

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Coordenação do Curso de Engenharia Mecânica

Aplicação de Elementos Finitos de Viga para Análise de Flexão em Eixos

Victor Ruben Silva Câmara

São Luís – MA

2023

Victor Ruben Silva Câmara

Aplicação de Elementos Finitos de Viga para Análise de Flexão em Eixos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do curso de Engenharia Mecânica como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica, sob orientação do Prof. Dr. Dalmo Inacio Galdêz Costa.

São Luís – MA

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Câmara, Victor Ruben Silva.

Aplicação de Elementos Finitos de Viga para Análise de Flexão de Eixos / Victor Ruben Silva Câmara. - 2023.

58 f.

Orientador(a): Dalmo Inacio Galdêz Costa.

Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2023.

1. Eixo. 2. Elementos Finitos. 3. Euler-Bernoulli.
4. Funções de Interpolação. 5. Trabalho Virtual. I.
Costa, Dalmo Inacio Galdêz. II. Título.

Aplicação de Elementos Finitos de Viga para Análise de Flexão em Eixos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do curso de Engenharia Mecânica como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica, sob orientação do Prof. Dr. Dalmo Inacio Galdéz Costa.

Aprovada em _____ de _____ de _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Dalmo Inacio Galdéz Costa - Titular

Prof. Dr. Vilson Souza Pereira - Titular

Prof. Dr. Edilson Dantas Nóbrega - Titular

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda a minha família, em especial aos meus pais Áurea e Ruben, que me proporcionaram a oportunidade de me dedicar aos estudos e me aperfeiçoar profissionalmente, a minha irmã Bianca e minha namorada Layla pelo apoio e por todo o companheirismo.

Agradeço ao meu orientador Dalmo Costa, pela paciência e por todo o apoio pedagógico dado, tanto na elaboração deste trabalho quanto ao longo da vida acadêmica.

Também agradeço a todos os meus amigos e colegas da Universidade Federal do Maranhão, principalmente ao meu amigo Joas, que esteve comigo durante toda essa jornada e me ajudou nos momentos mais difíceis, ao meu amigo Fábio, ao Josean, ao João Victor e a todos que colaboraram de alguma forma para a conclusão deste curso.

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo implementar um algoritmo que analise as deflexões, inclinações, momentos fletores, esforços cortantes e tensões em eixos submetidos a flexão através de elementos finitos unidimensionais de 3 nós, aproximados por um polinômio de quinto grau fazendo a interpolação dos valores nodais utilizados para implementar uma formulação do Método dos Elementos Finitos. Toda esta formulação foi feita a partir da equação diferencial da viga de Euler-Bernoulli com a aplicação do Princípio do Trabalho Virtual. Com o código implementado em Matlab, foram feitas comparações entre os resultados numéricos e aqueles obtidos de forma analítica. A validação foi feita para o caso de um carregamento pontual em um eixo com diâmetro constante e com apoios simples em ambas as extremidades. Os resultados foram avaliados contra a solução analítica e uma análise de convergência com um, dois e três elementos foi realizada. Posteriormente, foram simulados dois exemplos com estudos de caso para eixos escalonados com duas engrenagens cada. As simulações dessas situações mostraram diâmetros de eixo que satisfaziam as condições de deflexão, inclinação e tensão do problema, e que poderiam ser obtidas atribuindo valores sem a necessidade de uma malha tão refinada, já que o algoritmo conseguiu demonstrar uma rápida convergência.

Palavras – chave: Elementos Finitos, Eixo, Euler-Bernoulli, Trabalho Virtual, Funções de Interpolação.

ABSTRACT

The present work aimed to implement an algorithm that analyzes deflections, inclinations, bending moments, shear efforts and tensions in shafts subjected to bending through one-dimensional finite elements of 3 nodes, approximated by a fifth-degree polynomial interpolating the nodal values. used to implement a formulation of the Finite Element Method. This entire formulation was made based on the differential equation of the Euler-Bernoulli beam with the application of the Virtual Work Principle. With the code implemented in Matlab, comparisons were made between the numerical results and those obtained analytically. The validation was carried out in the case of a point load on a shaft with a constant diameter and with simple supports at both ends. The results were evaluated against the analytical solution and a convergence analysis with one, two and three elements were performed. Subsequently, two examples were simulated with case studies for stepped axles with two gears each. The simulations of these situations showed shaft diameters that satisfied the deflection, inclination, and tension conditions of the problem, and which could be obtained by assigning values without the need for such a refined mesh, as the algorithm was able to demonstrate rapid convergence.

Keywords: Finite Elements, Shaft, Euler-Bernoulli, Virtual Work, Interpolation Functions.

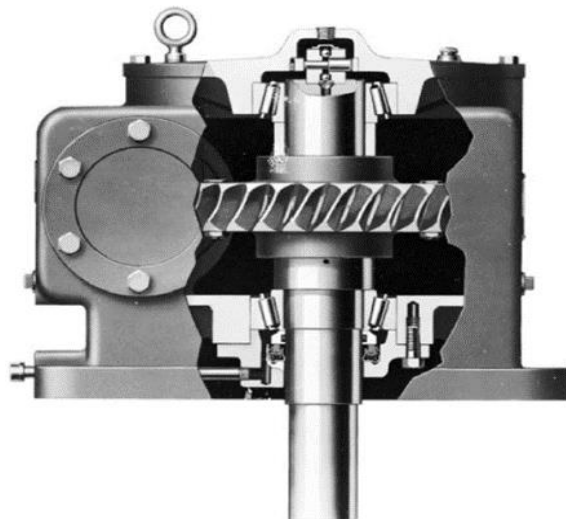
SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	8
2. JUSTIFICATIVA.....	11
3. OBJETIVOS	12
3.1. OBJETIVO GERAL.....	12
3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
4. CONTEXTUALIZAÇÃO TEÓRICA	13
4.1. VIGA DE EULER-BERNOULLI.....	13
4.2. PROJETO DE EIXO	14
4.2.1. MATERIAIS DE EIXO	14
4.2.2. CARGAS E TENSÕES NO EIXO.....	14
4.3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	15
4.3.1. HISTÓRICO.....	15
4.3.2. ELEMENTOS, NÓS E MALHAS	16
4.3.3. FORMULAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ	17
5. METODOLOGIA.....	23
5.1. DADOS DE ENTRADA	23
5.2. MALHA	23
5.3. MATRIZ DE RIGIDEZ	23
5.4. CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	24
5.5. RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	24
5.6. REAÇÕES DE APOIO	24
5.7. ESFORÇOS INTERNOS	24
5.8. APRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS	26
6. RESULTADOS E DISCUSSÃO	27
6.1.EXEMPLO ANALÍTICO.....	27
6.2.EIXO ESCALONADO	28
6.2.1. EXEMPLO I.....	29
6.2.2. EXEMPLO II.....	36
7. CONCLUSÃO.....	41
REFERÊNCIAS	42
APÊNDICE A – Algoritmos principais.....	43
APÊNDICE B – Dados de entrada.....	48
APÊNDICE C – Funções	52

1. INTRODUÇÃO

Apesar de revolucionária, a roda só desempenhou o seu mais importante e atual papel, que é o de transporte, quando o conjunto roda e eixo foi criado (ANTHONY, 2012). Um eixo é definido como um elemento rotativo, usualmente de seção transversal circular, usado para transmitir potência ou movimento, que funciona para rotação de outros elementos como engrenagens, polias, manivelas, volantes, rodas dentadas e outros elementos similares (BUDYNAS e NISBETT, 2011). A Figura 1 mostra uma aplicação em corte de um eixo.

Figura 1. Eixo aplicado em um redutor de velocidade de engrenagem sem fim.



Fonte: BUDYNAS e NISBETT (2011).

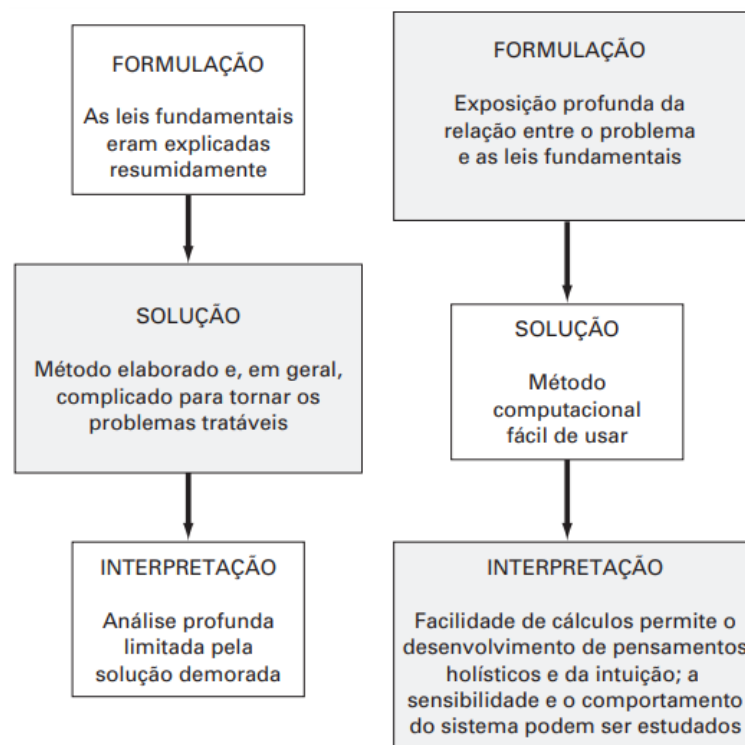
No desenvolvimento dos cálculos de uma estrutura ou elemento, o sucesso dessa tarefa não está apenas condicionado ao conhecimento de um aparato matemático muitas vezes complicado, mas à capacidade que o engenheiro apresenta de entender a natureza física do fenômeno que se propõe a resolver. O engenheiro deve garantir que a estrutura objeto de análise não estará sujeita a falhas sob as diversas condições de operação. (ALVES FILHO, 2005).

Os conhecimentos aplicados aos projetos mecânicos são amplamente difundidos nos cursos de graduação em engenharia mecânica e fazem parte do dia a dia do engenheiro, principalmente no que diz respeito ao projeto de elementos de máquinas. Os

métodos analíticos de solução de problemas de engenharia são obtidos através de equações diferenciais, que descrevem uma solução exata em qualquer ponto de interesse (ALVES FILHO, 2000). Os componentes mecânicos na forma de barras simples, vigas etc, podem ser analisados de forma relativamente fácil utilizando os métodos analíticos básicos, entretanto, componentes reais raramente são tão simples, e o projetista se vê forçado a adotar aproximações numéricas (BUDYNAS e NISBETT, 2008).

Na era anterior a computação, uma quantidade significativa de energia era gasta na técnica de resolução da solução numérica propriamente dita, quando o foco deveria estar na definição e interpretação do problema, como mostra a Figura 2. Essa situação existia porque muito tempo e trabalho pesado era necessário para obter respostas numéricas de forma manual. Atualmente, os métodos numéricos associados aos computadores fornecem uma alternativa prática para tais cálculos complicados. Usando o poder do computador para obter diretamente soluções, é possível abordar esses cálculos sem o recurso de hipóteses simplificadoras ou técnicas para economizar tempo (CHAPRA e CANALE, 2011).

Figura 2. Comparação da sequência de solução de problemas antes (à esquerda) e depois do computador (à direita).



Fonte: CHAPRA e CANALE (2011).

Para analisar as tensões e a deflexão em uma peça com tal complexidade, pode-se dividir o seu volume em um conjunto finito de elementos contíguos e discretos e resolver um conjunto grande de equações. Essa técnica é conhecida como Método dos Elementos Finitos (MEF) (NORTON, 2013).

Segundo Alves Filho (2005), a grande tarefa da análise estrutural é determinar a relação entre as cargas que atuam em cada ponto desses elementos e os deslocamentos da estrutura inteira, nessa tarefa, o conceito de rigidez está presente. Ao tomar um exemplo com apenas um elemento submetido a tração em um ponto e o outro fixado, a força externa F causa um deslocamento U no nó a ser analisado. Essas grandezas se relacionam através da constante de rigidez K , mostrada na Equação (1).

$$F = KU \quad (1)$$

A Equação (1) foi um exemplo simples de elemento de barra unidimensional com apenas um elemento. Para formular um elemento de viga, alvo deste estudo e simular situações reais com precisão, um número maior de graus de liberdade é necessário, e consequentemente, um número maior de componentes nos vetores de carga e deslocamento e na, agora, matriz de rigidez. A relação geral é dada de forma matricial na Equação (2).

$$[F]_{mx1} = [K]_{mxm} \cdot [U]_{mx1} \quad (2)$$

Onde $[F]$ é o vetor de carregamentos, $[K]$ é a matriz de rigidez e $[U]$ o vetor de deslocamentos. O valor de m é o número de graus de liberdade do problema sendo analisado. É importante ressaltar que a montagem da matriz de rigidez está diretamente ligada as propriedades mecânicas e geométricas do material, e a matriz de cargas do elemento de viga submetido somente à flexão é feita através de forças e momentos fletores nos nós, gerando uma deformação no sólido que pode ser mensurada em termos de deslocamentos e inclinações.

Apesar do foco do presente estudo ser a aplicação em eixos, o Método dos Elementos Finitos possui uma faixa ampla de aplicação, como por exemplo, a transferência de calor; projetos de válvulas, tubos e vasos de pressão; análises sísmicas; análises de impacto; aplicações em mecânica dos fluidos; eletromagnetismo; e análises de procedimentos cirúrgicos (FISH e BELYTSCHEKO, 2009).

2. JUSTIFICATIVA

Os eixos, assim como os elementos de fixação, têm larga aplicação em muitos tipos de máquinas, com o objetivo de transmitir energia através de movimentos rotativos de uma posição a outra. Assim, o projetista de máquinas está constantemente envolvido com a tarefa de projetar eixos (NORTON, 2013).

Nas situações em que os métodos analíticos se tornam custosos, pouco eficazes ou mesmo impossíveis de serem aplicados, os métodos numéricos são a saída para obter uma resposta aceitável, ainda que aproximada, para o problema e o Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma dessas saídas. O MEF consiste em uma aproximação numérica com a qual as equações diferenciais podem ser resolvidas para solucionar problemas de engenharia, tais como análise de tensões, transferência de calor, escoamento de fluidos e eletromagnetismo, por meio de simulações de computador (FISH; BELYTSCHKO, 2009).

Dimensionar um eixo pelos métodos analíticos é uma tarefa árdua devido a quantidade de variáveis a serem sequencialmente calculadas. Um dos pontos de atenção são os coeficientes a serem empregados, que normalmente são válidos em determinados intervalos de grandezas, usualmente encontrado em tabelas. Em uma aplicação real, o eixo normalmente é escalonado, o que faz com que sua seção transversal se altere, conseqüentemente, se altera também o momento de inércia, assim, muitas vezes o projeto analítico de eixos induz o projetista a fazer a análise apenas em pontos específicos, chamados de pontos críticos, que é o local onde se considera maior o risco de falha, baseando-se na premissa de que se o eixo suportar a carga nesse ponto, suportará em todo o seu corpo (BUDYNAS; NISBETT, 2011). Essa simplificação se torna necessária, porém está longe de descrever o comportamento completo do eixo ao longo do seu corpo.

