

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UBIRAJARA ALVES DE SOUSA JUNNYOR

**ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS MODELOS DE VIGA DE
EULER-BERNOULLI E TIMOSHENKO NO CÁLCULO DE FREQUÊNCIAS
NATURAIS**

**São Luís - MA
2023**

UBIRAJARA ALVES DE SOUSA JUNNYOR

**ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS MODELOS DE VIGA DE EULER-BERNOULLI E
TIMOSHENKO NO CÁLCULO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação Coordenação do Curso de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador:

Prof. Dr. Elson César Moraes.

Coorientador:

Prof. Dr. Edilson Dantas Nóbrega.

São Luís - MA

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Junnyor, Ubirajara Alves de Sousa.

ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS MODELOS DE VIGA DE EULER-
BERNOULLI E TIMOSHENKO NO CÁLCULO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS
/ Ubirajara Alves de Sousa Junnyor. - 2023.

80 p.

Coorientador(a): Edilson Dantas Nóbrega.

Orientador(a): Elson César Moraes.

Monografia (Graduação) - Curso de Engenharia Mecânica,
Universidade Federal do Maranhão, São Luís, Maranhão,
2023.

1. Cálculo de frequências naturais. 2. Finite Element
Method (FEM). 3. Viga de Euler-Bernoulli. 4. Viga de
Timoshenko. I. Moraes, Elson César. II. Nóbrega, Edilson
Dantas. III. Título.

UBIRAJARA ALVES DE SOUSA JUNNYOR

**ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS MODELOS DE VIGA DE EULER-BERNOULLI E
TIMOSHENKO NO CÁLCULO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à coordenação
Coordenação do Curso de Engenharia
Mecânica, como requisito para
obtenção do título Bacharel(a) em
Engenharia Mecânica.

Orientador:

Prof. Dr. Elson César Moraes.

Coorientador:

Prof. Dr. Edilson Dantas Nóbrega.

Trabalho aprovado. São Luís - MA ____ de _____ 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Elson César Moraes - UFMA/Orientador

Prof. Dr. Edilson Dantas Nóbrega - UFMA/Engenharia Mecânica

Prof. Dr. Wilson Souza Pereira - UFMA/Engenharia Mecânica

Dedico este trabalho aos meus pais, Lauciane e Ubirajara, pelo amor incondicional que me deram. Dedico este trabalho a mim como prova de que sou capaz de realizar tudo aquilo que desejo.

AGRADECIMENTOS

Ao magnífico Maestro que conduz essa grandiosa orquestra chamada cosmos.

Ao meu orientador, Dr. Elson César Moraes, que me ajudou a trilhar essa longa jornada.

Aos membros da banca de defesa.

Aos professores que contribuíram positivamente para minha vida, dentro e fora da sala de aula.

À Regina e à jovem senhora Antônia, por sempre desejarem meu sucesso.

Aos meus amigos mais íntimos, com quem compartilhei sonhos e angústias: Francisco, Matheus, Alan, Edinaldo, Elias, Fabio, Ingrid, Marcel, Stella e Josué.

Ao meu tio Adeilton, com quem compartilhei opiniões acerca da vida e do funcionamento do mundo em cada conversa.

À minha irmã Layara e seu esposo Tiago, pelo suporte durante a minha mudança de cidade.

Ao meu irmão Thiago, à minha mãe Lauciane e ao meu pai Ubirajara, que durante esta jornada sempre estiveram ao meu lado.

*"Se fosse fácil, todo mundo era
Se fosse fácil, todo mundo tinha
Se fosse fácil, não teria graça
Se fosse fácil, não teria glória."*

(Autor Desconhecido).

RESUMO

O conhecimento do comportamento dinâmico de estrutura do tipo viga assim como a capacidade de predizê-los são informações importantes para a engenharia. Há várias teorias de vigas, dentre elas destaca-se o modelo de Euler-Bernoulli e o de Timoshenko. Este trabalho tem como objetivo realizar uma análise comparativa entre esses dois modelos. Para isso, desenvolvemos códigos que utilizam o método dos elementos finitos (FEM) e o método dos elementos espectrais (SEM) para discretizar os modelos de viga. Os resultados apresentam as dez primeiras frequências naturais para duas configurações de vigas, utilizando os modelos de Timoshenko e Euler-Bernoulli através do FEM. Ao longo do estudo, foi possível realizar uma comparação qualitativa e quantitativa da predição de frequências naturais entre os modelos, avaliar a convergência do FEM em relação à precisão dos valores, com dados experimentais disponíveis e o tempo de processamento requerido. Concluímos que o modelo de Timoshenko prevê frequências naturais menores que o modelo de Euler-Bernoulli, mesmo em vigas demasiadamente esbeltas.

