



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
BACHARELADO INTERDISCIPLINAR DE CIÊNCIA E
TECNOLOGIA

RAMON DA CONCEIÇÃO ALENCAR

**DIAGRAMA DE CARTER-PENROSE: UMA
ABORDAGEM CONFORME DE INFINITOS**

Balsas

2022

RAMON DA CONCEIÇÃO ALENCAR

DIAGRAMA DE CARTER-PENROSE: UMA ABORDAGEM CONFORME DE INFINITOS

Trabalho de conclusão de curso, monográfico, apresentado à Universidade Federal do Maranhão (UFMA), como pré-requisito para a obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Madson R. O. Silva

Balsas

2022

RAMON DA CONCEIÇÃO ALENCAR

DIAGRAMA DE CARTER-PENROSE: UMA ABORDAGEM CONFORME DE INFINITOS

Trabalho de conclusão de curso, monográfico, apresentado à Universidade Federal do Maranhão (UFMA), como pré-requisito para a obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

TCIC. Balsas, 25 de julho de 2022:

Prof. Dr. Madson R. O. Silva
Orientador
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Alyson Bruno Fonseca Neves
Examinador Interno
Universidade Federal do Maranhão

**Prof. Dr. Raibel Arias de Jesus
Cantillo**
Examinador Interno
Universidade Federal do Maranhão

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

da Conceição Alencar, Ramon.

DIAGRAMA DE CARTER-PENROSE: UMA ABORDAGEM CONFORME DE
INFINITOS / Ramon da Conceição Alencar. - 2022.

63 p.

Orientador(a): Madson Rubem Oliveira Silva.

Monografia (Graduação) - Curso de Ciência e Tecnologia,
Universidade Federal do Maranhão, Balsas-MA, 2022.

1. Diagrama. 2. Infinito. 3. Penrose. I. Rubem
Oliveira Silva, Madson. II. Título.

*Dedico este trabalho à minha imprescindível família
(pai, mãe e irmã) e ao futuro da ciência.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me conceder a honrosa oportunidade de viver para desfrutar dos resultados deste trabalho.

À minha família, José de Ribamar Barros de Alencar (pai), Cicera Vieira da Conceição (mãe) e Raquel da Conceição Alencar (irmã), que foi meu grande incentivo durante esta jornada, meu braço forte em todos os momentos e principal motivação do meu empenho para chegar onde cheguei e continuar avançando em busca do melhor.

E ao meu orientador, Dr. Madson Rubem Oliveira Silva, que investiu tempo e dedicação para a conclusão deste trabalho, me auxiliando com materiais, reuniões e me proporcionando clareza quanto ao tema abordado.

"A diferença entre passado, presente e futuro é apenas uma persistente ilusão..."

(Carta de Albert Einstein à família de Michele Besso)

Resumo

A história da busca pela unificação das leis que regem o universo, desde a interação entre as menores partículas até eventos provocados por objetos supermassivos, inspira uma grande massa de cientistas a encontrar uma "teoria de tudo" até os dias atuais.

Depois da formulação da Relatividade Geral proposta pelo físico teórico Albert Einstein (1915), esta procura à unificação dos fenômenos naturais tornou-se cada vez mais notória no meio físico. Outros trabalhos importantes derivados desta inspiração incessante de unir as leis do universo, surgiram pouco tempo depois da TRG. Podemos destacar a Dualidade Onda-Partícula (1924), o Princípio da Incerteza de Heisenberg (1927) e a Mecânica Quântica (1928). Unir o mundo quântico e seus princípios à TRG, têm sido o maior desafio da física em geral.

Neste trabalho, apresentamos equações desenvolvidas a partir da equação de campo de Einstein para a Relatividade Geral. Equações estas, que potencializam a existência de objetos com intensidades gravitacionais extraordinárias, podendo até mesmo desviar o curso da luz, e compactam o espaço-tempo infinito em um modelo finito constituído nos diagramas convencionados pelos físicos Brandon Carter e Roger Penrose.

Compartilhamos de uma trajetória fascinante em busca da eliminação da singularidade removível na métrica de Schwarzschild, por Eddington-Finkelstein e Kruskal-Szekeres, e a representação do espaço-tempo de Minkowski e solução de Kruskal, em diagramas compactados.

Palavras-chave: Diagrama. Infinito. Penrose.

Abstract

The history of the search for the unification of the laws governing the universe, from the interaction between the smallest particles to events caused by supermassive objects, inspires a great mass of scientists to find a "theory of everything" to this day.

After the formulation of General Relativity proposed by the theoretical physicist Albert Einstein (1915), this search for the unification of natural phenomena became more and more notorious in the physical environment. Other important works derived from this incessant inspiration to unite the laws of the universe appeared shortly after TRG. We can highlight Wave-Particle Duality (1924), Heisenberg Uncertainty Principle (1927) and Quantum Mechanics (1928). Uniting the quantum world and its principles to TRG has been the greatest challenge of physics in general.

In this paper, we present equations developed from Einstein's field equation for General Relativity. These equations allow the existence of objects with extraordinary gravitational intensities, which can even totally deflect the course of light, and compact the infinite space-time into a finite model constituted in the diagrams agreed upon by physicists Brandon Carter and Roger Penrose.

We share a fascinating journey towards the elimination of the singularity in the Schwarzschild metric by Eddington-Finkelstein and Kruskal-Szekeres, and the representation of the Minkowski space-time and Kruskal solution in compactified diagrams.

Keywords: Diagram. Penrose. Infinite.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Retrato de Isaac Newton por Sir Godfrey Kneller(1689). Imagem de domínio público.	11
Figura 2 – Albert Einstein durante uma aula em Vienna em 1921. Imagem de domínio público.	11
Figura 3 – Karl Schwarzschild. Figura retirada de (SAA, 2016).	12
Figura 4 – Singularidade real e removível. Figura retirada de (D’INVERNO, 1992).	13
Figura 5 – Representação artística do horizonte de evento e raio de Schwarzschild.	14
Figura 6 – Na figura (a) temos a direita Reissner e na figura (b) o Nordstrom	14
Figura 7 – Roy Kerr(2016). Imagem de domínio de Bengt Nyman.	15
Figura 8 – Primeira imagem obtida de um buraco negro. Créditos: Event Horizon Telescope, disponível em: < https://eventhorizontelescope.org/ >.	16
Figura 9 – Diagrama de Carter-Penrose para solução de Schwarzschild. Figura retirada de (COIMBRA-ARAÚJO, 2016)	17
Figura 10 – Curvas Incoming e Outgoing dos raios de luz	27
Figura 11 – Região I acessível. Região II acessível Figura retirada de (D’INVERNO, 1992).	30
Figura 12 – Diagrama de Kruskal	35
Figura 13 – Gráfico da tangente.	38
Figura 14 – Diagrama compactado	39
Figura 15 – Diagrama de Penrose para U e V, considerando os intervalos de u e v.	42
Figura 16 – Diagrama de Penrose para a solução de Kruskal.	42

Sumário

	Introdução	11
1	SOLUÇÃO DE SCHWARZCHILD PARA A EQUAÇÃO DE CAMPO DE EINSTEIN	18
1.1	Introdução	18
1.1.1	Símbolos de Christoffel	19
1.1.2	Tensor de Ricci	19
1.1.3	Escalar de Ricci	20
1.1.4	Tensor de Einstein	20
1.1.5	Tensor de energia-momento	21
1.2	Solução de Schwarzschild	21
2	COORDENADAS EDDINGTON-FINKELSTEIN	25
3	COORDENADAS DE KRUSKAL-SZEKERES	32
4	DIAGRAMAS DE CARTER-PENROSE	37
5	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	43
A	SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL	44
B	TENSOR DE RICCI	54
C	ESCALAR DE RICCI	57
D	TENSOR DE EINSTEIN	58
E	TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO	61
	REFERÊNCIAS	63

Introdução

Isaac Newton, veja a Figura 1, em 1666, formulou as leis da mecânica e as publicou no seu livro intitulado de "Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural" em 1687. Contudo, em 1905 Einstein, veja a Figura 2, propôs modificações profundas na construção

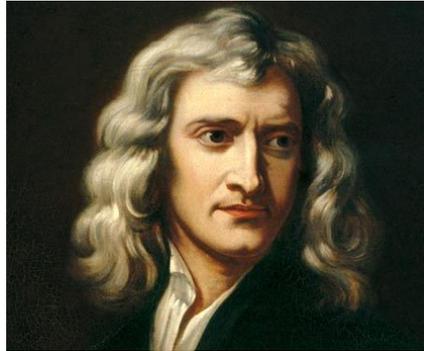


Figura 1 – Retrato de Isaac Newton por Sir Godfrey Kneller (1689). Imagem de domínio público.

da mecânica newtoniana em seu artigo intitulado "Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em

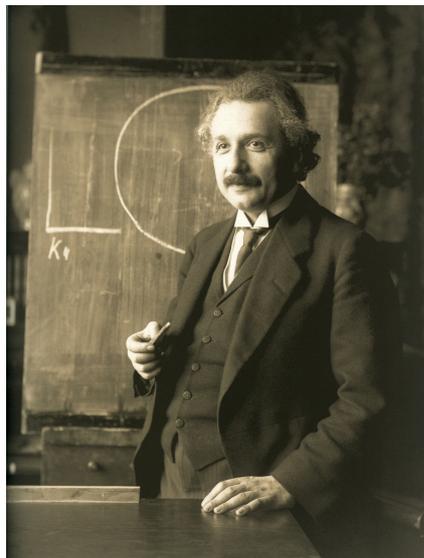


Figura 2 – Albert Einstein durante uma aula em Viena em 1921. Imagem de domínio público.

Movimento" de 1905 que corresponde a teoria da relatividade restrita, abreviamos como TRR, publicada na revista *Annalen der Physik*¹.

Modificações mais drásticas surgem em 1915 com a criação da teoria da relatividade geral, que abreviaremos como TRG daqui pra frente, representada pelas equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

¹ Revista alemã sobre física

que relacionam matéria e gravidade. Em outras palavras, as equações de Einstein nos permitem compreender como a matéria, lado direito da eq.(1), produz gravidade, lado esquerdo da eq.(1), e vice-versa. Uma brilhante solução da eq.(1) surge com o alemão judaico Karl Schwarzschild. Schwarzschild, veja a Figura 3, nasceu em Frankfurt na Alemanha em 9 de outubro de 1873. Seus primeiros trabalhos foram publicados antes



Figura 3 – Karl Schwarzschild. Figura retirada de (SAA, 2016).

dos 17 anos idade (SAA, 2016). Para consultar o primeiro e o segundo trabalho de Schwarzschild, respectivamente, vejam as referências (SCHWARZSCHILD, 1890a) e (SCHWARZSCHILD, 1890b). Para maiores detalhes e uma versão mais moderna destes dois trabalhos de Schwarzschild, consultar a referência (VOIGT, 1992). Karl estudou astronomia na universidade de Estrasburgo de 1891 a 1893. Obteve seu doutorado em 1896 na universidade de Munique sendo orientado por Hugo von Seeliger. Em 1898 publica sua tese de doutorado intitulada "Teoria de Poincaré do equilíbrio de uma massa líquida homogênea em rotação" (SCHWARZSCHILD, 1992) na revista *Neue Annalen der Koeniglichen Sternwarte in Bogenhausen bei Muenchen*. Além de dedicar-se a astronomia, matemática e física teórica, Schwarzschild, participou da primeira guerra mundial na artilharia do exército alemão (SAA, 2016). Período que contraiu pênfigo² vindo a falecer em 1916. Schwarzschild considerou o universo dotado de vácuo, que representamos pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ nulo. O que equivale a um universo estático com simetria esférica e sem matéria(vácuo). Como solução, obtém, em 1916, que

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2)$$

onde $r_S = \frac{2GM}{c^2}$ é o raio de Schwarzschild. Denominamos a eq.(2) de métrica ou elemento de linha.

² O pênfigo é uma doença relativamente rara caracterizado pela formação de bolhas na pele e, às vezes, também nas mucosas (como boca, garganta, olhos, nariz e região genital de homens e mulheres).

Note que se considerarmos $r \rightarrow r_S$ no segundo termo na eq.(2), teremos que

$$\frac{1}{1 - \frac{r_S}{r}} \rightarrow \infty, \quad (3)$$

logo, obtemos uma singularidade. Em $r = 0$ dizemos que temos uma singularidade real e em $r = r_S$ falamos que temos uma singularidade removível (D'INVERNO, 1992).

Uma representação da singularidade real e da singularidade removível(raio de Schwarzschild) encontra-se na Figura 4.

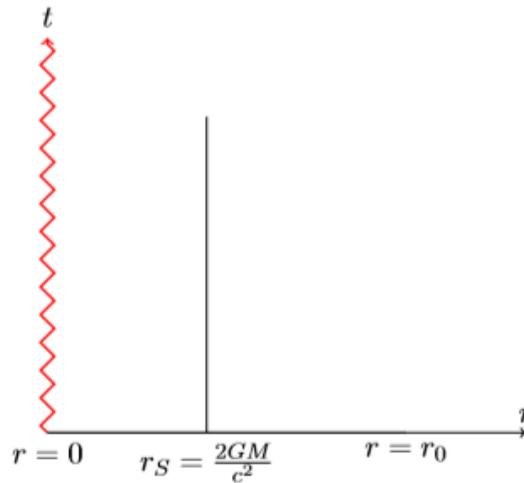


Figura 4 – Singularidade real e removível. Figura retirada de (D'INVERNO, 1992).

Para compreendermos o papel dessa singularidade, calcularemos o r_S para estrela solar cuja a massa é $M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30}$ kg. Logo

$$r_S = \frac{2 \times 6,674 \times 10^{-11} \times 1,989 \times 10^{30}}{(3 \times 10^8)^2} \approx 2,94 \text{ km}. \quad (4)$$

Como sabemos, o raio do Sol é $r_{\odot} = 696.340$ km o que nos mostra que o $r_S = 2,94$ km está no interior do Sol. Mas, se considerarmos o processo da evolução estelar, ou seja, os eventos decorrentes entre o início de vida de uma estrela e sua morte, o Sol concentrará toda sua massa dentro de r_S e sua gravidade correspondente a 274 ms^{-2} será aumentada para

$$g = \frac{GM}{r_S} = \frac{6,674 \times 10^{-11} \times 1,989 \times 10^{30}}{2,94 \times 10^3} \approx 4,51 \times 10^{15} \text{ ms}^{-2}, \quad (5)$$

o que implica que a gravidade desse novo objeto, ou seja $4,51 \times 10^{15} \text{ ms}^{-2}$, é tão intensa que nem a luz escapa do mesmo. Na extremidade de r_S , temos o que denominamos de horizonte de eventos. Uma representação do raio de Schwarzschild (também chamado de singularidade removível), singularidade real e horizonte de evento encontram-se na Figura 4.