Ao utilizar o Método dos Elementos Finitos para analisar um eixo é possível obter valores aproximados dos valores exatos e com um grau de aproximação adequado, o projetista pode tornar aquele estudo que engloba tensões e deflexões como válido para garantir a eficiência do seu projeto.

3. OBJETIVOS

3.1. OBJETIVO GERAL

Desenvolver um algoritmo baseado no Método dos Elementos Finitos com elementos de viga com três nós e funções de forma de quinto grau, com o objetivo de analisar eixos.

3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analisar de forma teórica e numérica a formulação de viga na teoria de Euler-Bernoulli e sua aplicação em eixos submetidos somente a flexão;
- Desenvolver um algoritmo que implemente o MEF para vigas o especificando para aplicações em eixos;
- Comparar os resultados numéricos com resultados analíticos realizando uma análise de convergência;
- Aplicar o código para problemas típicos de eixos;

4. CONTEXTUALIZAÇÃO TEÓRICA

4.1. VIGA DE EULER-BERNOULLI

A deflexão máxima de uma viga sob um determinado carregamento tem importância especial, pois as especificações de projeto geralmente incluem um valor máximo admissível para sua deflexão. Uma viga prismática submetida à flexão pura é flexionada em um arco para o qual, dentro do regime elástico, a curvatura da superfície neutra pode ser expressa na Equação (3):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (3)$$

Onde M é o momento fletor, E é o módulo de elasticidade, I representa o segundo momento de área da viga e ρ é a curvatura após a aplicação do momento. Para determinarmos a inclinação e a deflexão transversal da viga em um ponto qualquer do seu comprimento, primeiro é necessário conhecer a equação diferencial linear de segunda ordem que governa a linha elástica e caracteriza a forma da viga deformada (BEER, 2010).

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (4)$$

Considerando que a flexão seja constante ao longo da viga, a Equação (4) tem o seu comportamento descrito pelas Equações (5) e (6).

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{V(x)}{EI} \quad (5)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{q(x)}{EI} \quad (6)$$

A solução para as equações diferenciais descritas acima pode ser encontrada pelo método da integração direta.

4.2. PROJETO DE EIXO

4.2.1. MATERIAIS DE EIXO

A presença do módulo de elasticidade nas Equações (3) a (6) mostra que a linha elástica não é afetada pela resistência, mas sim pela rigidez do material, que é basicamente constante para todos os aços. Portanto, as decisões de projeto relativas a um eixo são relacionadas à sua geometria (BUDYNAS; NISBETT, 2011).

A maior parte dos eixos de máquinas é feita de aço de baixo ou médio carbono, obtido por laminação a frio ou a quente, embora aços-liga sejam também usados quando se precisa de alta resistência (NORTON, 2013). Porém, a um certo ponto, os malefícios em relação a falha por fadiga e sensibilidade a entalhes (como o rasgo para chaveta) começam a contrapor os benefícios do aumento de resistência (BUDYNAS e NISBETT, 2011).

4.2.2. CARGAS E TENSÕES NO EIXO

A combinação de um momento fletor e um torque em um eixo em rotação cria tensões multiaxiais. Segundo BUDYNAS e NISBETT (2011), a verificação de tensões em cada ponto se faz desnecessária quando é possível verificar as tensões em pontos potencialmente críticos, partindo da premissa de que, se o eixo suporta a tensão naquele ponto específico, normalmente um concentrador de tensão que fica na superfície, conseqüentemente irá suportá-la nos demais pontos de sua geometria. As Equações (7) e (8) mostram a tensão de flexão média e tensão de flexão alternada máxima nos pontos de interesse.

$$\sigma_m = K_{fm} \left(\frac{M_m c}{I} \right) \quad (7)$$

$$\sigma_a = K_{fa} \left(\frac{M_a c}{I} \right) \quad (8)$$

Os coeficientes K_{fm} e K_{fa} são, respectivamente, os coeficientes de concentração de tensão média e alternada de fadiga, que dependem da geometria local dos pontos onde se estão avaliando as tensões. Admitindo que a seção transversal do eixo seja circular e que o eixo seja maciço, c e I se tornam, respectivamente:

$$c = r = \frac{d}{2} \quad (9)$$

$$I = \pi \frac{d^4}{64} \quad (10)$$

De forma análoga, as tensões torcionais de cisalhamento médio e alternante são dadas pelas Equações (11) e (12):

$$\tau_m = K_{fsm} \left(\frac{16T_m}{\pi d^3} \right) \quad (11)$$

$$\tau_a = K_{fsa} \left(\frac{16T_a}{\pi d^3} \right) \quad (12)$$

Onde K_{fsm} e K_{fsa} são fatores de concentração de tensão torcional de fadiga média e alternada, respectivamente (NORTON, 2013).

4.3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

4.3.1. HISTÓRICO

O Método dos Elementos Finitos foi desenvolvido por volta da década de 1950 pela indústria aeroespacial, sendo a *Boeing* e a *Bell Aeroespacial* nos Estados Unidos e a *Rolls Royce* no Reino Unido as principais desenvolvedoras. Em 1956, Turner, Clough, Martin e Topp publicaram os primeiros artigos contendo as principais ideias do método, estabelecendo os procedimentos de montagem da matriz de elementos e formulações, porém, sem chamá-las de elementos finitos.

Como já esperado, a comunidade acadêmica manteve um certo ceticismo inicial ao novo método. Em 1965, a NASA iniciou um projeto para desenvolver um programa com objetivo geral em elementos finitos, que ficou conhecido como NASTRAN. O escopo deste projeto incluía a análise de tensões em 2 e 3 dimensões, em vigas e elementos de casca para análise de estruturas mais complexas como armaduras de avião e análise de vibrações e respostas transientes de cargas dinâmicas.

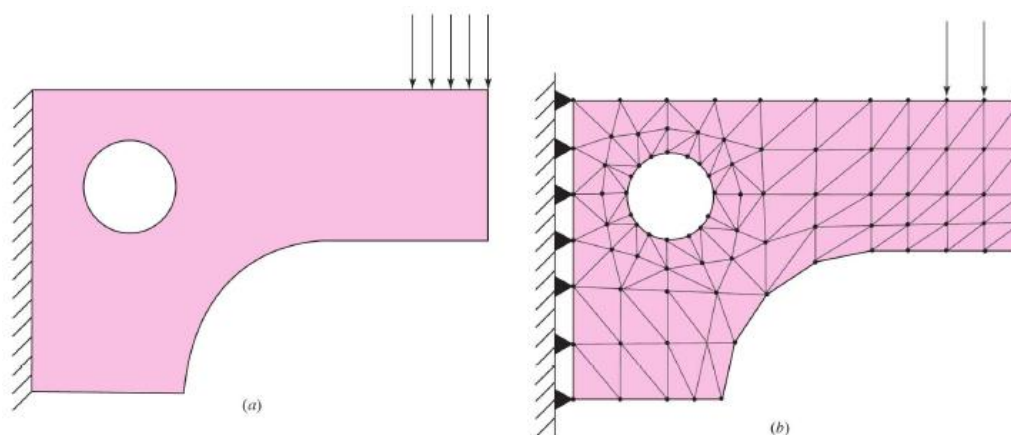
A grande mudança na implementação do MEF foi a partir do aumento exponencial da velocidade dos computadores, permitindo ao engenheiro realizar uma quantidade maior de cálculos de forma simultânea, principalmente quando comparado ao ENIAC, computador utilizado para cálculos balísticos em 1945 (FISH e BELYTSCHKO, 2009).

Existe uma grande variedade de técnicas numéricas usadas em aplicações de engenharia para as quais o computador digital é muito útil. Os softwares com AEF (Análise por Elementos Finitos) integrados a projetos no CAD (*Computer Aided Design*) são intensamente empregados, assim como as linguagens de programação, alvo do presente trabalho.

4.3.2. ELEMENTOS, NÓS E MALHAS

O MEF é uma técnica numérica que discretiza o domínio de uma estrutura contínua, isso é feito através da partição da geometria original da estrutura em formas específicas que dependem da dimensão do problema. Cada elemento se conecta através de um *nós e arestas*, sendo o conjunto destes elementos chamado de *malha*. O número de nós varia de acordo com a geometria utilizada e o grau de aproximação escolhido para o elemento finito. A Figura 3 mostra um exemplo de discretização.

Figura 3. Elemento discretizado com carga vertical.



Fonte: BUDYNAS e NISBETT (2011).

Como se trata de uma aproximação numérica, é esperado uma quantidade de erro, que pode ser mitigada com o *refinamento de malha*, que de forma simples é o aumento do número de elementos, e conseqüentemente, aumento do número de nós. Esse aumento traz consigo uma melhor aproximação do resultado analítico, todavia, uma maior quantidade de elementos a ser calculada gera um aumento de custo computacional e requer uma melhor capacidade de processamento. Cabe ao projetista decidir qual o nível de refinamento necessário para sua malha (ALVES FILHO, 2005).

4.3.3. FORMULAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Para a determinação da matriz de rigidez do elemento de viga, será utilizado o *Princípio dos Trabalhos virtuais*, escrito por Johann Bernoulli em 1717 baseado na conservação de energia. Neste princípio, o trabalho externo e a energia interna de deformação são causados por um carregamento virtual em função dos deslocamentos e deformações por este gerados (HIBBELER, 2004). A conservação de energia dos trabalhos virtuais é expressa por:

$$U_i^* = U_e^* \quad (13)$$

Aplicando os carregamentos virtuais na Equação (13) e considerando apenas o trabalho proveniente do momento fletor, seguindo a teoria das vigas de Euler-Bernoulli, os trabalhos virtuais são definidos pela equação (14).

$$U_i = \int_V \sigma \delta \varepsilon^* dV = U_e = M \theta^* \quad (14)$$

Assumindo que o elemento tem um comportamento elástico linear, a Lei de *Hooke* é válida, assim, a expressão $\sigma = \varepsilon E$ pode ser substituída na Equação (14), formando:

$$U_i = \int_V \varepsilon E \delta \varepsilon^* dV \quad (15)$$

E conseqüentemente, é possível relacionar as deformações (real e virtual) com a inclinação e deslocamento.

$$\varepsilon = \frac{d\theta}{dx} y = \frac{d^2 v}{dx^2} y \quad (16)$$

$$\varepsilon^* = \frac{d\delta\theta^*}{dx} y = \frac{d^2 \delta v^*}{dx^2} y \quad (17)$$

Substituindo (16) e (17) em (15), obtém-se a Equação (18):

$$U_i = \int_V \left(\frac{d\theta}{dx} y \cdot \frac{d\delta\theta^*}{dx} y \right) E dV = \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \delta v^*}{dx^2} \right) E \int_A y^2 dA dx \quad (18)$$

Admitindo que o módulo de elasticidade é constante e que $\int_A y^2 dA$ corresponde ao segundo momento de área, constante ao longo do eixo neutro, U_i pode ser escrita como na Equação (19),

$$U_i = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \delta v^*}{dx^2} \right) dx \quad (19)$$

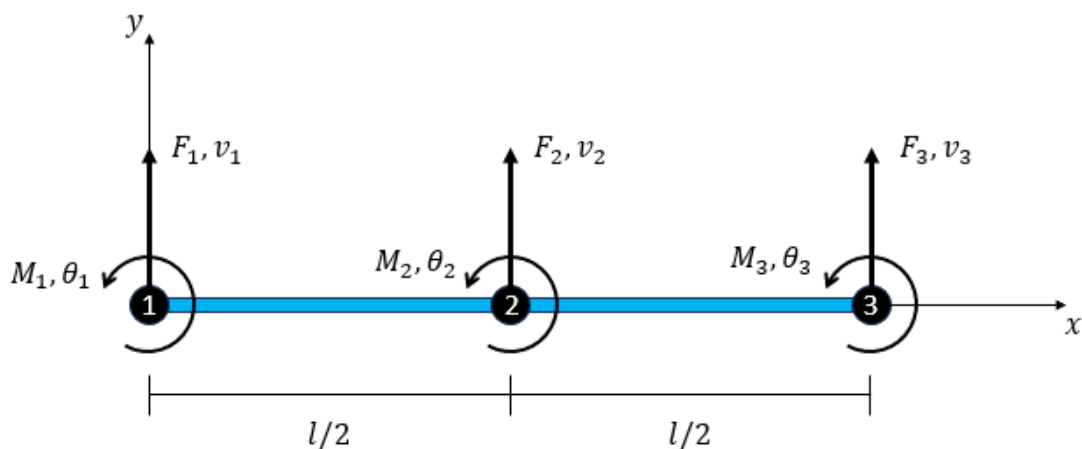
Deve-se especificar a função de deslocamentos que defina de forma única o estado de deslocamentos de todos os pontos do elemento em função dos graus de liberdade dos nós (ALVES FILHO, 2005). A análise por elementos finitos aplicada à eixos neste trabalho usará a formulação de elementos finitos de viga unidimensionais de 3 nós, com duas variáveis nodais: o deslocamento vertical v e a inclinação θ , totalizando 6 condições de contorno, como mostra a Figura 4. Tais deslocamentos e inclinações serão obtidas a partir do carregamento, lembrando que $EI \frac{dv}{dx} = \theta$ (ROTTA, 2014).

Admitindo a sua continuidade ao longo do comprimento total do eixo e ressaltando a existência de 6 condições de contorno, a solução aproximada para a Equação (4) pode ser admitida como um polinômio de quinto grau com 6 variáveis, Equação (20), como segue a função $v(x)$, que define o comportamento da linha elástica dos elementos sob flexão.

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \quad (20)$$

A definição do valor numérico das constantes a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 e a_5 está ligado ao conhecimento das condições de contorno do sistema. No presente trabalho, serão analisados eixos de rotação fixados por mancais de rolamento nas extremidades sujeitos a carregamentos pontuais.

Figura 4. Forças, momentos, deslocamentos e inclinações nodais.



Fonte: Autor (2023).

