gravitacionais, para isso, foi utilizado um gauge que é característica de teorias lineares ou seja, apesar da teoria não ser linear, quando linearizada é possível fixar um gauge que ajude a reduzir seus graus de liberdade. Com as equações de ondas gravitacionais, fazendo análise de seus parâmetros, como no eletromagnetismo, conseguimos dizer como essas ondas se polarizam ao passar por um potencial gravitacional. As perspectivas serão de utilizar esses conhecimentos obtidos para tentar atacar buracos negros mais que possuem uma semelhança maior com os que foram detectados e também explorar acerca de como violações de Lorentz poderiam modificar essas estruturas.

## Referências

- [1] CARROL, S. M. **An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry**. New York: Addison Wesley, 2004.
- [2] REVISTA BRASILEIRA DE ENSINO DE FÍSICA, vol. 42, e20200216 (2020). **Buraco negro e sua sombra**. Disponível em: [www.scielo.br/rbef](http://www.scielo.br/rbef) DOI: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0216>.
- [3] SCHUTZ, B. **A first course in general relativity**. New York: Cambridge University Press, 2009.
- [4] M. P. HOBSON, G. P. EFSTATHIOU and A. N. LANSEBY **General Relativity**. An Introduction for Physicists Cambridge University: New York: Cambridge University Press, 2006
- [5] LIGO CALTECH. **LIGO - A Gravitational-Wave Interferometer**. Disponível em: <https://bit.ly/2PIwVs9> Acesso em: 27 de agosto de 2018