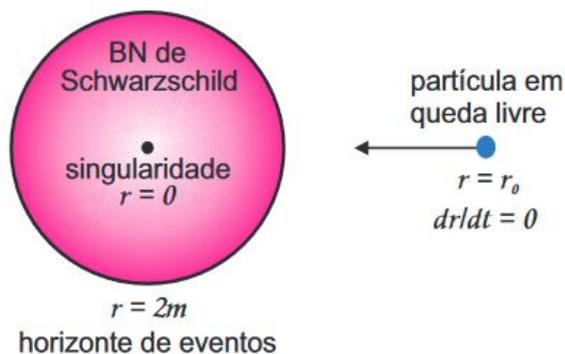


Figura 5 – Representação artística do horizonte de evento e raio de Schwarzschild.

Uma vez cruzando esse horizonte, veja a Figura³ 5, cairemos numa espécie de objeto astronômico que John Wheeler em 1968, nomeou de buraco negro. E não poderemos mais sair.

Uma segunda solução para as equações de Einstein, surgiu em 1921⁴ com o engenheiro civil e físico teórico alemão Hans Jacob Reissner (Figura 6 (a)) e com o físico irlandês Gunnar Nordstrom (Figura 6 (b)).



(a) Hans Jacob e Josefine Reissner(1908). Imagem de domínio público.



(b) Gunnar Nordstrom(1916). Imagem de domínio de Eva Isaksson homepage.

Figura 6 – Na figura (a) temos a direita Reissner e na figura (b) o Nordstrom

Reissner em 1916 e Nordstrom em 1918, este último de maneira independente, propõem um tipo de buraco negro com simetria esférica e carregado.

Para este buraco negro o tensor energia-momento corresponde a

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\sigma} F_{\nu}^{\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right). \quad (6)$$

³ Event horizon traduz-se para horizonte de eventos; Schwarzschild radius se traduz para raio de Schwarzschild; Singularity se traduz para singularidade.

⁴ Esta solução foi encontrada entre 1916 e 1921.

Reissner-Nordstrom obtiveram o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{Q^2}{4\pi r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{Q^2}{4\pi r^2} \right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (7)$$

o que nos levará a singularidade

$$r = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - \frac{Q^2}{4\pi}}. \quad (8)$$

A terceira solução para equações de Einstein advém do matemático neozelandês de Kurow, Roy Patrik Kerr (Figura 7).



Figura 7 – Roy Kerr(2016). Imagem de domínio de Bengt Nyman.

Kerr propôs um buraco negro com simetria esférica, carregado e dotado de rotação. Para este tipo de buraco negro, Kerr obteve a seguinte a métrica ou elemento de linha

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GMrs}{c^2\Sigma} \right) c^2 dt^2 - \frac{4aGMr \sin^2 \theta}{c^2\Sigma} c dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + r^2 \left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2aMr \sin^2 \theta}{c^2\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (9)$$

onde

$$\Sigma = r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta, \quad (10)$$

e

$$\Delta = r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}.$$

Kerr pelos seus trabalhos em matemática e física teórica foi agraciado com os seguintes prêmios listados abaixo.

- 1) 1982: Hector Medal;
- 2) 1984: Hughes Medal;

- 3) 1983: Rutherford Medal;
- 4) 2006: Prêmio Marcel Grossmann;
- 5) 2011: Prêmio Companheiro da Ordem de Mérito da Nova Zelândia pelos serviços prestados à astrofísica;
- 6) 2013: Medalha Albert Einstein Medal;
- 7) 2016 Prêmio Crafoord;
- 8) 2016 Prêmio distinto professor de Canterbury.

Estudos sobre os fascinantes buracos negros (Schwarzschild, Reissner-Nordstrom e Kerr) iniciaram-se antes da primeira guerra mundial. E, durante a segunda guerra mundial, não houve um desenvolvimento nessa área. As pesquisas foram retomadas após a segunda guerra, iniciando com Hawking e colaboradores. Desde então, apenas recentemente, em 2019, com o trabalho exercido pela ciência e tecnologia e a motivação de constatar a veracidade das equações de Einstein para a Relatividade Geral, obtivemos uma imagem de um buraco negro pela primeira vez, veja a Figura 8.

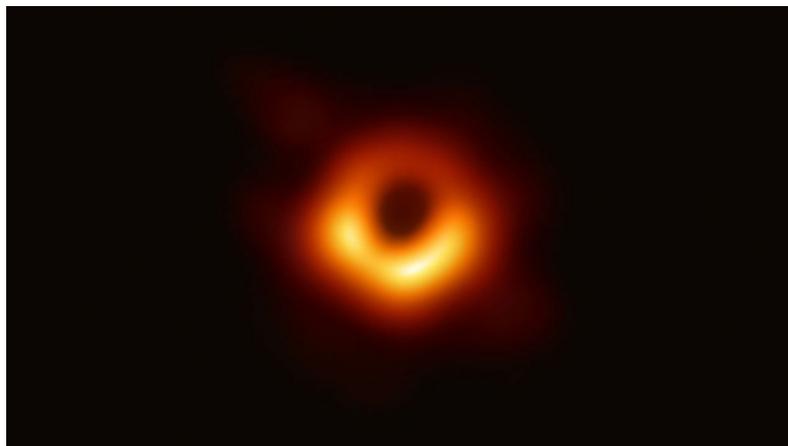


Figura 8 – Primeira imagem obtida de um buraco negro. Créditos: Event Horizon Telescope, disponível em: <<https://eventhorizontelescope.org/>>.

O objetivo geral deste trabalho, é representar pontos localizados no infinito de um espaço-tempo numa região finita, através de uma transformação ou reescalonamento da métrica deste espaço-tempo. Os objetivos específicos, são a exploração do espaço-tempo de Minkowski, o estudo da física de buraco negro de Schwarzschild como revisão de literatura, a compreensão das coordenadas de Eddington-Finkelstein e Kruskal-Szekeres e a representação de objetos astronômicos supermassivos (buraco negro, buraco branco e ponte de Einstein-Rose ou buraco de minhoca) nos diagramas de Penrose.

Como justificativa, temos que as soluções de Schwarzschild, Reissner-Nordstrom e Kerr para equação de Einstein, nos levaram a uma singularidade particular, ou seja,

a um horizonte de eventos. E com objetivo de representar de modo finito tais singularidades, Brandon Carter e Roger Penrose formularam diagramas para representar estas singularidades. Tais diagramas são chamados de diagramas de Carter-Penrose, por exemplo veja a Figura 9.

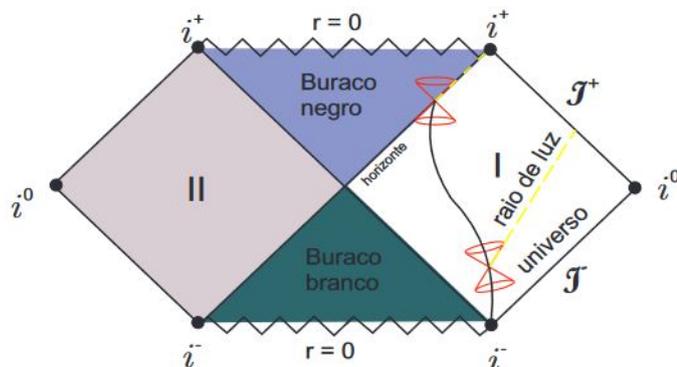


Figura 9 – Diagrama de Carter-Penrose para solução de Schwarzschild. Figura retirada de (COIMBRA-ARAÚJO, 2016)

Usamos estes diagramas para mostrar como podemos viajar por universos paralelos usando ponte de Bose-Einstein.

Este trabalho de conclusão de curso(TCC), na modalidade monografia, justifica-se porque desejamos estudar e compreender os diagramas de Carter-Penrose para os casos de buraco negro de Schwarzschild. Além disso, realizamos diversas passagens algébricas desenvolvendo cálculos diferenciais e integrais, introduzimos coordenadas propostas por Eddington-Finkelstein e Kruskal-Szekeres à solução de Schwarzschild para a equação de campo de Einstein, e mostramos como ocorrem as viagens pelos universos paralelos e multiversos através dos diagramas.

Também temos o objetivo de construir e contribuir com um material de estudo em português sobre os diagramas de Penrose, uma vez que não há muitos trabalhos desses tópicos em nossa língua nativa.

1 Solução de Schwarzschild para a equação de campo de Einstein

1.1 Introdução

A solução de Schwarzschild para a equação de campo de Einstein, descreve uma massa esférica, simétrica e estática, ou seja, de momento angular nulo (FROLOV; ZELNIKOV, 2011).

Esta solução é desenvolvida a partir da apresentação da equação de Einstein e seus elementos tensoriais e escalares, descritos abaixo.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{c^2}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

$G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci, R o escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ a métrica e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento.

Com estas informações, daremos início desenvolvimento da solução de Schwarzschild incluindo também outros parâmetros indispensáveis, a saber, o elemento de linha e os símbolos de Christoffel.

O elemento de linha no espaço-tempo é definido como

$$ds^2 = -e^{2F(r,t)}dt^2 + e^{2H(r,t)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (1.2)$$

em que a representação matricial é dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2F(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2H(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

cuja inversa é

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2F(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2H(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Como o objeto de estudo em questão é estático, ou seja, invariante no tempo, as funções $F(r, t)$ e $H(r, t)$, tornam-se $F(r)$ e $H(r)$. Para simplificação de escrita, vamos utilizar apenas F e H . Porém, quando necessário, para fins pedagógicos, escreveremos $F(r)$ e $H(r)$

Para determinarmos as funções F e H , calcularemos as conexões afins citadas acima, que é nossa próxima tarefa.

1.1.1 Símbolos de Christoffel

Calculamos os Christoffel usando

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}). \quad (1.5)$$

Como estamos fazendo os cálculos para um objeto de formato esférico, adotaremos as coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) .

Após realizarmos os cálculos, teremos os seguintes resultados

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= F'(r) & \Gamma_{tt}^r &= F'(r)e^{2F(r)-2H(r)} & \Gamma_{rr}^r &= H'(r) \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-2H(r)} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r\sin^2\theta e^{-2H(r)} & \Gamma_{r\theta}^{\theta} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin\theta\cos\theta & \Gamma_{r\phi}^{\phi} &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \cot\theta \end{aligned}, \quad (1.6)$$

e os demais Christoffel são nulos.

Este procedimento não representa o objetivo maior desse trabalho de conclusão de curso. Portanto, todos detalhes do procedimento algébrico encontram-se no apêndice [A](#). De agora em diante, todas as vezes que for necessário realizar uma álgebra fora do escopo principal do trabalho, iremos solicitar que o leitor consulte o respectivo apêndice.

Com a finalização dos símbolos de Christoffel, desenvolveremos o tensor de Ricci.

1.1.2 Tensor de Ricci

Por definição, o tensor de Ricci é dado por

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma}. \quad (1.7)$$

Após realizarmos algumas álgebras, utilizando os símbolos de Christoffel anteriormente calculados, temos que os tensores de Ricci são representados pelos seguintes resultados

$$R_{tt} = e^{2(F-H)} \left(F'' + (F')^2 - H'F' + \frac{2}{r}F' \right) \quad (1.8)$$

$$R_{rr} = -F'' + F'H' + \frac{2}{r}H' - (F')^2 \quad (1.9)$$

$$R_{\theta\theta} = re^{-2H} \left(-\frac{1}{r} + 2H' - F' - H' \right) + 1 \quad (1.10)$$

$$R_{\phi\phi} = [1 - e^{-2H}(1 + rF' - rH')] \sin^2 \theta \quad (1.11)$$

onde qualquer variação que fuja de $\mu = \nu$, é zero.

Para maiores detalhes do procedimento algébrico, consultar o apêndice B.

Com a finalização dos cálculos dos tensores de Ricci, determinaremos o escalar de Ricci.

1.1.3 Escalar de Ricci

O escalar de Ricci é definido como

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \quad (1.12)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e $g^{\mu\nu}$ o inverso da métrica.

Se expandirmos o escalar de Ricci, eq.(1.12), teremos

$$R = R_{tt}g^{tt} + R_{rr}g^{rr} + R_{\theta\theta}g^{\theta\theta} + R_{\phi\phi}g^{\phi\phi}, \quad (1.13)$$

em que a expressão correspondente é constituída apenas pelas variações da diagonal principal, sendo os demais elementos nulos (D'INVERNO, 1992).

Em resposta as fatorações realizadas, obteremos

$$R = -2e^{-2H} \left[F'' + \left(F' + \frac{2}{r} \right) (F' - H') + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2H}) \right]. \quad (1.14)$$

Para maiores detalhes do procedimento algébrico, consultar o apêndice C.

De posse do tensor Ricci, a métrica e do escalar de Ricci poderemos obter os tensores de Einstein.

1.1.4 Tensor de Einstein

O tensor de Einstein é definido pela eq.(1.1), ou seja,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (1.15)$$

Substituindo as eqs.(1.8), (1.9), (1.10), (1.11), (1.14) e (1.3) na eq.(1.1) ou (1.15), obteremos os seguintes elementos do tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2}e^{2(F-H)}(1-2rH'-e^{2H}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2}(1+2rF'-e^{2H}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2e^{-2H}[F''+(F'+\frac{1}{r})(F'-H')] \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{\theta\theta} \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Para maiores detalhes do procedimento algébrico, consultar o apêndice D.

1.1.5 Tensor de energia-momento

Para um fluido perfeito, o tensor de energia-momento é definido pela seguinte equação

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

onde p é a pressão, $\rho(r)$ é a densidade com origem em $r = 0$ e u_μ e u_ν são as velocidades da esfera de raio R (RYDER, 2009).

Como o objeto é estático, as velocidades u_μ e u_ν são diferentes de zero apenas para a dimensão temporal. Com isso, para as variações de μ e ν , os tensores são

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho e^{2F(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pe^{2H(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pr^2 \sin^2 \theta. \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Os elementos fora da diagonal principal são iguais a zero.

Na próxima seção desenvolveremos cálculos relacionando os tensores de Einstein e energia-momento, que nos levarão às funções H e F e por fim à métrica de Schwarzschild.