Durante a determinação dos valores dos coeficientes da Equação (20), é possível perceber, através da Figura 4, que:

$$v_1 = v(0) \quad (21)$$

$$\theta_1 = \frac{dv(0)}{dx} \quad (22)$$

$$v_2 = v(l/2) \quad (23)$$

$$\theta_2 = \frac{dv(l/2)}{dx} \quad (24)$$

$$v_3 = v(l) \quad (25)$$

$$\theta_3 = \frac{dv(l)}{dx} \quad (26)$$

Substituindo os valores de x pelos respectivos valores de l :

$$v_1 = a_0 \quad (27)$$

$$\theta_1 = a_1 \quad (28)$$

$$v_2 = \frac{a_5 l^5}{32} + \frac{a_4 l^4}{16} + \frac{a_3 l^3}{8} + \frac{a_2 l^2}{4} + \frac{a_1 l}{2} + a_0 \quad (29)$$

$$\theta_2 = \frac{5a_5 l^4}{16} + \frac{a_4 l^3}{2} + \frac{3a_3 l^2}{4} + a_2 l + a_1 \quad (30)$$

$$v_3 = a_5 l^5 + a_4 l^4 + a_3 l^3 + a_2 l^2 + a_1 l + a_0 \quad (31)$$

$$\theta_3 = 5a_5 l^4 + 4a_4 l^3 + 3a_3 l^2 + 2a_2 l + a_1 \quad (32)$$

As Equações (27) a (32) formam um sistema de equações que, quando resolvido, retornam os valores de a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 e a_5 , substituindo esses valores em (20):

$$\begin{aligned}
v(x) = & v_1 + \theta_1 x - \left(\frac{23v_1 - 16v_2 - 7v_3 + 6L\theta_1 + 8L\theta_2 + L\theta_3}{l^2} \right) x^2 \\
& + \left(\frac{66v_1 - 32v_2 - 34v_3 + 13L\theta_1 + 32L\theta_2 + 5L\theta_3}{l^3} \right) x^3 \\
& - \left(\frac{4(17v_1 - 4v_2 - 13v_3 + 3L\theta_1 + 10L\theta_2 + 2L\theta_3)}{l^4} \right) x^4 \\
& + \left(\frac{4(6v_1 - 6v_3 + L\theta_1 + 4L\theta_2 + L\theta_3)}{l^5} \right) x^5
\end{aligned} \tag{33}$$

Organizando a Equação (33) de forma a colocar as variáveis nodais $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2, v_3,$ e θ_3 em evidência, têm-se:

$$\begin{aligned}
v(x) = & \left(\frac{24x^5}{l^5} - \frac{68x^4}{l^4} + \frac{66x^3}{l^3} - \frac{23x^2}{l^2} + 1 \right) v_1 \\
& + \left(\frac{4x^5}{l^4} - \frac{12x^4}{l^3} + \frac{13x^3}{l^2} - \frac{6x^2}{l} \right) \theta_1 \\
& + \left(\frac{16x^4}{l^4} - \frac{32x^3}{l^3} + \frac{16x^2}{l^2} \right) v_2 \\
& + \left(\frac{16x^5}{l^4} + \frac{32x^3}{l^2} - \frac{40x^4}{l^3} - \frac{8x^2}{l} \right) \theta_2 \\
& + \left(-\frac{24x^5}{l^5} + \frac{52x^4}{l^4} + \frac{7x^2}{l^2} - \frac{34x^3}{l^3} \right) v_3 \\
& + \left(\frac{4x^5}{l^4} - \frac{8x^4}{l^3} + \frac{5x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \right) \theta_3
\end{aligned} \tag{34}$$

Finalmente, simplificando a Equação (34), obtém-se:

$$v(x) = \Phi_1 v_1 + \Phi_2 \theta_1 + \Phi_3 v_2 + \Phi_4 \theta_2 + \Phi_5 v_3 + \Phi_6 \theta_3 \tag{35}$$

Onde $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5,$ e Φ_6 são conhecidas como *funções de forma*. Cada uma das funções de aproximação tem um significado físico, na medida em que se impõe um valor unitário ao deslocamento nodal ou rotação nodal, tem-se a garantia que os valores nodais restantes são nulos (SILVA, 2014). Substituindo (35) em (15) e mantendo a função de aproximação dos deslocamentos e inclinações virtuais, obtém-se:

$$\begin{aligned}
EI \int_0^L \left(\frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} \right) v_1 v_1^* + \left(\frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} \right) v_1 \theta_1^* \\
+ \left(\frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \Phi_3}{dx^2} \right) v_1 v_2^* + \dots + \left(\frac{d^2 \Phi_6}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \Phi_6}{dx^2} \right) \theta_6 \theta_6^* dx
\end{aligned} \quad (36)$$

Que quando organizada de forma matricial, é definida por:

$$U_i^* = EI \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15} & \Phi_{16} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & \Phi_{25} & \Phi_{26} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \Phi_{35} & \Phi_{36} \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} & \Phi_{45} & \Phi_{46} \\ \Phi_{51} & \Phi_{52} & \Phi_{53} & \Phi_{54} & \Phi_{55} & \Phi_{56} \\ \Phi_{61} & \Phi_{62} & \Phi_{63} & \Phi_{64} & \Phi_{65} & \Phi_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_1^* \\ \delta \theta_1^* \\ \delta v_2^* \\ \delta \theta_2^* \\ \delta v_3^* \\ \delta \theta_3^* \end{bmatrix}^T \quad (37)$$

Na Equação (37), o coeficiente Φ_{ij} representa a força no grau de liberdade i devido ao deslocamento unitário imposto ao grau de liberdade j , mantendo fixos os outros graus de liberdade (ALVES FILHO, 2000). A matriz contida na Equação (38) é definida como sendo a matriz de rigidez do elemento K .

$$K = EI \begin{bmatrix} \frac{5092}{35L^3} & \frac{1038}{35L^2} & \frac{-3584}{35L^3} & \frac{1920}{35L^2} & \frac{-1508}{35L^3} & \frac{242}{35L^2} \\ \frac{1138}{35L^2} & \frac{332}{35L} & \frac{-896}{35L^2} & \frac{320}{35L} & \frac{-242}{35L^2} & \frac{38}{35L} \\ \frac{-3584}{35L^3} & \frac{-896}{35L^2} & \frac{7168}{35L^3} & 0 & \frac{-3584}{35L^3} & \frac{896}{35L^2} \\ \frac{1920}{35L^2} & \frac{320}{35L} & 0 & \frac{1280}{35L} & \frac{-1920}{35L^2} & \frac{320}{35L} \\ \frac{-1508}{35L^3} & \frac{-242}{35L^2} & \frac{-3584}{35L^3} & \frac{-1920}{35L^2} & \frac{5092}{35L^3} & \frac{-1138}{35L^2} \\ \frac{242}{35L^2} & \frac{38}{35L} & \frac{896}{35L^2} & \frac{320}{35L} & \frac{-1138}{35L^2} & \frac{332}{35L} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Visando manter o equilíbrio que rege o princípio dos trabalhos virtuais, o trabalho externo é igual ao interno para manter o equilíbrio, como mostra a Equação (13). Esse trabalho externo é proveniente da carga $q(x)$ aplicada a um deslocamento, que gera trabalho, como segue:

$$U_e^* = \int_0^L q(x) \delta u^*(x) dx \quad (39)$$

Substituindo o campo de deslocamentos virtuais da Equação (20):

$$U_e^* = \int_0^L q(x) (\Phi_1 \delta v_1^* + \Phi_2 \delta \theta_1^* + \Phi_3 \delta v_2^* + \Phi_4 \delta \theta_2^* + \Phi_5 \delta v_3^* + \Phi_6 \delta \theta_3^*) dx \quad (40)$$

Definindo $q(x) = q$ como sendo um carregamento distribuído constante aplicado, a Equação (40) é resolvida e seu resultado na forma matricial é dada por:

$$U_e^* = \frac{qL}{15} \begin{bmatrix} \left(\frac{7}{2}\right) \\ \left(\frac{L}{4}\right) \\ 8 \\ 0 \\ \left(\frac{7}{2}\right) \\ \left(-\frac{L}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_1^* \\ \delta \theta_1^* \\ \delta v_2^* \\ \delta \theta_2^* \\ \delta v_3^* \\ \delta \theta_3^* \end{bmatrix}^T \quad (41)$$

A Equação (41) é um vetor de cargas nodais equivalentes. Substituindo (38) e (41) em (13), obtém-se a o sistema de equações para um elemento finito de 3 nós. Quando são aplicados forças e momentos concentrados nos nós, o valor deve ser aplicado diretamente à linha correspondente do vetor (ROTTA, 2014).

$$EI \begin{bmatrix} 5092 & 1038 & -3584 & 1920 & -1508 & 242 \\ \frac{35L^3}{1138} & \frac{35L^2}{332} & \frac{35L^3}{-896} & \frac{35L^2}{320} & \frac{35L^3}{-242} & \frac{35L^2}{38} \\ \frac{35L^2}{-3584} & \frac{35L}{-896} & \frac{35L^2}{7168} & \frac{35L}{0} & \frac{35L^2}{-3584} & \frac{35L}{896} \\ \frac{35L^3}{1920} & \frac{35L^2}{320} & \frac{35L^3}{0} & 0 & \frac{35L^3}{-1920} & \frac{35L^2}{320} \\ \frac{35L^2}{-1508} & \frac{35L}{-242} & 0 & \frac{35L}{1280} & \frac{35L^2}{-1920} & \frac{35L}{320} \\ \frac{35L^3}{242} & \frac{35L^2}{38} & \frac{35L^3}{896} & \frac{35L^2}{320} & \frac{35L^3}{-1138} & \frac{35L^2}{332} \\ \frac{35L^2}{35L^2} & \frac{35L}{35L} & \frac{35L^2}{35L^2} & \frac{35L}{35L} & \frac{35L^2}{35L^2} & \frac{35L}{35L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \frac{qL}{15} \begin{bmatrix} \left(\frac{7}{2}\right) \\ \left(\frac{L}{4}\right) \\ 8 \\ 0 \\ \left(\frac{7}{2}\right) \\ \left(-\frac{L}{4}\right) \end{bmatrix} \quad (42)$$

Que corresponde a aplicação específica da Equação (1) para um caso de carregamento distribuído constante.

5. METODOLOGIA

Neste trabalho, a formulação do elemento de viga unidimensional de três nós foi implementado no ambiente computacional MATLAB, através do código *Principal_eixo.m*, que utiliza as formulações analíticas feitas no algoritmo *MEF_Viga_Grau5.mlx*, ambos contidos no Apêndice A. Posteriormente, o processo é separado em funções específicas. Nas seções a seguir, cada uma das tarefas realizadas pelo código serão explicadas.

5.1. DADOS DE ENTRADA

O código principal inicia com a definição dos dados de entrada e pode ser ajustado para usar diferentes conjuntos, como cargas distribuídas ou pontuais, que representam as condições de carregamento da estrutura a ser analisada, conforme é visto no Apêndice B. no presente trabalho, serão analisados apenas os efeitos de cargas pontuais oriundas do arquivo *dados_cargapontual.m*. Além do carregamento, este último programa recebe o valor do módulo de Young, quantidades de seções transversais distintas, seus respectivos diâmetros e comprimentos e calcula seus segundos momentos de área. Os dados de entrada utilizados nos exemplos do Capítulo 6 estão no Apêndice B.

5.2. MALHA

Nesta função, uma malha é gerada para representar a estrutura e isso envolve sua divisão em elementos finitos e a definição das coordenadas dos nós e das conectividades entre eles. A malha é crucial para a análise por elementos finitos uma vez que as equações e aproximações são desenvolvidas para um elemento específico.

5.3. MATRIZ DE RIGIDEZ

O código principal cria uma matriz de rigidez global a partir da matriz de rigidez local matematicamente definida na Equação (32) e um vetor de forças globais. Essas matrizes são construídas com base nas propriedades dos materiais e elementos da estrutura, levando em consideração as características de cada elemento e suas interações.

5.4. CONDIÇÕES DE CONTORNO

Condições de contorno, como restrições nos graus de liberdade, são aplicadas ao sistema de equações. Isso representa as restrições físicas ou suportes presentes na estrutura. No presente estudo, as condições de contorno limitam os deslocamentos verticais nas duas extremidades em zero, permitindo apenas as rotações nos mancais.

5.5. RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

O sistema de equações lineares é resolvido para encontrar o vetor (U), que contempla todos os deslocamentos e inclinações dos nós da estrutura. Esses deslocamentos e inclinações são determinados com base nas condições de contorno e nas características da malha. A resolução desse sistema utiliza um comando simples e nativo do MATLAB “\” que deixa a cargo do próprio ambiente escolher qual o método mais eficaz de resolução do sistema com base nas características da matriz de rigidez. Após a resolução, os valores são separados pela função *separa_resultados.m* de acordo com seus índices, a fim de segregar o que representa deslocamento e o que representa inclinação.

5.6. REAÇÕES DE APOIO

Com os deslocamentos calculados, as reações nos apoios da estrutura são determinadas. Isso permite compreender as forças de reação presentes nos pontos de apoio da estrutura.

5.7. ESFORÇOS INTERNOS

Com base nos deslocamentos obtidos, são calculados os esforços internos, como momentos fletores e esforços cortantes, além das tensões máximas em cada elemento da estrutura, com uso da função *calc_MV*, que utiliza a interpolação dos resultados dentro do elemento na função de aproximação, dando uma maior exatidão das grandezas físicas citadas. Isso ajuda a avaliar com mais precisão o comportamento estrutural em termos de resistência e segurança.

Para o cálculo do deslocamento interpolado, em pontos diferentes das coordenadas nodais, é utilizada a Equação (35).

Ao derivar a Equação (35) em função de x , é possível obter as inclinações interpoladas, de acordo com a Equação (43).

$$\theta = \frac{d\Phi_1}{dx} v_1 + \frac{d\Phi_2}{dx} \theta_1 + \frac{d\Phi_3}{dx} v_2 + \frac{d\Phi_4}{dx} \theta_2 + \frac{d\Phi_5}{dx} v_3 + \frac{d\Phi_6}{dx} \theta_3 \quad (43)$$

Sucessivamente, o momento fletor é determinado como $M(x) = EI d\theta/dx$, resultando em:

$$M = EI \left(\frac{d^2\Phi_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2\Phi_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2\Phi_4}{dx^2} \theta_2 + \frac{d^2\Phi_5}{dx^2} v_3 + \frac{d^2\Phi_6}{dx^2} \theta_3 \right) \quad (44)$$

De modo análogo, a função $calc_MV$ continua a sequência de derivações para determinar o esforço cortante, como segue:

$$V = EI \left(\frac{d^3\Phi_1}{dx^3} v_1 + \frac{d^3\Phi_2}{dx^3} \theta_1 + \frac{d^3\Phi_3}{dx^3} v_2 + \frac{d^3\Phi_4}{dx^3} \theta_2 + \frac{d^3\Phi_5}{dx^3} v_3 + \frac{d^3\Phi_6}{dx^3} \theta_3 \right) \quad (45)$$

A etapa final do algoritmo é a determinação das tensões no eixo. Através da Equação (7), as tensões são definidas como:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \quad (46)$$

Onde c e I são a máxima distância para a linha neutra (igual ao raio no caso de eixos circulares) e o segundo momento de área, inicialmente definidos nos dados de entrada, respectivamente.