1.2 Solução de Schwarzschild

Substituindo a eq.(1.16) e (1.18) na eq.(1.1), logo

$$\begin{pmatrix} G_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{\phi\phi} \end{pmatrix} = 8\pi \begin{pmatrix} \rho e^{2F} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pe^{2H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pr^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

onde atribuímos $c = 1$.

Comparando a primeira linha da eq.(1.19), teremos

$$G_{tt} = -\frac{1}{r^2}e^{2F}e^{-2H}(1 - 2rH' - e^{2H}) = 8\pi\rho e^{2F}, \quad (1.20)$$

simplificando, obtemos

$$G_{tt} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2H})] = 8\pi\rho \quad (1.21)$$

$$G_{tt} = \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2H})] = 8\pi\rho r^2. \quad (1.22)$$

Para a segunda linha, vem

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2}(1 + 2rF' - e^{2H}) = 8\pi pe^{2H}, \quad (1.23)$$

ou ainda,

$$G_{rr} = 1 + 2rF' - e^{2H} = 8\pi pr^2 e^{2H}, \quad (1.24)$$

A terceira linha

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2H} \left(\frac{F'}{r} - \frac{H'}{r} + F'' + (F')^2 - H'F' \right) = 8\pi pr^2, \quad (1.25)$$

simplificando,

$$G_{\theta\theta} = e^{-2H} \left(\frac{F'}{r} - \frac{H'}{r} + F'' + (F')^2 - H'F' \right) = 8\pi p. \quad (1.26)$$

E, por último, a quarta linha

$$G_{\phi\phi} = G_{\theta\theta} \sin^2 \theta = 8\pi pr^2 \sin^2 \theta. \quad (1.27)$$

que fatorando, obtemos

$$G_{\theta\theta} = 8\pi pr^2. \quad (1.28)$$

Ou, substituindo a eq.(1.25) na eq.(1.28),

$$r^2 e^{-2H} \left(\frac{F'}{r} - \frac{H'}{r} + F'' + (F')^2 - H'F' \right) = 8\pi pr^2, \quad (1.29)$$

onde, simplificando, o resultado torna-se a eq.(1.26)

$$G_{\theta\theta} = e^{-2H} \left(\frac{F'}{r} - \frac{H'}{r} + F'' + (F')^2 - H'F' \right) = 8\pi p. \quad (1.30)$$

Em resumo, temos que resolver as seguintes equações

$$\frac{d}{dr}[r(1 - e^{-2H})] = 8\pi pr^2, \quad (1.31)$$

$$1 + 2rF' - e^{2H} = 8\pi pr^2 e^{2H}, \quad (1.32)$$

$$e^{-2H} \left(\frac{F'}{r} - \frac{H'}{r} + F'' + (F')^2 - H'F' \right) = 8\pi p, \quad (1.33)$$

Nossa próxima tarefa é determinar as funções $F(r)$ e $H(r)$.

Integrando a eq.(1.31) com respeito a r , obtemos

$$\int \frac{d}{dr}[r(1 - \exp-2H)]dr = 2 \times 4\pi \int \rho(r)r^2 dr, \quad (1.34)$$

onde teremos,

$$\int d[r(1 - e^{-2H})] = 2 \times 4\pi \int \rho(r)r^2 dr. \quad (1.35)$$

Consideremos que a massa seja função da posição r , logo sua densidade, será

$$\rho(r) = \frac{dm(r)}{dV}, \quad (1.36)$$

onde, em coordenadas esféricas, $dV = 4\pi r^2 dr$. Logo

$$m(r) = 4\pi \int \rho(r)r^2 dr. \quad (1.37)$$

Substituindo a eq.(1.37) na eq.(1.35), obteremos

$$\int d[r(1 - e^{-2H})] = 2m(r), \quad (1.38)$$

e integrando, teremos

$$r - re^{-2H} = 2m(r), \quad (1.39)$$

ou

$$e^{-2H(r)} = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \quad (1.40)$$

Finalmente, a função $H(r)$ é determinada através da aplicação do logaritmo natural na eq.(1.40), que resultará em

$$H(r) = -\frac{1}{2} \ln \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]. \quad (1.41)$$

Para determinarmos a função $F(r)$, isolamos sua derivada $F'(r)$ na equação (1.32),

$$F'(r) = -\frac{1}{2r} + \left(\frac{1}{2r} + 4\pi pr \right) e^{2H}. \quad (1.42)$$

Substituindo a eq.(1.41) na eq.(1.42)

$$F'(r) = -\frac{1}{2r} + \left(\frac{1}{2r} + 4\pi pr \right) e^{2\{-\frac{1}{2} \ln[1 - \frac{2m(r)}{r}]\}}. \quad (1.43)$$

Após algumas manipulações algébricas, obteremos

$$F'(r) = \frac{m(r) + 4\pi pr^3}{r[r - 2m(r)]}. \quad (1.44)$$

Integrando $F'(r)$ com respeito a r , temos

$$F(r) = \int \frac{m(r) + 4\pi pr^3}{r[r - 2m(r)]} dr \quad (1.45)$$

Se o objeto esférico estiver em uma região no infinito, $r \gg R$. E nesta condição, a massa a ser considerada é M , que é a massa total do objeto (SCHUTZ, 2009).

Devemos também levar em consideração que os cálculos estão sendo feitos para uma massa no vácuo, onde ($p = 0$). Logo,

$$F(r) = M \int_R^\infty \frac{dr}{r(r-2M)}. \quad (1.46)$$

Note que

$$r^2 - 2rM = (r - M)^2 - M^2 \quad (1.47)$$

então,

$$F(r) = M \int_R^\infty \frac{dr}{(r - M)^2 - M^2}, \quad (1.48)$$

que integrando, teremos

$$F(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (1.49)$$

Encontrado as funções $H(r)$ e $F(r)$, respectivamente as eqs.(1.41) e (1.49), as quais substituiremos na eq.(1.2), obteremos o seguinte resultado

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.50)$$

que corresponde à métrica de Schwarzschild.

Podemos notar que haverá uma singularidade no segundo termo da métrica quando r tender a $2M$

$$\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \rightarrow \infty \quad (1.51)$$

a qual denominamos de singularidade removível (É chamada de removível pelo fato de, posteriormente, ser eliminada com os novos sistemas de coordenadas).

A outra singularidade acontece quando r se aproxima de zero, que a chamamos de singularidade real ou física. Em outras palavras, singularidades reais não podem ser removidas por um conjunto de transformações de coordenadas. (WALD, 1984)

Na próxima secção, faremos uma abordagem das coordenadas de Eddington-Finkelstein, para solução da singularidade removível, $r = 2M$.

2 Coordenadas Eddington-Finkelstein

Para compreendermos as coordenadas de Eddington-Finkelstein, é necessário sabermos que o elemento de linha, ds^2 , tem o seguinte significado:

1. $ds^2 < 0$: elemento de linha de tipo-tempo;
2. $ds^2 = 0$: elemento de tipi luz
3. $ds^2 > 0$: elemento de linha tipo-espaço.

Tendo em vista as condições algébricas que ds^2 proporciona, podemos notar que o melhor caminho para alcançarmos as coordenadas de Eddington-Finkelstein é considerar a geodésica radial nula, $ds^2 = 0$, cuja análise é feita para um corpo sem massa, destacando a simplicidade do desenvolvimento da equação

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.1)$$

Para as coordenadas angulares θ e ϕ constantes, obtemos

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (2.2)$$

Note que, por fins didáticos, retornaremos com a representação da velocidade da luz, c .

Derivando (2.2) em relação a $ds = d\tau$, teremos

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{ds^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{ds^2}, \quad (2.3)$$

onde adotamos $\dot{t} = \frac{dt}{ds}$ e $\dot{r} = \frac{dr}{ds}$, logo

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \quad (2.4)$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \dot{t}^2 = \dot{r}^2. \quad (2.5)$$

Nossa próxima tarefa é resolver a eq.(2.5). Para obtermos esta solução vamos considerar o movimento dos corpos de teste no espaço-tempo de Schwarzschild (RYDER, 2009).

O corpo teste obedece a seguinte geodésica

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (2.6)$$

onde ds é um parâmetro que no nosso caso corresponde o tempo próprio τ .

Como desejamos encontrar a solução para eq.(2.5) adotaremos $\lambda = t$, logo obtemos a seguinte equação de movimento

$$\frac{d^2 x^t}{ds^2} + \Gamma^t_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (2.7)$$

Substituindo as variáveis $\mu, \nu = (t, r, \theta, \phi)$, temos que a equação de movimento pode ser descrita da seguinte forma

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + 2\Gamma^t_{tr} \frac{dx^t}{ds} \frac{dx^r}{ds} = 0. \quad (2.8)$$

Como sabemos $\Gamma^t_{rt} = \Gamma^t_{tr} = \frac{dF(r)}{dr}$ e que $F(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, teremos

$$\Gamma^t_{rt} = \Gamma^t_{tr} = \frac{M}{r(r-2M)}. \quad (2.9)$$

Substituindo a eq.(2.9) na eq.(2.8), logo teremos

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + 2 \frac{M}{r(r-2M)} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0, \quad (2.10)$$

em que, simplificando a notação, escrevemos $t' = \frac{dt}{d\tau}$. Logo

$$t'' + \frac{2M}{r(r-2M)} t' r' = 0. \quad (2.11)$$

Podemos reescrever a eq.(2.11) como

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} \right] = 0, \quad (2.12)$$

onde, integrando em relação a τ , obtemos

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = b. \quad (2.13)$$

onde b é uma constante.

Substituindo (2.13) em (2.5), teremos que

$$\dot{r} = \pm b. \quad (2.14)$$

A partir da eq.(2.5), também podemos observar que

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{r-2M}{r} \quad (2.15)$$

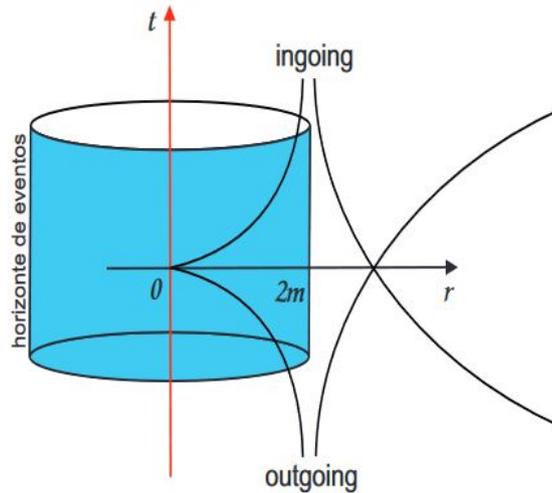


Figura 10 – Curvas Incoming e Outgoing dos raios de luz

onde, isolando dt ,

$$dt = \pm \frac{r}{r - 2M} dr. \quad (2.16)$$

Integrando a eq.(2.16), obtemos

$$t = \pm (r + 2M \ln |r - 2M|) + cte, \quad (2.17)$$

que representa as curvas de entrada (equação com sinal negativo) e saída (equação com sinal positivo) de raios de luz em um campo de Schwarzschild. Um jargão muito utilizado na relatividade é chamar as curvas de entrada e saída de incoming e outgoing, respectivamente. (PENROSE, 2005)

Na Figura 10, podemos observar que a curva de saída na região $r > 2M$ é crescente, visto que t aumenta à medida que r aumenta. Já a curva de entrada, na mesma região, tem comportamento decrescente, sendo que t diminui com o aumento de r .

Na região $0 < r < 2M$, notamos que t , na curva de saída, tende a zero quando r diminui. Em contra partida, a curva de entrada é crescente, onde t aumenta à medida que r aumenta.

Ao olharmos com atenção, vemos que as curvas não tocam a região $r = 2M$. Isto porquê, como já foi discutido, é uma região no infinito, ou seja, por mais que percorramos r nas proximidades de $2M$, nunca chegaremos a um valor de t .

Em uma região fora da superfície de Schwarzschild, mundo real, r e t são parâmetros acessíveis. No entanto, no interior da superfície, região do buraco negro, r e t têm uma relação inversa. Onde tempo e espaço tendem a diminuir, chegando próximos de zero (região em que a singularidade é real). (Misner; Thorne; Wheeler, 1973)

Então, como na região $r > 2M$ temos uma curva crescente para t e r , a métrica na eq.(1.50) continuará com o mesmo sinal nas componentes de t e r . Por outro lado, como t

decrece juntamente com r na região $0 < r < 2M$, os sinais nas componentes g_{tt} e g_{rr} da métrica se invertem. Com isso, temos que na superfície de Schwarzschild o parâmetro t será semelhante ao parâmetro r , que está fora da superfície, e o parâmetro r na superfície será semelhante ao parâmetro t , que está fora da superfície. (CARROLL, 2003)

O objetivo das coordenadas de Eddington-Finkelstein é eliminar a singularidade removível da eq.(1.50). Para isto, uma forma conveniente de obter tal solução, é manipular a componente temporal da métrica de modo que a divisão por zero da componente r seja removida e, portanto, a singularidade.

Eddington e Finkelstein propuseram um "ansatz"¹ para extrair a singularidade removível. Adotaram uma nova coordenada temporal

$$\tilde{t} = t \pm 2M \ln |r - 2M|. \quad (2.18)$$

Substituindo a eq.(2.17), com o sinal negativo, na eq.(2.18), com o sinal positivo, encontraremos uma congruência de geodésicas radiais nulas de entrada. Em que,

$$\tilde{t} = -r + cte. \quad (2.19)$$

Derivando (2.18) em relação a r , teremos

$$d\tilde{t} = dt \pm \frac{2M}{r - 2M} dr. \quad (2.20)$$

Como o tempo é crescente em uma região fora da superfície de Schwarzschild, curvas outgoing, tomamos o sinal positivo na eq.(2.20) e isolamos dt . Logo,

$$dt = d\tilde{t} - \frac{2M}{r - 2M} dr. \quad (2.21)$$

Substituindo a eq.(2.21) na eq.(1.50), teremos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(d\tilde{t} - \frac{2M}{r - 2M} dr\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.22)$$

onde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.23)$$

Expandindo a eq.(2.22), teremos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[d\tilde{t}^2 - \frac{4M}{r - 2M} d\tilde{t} dr + \left(\frac{2M}{r - 2M}\right)^2 dr^2 \right] + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

¹ Ansatz é um termo em alemão que se traduz como um "chute certo".

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{4M}{r-2M}\right) d\tilde{t}dr - \\
&- \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2M}{r-2M}\right)^2 dr^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\
\\
ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{4M}{r-2M}\right) d\tilde{t}dr - \\
&- \underbrace{\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2M}{r-2M}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\right]}_{=U} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\
\\
ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 + \frac{4M}{r} d\tilde{t}dr - U dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Desenvolvendo U , teremos

$$\begin{aligned}
U &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2M}{r-2M}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{r-2M}{r}\right) \left(\frac{2M}{r-2M}\right)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = \\
&= \frac{1}{r} \left(\frac{4M^2}{r-2M}\right) - \frac{r}{r-2M} = \\
&= \frac{4M^2}{r(r-2M)} - \frac{r}{r-2M} = \\
&= -\left[\frac{r^2 - 4M^2}{r(r-2M)}\right] = \\
&= -\left[\frac{(r-2M)(r+2M)}{r(r-2M)}\right] = \\
&= -\left(\frac{r+2M}{r}\right) = \\
&= -\left(1 + \frac{2M}{r}\right). \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Substituindo a eq.(2.25) na eq.(2.24), teremos

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 + \frac{4M}{r} d\tilde{t}dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{2.26}$$

Com isso, podemos notar que a eq.(2.26), permite que a região interna ao buraco negro, $0 < r < 2M$, seja acessível. Não existe mais singularidade em $r = 2M$. A assinatura da superfície de Schwarzschild é a mesma para $r > 2M$ (RYDER, 2009).

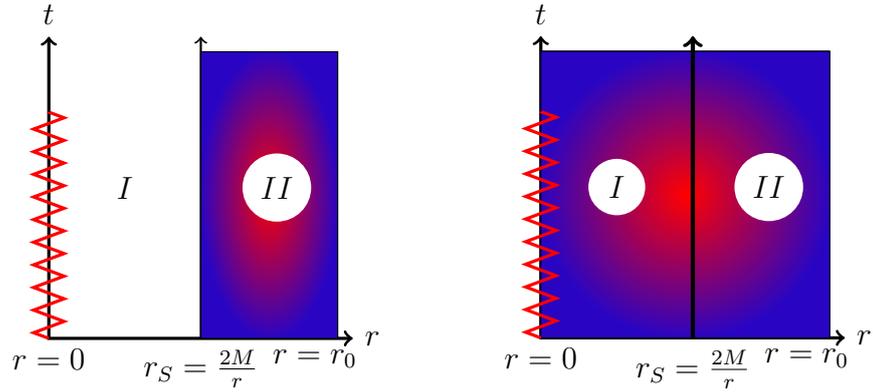


Figura 11 – Região I acessível. Região II acessível Figura retirada de (D'INVERNO, 1992).

Podemos observar também, que os raios de luz da região $r > 2M$ podem ser deslocados para a região $0 < r < 2M$. Porém, os raios de luz encontrados na região $0 < r < 2M$, não podem ultrapassar $r = 2M$. Isto porquê a congruência das geodésicas radiais nulas apresentadas na eq.(2.19), possui trajetória de cones de luz direcionada à singularidade real, $r = 0$. Para um observador externo, esta região é conhecida como horizonte de eventos, uma região da qual nenhuma partícula escapa. A um objeto com estas características, chamamos de buraco negro. (SCHUTZ, 2009)

Uma forma simplificada da eq.(2.26), pode ser apresentada através da inserção de coordenadas nulas, ou seja,

$$\nu = \tilde{t} + r. \quad (2.27)$$

Derivando e isolando $d\tilde{t}$, teremos

$$d\tilde{t} = d\nu - dr. \quad (2.28)$$

Substituindo a eq.(2.28) na eq.(2.26),

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (d\nu - dr)^2 + \frac{4M}{r} (d\nu - dr) dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.29)$$

Desenvolvendo a eq.(2.29),

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\nu^2 + 2d\nu dr + r^2 d\Omega^2, \quad (2.30)$$

sendo ν uma constante, teremos que esta equação representa a forma simplificada da eq.(2.26).

Para encontrarmos a eq.(2.26) consideramos apenas o sinal positivo da eq.(2.20), ou seja, as curvas outgoing. Isto ocasionou uma assimetria temporal nas coordenadas de Eddington-Finkelstein (CARROLL, 2003).

Para recuperarmos a simetria, consideraremos a introdução de uma coordenada reversa de tempo (dt^*), sinal negativo da eq.(2.20). Portanto,

$$dt^* = dt - \frac{2M}{r - 2M} dr. \quad (2.31)$$

Isolando dt ,

$$dt = dt^* + \frac{2M}{r - 2M} dr. \quad (2.32)$$

Substituindo a eq.(2.32) na eq.(1.50), teremos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(dt^* + \frac{2M}{r - 2M} dr\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.33)$$

Expandindo a eq.(2.33),

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt^*)^2 - \frac{4M}{r} dt^* dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.34)$$

Este é o sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein, para uma coordenada de tempo reverso. Ao traçarmos retas de geodésicas nulas de outgoing, percebemos que os cones de luz tendem à direção oposta da singularidade real, assim, cruzando a região $r = 2M$ para a região $2M < r < \infty$, mas não o caminho inverso. Isto significa que as partículas ficam presas à região $r > 2M$, fazendo desta região, um horizonte de eventos para um observador dentro da superfície de Schwarzschild. Um objeto com estas características, é chamado de buraco branco. (RYDER, 2009)

Semelhante à eq.(2.26), apresentaremos agora uma forma simplificada da eq.(2.34) através da inserção de coordenadas nulas. A saber,

$$w = t^* - r. \quad (2.35)$$

Derivando e isolando dt^* , teremos

$$dt^* = dw + dr. \quad (2.36)$$

Substituindo a eq.(2.36) na eq.(2.34),

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dw + dr)^2 - \frac{4M}{r} (dw + dr) dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.37)$$

Expandindo a eq.(2.37), teremos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dw^2 - 2dw dr + r^2 d\Omega^2, \quad (2.38)$$

que corresponde à forma mais simplificada da eq.(2.34).

3 Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Podemos observar que as coordenadas estudadas até o momento, trataram de regiões específicas à singularidade removível. Agora, em uma abordagem das coordenadas de Kruskal-Szekeres, estudaremos todas as regiões possíveis em um espaço-tempo de Minkowski.

Introduzimos uma coordenada nula, que a denominaremos de coordenada temporal avançada, na métrica de Schwarzschild, logo

$$\nu(t, r) = t + r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (3.1)$$

Derivando ν com respeito a t e r

$$d\nu = \frac{\partial \nu}{\partial t} dt + \frac{\partial \nu}{\partial r} dr, \quad (3.2)$$

teremos

$$d\nu = dt + \frac{r}{r - 2M} dr. \quad (3.3)$$

Isolando dt ,

$$dt = d\nu - \frac{r}{r - 2M} dr. \quad (3.4)$$

Substituindo a eq.(3.4) na eq.(1.50), teremos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) d\nu^2 + 2d\nu dr + r^2 d\Omega^2. \quad (3.5)$$

Similarmente à eq.(2.30) nas coordenadas de Eddington-Finkelstein, a eq.(3.5) é assimétrica no tempo. Não temos uma invariância no elemento de linha se $\nu \rightarrow -\nu$, com isso, precisamos adotar uma coordenada de reversão temporal para recuperar a simetria (PENROSE, 2005). Logo,

$$w(t, r) = t - r - 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (3.6)$$

Derivando w com respeito a t e r ,

$$dw = \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{\partial w}{\partial r} dr, \quad (3.7)$$

logo

$$dw = dt - \frac{r}{r - 2M} dr, \quad (3.8)$$

que isolando dt , teremos

$$dt = dw + \frac{r}{r - 2M} dr. \quad (3.9)$$

Substituindo a eq.(3.9) na eq.(1.50), temos

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dw^2 - 2dwdr + r^2 d\Omega^2. \quad (3.10)$$

A eq.(3.10) expressa o elemento de linha do parâmetro de reversão temporal w , em que as curvas outgoing dos raios de luz são denotadas na região $w \rightarrow -w$.

Podemos simplificar a notação das coordenadas nulas, fazendo

$$r^* = \frac{r}{r - 2M}. \quad (3.11)$$

Assim, as coordenadas nulas poderão ser expressas como

$$v = t + r^* \quad (3.12)$$

e

$$w = t - r^*. \quad (3.13)$$

Após discorrermos sobre as coordenadas nulas avançadas e retardadas no tempo, vamos introduzir suas derivadas na eq.(1.50) e apresentar a métrica de Schwarzschild em forma de coordena nulas. Para isto,

Para alcançar esse objetivo multiplicamos as eqs.(3.3) e eqs.(3.8), logo

$$dw dv = dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} dr^2, \quad (3.14)$$

que multiplicando ambos os lados por $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, teremos

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dw dv = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (3.15)$$

ou

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dw dv - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (3.16)$$

Substituindo a eq.(3.16) na eq.(1.50), obteremos

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dw dv - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.17)$$

ou simplesmente

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dw dv + r^2 d\Omega^2. \quad (3.18)$$

Introduzindo as seguintes coordenadas

$$z = \frac{1}{2}(e^{\nu/4M} + e^{-w/4M}) \quad (3.19)$$

e

$$h = \frac{1}{2}(e^{\nu/4M} - e^{-w/4M}). \quad (3.20)$$

Substituindo a eq.(3.1) e a eq.(3.6) na eq.(3.19), encontramos

$$z = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(t/4M). \quad (3.21)$$

Derivando a eq.(3.21) $dz = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial r} dr$, teremos

$$dz = \alpha \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) dr + \beta \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) dt. \quad (3.22)$$

onde

$$\alpha^2 = \frac{r^2}{32M^3 (r - 2M)} e^{r/2M} \quad (3.23)$$

e

$$\beta^2 = \frac{(r - 2M)}{32M^3} e^{r/2M} \quad (3.24)$$

Analogamente para h , substituímos a eq.(3.1) e a eq.(3.6) na eq.(3.20). Logo,

$$h = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh(t/4M). \quad (3.25)$$

Elevando a eq.(3.21) ao quadrado, teremos

$$z^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) e^{r/2M} \cosh^2(t/4M). \quad (3.26)$$

Elevando a eq.(3.25) ao quadrado, teremos

$$h^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) e^{r/2M} \sinh^2(t/4M). \quad (3.27)$$

Calculando a diferença entre a eq.(3.26) e a eq.(3.27),

$$z^2 - h^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) e^{r/2M}. \quad (3.28)$$

Derivando a eq.(3.25), $dh = \frac{\partial h}{\partial t} dt + \frac{\partial h}{\partial r} dr$, teremos

$$dh = \alpha \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) dr + \beta \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) dt. \quad (3.29)$$

Calculando a diferença dos quadrados das equações (3.22) e (3.29), encontramos

$$dz^2 - dh^2 = \alpha^2 dr^2 - \beta^2 dt^2, \quad (3.30)$$

no qual, substituindo a eq.(3.23) e a eq.(3.24) na eq.(3.30), obtemos

$$\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (dz^2 - dh^2) = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (3.31)$$

Substituindo a eq.(3.31) na eq.(1.50)

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (dz^2 - dh^2) + r^2 (z, h) d\Omega^2, \quad (3.32)$$

que nos dá, por fim, o sistema de coordenadas de Kruskal-Szekeres para a solução de Schwarzschild (RYDER, 2009).

Para um movimento radial, o elemento de linha torna-se

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (dz^2 - dh^2). \quad (3.33)$$

Se considerarmos a geodésica da eq.(3.33) radial nula, $ds^2 = 0$, teremos

$$dz = \pm dh, \quad (3.34)$$

que integrando, obteremos

$$z = \pm h + cte, \quad (3.35)$$

cujas soluções, eq.(3.35), são retas do plano zh . Essas retas são mostradas na figura 12.

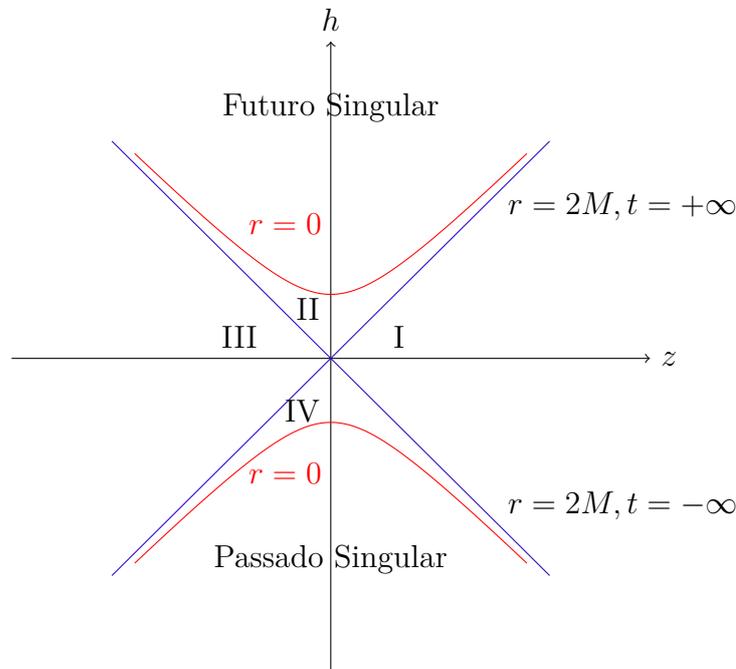


Figura 12 – Diagrama de Kruskal

Podemos notar na Figura 12, que o diagrama das coordenadas de Kruskal possui quatro regiões. São estas,

1. região I: representa o mundo real, $r > 2M$, delimitado por $r = 2M$;
2. região II: expressa para $r < 2M$, faz fronteira com a região I, em que objetos que atravessam o horizonte de eventos, $r = 2M$, ficam presos nesta região, encontrando, posteriormente, a singularidade. A região II, por estas características, torna-se um buraco negro;

3. região III: completa a simetria favorecida pela entropia, sendo simétrica a região I. Essa constatação leva a presumir que a região II comporta-se como uma ponte entre duas regiões idênticas com reversão temporal (passado e futuro), conhecida como ponte de Einstein-Rosen ou buraco de minhoca;
4. região IV: ejeta matéria e luz para a região I, através das curvas outgoing. Tudo o que sai desta região, vem da singularidade, $r = 0$, descrevendo o que denominamos de buraco branco. Nenhuma das demais regiões do diagrama pode influenciá-la.

4 Diagramas de Carter-Penrose

Nos diagramas de Penrose, estudaremos estas regiões no infinito em pontos finitos, obtidos através de uma transformação conforme da geodésica ds , trazendo maior facilidade na detecção dos objetos astronômicos citados.