Essa metodologia é valiosa para a análise estrutural, permitindo prever o comportamento de uma estrutura sob diferentes condições de carregamento e restrições. A interpretação dos resultados obtidos a partir desse processo é essencial para tomar decisões importantes no projeto ou na avaliação de sua integridade. Todas as funções criadas estão no Apêndice C.

5.8. APRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS RESULTADOS

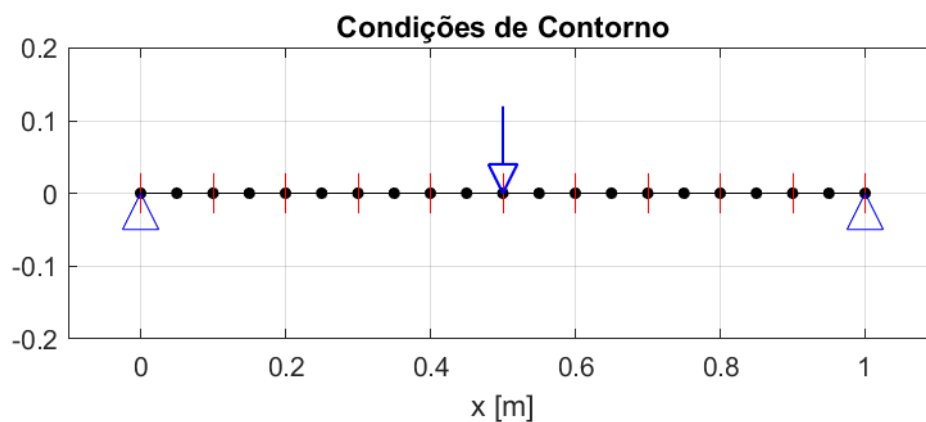
Os resultados numéricos, como deslocamentos e inclinações, são separados e apresentados graficamente. Isso permite uma visualização clara do comportamento do eixo sob as condições de carga especificadas. Também são exibidos o esboço do eixo, através da função *plota_eixo.m*, a distribuição nodal na malha pela função *malha.m*.

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

6.1. EIXO DE SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE

Para validação matemática do algoritmo é necessária a comparação com soluções analíticas já conhecidas na literatura. Para isso, será calculada a deflexão da linha elástica de uma viga com seção transversal circular, com apoios simples em ambas as extremidades e com uma carga pontual aplicada no centro do seu comprimento total. Tal situação é mostrada na Figura 5.

Figura 5. Representação do problema de uma viga bi apoiada com carregamento pontual central.



Fonte: Autor (2023).

Neste exemplo, serão adotados:

- Carga pontual $F = 1$ KN;
- Comprimento $l = 1$ m;
- Seção transversal circular constante de diâmetro $d = 50$ mm
- Módulo de elasticidade $E = 210$ GPa

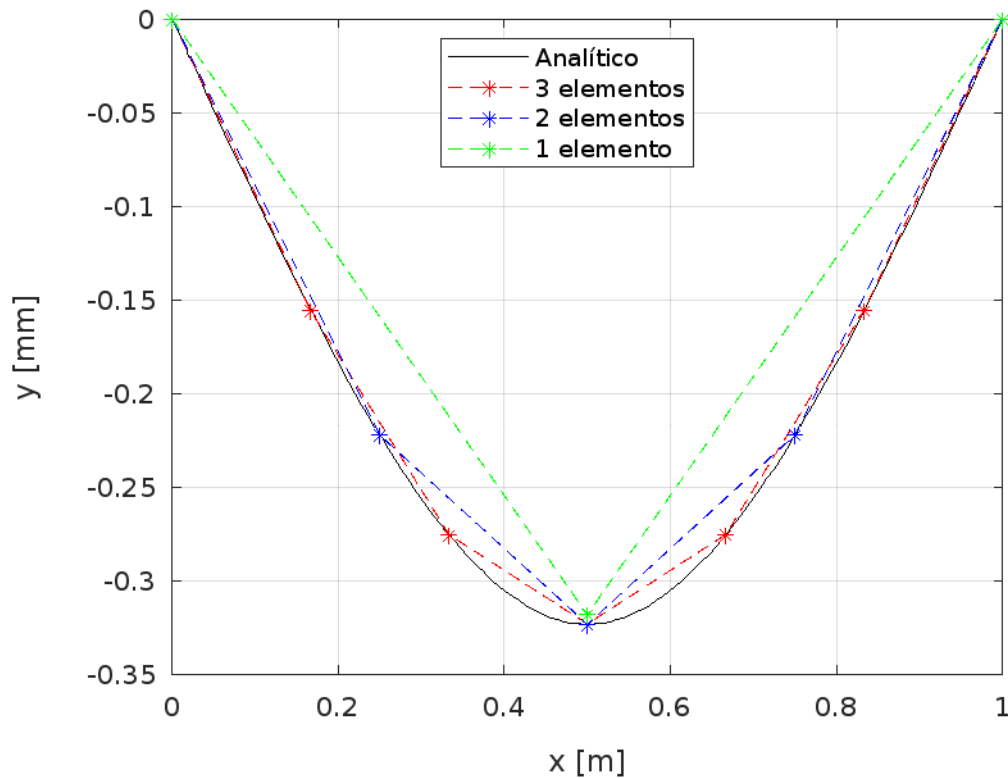
Beer (2011) fornece a Equação (47) para cálculo da linha elástica até o ponto central para um carregamento pontual central como:

$$y = \frac{P}{48EI} (4x^3 - 3xl^2) \quad (47)$$

Os resultados de deflexão obtidos por esta expressão são simétricos em relação ao centro da viga. A Equação (47) será comparada inicialmente ao resultado obtido para uma malha com um elemento finito que simula as condições mostradas na Figura 4, posteriormente, o número de elementos é aumentado para dois e para três.

O resultado da implementação do MEF em comparação com a solução analítica para a deflexão é mostrado na Figura 6.

Figura 6. Resultados de deflexão para diferentes malhas comparadas à solução analítica para uma viga bi apoiada com carga pontual central.



Fonte: Autor (2023).

A análise mostrou que o aumento progressivo da quantidade de elementos fez com que os resultados obtidos pela resolução do sistema linear se tornassem mais próximos do analítico mostrando a convergência dos resultados.

A precisão esperada varia de acordo com as necessidades da análise e com os critérios adotados pelo engenheiro. Podendo poucos elementos já serem suficientes para uma aproximação satisfatória.

6.2. EIXO ESCALONADO

É mais comum que os eixos tenham um número de degraus ou ressaltos onde o diâmetro mude para acomodar elementos fixados, como mancais, catracas e engrenagens. Degraus ou ressaltos são necessários para prover precisão e uma localização axial

consistente dos elementos fixados, bem como para criar um diâmetro apropriado para alojar peças padronizadas, como mancais (BUDYNAS e NISBETT, 2011). A seguir, serão apresentados dois exemplos com estudos de caso propostos pela literatura. Estes exemplos demonstram a aplicabilidade do código para a análise de eixos.

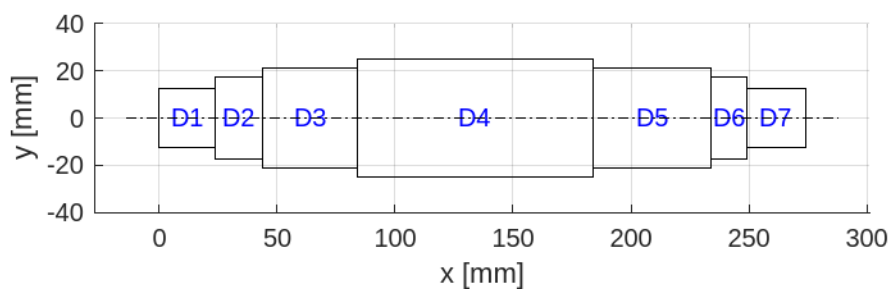
O material adotado em ambos os exemplos é o aço carbono com módulo de Young $E = 207$ GPa e módulo de rigidez $G = 79,3$ GPa, valores fornecidos por Budynas e Nisbett (2011).

6.2.1. EXEMPLO 1

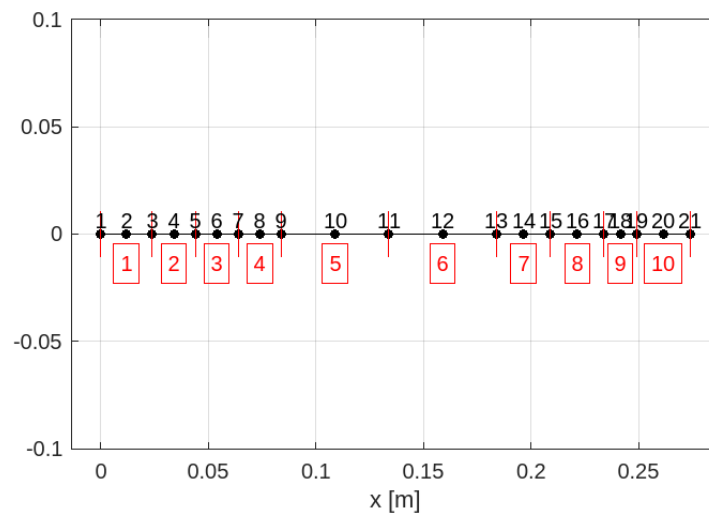
Como primeiro exemplo, será usado como modelo um problema proposto por Budynas e Nisbett (2011), cujo objetivo é a determinação de diâmetros de um eixo onde serão acopladas duas engrenagens de dentes retos para uso em uma caixa de redução.

O esboço do problema é mostrado na Figura 7. O eixo analisado foi discretizado em dez elementos, sendo as seções D3, D4 e D5 discretizadas por dois elementos cada, as seções restantes foram discretizadas por apenas um elemento finito. A malha é apresentada na Figura 8, com os nós identificados acima do eixo e os elementos indicados abaixo de seus nós centrais em vermelho.

Figura 7. Esboço geral do eixo no Exemplo 1.



Fonte: Autor (2023).

Figura 8. Malha utilizada na solução do Exemplo 1.

Fonte: Autor (2023).

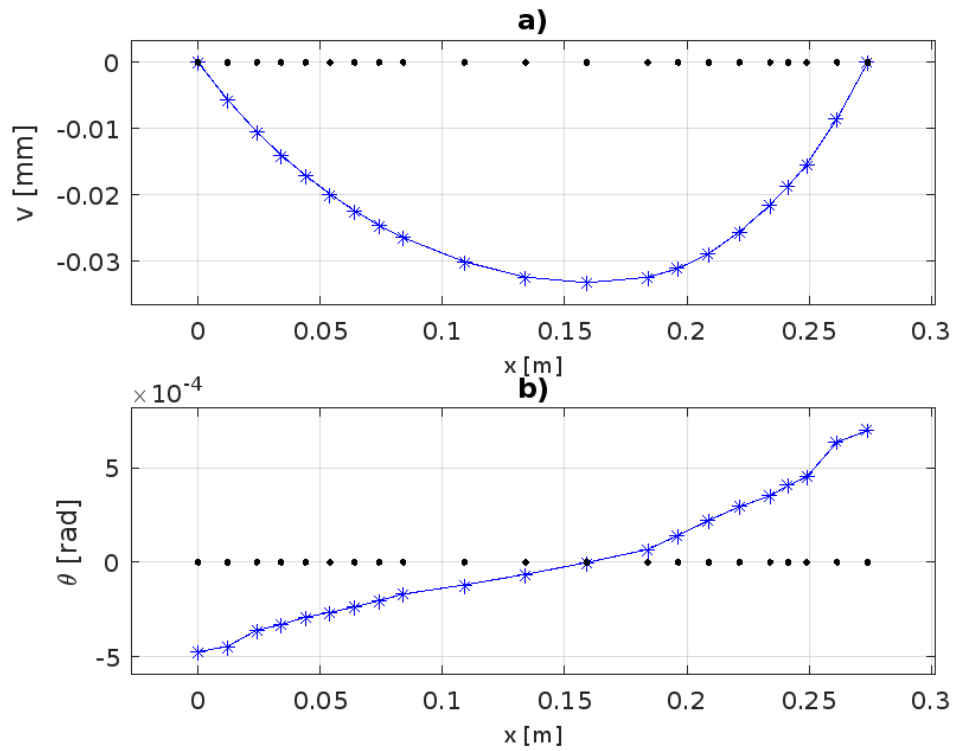
As engrenagens estão acopladas nos diâmetros D3 e D5, e conseqüentemente, são os locais que recebem as cargas radiais e tangenciais, que neste exemplo são mostradas na Tabela 1. Numericamente falando, os carregamentos são descritos como carregamentos pontuais agindo nos nós de número 7 e 15. A partir da resolução direta do sistema linear, são gerados os seguintes resultados mostrados nas Figuras 9 e 10, com as cargas nos planos $x - y$ e $x - z$ (radial e tangencial, respectivamente).

Tabela 1. Cargas aplicadas no eixo para Exemplo 1.

Plano	Carga em D3 (N)	Carga em D5 (N)
$x - y$	-875	-3900
$x - z$	2400	-10800

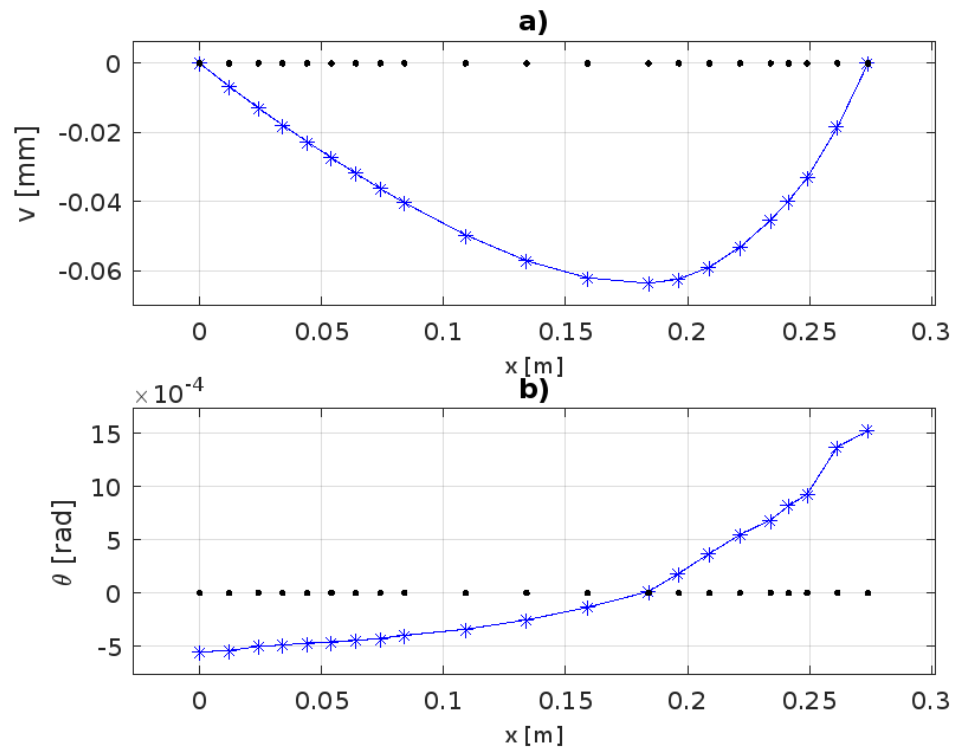
Fonte: Adaptado de Budynass e Nisbett (2011).