Consideremos a métrica do espaço-tempo de Minkowski, como

$$d\tilde{s}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.1)$$

Expressando a eq.(4.1) em termos de coordenada nula avançada no tempo

$$\tilde{u} = t - r, \quad (4.2)$$

e retardada no tempo,

$$\tilde{v} = t + r. \quad (4.3)$$

Isolando r das eq.(4.2) e (4.3) e elevando ao quadrado, teremos

$$r^2 = \frac{(\tilde{u} - \tilde{v})^2}{4}. \quad (4.4)$$

Calculando a derivado total \tilde{u} e \tilde{v} e em seguida multiplicando ambos os resultados, obteremos

$$d\tilde{u}d\tilde{v} = dt^2 - dr^2. \quad (4.5)$$

Substituindo a eq.(4.4) e a eq.(4.5) na eq.(4.1), teremos

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{u}d\tilde{v} + \frac{(\tilde{u} - \tilde{v})^2}{4} d\Omega^2. \quad (4.6)$$

Multiplicaremos a eq.(4.6) pelo fator

$$\delta^2 = \frac{1}{(1 + \tilde{u}^2)(1 + \tilde{v}^2)}. \quad (4.7)$$

que denominamos de fator de conformidade. Assim, teremos que

$$ds^2 = -\frac{d\tilde{u}d\tilde{v}}{(1 + \tilde{u}^2)(1 + \tilde{v}^2)} + \frac{(\tilde{u} - \tilde{v})^2}{4(1 + \tilde{u}^2)(1 + \tilde{v}^2)} d\Omega^2. \quad (4.8)$$

Sabemos que o gráfico da função trigonométrica da tangente, ver figura 13, possui um comportamento de ir ao infinito pela direita e esquerda. Tal característica poderá ser utilizar para "trazer" a região infinita da solução de Schwarzschild para uma região finita a partir da métrica do espaço-tempo de Minkowski.

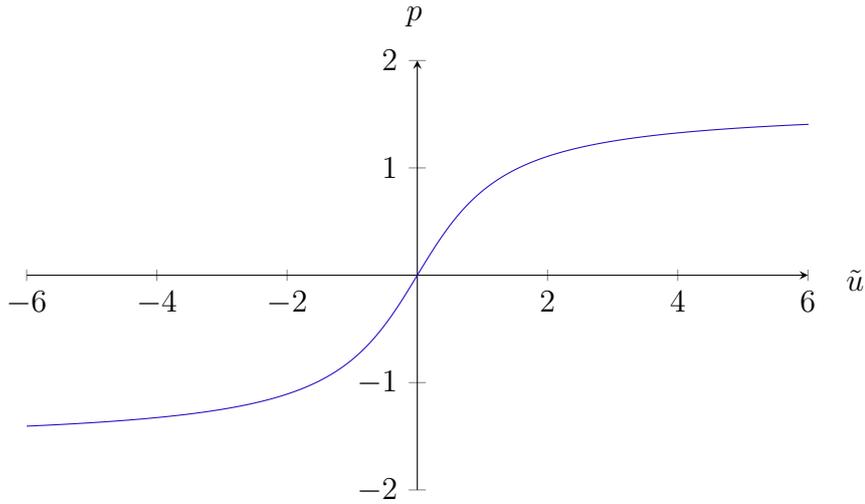


Figura 13 – Gráfico da tangente.

A partir dessa motivação introduzimos as novas coordenadas

$$\tilde{u} = \tan p, \quad (4.9)$$

$$\tilde{v} = \tan q. \quad (4.10)$$

a métrica eq.(4.8).

Derivando \tilde{u} e \tilde{v} com respeito p e q , respectivamente e em seguida realizamos o produtos de ambos os resultado, ou seja,

$$d\tilde{u}d\tilde{v} = (1 + \tan^2 p) (1 + \tan^2 q) dpdq. \quad (4.11)$$

Escrevendo o fator $\frac{(\tilde{u}-\tilde{v})^2}{4(1+\tilde{u}^2)(1+\tilde{v}^2)}$ da eq.(4.8) em função de p e q , obteremos

$$\frac{(\tilde{u} - \tilde{v})^2}{4(1 + \tilde{u}^2)(1 + \tilde{v}^2)} = \frac{(\tan p - \tan q)^2}{4(1 + \tan^2 p)(1 + \tan^2 q)} \quad (4.12)$$

de onde extraímos após algumas manipulações trigonométricas que

$$\frac{(\tilde{u} - \tilde{v})^2}{4(1 + \tilde{u}^2)(1 + \tilde{v}^2)} = \frac{\sin^2(p - q)}{4}. \quad (4.13)$$

Substituindo a eq.(4.11) e a eq.(4.13) na eq.(4.8), teremos

$$ds^2 = -dpdq + \frac{\sin^2(p - q)}{4} d\Omega^2, \quad (4.14)$$

onde, por definição,

$$-\pi \leq p, q \leq \pi. \quad (4.15)$$

A métrica encontrada na eq.(4.14), é a métrica do espaço-tempo de Minkowski, ou seja, eq.(4.6), reescalada conformalmente.

O tempo e o espaço nos diagramas de Carter-Penrose, são estabelecidos com novas coordenadas representando o infinito de maneira finita, onde

$$p = T - R \tag{4.16}$$

e

$$q = T + R. \tag{4.17}$$

As coordenadas T e R são usadas no diagrama de Penrose para estabelecer limites finitos aos pontos no infinito do espaço-tempo de Minkowski. Assim, como mostrado na fig.z, definimos

Como já sabemos, $-\pi \leq p, q \leq \pi$, assim, analisaremos os pontos extremos de p e q .

Para $p = -\pi$, a eq.(4.16), torna-se

$$-\pi = T - R. \tag{4.18}$$

Se $R = 0$, implica que $T = -\pi$. Logo, representamos o ponto $(0, -\pi)$ como ι^- , que significa o passado tipo-tempo. Porém, se $T = 0$, implica que $R = -\pi$. Logo, indicamos o ponto $(-\pi, 0)$ como ι^0 , o qual definimos como passado tipo-espaço.

O gráfico da eq.(TR1) é uma reta conectando o ponto $\iota^- = (0, -\pi)$ com o ponto $\iota^0 = (\pi, 0)$. E, que para $p = -\pi$ teremos que $\tilde{u} = -\infty$. Definimos tal reta como \mathcal{J}^- (ler-se Scri menos) e representamos na Figura 14.

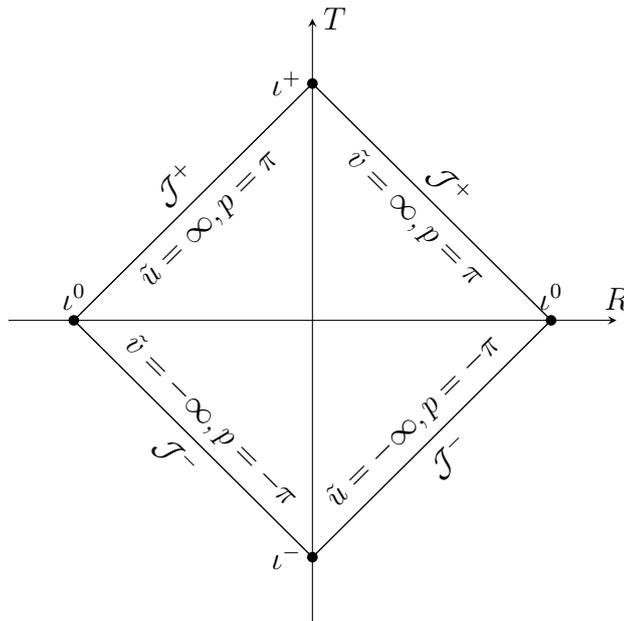


Figura 14 – Diagrama compactado

Para $p = \pi$, a eq.(4.16), torna-se

$$\pi = T - R. \tag{4.19}$$

Analogamente, teremos $(0, \pi)$ e $(-\pi, 0)$, que representamos como ι^+ , ou futuro tipo-tempo, e ι^0 , o futuro tipo-espaço, respectivamente. E, da eq.(4.19) teremos uma reta que conecta o ponto ι^+ ao ponto ι^0 a qual denominamos de \mathcal{J}^+ . Note que para $p = \pi$ implica que $\tilde{u} = +\infty$. Essa reta mostramos na Figura 14.

Para $q = -\pi$, a eq.(4.17) torna-se

$$-\pi = T + R. \quad (4.20)$$

Realizando a mesma análise teremos para $R = 0$ o ponto $(0, -\pi)$ que denominamos de ι^- . Para $T = 0$ obteremos o ponto $(-\pi, 0)$ que corresponde ao ponto ι^0 . Como antes, a reta que conecta ι^- com ι^0 a chamamos de \mathcal{J}^- porque para $q = -\pi$ o $\tilde{v} = -\infty$. Representamos esta reta na figura 14.

Similarmente para $q = \pi$

$$\pi = T + R, \quad (4.21)$$

logo, o ponto $(0, \pi)$ corresponde ao ι^0 e o ponto $(\pi, 0)$ o ι^+ . A reta que conecta este dois pontos está representado na Figura 14 e denominamos de \mathcal{J}^+ uma uma vez que para $q = \pi$ teremos que $\tilde{v} = +\infty$.

Em resumo

1. \mathcal{J}^+ : é o infinito futuro nulo;
2. \mathcal{J}^- : é o infinito passado nulo;
3. ι^+ : é o futuro tipo tempo;
4. ι^- : é o passado tipo tempo;
5. ι^0 : é o futuro e o passado tipo espaço.

Para a representação das coordenadas de Kruskal-Szekeres em um diagrama de Penrose, introduzimos novas coordenadas a métrica em eq.(3.18). Logo,

$$U = -4M \exp\left(-\frac{\nu}{4M}\right) \quad (4.22)$$

e

$$V = 4M \exp\left(\frac{w}{4M}\right). \quad (4.23)$$

Substituindo a eq.(3.1) na eq.(4.22), encontramos

$$U = -4M \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r-t}{4M}\right) \quad (4.24)$$

Derivando a eq.(4.24) em relação a t e r ,

$$dU = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r-t}{4M}\right) dt. \quad (4.25)$$

Substituindo a eq.(3.6) na eq.(4.23), encontramos

$$V = 4M \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} \exp\left(\frac{t+r}{4M}\right). \quad (4.26)$$

Derivando a eq.(4.26) em relação a t e r ,

$$dV = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} \exp\left(\frac{t+r}{4M}\right) dt \quad (4.27)$$

Multiplicando as derivadas as eqs.(4.25) e (4.27), obteremos

$$\frac{2M}{r} \exp\left(\frac{-r}{2M}\right) dU dV = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dw dv. \quad (4.28)$$

Substituindo a eq.(4.28) na métrica de Kruskal, eq.(3.18), obteremos

$$ds^2 = -\frac{2M}{r} \exp\left(\frac{-r}{2M}\right) dU dV + r^2 d\Omega^2. \quad (4.29)$$

Para as novas coordenadas avançadas e retardadas no tempo, da solução de Kruskal para a métrica de Schwarzschild, temos que os intervalos de u e v são aplicados a ν e w , porém, U e V apresentam intervalos não condizentes com o espaço-tempo de Minkowski.

(a)	(b)
ν	w
U	V
$-\infty$	$-\infty$
0	0
$-\infty$	$4m$
0	$-\infty$
$4m$	0
∞	∞

Tabela 1 – coordenadas u e v transladadas para coordenadas U e V

Trazendo esses domínios para a solução de Kruskal, podemos obter o seguinte diagrama de Penrose

Percebemos que U e V não atingem suas extremidades simetricamente. Portanto, considerando a reversão temporal, validando a física representada pelos diagramas à entropia, propomos o intervalo $-\infty < U, V < \infty$. O diagrama de Penrose para estas coordenadas, será

A Figura 16 apresenta quatro regiões. A região I atende às condições reais de tempo e espaço, limitadas por $U = 0$ e $r = 2M$, características de um horizonte de eventos. A região II, por sua vez, é a simetria inversa da região I, atendendo a $V = 0$ e $r = 2M$. A região III representa o buraco branco, seguindo a congruência das geodésicas nulas avançadas no tempo, e a região IV é o buraco negro. As regiões III e IV apresentam ondulação entre os pontos de futuro infinito tipo-tempo e entre os pontos de passado infinito tipo-tempo. Esta ondulação, em $r = 0$, é a singularidade.

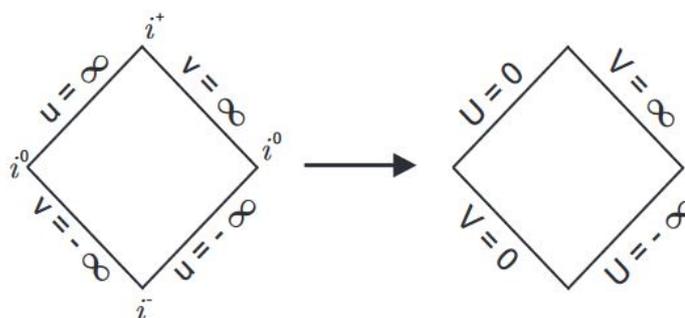


Figura 15 – Diagrama de Penrose para U e V , considerando os intervalos de u e v .

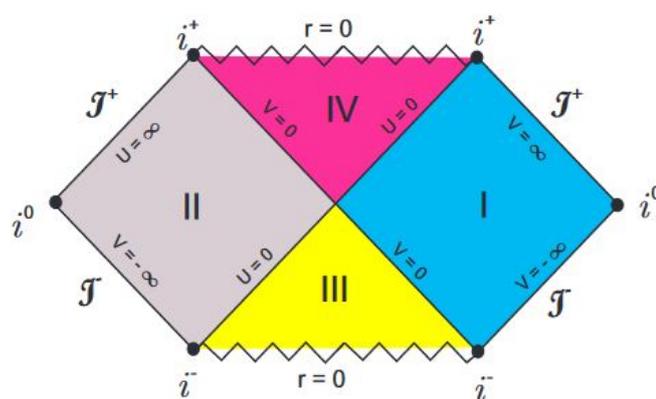


Figura 16 – Diagrama de Penrose para a solução de Kruskal.

5 Conclusão e Perspectivas

Ao fim de toda abordagem exercida, desde os símbolos de Christoffel às equações que geraram os diagramas de Penrose, notamos que os cálculos de Eddington e Kruskal para a métrica de Schwarzschild, proporcionaram soluções para singularidade removível, $r = 2M$, e, conseqüentemente, simplificaram a métrica com novas coordenadas atribuídas, partindo de definições como o elemento de linha nulo, $ds^2 = 0$, e a exploração das regiões possíveis para o espaço-tempo de Minkowski.

Outrossim, através destas soluções para a métrica de Schwarzschild, houveram implementações de novas coordenadas, por parte de Penrose, compactando as soluções infinitas para o domínio finito. O que permite a demonstração finita, através de diagramas, do que denominamos de buraco negro, buraco branco e buraco de minhoca (ponte de Einstein-Rosen).

Podemos citar como perspectivas futuras, os seguintes itens:

1. desejamos dar continuidade a este estudo, estendendo o diagrama de Carter-Penrose para o buraco negro de Reissner-Nordström e Kerr;
2. entender como a métrica Friedman-Robertson-Walker, mais popularmente conhecida como métrica FRW, se comporta frente ao diagrama de Carter-Penrose;
3. despertar a curiosidade de estudantes para o referido tema;
4. estimular a continuidade do trabalho com temas posteriores a este, da TRG;
5. contribuição com material ao meio acadêmico.

A Símbolos de Christoffel

Para $\lambda = \sigma = t$ e $\mu = t$,

$\nu = t$

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_t g_{tt} + \partial_t g_{tt} - \partial_t g_{tt})$$

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2}g^{tt} \partial_t g_{tt}$$

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2}(-e^{-2F})\partial_t(-e^{2F})$$

como a derivada é em relação ao tempo,

$$\Gamma_{tt}^t = 0 \tag{A.1}$$

$\nu = r$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_t g_{rt} + \partial_r g_{tt} - \partial_t g_{tr})$$

como elementos fora da diagonal principal são nulos,

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}g^{tt} \partial_r g_{tt}$$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}(-e^{-2F})\partial_r(-e^{2F})$$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}(-e^{-2F})(-2F'e^{2F})$$

$$\Gamma_{tr}^t = F' = \frac{dF}{dr} \tag{A.2}$$

$\nu = \theta$

$$\Gamma_{t\theta}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_t g_{\theta t} + \partial_\theta g_{tt} - \partial_t g_{t\theta}) = 0 \tag{A.3}$$

$\nu = \phi$

$$\Gamma_{t\phi}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_t g_{\phi t} + \partial_\phi g_{tt} - \partial_t g_{t\phi}) = 0. \tag{A.4}$$

Para $\lambda = \sigma = t$ e $\mu = r$,

$\nu = t$

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_r g_{tt} + \partial_t g_{rt} - \partial_t g_{rt})$$

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2}g^{tt} \partial_r g_{tt}$$

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2}(-e^{-2F})\partial_r(-e^{2F})$$

$$\Gamma_{rt}^t = F' = \frac{dF}{dr} \quad (\text{A.5})$$

$$\nu = r$$

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_r g_{rt} + \partial_r g_{rt} - \partial_t g_{rr}) = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\nu = \theta$$

$$\Gamma_{r\theta}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_r g_{\theta t} + \partial_\theta g_{rt} - \partial_t g_{r\theta}) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\nu = \phi$$

$$\Gamma_{r\phi}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_r g_{\phi t} + \partial_\phi g_{rt} - \partial_t g_{r\phi}) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Para $\lambda = \sigma = t$ e $\mu = \theta$,

$$\nu = t$$

$$\Gamma_{\theta t}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_\theta g_{tt} + \partial_t g_{\theta t} - \partial_t g_{\theta t}) = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\nu = r$$

$$\Gamma_{\theta r}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_\theta g_{rt} + \partial_r g_{\theta t} - \partial_t g_{\theta r}) = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\nu = \theta$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_\theta g_{\theta t} + \partial_\theta g_{\theta t} - \partial_t g_{\theta\theta}) = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\nu = \phi$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_\theta g_{\phi t} + \partial_\phi g_{\theta t} - \partial_t g_{\theta\phi}) = 0 \quad (\text{A.12})$$

Para $\lambda = \sigma = t$ e $\mu = \phi$,

$$\nu = t$$

$$\Gamma_{\phi t}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_\phi g_{tt} + \partial_t g_{\phi t} - \partial_t g_{\phi t}) = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\nu = r$$

$$\Gamma_{\phi r}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_\phi g_{rt} + \partial_r g_{\phi t} - \partial_t g_{\phi r}) = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\nu = \theta$$

$$\Gamma_{\phi \theta}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_\phi g_{\theta t} + \partial_\theta g_{\phi t} - \partial_t g_{\phi \theta}) = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\nu = \phi$$

$$\Gamma_{\phi \phi}^t = \frac{1}{2}g^{tt} (\partial_\phi g_{\phi t} + \partial_\phi g_{\phi t} - \partial_t g_{\phi \phi}) = 0 \quad (\text{A.16})$$

Para $\lambda = \sigma = r$ e $\mu = t$,

$$\nu = t$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2}g^{rr} (\partial_t g_{tr} + \partial_t g_{tr} - \partial_r g_{tt})$$

$$\Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2}g^{rr} \partial_r g_{tt}$$

$$\Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2}(e^{-2H})\partial_r(-e^{2F})$$

$$\Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2}(e^{-2H})(-2F'e^{2F})$$

$$\Gamma_{tt}^r = F'e^{2(F-H)} \quad (\text{A.17})$$

$$\nu = r$$

$$\Gamma_{tr}^r = \frac{1}{2}g^{rr} (\partial_t g_{rr} + \partial_r g_{tr} - \partial_r g_{tr}) = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\nu = \theta$$

$$\Gamma_{t\theta}^r = \frac{1}{2}g^{rr} (\partial_t g_{\theta r} + \partial_\theta g_{tr} - \partial_r g_{t\theta}) = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\nu = \phi$$

$$\Gamma_{t\phi}^r = \frac{1}{2}g^{rr} (\partial_t g_{\phi r} + \partial_\phi g_{tr} - \partial_r g_{t\phi}) = 0 \quad (\text{A.20})$$

Para $\lambda = \sigma = r$ e $\mu = r$,

$\nu = t$

$$\Gamma_{rt}^r = \frac{1}{2}g^{rr} (\partial_r g_{tr} + \partial_t g_{rr} - \partial_r g_{rt}) = 0 \quad (\text{A.21})$$

$\nu = r$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rr} (\partial_r g_{rr} + \partial_r g_{rr} - \partial_r g_{rr})$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \partial_r g_{rr}$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}(e^{-2H})\partial_r(e^{2H})$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}(e^{-2H})2H'e^{2H}$$

$$\Gamma_{rr}^r = H' = \frac{dH}{dr} \quad (\text{A.22})$$

$\nu = \theta$

$$\Gamma_{r\theta}^r = \frac{1}{2}g^{rr} (\partial_r g_{\theta r} + \partial_\theta g_{rr} - \partial_r g_{r\theta}) = 0 \quad (\text{A.23})$$

$\nu = \phi$

$$\Gamma_{r\phi}^r = \frac{1}{2}g^{rr} (\partial_r g_{\phi r} + \partial_\phi g_{rr} - \partial_r g_{r\phi}) = 0 \quad (\text{A.24})$$

Para $\lambda = \sigma = r$ e $\mu = \theta$,

$\nu = t$

$$\Gamma_{\theta t}^r = \frac{1}{2}g^{rr} (\partial_\theta g_{tr} + \partial_t g_{\theta r} - \partial_r g_{\theta t}) = 0 \quad (\text{A.25})$$

$\nu = r$

$$\Gamma_{\theta r}^r = \frac{1}{2}g^{rr} (\partial_\theta g_{rr} + \partial_r g_{\theta r} - \partial_r g_{\theta r}) = 0 \quad (\text{A.26})$$

$\nu = \theta$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2}g^{rr} (\partial_\theta g_{\theta r} + \partial_\theta g_{\theta r} - \partial_r g_{\theta\theta})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2}g^{rr} \partial_r g_{\theta\theta}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2}(e^{-2H})\partial_r(r^2)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -re^{-2H} \quad (\text{A.27})$$

$$\nu = \phi$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_\theta g_{\phi r} + \partial_\phi g_{\theta r} - \partial_r g_{\theta\phi}) = 0 \quad (\text{A.28})$$

Para $\lambda = \sigma = r$ e $\mu = \phi$,

$$\nu = t$$

$$\Gamma_{\phi t}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_\phi g_{tr} + \partial_t g_{\phi r} - \partial_r g_{\phi t}) = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$\nu = r$$

$$\Gamma_{\phi r}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_\phi g_{rr} + \partial_r g_{\phi r} - \partial_r g_{\phi r}) = 0$$

$$\nu = \theta$$

$$\Gamma_{\phi\theta}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_\phi g_{\theta r} + \partial_\theta g_{\phi r} - \partial_r g_{\phi\theta}) = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$\nu = \phi$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_\phi g_{\phi r} + \partial_\phi g_{\phi r} - \partial_r g_{\phi\phi})$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{\phi\phi}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{1}{2}(e^{-2H})\partial_r(r^2 \sin^2 \theta)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r \sin^2 \theta e^{-2H} \quad (\text{A.31})$$

Para $\lambda = \sigma = \theta$ e $\mu = t$,

$$\nu = t$$

$$\Gamma_{tt}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_t g_{t\theta} + \partial_t g_{t\theta} - \partial_\theta g_{tt}) = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$\nu = r$$

$$\Gamma_{tr}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_t g_{r\theta} + \partial_r g_{t\theta} - \partial_\theta g_{tr}) = 0 \quad (\text{A.33})$$

$$\nu = \theta$$

$$\Gamma_{t\theta}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} (\partial_t g_{\theta\theta} + \partial_{\theta} g_{t\theta} - \partial_{\theta} g_{t\theta}) = 0 \quad (\text{A.34})$$

$$\nu = \phi$$

$$\Gamma_{t\phi}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} (\partial_t g_{\phi\theta} + \partial_{\phi} g_{t\theta} - \partial_{\theta} g_{t\phi}) = 0 \quad (\text{A.35})$$

Para $\lambda = \sigma = \theta$ e $\mu = r$,

$$\nu = t$$

$$\Gamma_{rt}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} (\partial_r g_{t\theta} + \partial_t g_{r\theta} - \partial_{\theta} g_{rt}) = 0 \quad (\text{A.36})$$

$$\nu = r$$

$$\Gamma_{rr}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} (\partial_r g_{t\theta} + \partial_t g_{r\theta} - \partial_{\theta} g_{rt}) = 0 \quad (\text{A.37})$$

$$\nu = \theta$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} (\partial_r g_{\theta\theta} + \partial_{\theta} g_{r\theta} - \partial_{\theta} g_{r\theta})$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta}$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \right) (2r)$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{r} \quad (\text{A.38})$$

$$\nu = \phi$$

$$\Gamma_{r\phi}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} (\partial_r g_{\phi\theta} + \partial_{\phi} g_{r\theta} - \partial_{\theta} g_{r\phi}) = 0 \quad (\text{A.39})$$

Para $\lambda = \sigma = \theta$ e $\mu = \theta$,

$$\nu = t$$

$$\Gamma_{\theta t}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} (\partial_{\theta} g_{t\theta} + \partial_t g_{\theta\theta} - \partial_{\theta} g_{\theta t}) = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$\nu = r$$

$$\Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} (\partial_{\theta} g_{r\theta} + \partial_r g_{\theta\theta} - \partial_{\theta} g_{\theta r})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta r}^{\theta} &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta} \\ \Gamma_{\theta r}^{\theta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right)(2r) \\ \Gamma_{\theta r}^{\theta} &= \frac{1}{r}\end{aligned}\tag{A.41}$$

$$\nu = \theta$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_{\theta}g_{\theta\theta} + \partial_{\theta}g_{\theta\theta} - \partial_{\theta}g_{\theta\theta}) = 0\tag{A.42}$$

$$\nu = \phi$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_{\theta}g_{\phi\theta} + \partial_{\phi}g_{\theta\theta} - \partial_{\theta}g_{\theta\phi}) = 0\tag{A.43}$$

Para $\lambda = \sigma = \theta$ e $\mu = \phi$,

$$\nu = t$$

$$\Gamma_{\phi t}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_{\phi}g_{t\theta} + \partial_t g_{\phi\theta} - \partial_{\theta}g_{\phi t}) = 0\tag{A.44}$$

$$\nu = r$$

$$\Gamma_{\phi r}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_{\phi}g_{r\theta} + \partial_r g_{\phi\theta} - \partial_{\theta}g_{\phi r}) = 0\tag{A.45}$$

$$\nu = \theta$$

$$\Gamma_{\phi\theta}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_{\phi}g_{\theta\theta} + \partial_{\theta}g_{\phi\theta} - \partial_{\theta}g_{\phi\theta}) = 0\tag{A.46}$$

$$\nu = \phi$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_{\phi}g_{\phi\theta} + \partial_{\phi}g_{\phi\theta} - \partial_{\theta}g_{\phi\phi}) \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_{\theta}g_{\phi\phi} \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right)\partial_{\theta}(r^2 \sin^2 \theta) \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right)2r^2 \sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin \theta \cos \theta\end{aligned}\tag{A.47}$$

Para $\lambda = \sigma = \phi$ e $\mu = t$,

$$\nu = t$$

$$\Gamma_{tt}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} (\partial_t g_{t\phi} + \partial_t g_{t\phi} - \partial_{\phi} g_{tt}) = 0 \quad (\text{A.48})$$

$$\nu = r$$

$$\Gamma_{tr}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} (\partial_t g_{r\phi} + \partial_r g_{t\phi} - \partial_{\phi} g_{tr}) = 0 \quad (\text{A.49})$$

$$\nu = \theta$$

$$\Gamma_{t\theta}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} (\partial_t g_{\theta\phi} + \partial_{\theta} g_{t\phi} - \partial_{\phi} g_{t\theta}) = 0 \quad (\text{A.50})$$

$$\nu = \phi$$

$$\Gamma_{t\phi}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} (\partial_t g_{\phi\phi} + \partial_{\phi} g_{t\phi} - \partial_{\phi} g_{t\phi}) = 0 \quad (\text{A.51})$$

Para $\lambda = \sigma = \phi$ e $\mu = r$,

$$\nu = t$$

$$\Gamma_{rt}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} (\partial_r g_{t\phi} + \partial_t g_{r\phi} - \partial_{\phi} g_{rt}) = 0 \quad (\text{A.52})$$

$$\nu = r$$

$$\Gamma_{rr}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} (\partial_r g_{r\phi} + \partial_r g_{r\phi} - \partial_{\phi} g_{rr}) = 0 \quad (\text{A.53})$$

$$\nu = \theta$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} (\partial_r g_{\theta\phi} + \partial_{\theta} g_{r\phi} - \partial_{\phi} g_{r\theta}) = 0 \quad (\text{A.54})$$

$$\nu = \phi$$

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} (\partial_r g_{\phi\phi} + \partial_{\phi} g_{r\phi} - \partial_{\phi} g_{r\phi}) = 0 \quad (\text{A.55})$$