Figura 9. Curvas de deflexão a) e inclinação b) no plano $x - y$.



Fonte: Autor (2023).

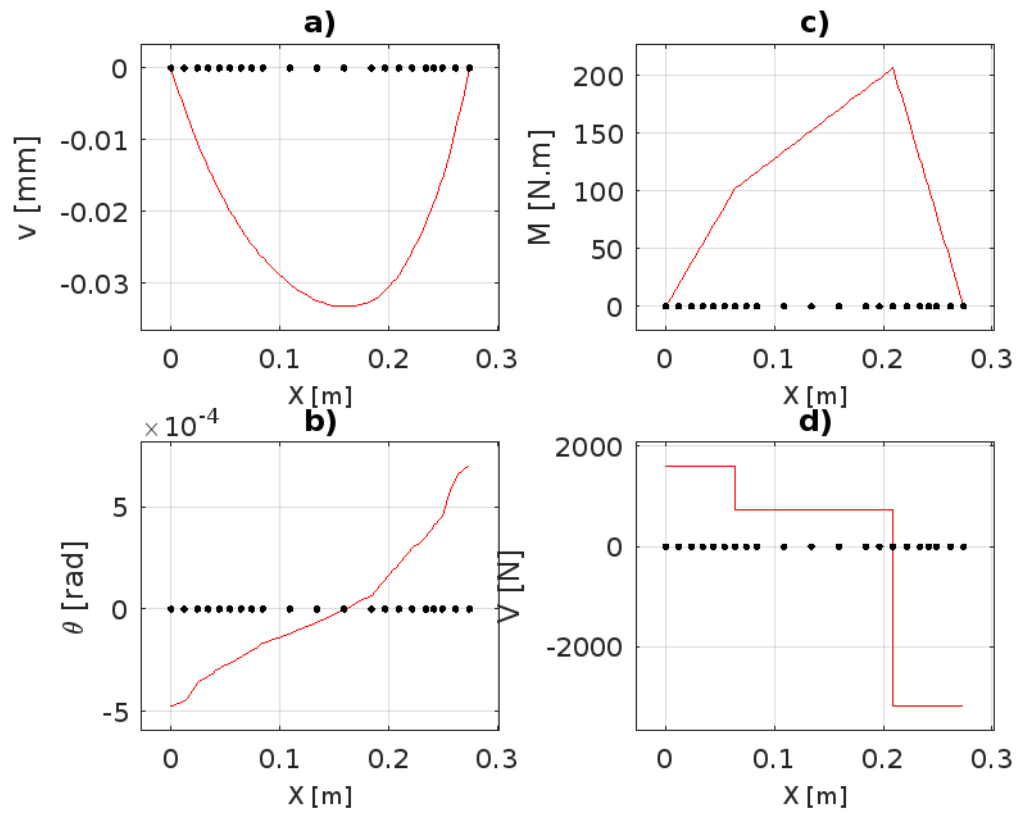
Figura 10. Curvas de deflexão a) e inclinação b) no plano $x - z$.



Fonte: Autor (2023).

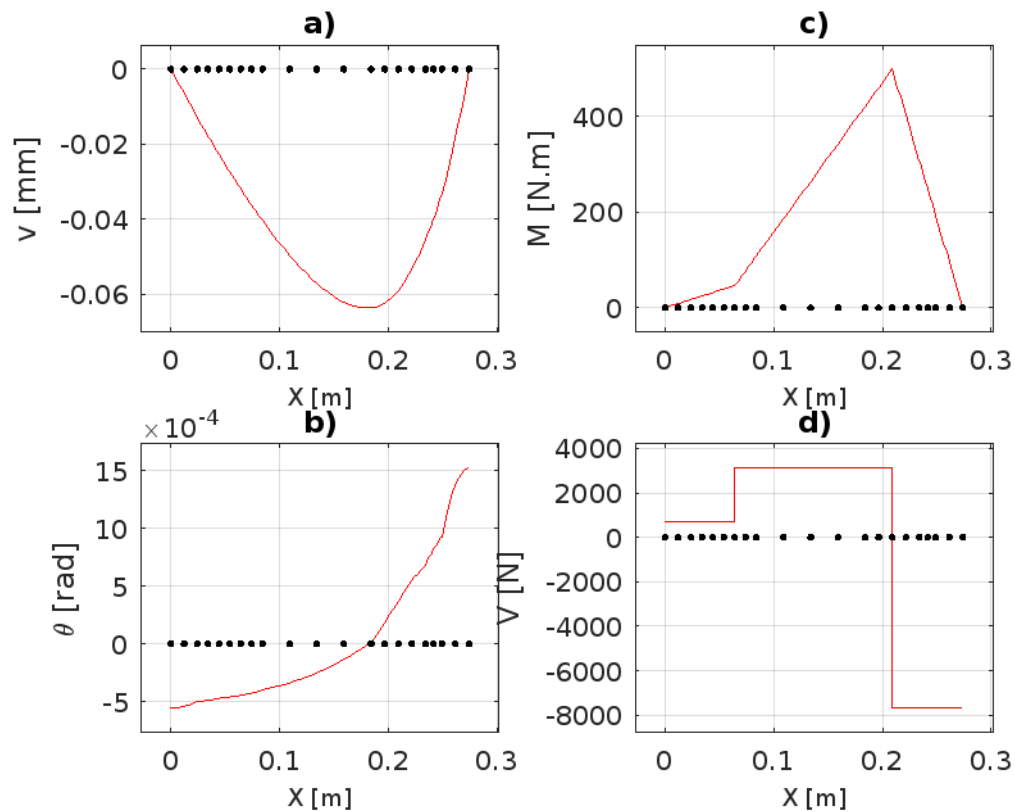
As curvas de deflexão, inclinação, momento fletor e esforço cortante obtidas após interpolação do MEF são mostradas nas Figuras 11 e 12.

Figura 11. deslocamento a), inclinação b), momento fletor c) e esforço cortante d) calculados pela função de interpolação em x-y.



Fonte: Autor (2023).

Figura 12. deslocamento a), inclinação b), momento fletor c) e esforço cortante d) calculados pela função de interpolação em x-z.



Fonte: Autor (2023).

A resolução do sistema linear já possui naturalmente uma aproximação apurada mesmo com uma quantidade relativamente pequena de elementos. Assim como as deflexões, os momentos fletores e esforços cortantes também tiveram grande diferença por conta da carga aplicada, mantendo o padrão esperado. Verifica-se nestes resultados a habilidade da formulação de representar as descontinuidades ocorridas nos diagramas de momento fletor e força cortante devido à aplicação de cargas pontuais.

Ambas as análises mostram que a deflexão tangencial em $x - y$ foi consideravelmente maior que a radial, o que já era esperado devido a diferença da magnitude das cargas que agem em cada sentido, sendo as cargas de $x - z$ aproximadamente 2,75 vezes maiores que as cargas aplicadas no plano $x - y$. A Tabela 2 mostra os valores admissíveis para cada tipo de elemento acoplado ao eixo.

Tabela 2. Intervalos máximos, típicos, para inclinações e deflexões transversais.

Inclinações	
Rolo cônico	0,0005 - 0,0012 rad
Rolo cilíndrico	0,0008 - 0,0012 rad
Esfera de sulco profundo	0,001 - 0,003 rad
Esfera	0,026 - 0,052 rad
Esfera autoalinhante	0,026 - 0,052 rad
Engrenagem reta sem coroa	< 0,00050 rad
Deflexões transversais	
Engrenagens retas com $P < 10$ dentes/cm	0,25 mm
Engrenagens retas com $11 < P < 19$	0,125 mm
Engrenagens retas com $20 < P < 50$	0,075 mm

Fonte: Adaptado de Budynass e Nisbett (2011).

Para os exemplos analíticos em eixos, alguns pontos de interesse são os pontos onde há concentrações de tensão por chavetas. Os valores obtidos para inclinações e deflexões nesses pontos específicos de interesse estão na Tabela 3.

Tabela 3. Valores de inclinação e deflexão nos pontos de interesse do Exemplo 1.

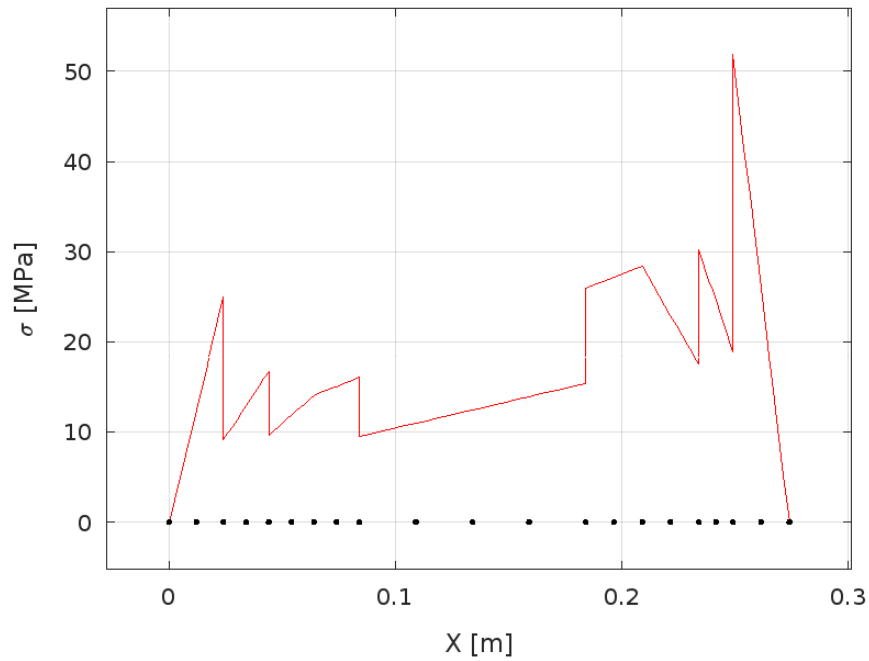
Ponto de Interesse	Plano x-y	Plano x-z	Total
Inclinação do mancal esquerdo (rad)	-0,000475	-0,000554	0,000730
Inclinação do mancal direito (rad)	0,000699	0,001500	0,001655
Inclinação da engrenagem em D3 (rad)	-0,000446	-0,000446	0,000631
Inclinação da engrenagem em D5 (rad)	0,000372	0,000372	0,000526
Deflexão na engrenagem em D3 (mm)	-0,022379	-0,031818	0,038900
Deflexão na engrenagem em D5 (mm)	-0,028821	-0,058902	0,065575

Fonte: Autor (2023).

Ao analisar todos os valores presentes na Tabela 3, é possível verificar que as deflexões e inclinações estão bem abaixo dos especificados na Tabela 2, com exceção do mancal direito, que está acima da faixa permitida de inclinação para mancais de rolos cônicos e cilíndricos, podendo ser utilizados apenas os mancais esféricos.

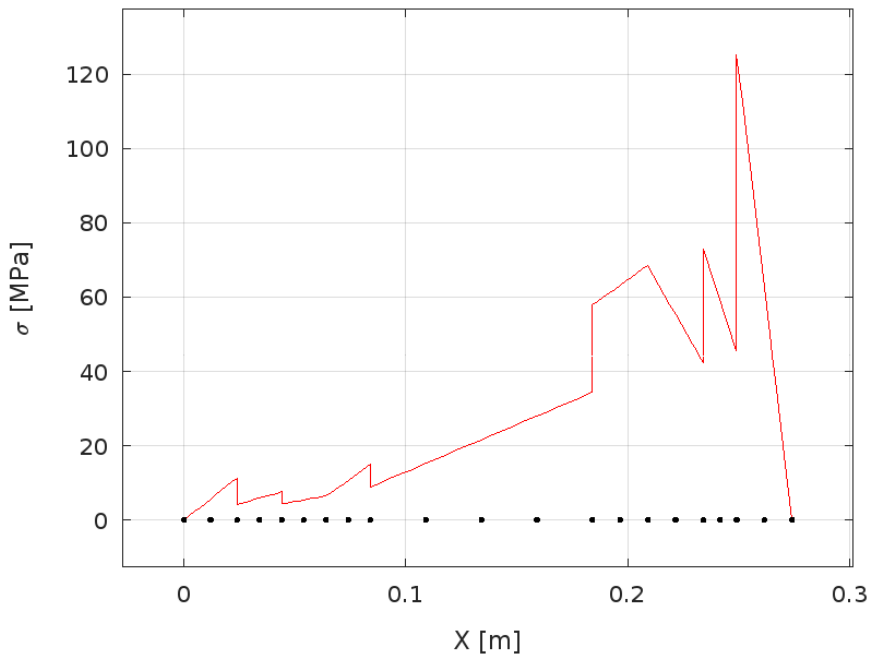
Um ponto importante a ser analisado em qualquer projeto de elementos de máquinas são as tensões internas. Como já mencionado neste trabalho, as tensões são inversamente proporcionais aos diâmetros. As Figuras 15 e 16 mostram as tensões internas no eixo.

Figura 15. Valores de tensão calculados devido à flexão no plano $x - y$.



Fonte: Autor (2023).

Figura 16. Valores de tensão calculados devido à flexão no plano $x - z$.



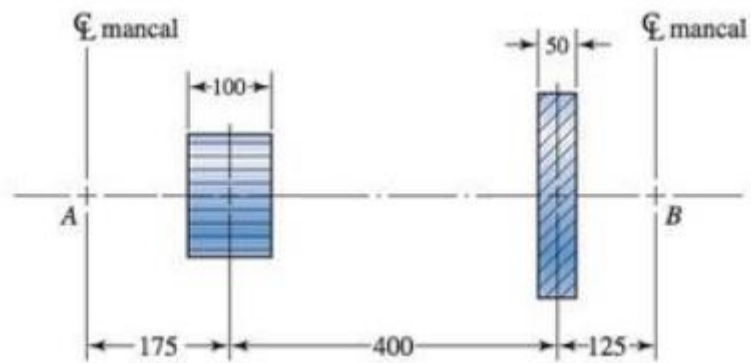
Fonte: Autor (2023).

Em um eixo com seções diferentes, há a ocorrência de concentração de tensões nos ressaltos e em outros tipos de descontinuidades geométricas, como ranhuras para anéis de retenção e rasgos de chavetas. Contudo, os saltos dos valores de tensão observados nas Figuras 15 e 16 se devem unicamente à mudança de diâmetros entre estas seções. O programa ainda se mostra ineficaz na captura do efeito de concentrações de tensão provenientes das mesmas mudanças de geometria citadas.