Para $\lambda = \sigma = \phi$ e $\mu = \theta$,

$$\nu = t$$

$$\Gamma_{\theta t}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} (\partial_{\theta} g_{t\phi} + \partial_t g_{\theta\phi} - \partial_{\phi} g_{\theta t}) = 0 \quad (\text{A.56})$$

$$\nu = r$$

$$\Gamma_{\theta r}^{\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_{\theta} g_{r\phi} + \partial_r g_{\theta\phi} - \partial_{\phi} g_{\theta r}) = 0 \quad (\text{A.57})$$

$$\nu = \theta$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_{\theta} g_{\theta\phi} + \partial_{\theta} g_{\theta\phi} - \partial_{\phi} g_{\theta\theta}) = 0 \quad (\text{A.58})$$

$$\nu = \phi$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_{\theta} g_{\phi\phi} + \partial_{\phi} g_{\theta\phi} - \partial_{\phi} g_{\theta\phi}) \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \partial_{\theta} g_{\phi\phi} \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_{\theta} (r^2 \sin^2 \theta) \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) 2r^2 \sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta} = \cot \theta \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Para $\lambda = \sigma = \phi$ e $\mu = \phi$,

$$\nu = t$$

$$\Gamma_{\phi t}^{\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_{\phi} g_{t\phi} + \partial_t g_{\phi\phi} - \partial_{\phi} g_{\phi t}) = 0 \quad (\text{A.60})$$

$$\nu = r$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi r}^{\phi} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_{\phi} g_{r\phi} + \partial_r g_{\phi\phi} - \partial_{\phi} g_{\phi r}) \\ \Gamma_{\phi r}^{\phi} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \partial_r g_{\phi\phi} \\ \Gamma_{\phi r}^{\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_r (r^2 \sin^2 \theta) \\ \Gamma_{\phi r}^{\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) 2r \sin^2 \theta \\ \Gamma_{\phi r}^{\phi} &= \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

$$\nu = \theta$$

$$\Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_{\phi} g_{\theta\phi} + \partial_{\theta} g_{\phi\phi} - \partial_{\phi} g_{\phi\theta})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\theta}^{\phi} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \partial_{\theta} g_{\phi\phi} \\
\Gamma_{\phi\theta}^{\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_{\theta} (r^2 \sin^2 \theta) \\
\Gamma_{\phi\theta}^{\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) 2r^2 \sin \theta \cos \theta \\
\Gamma_{\phi\theta}^{\phi} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta} = \cot \theta
\end{aligned} \tag{A.62}$$

$$\nu = \phi$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_{\phi} g_{\phi\phi} + \partial_{\phi} g_{\phi\phi} - \partial_{\phi} g_{\phi\phi}) = 0 \tag{A.63}$$

Em resumo,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tr}^t &= F'(r) & \Gamma_{tt}^r &= F'(r) e^{2F(r)-2H(r)} & \Gamma_{rr}^r &= H'(r) \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2H(r)} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \sin^2 \theta e^{-2H(r)} & \Gamma_{r\theta}^{\theta} &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{r\phi}^{\phi} &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \cot \theta \quad \text{e todos os outros são nulos.}
\end{aligned}$$

B Tensor de Ricci

Mantendo $\mu = \nu = t$ e variando λ e σ conforme as coordenadas esféricas,

$$R_{tt} = \partial_t \Gamma_{tt}^t + \partial_r \Gamma_{tt}^r + \partial_\theta \Gamma_{tt}^\theta + \partial_\phi \Gamma_{tt}^\phi - \partial_t \Gamma_{rt}^t - \partial_t \Gamma_{rt}^r - \partial_t \Gamma_{\theta t}^\theta - \partial_t \Gamma_{\phi t}^\phi + \Gamma_{tt}^t \Gamma_{tr}^t + \Gamma_{tt}^t \Gamma_{tr}^r + \Gamma_{t\theta}^t \Gamma_{tt}^\theta + \Gamma_{t\phi}^t \Gamma_{tt}^\phi + \Gamma_{rt}^r \Gamma_{tt}^t + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{r\theta}^r \Gamma_{tt}^\theta + \Gamma_{r\phi}^r \Gamma_{tt}^\phi + \Gamma_{\theta t}^\theta \Gamma_{tt}^t + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{tt}^\theta + \Gamma_{\theta\phi}^\theta \Gamma_{tt}^\phi + \Gamma_{\phi t}^\phi \Gamma_{tt}^t + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{tt}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{tt}^\phi - \Gamma_{tt}^t \Gamma_{tt}^t - \Gamma_{rt}^r \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{\theta t}^\theta \Gamma_{tt}^\theta - \Gamma_{\phi t}^\phi \Gamma_{tt}^\phi - \Gamma_{rt}^r \Gamma_{rt}^r - \Gamma_{rt}^r \Gamma_{rt}^r - \Gamma_{\theta t}^\theta \Gamma_{\theta t}^\theta - \Gamma_{\phi t}^\phi \Gamma_{\phi t}^\phi - \Gamma_{\theta t}^\theta \Gamma_{\theta t}^\theta - \Gamma_{\phi t}^\phi \Gamma_{\phi t}^\phi - \Gamma_{rt}^r \Gamma_{\phi t}^\phi - \Gamma_{\theta t}^\theta \Gamma_{\phi t}^\phi - \Gamma_{\phi t}^\phi \Gamma_{\phi t}^\phi$$

Devido a valor nulo de alguns símbolos de Christoffel e derivada não existente de outros, temos

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \partial_r \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{rt}^t \Gamma_{tt}^r - \Gamma_{tt}^r \Gamma_{rt}^t \\ R_{tt} &= \partial_r F' e^{2(F-H)} + F'^2 e^{2(F-H)} + H' F' e^{2(F-H)} + \frac{1}{r} F' e^{2(F-H)} + \frac{1}{r} F' e^{2(F-H)} - F'^2 e^{2(F-H)} - F'^2 e^{2(F-H)} \\ R_{tt} &= [F'' e^{2(F-H)} + 2(F' - H') F' e^{2(F-H)}] + H' F' e^{2(F-H)} + \frac{2}{r} F' e^{2(F-H)} - F'^2 e^{2(F-H)} \\ R_{tt} &= [F'' e^{2(F-H)} + 2(F' - H') F' e^{2(F-H)}] + H' F' e^{2(F-H)} + \frac{2}{r} F' e^{2(F-H)} - F'^2 e^{2(F-H)} \\ R_{tt} &= F'' e^{2(F-H)} + 2F'^2 e^{2(F-H)} - 2H' F' e^{2(F-H)} + H' F' e^{2(F-H)} + \frac{2}{r} F' e^{2(F-H)} - F'^2 e^{2(F-H)} \\ R_{tt} &= F'' e^{2(F-H)} + F'^2 e^{2(F-H)} - H' F' e^{2(F-H)} + \frac{2}{r} F' e^{2(F-H)} \\ R_{tt} &= e^{2(F-H)} \left(F'' + F'^2 - H' F' + \frac{2}{r} F' \right) \end{aligned} \quad (B.1)$$

Mantendo $\mu = \nu = r$ e variando λ e σ conforme as coordenadas esféricas,

$$R_{rr} = \partial_t \Gamma_{rr}^t + \partial_r \Gamma_{rr}^r + \partial_\theta \Gamma_{rr}^\theta + \partial_\phi \Gamma_{rr}^\phi - \partial_r \Gamma_{tr}^t - \partial_r \Gamma_{tr}^r - \partial_r \Gamma_{\theta r}^\theta - \partial_r \Gamma_{\phi r}^\phi + \Gamma_{tt}^t \Gamma_{rr}^t + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{t\theta}^t \Gamma_{rr}^\theta + \Gamma_{t\phi}^t \Gamma_{rr}^\phi + \Gamma_{rt}^r \Gamma_{rr}^t + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^r \Gamma_{rr}^\theta + \Gamma_{r\phi}^r \Gamma_{rr}^\phi + \Gamma_{\theta t}^\theta \Gamma_{rr}^t + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{rr}^\theta + \Gamma_{\theta\phi}^\theta \Gamma_{rr}^\phi + \Gamma_{\phi t}^\phi \Gamma_{rr}^t + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{rr}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{rr}^\phi - \Gamma_{tr}^t \Gamma_{tr}^t - \Gamma_{tr}^r \Gamma_{tr}^r - \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta - \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\phi r}^\phi - \Gamma_{tr}^r \Gamma_{tr}^r - \Gamma_{tr}^r \Gamma_{tr}^r - \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta - \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\phi r}^\phi - \Gamma_{tr}^r \Gamma_{\theta r}^\theta - \Gamma_{tr}^r \Gamma_{\phi r}^\phi - \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\phi r}^\phi - \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta - \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\phi r}^\phi - \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\phi r}^\phi - \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\phi r}^\phi - \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\phi r}^\phi - \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\phi r}^\phi$$

Devido a valor nulo de alguns símbolos de Christoffel e derivada não existente de outros, temos

$$\begin{aligned} R_{rr} &= -\partial_r \Gamma_{tr}^t - \partial_r \Gamma_{\theta r}^\theta - \partial_r \Gamma_{\phi r}^\phi + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{tr}^t \Gamma_{tr}^t - \Gamma_{rr}^r \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta - \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\phi r}^\phi \\ R_{rr} &= -\partial_r \Gamma_{tr}^t - \partial_r \Gamma_{\theta r}^\theta - \partial_r \Gamma_{\phi r}^\phi + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{tr}^t \Gamma_{tr}^t - \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta - \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\phi r}^\phi \\ R_{rr} &= -\partial_r F' - \partial_r \frac{1}{r} - \partial_r \frac{1}{r} + F' H' + \frac{1}{r} H' + \frac{1}{r} H' - F'^2 - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

$$R_{rr} = -F'' + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + F'H' + \frac{1}{r}H' + \frac{1}{r}H' - F'^2 - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}$$

$$R_{rr} = -F'' + F'H' + \frac{2}{r}H' - F'^2 \quad (\text{B.2})$$

Mantendo $\mu = \nu = \theta$ e variando λ e σ conforme as coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} = & \partial_t \Gamma_{\theta\theta}^t + \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r + \partial_\theta \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \partial_\phi \Gamma_{\theta\theta}^\phi - \partial_\theta \Gamma_{t\theta}^t - \partial_\theta \Gamma_{r\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{\theta\theta}^\theta - \partial_\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi + \Gamma_{tt}^t \Gamma_{\theta\theta}^t + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\theta\theta}^r + \\ & \Gamma_{t\theta}^t \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{t\phi}^t \Gamma_{\theta\theta}^\phi + \Gamma_{rt}^r \Gamma_{\theta\theta}^t + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{r\theta}^r \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{r\phi}^r \Gamma_{\theta\theta}^\phi + \Gamma_{\theta t}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^t + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{\theta\phi}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\phi + \\ & \Gamma_{\phi t}^\phi \Gamma_{\theta\theta}^t + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{\theta\theta}^\phi - \Gamma_{t\theta}^t \Gamma_{t\theta}^t - \Gamma_{r\theta}^r \Gamma_{r\theta}^r - \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\theta - \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\theta\theta}^\phi - \Gamma_{t\theta}^t \Gamma_{r\theta}^r - \Gamma_{r\theta}^r \Gamma_{r\theta}^r - \\ & \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{r\theta}^r - \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{r\theta}^r - \Gamma_{t\theta}^t \Gamma_{\theta\theta}^\theta - \Gamma_{r\theta}^r \Gamma_{\theta\theta}^\theta - \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\theta - \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\theta\theta}^\phi - \Gamma_{t\theta}^t \Gamma_{\phi\theta}^\phi - \Gamma_{r\theta}^r \Gamma_{\phi\theta}^\phi - \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi - \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\phi\theta}^\phi \end{aligned}$$

Devido a valor nulo de alguns símbolos de Christoffel e derivada não existente de outros, temos

$$R_{\theta\theta} = \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\theta\theta}^r - \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{r\theta}^r - \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\phi\theta}^\phi$$

$$R_{\theta\theta} = \partial_r(-re^{-2H}) - \partial_\theta \cot \theta + F'(-re^{-2H}) + H'(-re^{-2H}) + \frac{1}{r}(-re^{-2H}) - (-re^{-2H}) \frac{1}{r} - \cot^2 \theta$$

$$R_{\theta\theta} = -e^{-2H} + 2rH'e^{-2H} + \csc^2 \theta + F'(-re^{-2H}) + H'(-re^{-2H}) - \cot^2 \theta.$$

Trigonometricamente,

$$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1.$$

Logo,

$$R_{\theta\theta} = -e^{-2H} + 2rH'e^{-2H} + F'(-re^{-2H}) + H'(-re^{-2H}) + 1$$

$$R_{\theta\theta} = re^{-2H} \left(-\frac{1}{r} + H' - F' \right) + 1 \quad (\text{B.3})$$

Mantendo $\mu = \nu = \phi$ e variando λ e σ conforme as coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi} = & \partial_t \Gamma_{\phi\phi}^t + \partial_r \Gamma_{\phi\phi}^r + \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta + \partial_\phi \Gamma_{\phi\phi}^\phi - \partial_\phi \Gamma_{t\phi}^t - \partial_\phi \Gamma_{r\phi}^r - \partial_\phi \Gamma_{\theta\phi}^\theta - \partial_\phi \Gamma_{\phi\phi}^\phi + \Gamma_{tt}^t \Gamma_{\phi\phi}^t + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\phi\phi}^r + \\ & \Gamma_{t\theta}^t \Gamma_{\phi\phi}^\theta + \Gamma_{t\phi}^t \Gamma_{\phi\phi}^\phi + \Gamma_{rt}^r \Gamma_{\phi\phi}^t + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\phi\phi}^r + \Gamma_{r\theta}^r \Gamma_{\phi\phi}^\theta + \Gamma_{r\phi}^r \Gamma_{\phi\phi}^\phi + \Gamma_{\theta t}^\theta \Gamma_{\phi\phi}^t + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\phi\phi}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta + \Gamma_{\theta\phi}^\theta \Gamma_{\phi\phi}^\phi + \\ & \Gamma_{\phi t}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^t + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^r + \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\phi - \Gamma_{t\phi}^t \Gamma_{t\phi}^t - \Gamma_{r\phi}^r \Gamma_{r\phi}^r - \Gamma_{\theta\phi}^\theta \Gamma_{\theta\phi}^\theta - \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\phi - \Gamma_{t\phi}^t \Gamma_{r\phi}^r - \Gamma_{r\phi}^r \Gamma_{r\phi}^r - \\ & \Gamma_{\theta\phi}^\theta \Gamma_{r\phi}^r - \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{r\phi}^r - \Gamma_{t\phi}^t \Gamma_{\theta\phi}^\theta - \Gamma_{r\phi}^r \Gamma_{\theta\phi}^\theta - \Gamma_{\theta\phi}^\theta \Gamma_{\theta\phi}^\theta - \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^\theta - \Gamma_{t\phi}^t \Gamma_{\phi\phi}^\phi - \Gamma_{r\phi}^r \Gamma_{\phi\phi}^\phi - \Gamma_{\theta\phi}^\theta \Gamma_{\phi\phi}^\phi - \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\phi \end{aligned}$$