6.2.2. EXEMPLO 2

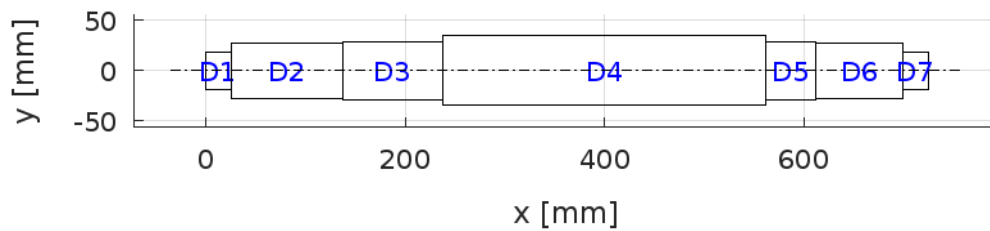
Similarmente ao Exemplo 1, o Exemplo 2 também é uma adaptação de um problema proposto por Budynas e Nisbett (2011), onde o objetivo é definir os diâmetros de um eixo para um pinhão reto e uma engrenagem helicoidal, mostrada na Figura 17. O eixo recebe uma carga de 2700 N no pinhão e 900 N na engrenagem. O que difere ambos os exemplos é a ausência de cargas tangenciais e a inserção de carga axial na engrenagem helicoidal, tipo de carregamento ao qual este estudo não contempla. O esboço do eixo é mostrado na Figura 18, seguido de sua malha na Figura 19.

Figura 17. Definição do problema para o exemplo 2.



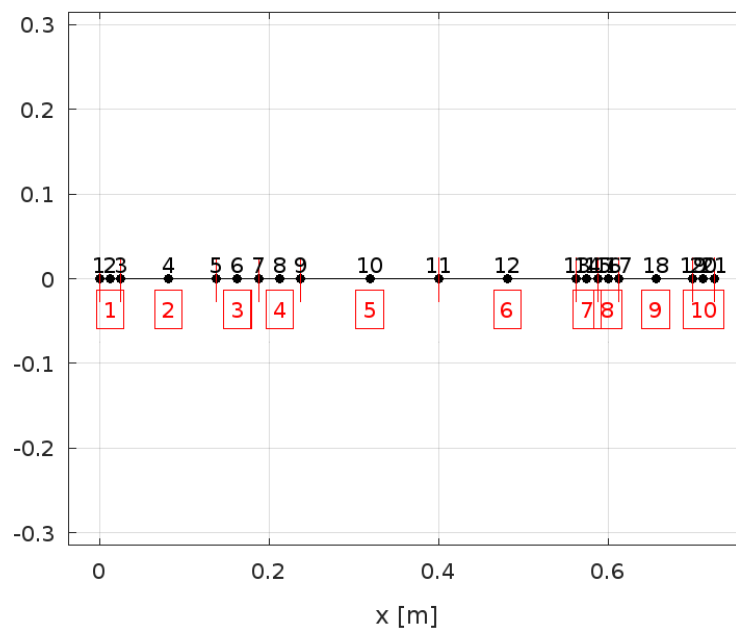
Fonte: Budynas e Nisbett (2011).

Figura 18. Esboço geral do eixo para solução do exemplo 2.



Fonte: Autor (2023).

Figura 19. Discretização da geometria para o Exemplo 2.



Fonte: Autor (2023).

Como mencionado, a ausência de forças tangenciais implica que todas as cargas estão sendo aplicadas no mesmo plano, assim, a Tabela 4 mostra as cargas que estão sendo aplicadas nos nós 7 e 15.

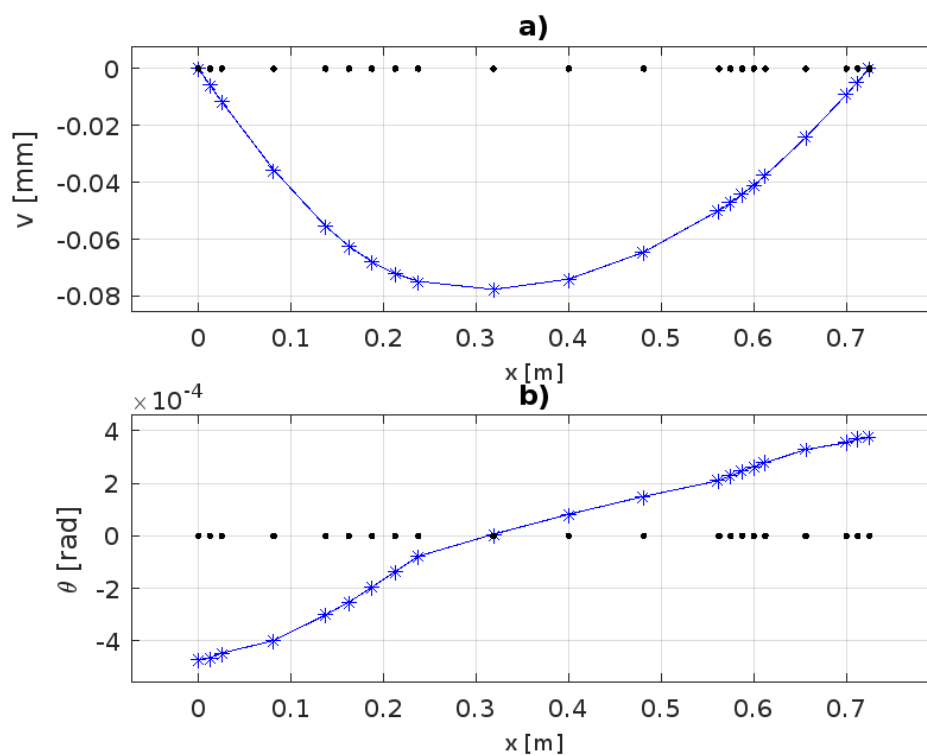
Tabela 4. Cargas aplicadas no eixo para Exemplo 2

Plano	Carga em D3 (N)	Carga em D5 (N)
x-y	-2700	-900

Fonte: Autor (2023).

Os valores nodais das deflexões e inclinações causadas pelas cargas são mostrados na Figura 20.

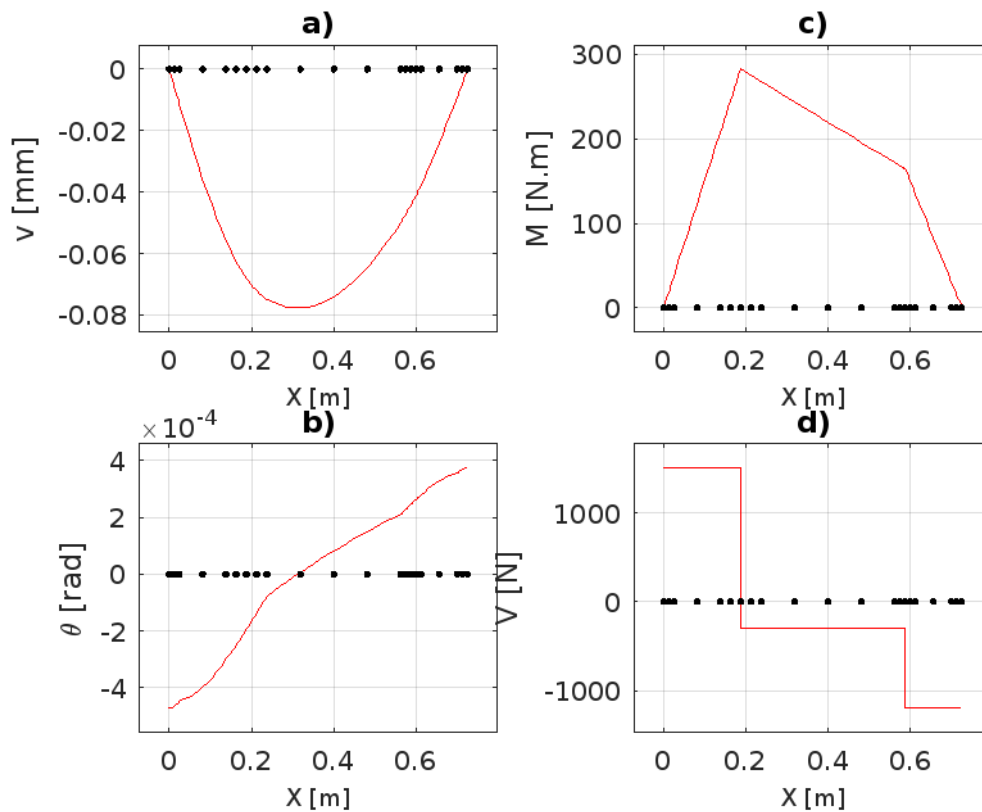
Figura 20. Curvas de deflexão a) e inclinação b) no plano



Fonte: Autor (2023).

Repetindo o processo do exemplo 1, as funções de interpolação foram utilizadas para aproximar os resultados em pontos internos dos elementos. Os resultados obtidos por essas funções constam na Figura 21.

Figura 21. deslocamento a), inclinação b), momento fletor c) e esforço cortante d) calculados pela função de interpolação.



Fonte: Autor (2023).

A Tabela 5 mostra as deflexões e inclinações máximas nos pontos de interesse no Exemplo 2, a exemplo do caso anterior.

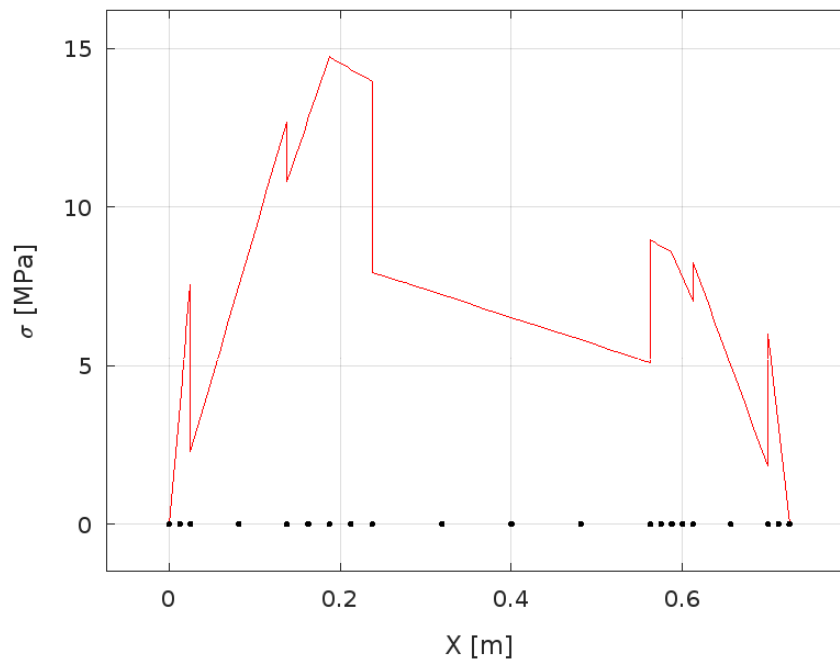
Tabela 5. Valores de inclinação e deflexão em pontos de interesse no Exemplo 2.

Ponto de Interesse	Plano x-y
Inclinação do mancal esquerdo (rad)	-0,000471
Inclinação do mancal direito (rad)	0,000374
Inclinação da engrenagem em D3 (rad)	-0,000196
Inclinação da engrenagem em D5 (rad)	0,000246
Deflexão na engrenagem em D3 (mm)	-0,068013
Deflexão na engrenagem em D5 (mm)	-0,044166

Fonte: Autor (2023).

Repetindo o processo, as tensões em cada ponto são calculadas e mostradas na Figura 23. Novamente, os valores de tensão se mantiveram bem longe dos limites estabelecidos pelas propriedades do material, tais como as deflexões e inclinações do eixo.

Figura 23. Valores de tensão calculados ao longo do comprimento do eixo.



Fonte: Autor (2023).

Vale lembrar que a ausência da hipótese de carga axial de certo modo dificulta a exatidão, porém, os valores extremamente baixos para as grandezas calculadas mostram que os diâmetros estabelecidos para a análise são mais que suficientes no que diz respeito a flexão. Outras análises como os estudos das vibrações, requerem outros tipos de formulações matemáticas, que não foram abordados neste estudo.

7. CONCLUSÃO

Este trabalho propôs a implementação de uma formulação do método dos elementos finitos para vigas aproximado por um polinômio de quinto grau para uso em projetos de eixos.

O algoritmo criado demonstrou versatilidade na resolução de problemas relacionados a projetos de eixos. A possibilidade de escolher o nó que recebe a carga dentro do elemento e poder utilizar a quantidade de seções diferentes necessárias que atendam as necessidades do projetista torna a análise de eixos por deflexão e inclinação mais ágil, assim como o fato de poder trabalhar com carregamentos pontuais e distribuídos, tornando-o uma poderosa ferramenta também na análise de vigas. Outra vantagem é ser facilmente adaptado para outras linguagens de programação de preferência do usuário, visto que o MATLAB não é uma ferramenta gratuita, além da possibilidade de criação de pequenos aplicativos com janelas mais intuitivas.

Por outro lado, o algoritmo também possui limitações. A principal limitação é o fato de não trabalhar com cargas axiais, o que acaba deixando-o restrito a não analisar corretamente eixos com engrenagens helicoidais, por exemplo. Outra limitação é a impossibilidade de representar variações de seções usando raios de adoçamento, algo comum em eixos para diminuição da concentração de tensão em descontinuidades de diâmetro. As concentrações de tensão causadas por aberturas para chavetas e similares também não são representadas.

As funções de aproximação se mostraram extremamente eficazes na resolução dos problemas, conseguindo plotar curvas que nada lembram as aproximações numéricas normalmente vistas para a uma quantidade pequena de nós, fazendo com que o usuário tenha uma resposta significativamente próxima aos valores analíticos com um custo computacional baixíssimo, portanto, atingindo seus objetivos.

REFERÊNCIAS

- ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE**. 3.ed. São Paulo: Érica, 2005.
- BEER, Ferdinand P.; E. JOHNSTON, Russell Jr.; DEWOLF, John T.; MAZUREK, David. F. **Mecânica dos Materiais**. 5.ed. AMGH, 2011.
- BUDYNAS, R. G; NISBETT, J. N. **Elementos de Máquinas de Shigley**. 8.ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.
- CHAPRA, S. C., & CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 5ª ed. São Paulo: AMGH, 2008.
- FISH, Jacob; BELYTSCHKO, Ted. **Um Primeiro Curso em Elementos Finitos**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2009.
- HIBBELER, Russel Charles. **Resistência dos Materiais**. São Paulo: Pearson, 2008.
- MathWorks. Disponível em:
https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/mldivide.html?searchHighlight=%5C&s_tid=srchtitle_support_results_1_%255C. Acesso em: 11/12/2023.
- NORTON, Robert L. **Projeto de máquinas: uma abordagem integrada**. 4.ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- ROTTA, Sandra Mendes Monzini. **O Método dos Elementos Finitos Aplicado a Análise Linear de Vigas de Euler-Bernoulli: Implementação Computacional do Elemento Finito Unidimensional com Função de Aproximação de Quinto Grau**. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Civil, Bacharelado), Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2014.
- SILVA, Alexandre. **Elemento de viga de formulação mista para aplicações estruturais** (Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro, 2014).