Devido a valor nulo de alguns símbolos de Christoffel e derivada não existente de outros, temos

$$R_{\phi\phi} = \partial_r \Gamma_{\phi\phi}^r + \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\phi\phi}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\phi\phi}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\phi\phi}^r + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^r - \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{r\phi}^r - \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\theta\phi}^\theta - \Gamma_{r\phi}^r \Gamma_{\phi\phi}^\phi$$

$$R_{\phi\phi} = \partial_r \Gamma_{\phi\phi}^r + \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\phi\phi}^r + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\phi\phi}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\phi\phi}^r - \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\theta\phi}^\theta - \Gamma_{r\phi}^r \Gamma_{\phi\phi}^\phi$$

$$R_{\phi\phi} = \partial_r(-r \sin^2 \theta e^{-2H}) + \partial_\theta(-\sin \theta \cos \theta) + F'(-r \sin^2 \theta e^{-2H}) + H'(-r \sin^2 \theta e^{-2H}) \\ + \frac{1}{r}(-r \sin^2 \theta e^{-2H}) - (-\sin \theta \cos \theta) \cot \theta - \frac{1}{r}(-r \sin^2 \theta e^{-2H})$$

$$R_{\phi\phi} = -\sin^2 \theta e^{-2H} + 2rH' \sin^2 \theta e^{-2H} - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - rF' \sin^2 \theta e^{-2H} - rH' \sin^2 \theta e^{-2H} + \cos^2 \theta$$

$$R_{\phi\phi} = -\sin^2 \theta e^{-2H} + rH' \sin^2 \theta e^{-2H} + \sin^2 \theta - rF' \sin^2 \theta e^{-2H}$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta - \sin^2 \theta e^{-2H}(1 + rF' - rH')$$

$$R_{\phi\phi} = [1 - e^{-2H}(1 + rF' - rH')] \sin^2 \theta \quad (\text{B.4})$$

Em resumo

$$R_{tt} = e^{2(F-H)} \left(F'' + F'^2 - H'F' + \frac{2}{r}F' \right) \quad (\text{B.5})$$

$$R_{rr} = -F'' + F'H' + \frac{2}{r}H' - (F')^2 \quad (\text{B.6})$$

$$R_{\theta\theta} = re^{-2H} \left(-\frac{1}{r} + H' - F' \right) + 1 \quad (\text{B.7})$$

$$R_{\phi\phi} = [1 - e^{-2H}(1 + rF' - rH')] \sin^2 \theta \quad (\text{B.8})$$

C Escalar de Ricci

Iremos desenvolver a seguinte equação para o escalar de Ricci

$$R = R_{tt}g^{tt} + R_{rr}g^{rr} + R_{\theta\theta}g^{\theta\theta} + R_{\phi\phi}g^{\phi\phi}. \quad (\text{C.1})$$

Substituindo os tensores e as métricas,

$$\begin{aligned} R = e^{2(F-H)} & \left[F'' + (F')^2 - H'F' + \frac{2}{r}F' \right] (-e^{-2F}) + \left[-F'' + F'H' + \frac{2}{r}H' - (F')^2 \right] e^{-2H} \\ & + \left[re^{-2H} \left(-\frac{1}{r} + H' - F' \right) + 1 \right] \frac{1}{r^2} + [1 - e^{-2H}(1 + rF' - rH')] \sin^2 \theta \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R = -F''e^{-2H} - (F')^2e^{-2H} + H'F'e^{-2H} - \frac{2}{r}F'e^{-2H} - F''e^{-2H} + F'H'e^{-2H} + \frac{2}{r}H'e^{-2H} \\ - (F')^2e^{-2H} - \frac{e^{-2H}}{r^2} + \frac{H'}{r}e^{-2H} - \frac{F'}{r}e^{-2H} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{e^{-2H}}{r^2} - \frac{F'}{r}e^{-2H} + \frac{H'}{r}e^{-2H} \end{aligned}$$

$$R = -2F''e^{-2H} - 2(F')^2e^{-2H} + 2H'F'e^{-2H} - \frac{4}{r}F'e^{-2H} + \frac{4}{r}H'e^{-2H} - \frac{2}{r^2}e^{-2H} + \frac{2}{r^2}$$

$$R = -2e^{-2H} \left[F'' + (F')^2 - H'F' + \frac{2}{r}F' - \frac{2}{r}H' + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{2H} \right]$$

$$R = -2e^{-2H} \left[F'' + \left(F' + \frac{2}{r} \right) (F' - H') + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2H}) \right]. \quad (\text{C.2})$$

D Tensor de Einstein

Para $\mu=\nu=t$,

$$G_{tt} = R_{tt} - \frac{1}{2}Rg_{tt}. \quad (\text{D.1})$$

Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} G_{tt} &= e^{2(F-H)} \left(F'' + (F')^2 - H'F' + \frac{2}{r}F' \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[-2e^{-2H} \left(F'' + (F')^2 - H'F' + \frac{2}{r}F' - \frac{2}{r}H' + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{2H} \right) \right] (-e^{2F}) \\ G_{tt} &= F''e^{2(F-H)} + (F')^2e^{2(F-H)} - H'F'e^{2(F-H)} + \frac{2}{r}F'e^{2(F-H)} - F''e^{2(F-H)} - (F')^2e^{2(F-H)} \\ &\quad + H'F'e^{2(F-H)} - \frac{2}{r}F'e^{2(F-H)} + \frac{2}{r}H'e^{2(F-H)} - \frac{1}{r^2}e^{2(F-H)} + \frac{1}{r^2}e^{2F} \\ G_{tt} &= \frac{2}{r}H'e^{2(F-H)} - \frac{1}{r^2}e^{2(F-H)} + \frac{1}{r^2}e^{2F} \\ G_{tt} &= -\frac{1}{r^2}e^{2(F-H)}(1 - 2rH' - e^{2H}). \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Para $\mu=\nu=r$,

$$G_{rr} = R_{rr} - \frac{1}{2}Rg_{rr}. \quad (\text{D.3})$$

Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} G_{rr} &= -F'' + F'H' + \frac{2}{r}H' - F'^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[-2e^{-2H} \left(F'' + (F')^2 - H'F' + \frac{2}{r}F' - \frac{2}{r}H' + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{2H} \right) \right] e^{2H} \\ G_{rr} &= -F'' + F'H' + \frac{2}{r}H' - (F')^2 + F'' + (F')^2 - H'F' + \frac{2}{r}F' - \frac{2}{r}H' + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{2H} \\ G_{rr} &= \frac{2}{r}F' + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{2H} \\ G_{rr} &= \frac{1}{r^2}(1 + 2rF' - e^{2H}). \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Para $\mu=\nu=\theta$,

$$G_{\theta\theta} = R_{\theta\theta} - \frac{1}{2}Rg_{\theta\theta}. \quad (\text{D.5})$$

Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} G_{\theta\theta} &= re^{-2H} \left(-\frac{1}{r} + H' - F' \right) + 1 \\ &- \frac{1}{2} \left[-2e^{-2H} \left(F'' + (F')^2 - H'F' + \frac{2}{r}F' - \frac{2}{r}H' + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{2H} \right) \right] r^2 \\ G_{\theta\theta} &= -e^{-2H} + rH'e^{-2H} - rF'e^{-2H} + r^2F''e^{-2H} + r^2(F')^2e^{-2H} \\ &\quad - r^2H'F'e^{-2H} + 2rF'e^{-2H} - 2rH'e^{-2H} + e^{-2H} - 1 + 1 \\ G_{\theta\theta} &= -rH'e^{-2H} + rF'e^{-2H} + r^2F''e^{-2H} + r^2(F')^2e^{-2H} - r^2H'F'e^{-2H} \\ G_{\theta\theta} &= r^2e^{-2H} \left(-\frac{H'}{r} + \frac{F'}{r} + F'' + (F')^2 - H'F' \right) \\ G_{\theta\theta} &= r^2e^{-2H} \left[F'' + \left(F' + \frac{1}{r} \right) (F' - H') \right]. \quad (\text{D.6}) \end{aligned}$$

Para $\mu=\nu=\phi$,

$$G_{\phi\phi} = R_{\phi\phi} - \frac{1}{2}Rg_{\phi\phi}. \quad (\text{D.7})$$

Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} G_{\phi\phi} &= [1 - e^{-2H}(1 + rF' - rH')] \sin^2 \theta \\ &- \frac{1}{2} \left[-2e^{-2H} \left(F'' + (F')^2 - H'F' + \frac{2}{r}F' - \frac{2}{r}H' + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{2H} \right) \right] r^2 \sin^2 \theta \\ G_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta - e^{-2H} \sin^2 \theta - rF'e^{-2H} \sin^2 \theta + rH'e^{-2H} \sin^2 \theta + r^2F''e^{-2H} \sin^2 \theta \\ &\quad + r^2(F')^2e^{-2H} \sin^2 \theta - r^2H'F'e^{-2H} \sin^2 \theta + 2rF'e^{-2H} \sin^2 \theta \\ &\quad - 2rH'e^{-2H} \sin^2 \theta + e^{-2H} \sin^2 \theta - \sin^2 \theta \\ G_{\phi\phi} &= rF'e^{-2H} \sin^2 \theta - rH'e^{-2H} \sin^2 \theta + r^2F''e^{-2H} \sin^2 \theta \\ &\quad + r^2(F')^2e^{-2H} \sin^2 \theta - r^2H'F'e^{-2H} \sin^2 \theta \\ G_{\phi\phi} &= r^2e^{-2H} \left(\frac{F'}{r} - \frac{H'}{r} + F'' + (F')^2 - H'F' \right) \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$G_{\phi\phi} = r^2 e^{-2H} \left[F'' + \left(F' + \frac{1}{r} \right) (F' - H') \right] \sin^2 \theta$$

$$G_{\phi\phi} = G_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \quad (\text{D.8})$$

Matricialmente representamos o tensor de Einstein como

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2} e^{2(F-H)} (1-2rH'-e^{2H}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} (1+2rF'-e^{2H}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 e^{-2H} \left[F'' + \left(F' + \frac{1}{r} \right) (F' - H') \right] \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{\theta\theta} \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

E Tensor de energia-momento

Como a única dimensão com velocidade é o tempo,

$$T_{tt} = (\rho + p)u_t u_t + pg_{tt} \quad (\text{E.1})$$

$$T_{rr} = (\rho + p)u_r u_r + pg_{rr} = (\rho + p) \cdot 0 + pg_{rr} = pg_{rr} \quad (\text{E.2})$$

$$T_{\theta\theta} = (\rho + p)u_\theta u_\theta + pg_{\theta\theta} = (\rho + p) \cdot 0 + pg_{\theta\theta} = pg_{\theta\theta} \quad (\text{E.3})$$

$$T_{\phi\phi} = (\rho + p)u_\phi u_\phi + pg_{\phi\phi} = (\rho + p) \cdot 0 + pg_{\phi\phi} = pg_{\phi\phi}. \quad (\text{E.4})$$

Os elementos fora da diagonal principal são iguais a zero.

Assim, temos que matricialmente o tensor de energia-momento é

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (\rho + p)u_t u_t + pg_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pg_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pg_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pg_{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad (\text{E.5})$$

Para normalizar o vetor velocidade da coordenada temporal, consideraremos

$$u_t u_t g^{tt} = -1$$

logo, substituindo g_{tt} ,

$$u_t u_t (-e^{-2F}) = -1$$

$$u_t u_t = e^{2F} \quad (\text{E.6})$$

A pressão no vácuo é nula, ou seja $p = 0$. Sendo assim, a componente temporal da matriz será

$$T_{tt} = \rho u_t u_t,$$

que, substituindo os parâmetros de velocidade

$$T_{tt} = \rho e^{2F}. \quad (\text{E.7})$$

A matriz agora será

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho g_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pg_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pg_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pg_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

substituindo os respectivos valores de $g_{\mu\nu}$,

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho e^{2F} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p e^{2H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p r^2 \sin^2 \theta. \end{pmatrix} \quad (\text{E.8})$$

Referências

- CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Benjamin Cummings, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 30.
- COIMBRA-ARAÚJO, C. H. *Diagramas de Carter-Penrose em Relatividade Geral: buracos negros e outros exemplos explícitos*. [S.l.]: Revista Brasileira de Ensino de Física, 2016. (Vol.38). Citado 2 vezes nas páginas 9 e 17.
- D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. [S.l.]: Oxford University Press, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 9, 13, 20 e 30.
- FROLOV, V. P.; ZELNIKOV, A. *Introduction to black hole physics*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2011. Citado na página 18.
- Misner, C. W.; Thorne, K. S.; Wheeler, J. A. *Gravitation*. [S.l.: s.n.], 1973. Citado na página 27.
- PENROSE, R. *The road to reality : a complete guide to the laws of the universe*. London: Vintage, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 32.
- RYDER, L. *Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 21, 25, 29, 31 e 35.
- SAA, A. *Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild*. [S.l.]: Revista Brasileira de Ensino de Física, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 12.
- SCHUTZ, B. Book. *A First Course in General Relativity*. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 30.
- SCHWARZSCHILD, K. [S.l.]: Astron. Nachr., **124**, 211, 1890. Citado na página 12.
- SCHWARZSCHILD, K. [S.l.]: Astron. Nachr., **124**, 215, 1890. Citado na página 12.
- SCHWARZSCHILD, K. *Neue Annalen der K. Sternwarte in Bogenhausen bei Muenchen*. [S.l.]: 3, 231, 1992. Citado na página 12.
- VOIGT, H. *Karl Schwarzschild: Gesammelte Werke/Collected Works*. [S.l.]: Springer, Berlin, 1992. (Volume 1). Citado na página 12.
- WALD, R. M. Book. *General Relativity*. [S.l.]: The University of Chicago Press, 1984. Citado na página 24.