APÊNDICE A – Algoritmos principais

Código 1. Principal_eixo.m

```

clear; clc; close all;

% Importa os dados de carga, malha e propriedades do material
dados_cargapontual;

% Esboço do eixo
plota_eixo(di,Li)

% Gera malha e apresenta seu gráfico
[x,INCI] = malha(nelem,nnos,l,L);

% Montagem da matriz de rigidez global e vetor de forças global
KG = zeros(ngdl,ngdl);
FG = zeros(ngdl,1);
for i = 1:nelem
    % Matriz de rigidez local para cada elemento
    ke = calc_K(E,I(i),l(i));
    % Vetor de Forças do elemento
    Fe = calc_F(FORCE,i,l(i));
    % Determinar os índices para cada elemento
    index = 4*i-3:4*i+2;
    % Montagem da matriz de rigidez global para cada elemento
    KG(index, index) = KG(index, index) + ke;
    FG(index,1) = FG(index,1) + Fe;
end

% Condições de Contorno
[K,F] = aplica_cdc(KG,FG,CCONT,ngdl);

% Solução do sistema linear de equações para U
U = K\F;

% Determinação das Reações nos apoios
R = KG*U - FG;

% Separando deslocamentos e inclinações do vetor de deslocamentos
% generalizados
[v,theta,f,m,rf,rm] = separa_resultados(U,FG,R,ngdl);

% Gráfico de deflexão
figure
subplot(2,1,1)
fat = 1000; % fator de escala para ampliação dos deslocamentos
plot(x, fat*v, '*-b',x,zeros(nnos),'.k');
[xmin,xmax,ymin,ymax] = plot_limits(x,v,fat,0.1);
axis([xmin xmax ymin ymax])
grid on
xlabel('x [m]', 'FontSize', 9)
ylabel('v [mm]')
title('a')
```

```

% Gráfico de Inclinação
subplot(2,1,2)
plot(x,theta,'*-b',x,zeros(nnos),'*k');
grid on
[xmin,xmax,ymin,ymax] = plot_limits(x,theta,1,0.1);
axis([xmin xmax ymin ymax])
xlabel('x [m]', "FontSize", 9)
ylabel('\theta [rad]')
title('b')

% Cálculo de Esforços internos e tensões
[Ui,Thetai,M,V,Sigi,Xi] = calc_MV(v,theta,nelem,nnos,l,INCI,E,I,x,d);

```

Código 2. Analitico_Vigas.m

```

clc; clear; close all

Principal_eixo;

% Solução analítica de Viga
% Apoios simples e carga central
F = 1000; % Carga [N]
l = 1; % Comprimento [m]
E = 210e9; % Módulo de Elasticidade [Pa]
d = 0.05; % Diâmetro [m]
I = pi*(d/2)^4 /4; % Momento de Inércia [m^4]
np = 128;
xa = linspace(0,l,np);

% valores calculados pelo programa principal e inseridos manualmente para 1,
% 2 e 3 elementos, respectivamente
v_1 = 1e-3*[-0.0000 -0.3183 0];
x_1 = linspace(0, 1, length(v_1));

v_2 = 1e-3*[0.0000 -0.2223 -0.3234 -0.2223 -0.0000];
x_2 = linspace(0, 1, length(v_2));

v_3 = 1e-3*[0.0000 -0.1557 -0.2755 -0.3232 -0.2755 -0.1557 -0.0000];
x_3 = linspace(0, 1, length(v_3));

v_5 = 1e-3*[-0.0000 -0.0957 -0.1837 -0.2561 -0.3053 -0.3233 -0.3053 -0.2561 -
0.1837 -0.0957 -0.0000];
x_5 = linspace(0, 1, length(v_5));

figure
fat = 1000; % fator de escala para ampliação dos deslocamentos
% Deflexão
y = zeros(np,1);
y(xa<0.5*1) = F*xa(xa<0.5*1)/(48*E*I).*(4*xa(xa<0.5*1).^2 - 3*1^2);
a = l/2;
y(xa>=0.5*1) = F*a*(1-xa(xa>=0.5*1))/(6*E*I*1).*(xa(xa>=0.5*1).^2 + a^2 -
2*1*xa(xa>=0.5*1));
plot( xa,y*fat,'-k', x_3, fat*v_3,'*--r', x_2, fat*v_2,'*-b', x_1,
fat*v_1,'*--g')

```

```

legend('Analítico','3 elementos', '2 elementos', '1 elemento', 'Location',
'north')
grid on
xlabel('x [m]')
ylabel('y [mm]')

```

Código 3. MEF_Vigas_Grau5.mlx

```

clc; clear; close all

```

```

syms v x L
syms a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5
syms v_1 v_2 v_3 theta_1 theta_2 theta_3
syms xi
syms q

```

Função polinomial de 5ª ordem

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$

```

v(x) = a_0 + a_1*x + a_2*x^2 + a_3*x^3 + a_4*x^4 + a_5*x^5;

```

```

dvdv(x) = diff(v(x),x);

```

```

eq1 = v(0) == v_1;

```

```

eq2 = dvdv(0) == theta_1;

```

```

eq3 = v(L/2) == v_2;

```

```

eq4 = dvdv(L/2) == theta_2;

```

```

eq5 = v(L) == v_3;

```

```

eq6 = dvdv(L) == theta_3;

```

```

eqns = [eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6];

```

```

[alpha_0,alpha_1,alpha_2,alpha_3,alpha_4,alpha_5] = solve(eqns,[a_0 a_1
a_2 a_3 a_4 a_5]);

```

```

v(x) =

```

```

subs(v(x),[a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5],[alpha_0,alpha_1,alpha_2,alpha_3,alph
a_4,alpha_5]);

```

```

v(x) = collect(v(x),[v_1 theta_1 v_2 theta_2 v_3 theta_3]);

```

% Funções de forma para cada uma das variáveis nodais

```
phi_1 = subs(v(x), [v_1, theta_1, v_2, theta_2, v_3, theta_3], [1, 0, 0, 0, 0, 0])
```

```
phi_2 = subs(v(x), [v_1, theta_1, v_2, theta_2, v_3, theta_3], [0, 1, 0, 0, 0, 0])
```

```
phi_3 = subs(v(x), [v_1, theta_1, v_2, theta_2, v_3, theta_3], [0, 0, 1, 0, 0, 0])
```

```
phi_4 = subs(v(x), [v_1, theta_1, v_2, theta_2, v_3, theta_3], [0, 0, 0, 1, 0, 0])
```

```
phi_5 = subs(v(x), [v_1, theta_1, v_2, theta_2, v_3, theta_3], [0, 0, 0, 0, 1, 0])
```

```
phi_6 = subs(v(x), [v_1, theta_1, v_2, theta_2, v_3, theta_3], [0, 0, 0, 0, 0, 1])
```

Funções de forma adimensionais

$\phi_1(\xi)$

```
phi_1_a = subs(phi_1, x/L, xi);
```

$\phi_2(\xi)$ (L não é eliminado portanto é substituído por 1 nas expressões abaixo)

```
phi_2_a = subs(phi_2, x/L, xi);
```

```
phi_2_a = subs(phi_2_a, x, xi*L);
```

```
phi_2_a = subs(phi_2_a, L, 1);
```

```
dphi_2_dx = diff(phi_2, x);
```

```
dphi_2_dx = subs(dphi_2_dx, x/L, xi);
```

$\phi_3(\xi)$

```
phi_3_a = subs(phi_3, x/L, xi);
```

```
phi_3_a = subs(phi_3_a, x, xi*L);
```

```
phi_3_a = subs(phi_3_a, L, 1);
```

$\phi_4(\xi)$

```
phi_4_a = subs(phi_4, x/L, xi);
```

```
phi_4_a = subs(phi_4_a, x, xi*L);
```

```
phi_4_a = subs(phi_4_a, L, 1);
```

```
dphi_4_dx = diff(phi_4, x);
```

```
dphi_4_dx = subs(dphi_4_dx, x/L, xi);
```

$\phi_5(\xi)$

```
phi_5_a = subs(phi_5, x/L, xi);
```

```
phi_5_a = subs(phi_5_a, x, xi*L);
```

```
phi_5_a = subs(phi_5_a, L, 1);
```

$\phi_6(\xi)$

```
phi_6_a = subs(phi_6, x/L, xi);
```

```

phi_6_a = subs(phi_6_a,x,xi*L);
phi_6_a = subs(phi_6_a,L,1);
dphi_6_dx = diff(phi_6,x);
dphi_6_dx = subs(dphi_6_dx,x/L,xi);

```

Vetor com funções de forma

```

Phi = [phi_1 phi_2 phi_3 phi_4 phi_5 phi_6]
h1 = matlabFunction(Phi, 'File', "fforma");

```

Vetor com derivada segunda das funções de forma

```

D1 = diff(Phi,1);
h2 = matlabFunction(D1, 'File', "dfforma");
D2 = diff(Phi,2);
h3 = matlabFunction(D2, 'File', "ddfforma");
D3 = diff(Phi,3);
h4 = matlabFunction(D3, 'File', "dddfforma");

```

```
D = D2;
```

Cálculo da Matriz de Rigidez

```

syms E I C_1
K = int(35*L^3*(D'*D),x,0,L)
ht = matlabFunction(K, 'File', "calc_Ke");

```

Cálculo do vetor de Cargas

```
q = int(q*Phi, 0, L)
```


APÊNDICE B – Dados de entrada

Código 4. Dados_cargapontual.m para Exemplo Analítico

```

% Arquivo de Dados para Principal_eixo

% Propriedades Mecânicas do Material
E = 210e9; % Módulo de elasticidade do aço (Pa)

% Exemplo Analítico
mesh = 2;
Li = 1;
di = 0.05;

% Parâmetros da malha
nelem = sum(mesh); % número de elementos
nnos = 2*nelem + 1; % número de nós
ngdl = 2*nnos; % número de graus de liberdade

% Comprimento de cada seção do eixo

L = sum(Li); % Comprimento total do eixo
l = calc_l_elem(Li,mesh); % Comprimento de cada elemento finito

% Diâmetros de cada seção do eixo

d = calc_d_elem(di,mesh); % Diâmetro de cada elemento finito
I = pi*(d/2).^4 /4; % Momento de inércia de cada elemento finito

% Restrições para cada nó (Deslocamento igual a zero para os graus de
% liberdade que estão travados)
% 1ª coluna = nº do nó
% 2ª coluna = nº do gdl do nó, "1" para deslocamento e "2" para inclinação
% 3ª coluna = deflexão ou inclinação prescrito
no1 = 1; % primeiro nó
nou = nnos; % último nó
% Simplesmente apoiado nas extremidades
CCONT=[no1 1 0
        nou 1 0];
% Engastado nas extremidades
% CCONT=[no1 1 0
%         no1 2 0
%         nou 1 0
%         nou 2 0];

% Matriz para Imposição de forças
% 1ª coluna = tipo do carregamento
% 1 -> força distribuída
% 2 -> força pontual no nó i do elemento
% 3 -> força pontual no nó j do elemento
% 4 -> força pontual no nó k do elemento
% 5 -> momento pontual no nó i do elemento
% 6 -> momento pontual no nó j do elemento
% 7 -> momento pontual no nó k do elemento
% 2ª coluna = carga aplicada (P ou M) ou q1
% 3ª coluna = carga aplicada (P ou M) ou q3

```

```

FORCE = zeros(nelem,3);

% Uma linha para cada carga pontual
% (Se a carga for do tipo pontual e compartilhada por dois elementos deve ser
indicada uma linha para um)
P = -1e3;
% Carga centralizada, número par de elementos e matriz simétrica

% EXEMPLO ANALÍTICO
FORCE(1,:) = [4 P 0];
FORCE(2,:) = [2 P 0];

```

Código 5. Dados_cargapontual.m para Exemplo 1

```

% Arquivo de Dados para Principal_eixo

% Propriedades Mecânicas do Material
E = 210e9; % Módulo de elasticidade do aço (Pa)

% Malha com números de elementos diferentes para cada seção do eixo
% Exemplo 1
mesh = [1 1 2 2 2 1 1];
Li = [0.024 0.020 0.040 0.1 0.05 0.015 0.025];
di = [0.025 0.035 0.042 0.050 0.042 0.035 0.025];

% Parâmetros da malha
nelem = sum(mesh); % número de elementos
nnos = 2*nelem + 1; % número de nós
ngdl = 2*nnos; % número de graus de liberdade

% Comprimento de cada seção do eixo

L = sum(Li); % Comprimento total do eixo
l = calc_l_elem(Li,mesh); % Comprimento de cada elemento finito

% Diâmetros de cada seção do eixo

d = calc_d_elem(di,mesh); % Diâmetro de cada elemento finito
I = pi*(d/2).^4 /4; % Momento de inércia de cada elemento finito

% Restrições para cada nó (Deslocamento igual a zero para os graus de
% liberdade que estão travados)
% 1º coluna = nº do nó
% 2º coluna = nº do gdl do nó, "1" para deslocamento e "2" para inclinação
% 3º coluna = deflexão ou inclinação prescrito
no1 = 1; % primeiro nó
nou = nnos; % último nó
% Simplesmente apoiado nas extremidades
CCONT=[no1 1 0
      nou 1 0];
% Engastado nas extremidades
% CCONT=[no1 1 0
%       no1 2 0
%       nou 1 0
%       nou 2 0];

```

```

% Matriz para Imposição de forças
% 1ª coluna = tipo do carregamento
% 1 -> força distribuída
% 2 -> força pontual no nó i do elemento
% 3 -> força pontual no nó j do elemento
% 4 -> força pontual no nó k do elemento
% 5 -> momento pontual no nó i do elemento
% 6 -> momento pontual no nó j do elemento
% 7 -> momento pontual no nó k do elemento
% 2ª coluna = carga aplicada (P ou M) ou q1
% 3ª coluna = carga aplicada (P ou M) ou q3
FORCE = zeros(nelem,3);

% Uma linha para cada carga pontual
% (Se a carga for do tipo pontual e compartilhada por dois elementos deve ser
indicada uma linha para um)

% EXEMPLO 1
% Para utilizar as cargas em um plano, comentar o bloco contendo os dados
% do outro

% Cargas em x-y
FORCE(3,:) = [4 -875 0]; % D3
FORCE(4,:) = [2 -875 0]; % D3
FORCE(7,:) = [4 -3900 0]; % D5
FORCE(8,:) = [2 -3900 0]; % D5

%Cargas em x-z
FORCE(3,:) = [4 2400 0]; % D3
FORCE(4,:) = [2 2400 0]; % D3
FORCE(7,:) = [4 -10800 0]; % D5
FORCE(8,:) = [2 -10800 0]; % D5

```

Código 6. Dados_cargapontual.m para Exemplo 2

```

% Arquivo de Dados para Principal_eixo

% Propriedades Mecânicas do Material
E = 210e9; % Módulo de elasticidade do aço (Pa)

% Malha com números de elementos diferentes para cada seção do eixo
% Exemplo 2
mesh = [1 1 2 2 2 1 1];
Li = [25 112.5 100 325 50 87.5 25]*1e-3;
di = [0.0370 0.0550 0.0580 0.0700 0.0580 0.0550 0.0370];

% Parâmetros da malha
nelem = sum(mesh); % número de elementos
nnos = 2*nelem + 1; % número de nós
ngdl = 2*nnos; % número de graus de liberdade

% Comprimento de cada seção do eixo

L = sum(Li); % Comprimento total do eixo

```

```

l = calc_l_elem(Li,mesh); % Comprimento de cada elemento finito

% Diâmetros de cada seção do eixo

d = calc_d_elem(di,mesh); % Diâmetro de cada elemento finito
I = pi*(d/2).^4 /4; % Momento de inércia de cada elemento finito

% Restrições para cada nó (Deslocamento igual a zero para os graus de
% liberdade que estão travados)
% 1º coluna = nº do nó
% 2º coluna = nº do gdl do nó, "1" para deslocamento e "2" para inclinação
% 3º coluna = deflexão ou inclinação prescrito
no1 = 1; % primeiro nó
nou = nnos; % último nó
% Simplesmente apoiado nas extremidades
CCONT=[no1 1 0
      nou 1 0];
% Engastado nas extremidades
% CCONT=[no1 1 0
%       no1 2 0
%       nou 1 0
%       nou 2 0];

% Matriz para Imposição de forças
% 1º coluna = tipo do carregamento
% 1 -> força distribuída
% 2 -> força pontual no nó i do elemento
% 3 -> força pontual no nó j do elemento
% 4 -> força pontual no nó k do elemento
% 5 -> momento pontual no nó i do elemento
% 6 -> momento pontual no nó j do elemento
% 7 -> momento pontual no nó k do elemento
% 2º coluna = carga aplicada (P ou M) ou q1
% 3º coluna = carga aplicada (P ou M) ou q3
FORCE = zeros(nelem,3);

% Uma linha para cada carga pontual
% (Se a carga for do tipo pontual e compartilhada por dois elementos deve ser
% indicada uma linha para um)

% Cargas Exemplo 2
FORCE(3,:) = [4 -2700 0]; % D3
FORCE(4,:) = [2 -900 0]; % D5
FORCE(7,:) = [4 -900 0]; % D5
FORCE(8,:) = [2 -900 0]; % D5

```

APÊNDICE C – Funções

Código 7. `plota_eixo.m`

```
function [] = plota_eixo(d,l)

% Gera esboço do eixo
figure
xi = zeros(length(d));
for i=2:length(l)
    xi(i) = xi(i-1) + l(i-1);
end
for i=1:length(d)
    xo = xi(i);
    yo = -d(i)/2;
    w = l(i);
    h = d(i);
    rectangle('Position',[xo yo w h]*1e3)
    hold on
    str = ['D' num2str(i)];
    text((xi(i)+l(i)/2)*1e3,0,str,'Color','b','HorizontalAlignment','center')
end
grid on

% Linha de centro
plot([-0.05*sum(l) 1.05*sum(l)]*1e3,[0 0], '-.k')
axis equal
axis([-0.1*sum(l) 1.1*sum(l) -0.8*max(d) 0.8*max(d)]*1e3)
xlabel('x [mm]')
ylabel('y [mm]')
```

Código 8. `malha.m`

```
function [x,INCI] = malha(nelem,nnos,l,L)
% x - > Posição dos nós da malha
% INCI - > Matriz de incidência nodal
% Faz referência a:
% 1º coluna = nó i do elemento
% 2º coluna = nó j do elemento
% 3º coluna = nó k do elemento

% Vetor de posição dos nós
x = zeros(nnos,1);
INCI = zeros(nelem,3);

a = 2;
for i=1:nelem
    % posição do nó 1 é definida no laço anterior e é igual a do nó 3
    % anterior, para a primeira iteração é igual a zero
    x(a,1) = x(a-1,1) + l(i)/2; % posição do nó 2 do elemento
    x(a+1,1) = x(a,1) + l(i)/2; % posição do nó 3 do elemento
    INCI(i,:) = [a-1 a a+1];
    a = a + 2;
end
```

```

% Plota Malha
indi = mod(1:nnos, 2) == 1; % índices ímpares
indp = mod(1:nnos, 2) == 0; % índices pares
figure
plot(x,zeros(nnos),'k','MarkerSize',15)
hold on
plot(x,zeros(nnos),'-k')
plot(x(indi),zeros(length(x(indi))),'|','MarkerSize',20,'MarkerEdgeColor','red')

% Plota número dos elementos
xelem = x(indp);
for i = 1:nelem
    text(xelem(i),-
0.05*L,num2str(i),'Color','r','HorizontalAlignment','center','EdgeColor','r')
end

% Plota número dos nós
for i = 1:nnos
    text(x(i),0.01*L,num2str(i),'HorizontalAlignment','center',
'VerticalAlignment','baseline')
end

ax = 0.05*abs(max(x)-min(x));
axis([min(x)-ax max(x)+ax -0.1 0.1])
daspect([1 1 1])
grid on
xlabel('x [m]')
hold off

```

Código 9. Aplica_cdc.m

```

function [K,F] = aplica_cdc(KG,FG,CCONT,ngdl)
% Aplica as condições de contorno de deslocamentos prescritos modificando a
% matriz KG em K e a FG em F, usando a CCONT como referência

K = KG;
F = FG;
for i=1:length(CCONT(:,1))
    no = CCONT(i,1); % número do nó
    gdl = CCONT(i,2); % 1 p/ deslocamento e 2 p/ inclinação
    val = CCONT(i,3); % valor prescrito
    nl = 2*(no-1) + gdl; % linha da matriz a ser modificada
    K(nl,:) = zeros(1,ngdl);
    K(nl,nl) = 1;
    F(nl,1) = val;
end

```

Código 10. separa_resultados.m

```

function [v,theta,f,m,rf,rm] = separa_resultados(U,FG,R,ngdl)

imp = mod(1:ngdl, 2) == 1; % função para extrair os índices ímpares
par = mod(1:ngdl, 2) == 0; % Função para extrair os índices pares

v = U(imp); % Deslocamento em m

```

```

theta = U(par); % Inclinações em radianos
f = FG(imp); % Forças aplicadas
m = FG(par); % Momentos aplicados
rf = R(imp); % Forças de reação
rm = R(par); % Momentos de reação

```

Código 11. dfforma.m

```

function D1 = dfforma(L,x)
%DFFORMA
% D1 = DFFORMA(L,X)

% This function was generated by the Symbolic Math Toolbox version 23.2.
% 03-Jan-2024 18:12:52

t2 = x.^2;
t3 = x.^3;
t5 = 1.0./L;
t4 = t2.^2;
t6 = t5.^2;
t7 = t5.^3;
t9 = t5.^5;
t8 = t6.^2;
t11 = t4.*t9.*1.2e+2;
t10 = t4.*t8.*2.0e+1;
D1 = [t11+t2.*t7.*1.98e+2-t3.*t8.*2.72e+2-t6.*x.*4.6e+1,t10+t2.*t6.*3.9e+1-
t3.*t7.*4.8e+1-t5.*x.*1.2e+1+1.0,t2.*t7.*-
9.6e+1+t3.*t8.*6.4e+1+t6.*x.*3.2e+1,t2.*t6.*9.6e+1-
t3.*t7.*1.6e+2+t4.*t8.*8.0e+1-t5.*x.*1.6e+1,-t11-
t2.*t7.*1.02e+2+t3.*t8.*2.08e+2+t6.*x.*1.4e+1,t10+t2.*t6.*1.5e+1-
t3.*t7.*3.2e+1-t5.*x.*2.0];
end

```

Código 12. ddfforma.m

```

function D2 = ddfforma(L,x)
%DFFORMA
% D2 = DDFFORMA(L,X)

% This function was generated by the Symbolic Math Toolbox version 23.2.
% 03-Jan-2024 18:12:52

t2 = x.^2;
t3 = x.^3;
t4 = 1.0./L;
t5 = t4.^2;
t6 = t4.^3;
t8 = t4.^5;
t7 = t5.^2;
t10 = t3.*t8.*4.8e+2;
t9 = t3.*t7.*8.0e+1;
D2 = [t5.*-4.6e+1+t10-t2.*t7.*8.16e+2+t6.*x.*3.96e+2,t4.*-1.2e+1+t9-
t2.*t6.*1.44e+2+t5.*x.*7.8e+1,t5.*3.2e+1+t2.*t7.*1.92e+2-t6.*x.*1.92e+2,t4.*-
1.6e+1-t2.*t6.*4.8e+2+t3.*t7.*3.2e+2+t5.*x.*1.92e+2,t5.*1.4e+1-
t10+t2.*t7.*6.24e+2-t6.*x.*2.04e+2,t4.*-2.0+t9-t2.*t6.*9.6e+1+t5.*x.*3.0e+1];
end

```

Código 13. dddfforma.m.m

```
function D3 = dddfforma(L,x)
%DDDDFFORMA
%   D3 = DDDFFORMA(L,X)

%   This function was generated by the Symbolic Math Toolbox version 23.2.
%   03-Jan-2024 18:12:52

t2 = x.^2;
t3 = 1.0./L.^2;
t4 = 1.0./L.^3;
t6 = 1.0./L.^5;
t5 = t3.^2;
t8 = t2.*t6.*1.44e+3;
t7 = t2.*t5.*2.4e+2;
D3 = [t4.*3.96e+2+t8-t5.*x.*1.632e+3,t3.*7.8e+1+t7-t4.*x.*2.88e+2,t4.*-
1.92e+2+t5.*x.*3.84e+2,t3.*1.92e+2+t2.*t5.*9.6e+2-t4.*x.*9.6e+2,t4.*-2.04e+2-
t8+t5.*x.*1.248e+3,t3.*3.0e+1+t7-t4.*x.*1.92e+2];
end
```

Código 14. calc_MV.m

```
function [Ui,Thetai,Mi,Vi,Sigi,Xi] =
calc_MV(v,theta,nelem,nnos,l,elem,E,I,x,d)
% Externamente elem = INCI
% Cálculo de Forças internas e Tensões
Ui = [];
Thetai = [];
Mi = [];
Vi = [];
Xi = [];
Sigi = [];

for i=1:nelem
    xi = 0:l(i)/10:l(i); % interpolação no interior do elemento
    xnoi = x(elem(i,1),1);

    % Valores nodais
    vi = v(elem(i,:)); % deslocamento nos nós do elemento
    thetai = theta(elem(i,:)); % inclinação nos nós do elemento

    % Funções de Forma e suas derivadas
    Phi = fforma(l(i),xi);
    DPhi = dfforma(l(i),xi);
    DDPhi = ddfforma(l(i),xi);
    DDDPhi = dddfforma(l(i),xi);

    % Deslocamento em pontos internos
    uint = (Phi(:,1)*vi(1) + Phi(:,2)*thetai(1) + Phi(:,3)*vi(2)...
    + Phi(:,4)*thetai(2) + Phi(:,5)*vi(3) + Phi(:,6)*thetai(3));
    Ui = [Ui uint'];

    % Inclinação em pontos internos
    theint = (DPhi(:,1)*vi(1) + DPhi(:,2)*thetai(1) + DPhi(:,3)*vi(2)...
    + DPhi(:,4)*thetai(2) + DPhi(:,5)*vi(3) + DPhi(:,6)*thetai(3));
    Thetai = [Thetai theint'];
end
```



```

    % Momento em pontos internos
    Mint = E*I(i)*(DDPhi(:,1)*vi(1) + DDPhi(:,2)*thetai(1) +
DDPhi(:,3)*vi(2)...
    + DDPhi(:,4)*thetai(2) + DDPhi(:,5)*vi(3) + DDPhi(:,6)*thetai(3));
    Mi = [Mi Mint'];

    % Força cortante em pontos internos
    Vint = E*I(i)*(DDDPhi(:,1)*vi(1) + DDDPhi(:,2)*thetai(1) +
DDDPhi(:,3)*vi(2)...
    + DDDPhi(:,4)*thetai(2) + DDDPhi(:,5)*vi(3) + DDDPhi(:,6)*thetai(3));
    Vi = [Vi Vint'];

    % Tensões em pontos internos
    Sig = Mint*0.5*d(i)/I(i);
    Sigi = [Sigi Sig'];

    % Coordenadas dos pontos internos
    Xi = [Xi xnoi+xi];
end

figure
subplot(2,2,1)
fat = 1000; % fator de escala para ampliação dos deslocamentos
Ui = Ui*fat; % Deslocamento em mm
plot(Xi,Ui,'-r',x,zeros(nnos),'k')
[xmin,xmax,ymin,ymax] = plot_limits(Xi,Ui,1,0.1);
axis([xmin xmax ymin ymax])
xlabel('X [m]', 'FontSize', 9)
ylabel('v [mm]')
grid on
title('a')

Ui = Ui/fat; % Deslocamento em m

subplot(2,2,3)
plot(Xi,Thetai,'-r',x,zeros(nnos),'k')
[xmin,xmax,ymin,ymax] = plot_limits(Xi,Thetai,1,0.1);
axis([xmin xmax ymin ymax])
xlabel('X [m]', 'FontSize', 9)
ylabel('\theta [rad]')
grid on
title('b')

subplot(2,2,2)
plot(Xi,Mi,'-r',x,zeros(nnos),'k')
[xmin,xmax,ymin,ymax] = plot_limits(Xi,Mi,1,0.1);
axis([xmin xmax ymin ymax])
xlabel('X [m]', 'FontSize', 9)
ylabel('M [N.m]')
grid on
title('c')

subplot(2,2,4)
plot(Xi,Vi,'-r',x,zeros(nnos),'k')
[xmin,xmax,ymin,ymax] = plot_limits(Xi,Vi,1,0.1);
axis([xmin xmax ymin ymax])
xlabel('X [m]', 'FontSize', 9)

```

```
ylabel('V [N]')
grid on
title('d')

figure
plot(Xi,Sigi/10^6,'-r',x,zeros(nnos),'.k')
[xmin,xmax,ymin,ymax] = plot_limits(Xi,Sigi,1/10^6,0.1);
axis([xmin xmax ymin ymax])
xlabel('X [m]')
ylabel('\sigma [MPa]')
grid on
```