Palavras-chave: Viga de Euler-Bernoulli; Viga de Timoshenko; Finite Element Method (FEM); Cálculo de frequências naturais.

ABSTRACT

The knowledge of the dynamic behavior of beam structures, as well as the ability to predict them, is crucial for engineering. There are various theories regarding beams, with Euler-Bernoulli and Timoshenko models standing out. This work aims to perform a comparative analysis between these two beam models. To achieve this, we developed codes using the Finite Element Method (FEM) and the Spectral Element Method (SEM) to discretize the beam models. The results present the first ten natural frequencies for two beam configurations, using the Timoshenko and Euler-Bernoulli models through the FEM. Throughout the study, it was possible to make a qualitative and quantitative comparison of the natural frequency predictions between the models, assess the convergence of the FEM method concerning the accuracy of values, with available experimental data, and the required processing time. We conclude that the Timoshenko model predicts natural frequencies lower than the Euler-Bernoulli model, even for excessively slender beams.

Keywords: Euler-Bernoulli Beam; Timoshenko Beam; Finite Element Method (FEM); Natural Frequency Prediction.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.2.1– Geometria de um simples elemento de viga.	22
Figura 4.2.1– Resultado obtido pelo teste de performance do MATLAB	44
Figura 4.2.2– Fluxograma de execução do algoritmo do código FEM	45
Figura 4.2.3– Fluxograma de execução do algoritmo do código SEM	47
Figura 5.1.1– FRF - TVEB - Viga Engastada-Engastada - SEM	49
Figura 5.1.2– FRF - TVEB - viga Bi-apoiada - SEM	50
Figura 5.2.1– FRF - TVEB - Viga Engastada-Engastada - FEM (300 elementos)	52
Figura 5.2.2– FRF - TVEB - Viga Bi-apoiada - FEM (300 elementos)	53
Figura 5.2.3– TVEB - Relação entre tempo de execução e refinamento de malha	54
Figura 5.2.4– TVEB - Relação entre erro relativo e refinamento de malha	55
Figura 5.3.1– FRF - TVT - Viga Engastada-Engastada - FEM(300 elementos)	56
Figura 5.3.2– FRF - TVT - Viga Bi-apoiada - FEM(300 elementos)	57
Figura 5.3.3– TVT - Relação entre tempo de execução e refinamento de malha	58
Figura 5.3.4– TVT - Relação erro relativo e refinamento de malha	59
Figura C.1.1– Os 10 primeiros modos de vibração da VEE usando a TVEB	78
Figura C.2.1– Os 10 primeiros modos de vibração da VEE usando a TVT	79
Figura C.3.1– Os 10 primeiros modos de vibração da VBA usando a TVEB	80
Figura C.4.1– Os 10 primeiros modos de vibração da VBA usando a TVT	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1.1– Propriedades do material e dimensões da estrutura tipo vida simulada . . .	43
Tabela 5.1.1– Frequências - TVEB - Viga Engastada-Engastada - SEM	50
Tabela 5.1.2– Frequências - TVEB - viga Bi-apoiada - SEM	51
Tabela 5.2.1– Frequências - TVEB - Viga Engastada-Engastada - FEM (300 elementos) .	52
Tabela 5.2.2– Frequências - TVEB - Viga Bi-apoiada - FEM (300 elementos)	53
Tabela 5.3.1– Frequências - TVT - Viga Engastada-Engastada - FEM(300 elementos) . .	56
Tabela 5.3.2– Frequências - TVT - Viga Bi-apoiada - FEM(300 elementos)	57
Tabela 5.3.3– Comparação entre os tempos de execução	59

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FEM	Método dos Elementos Finitos (<i>Finite Element Method</i>)
SEM	Método dos Elementos Espectrais (<i>Spectral Element Methods</i>)
TVEB	Teoria de viga de Euler-Bernoulli
TVT	Teoria de viga de Timoshenko
VEE	Viga Engastada-Engastada
VBA	Viga Bi-Apoiada
FRF	Função Resposta em Frequência (<i>Frequency Response Function</i>)

LISTA DE SÍMBOLOS

E	módulo de elasticidade, ou, módulo de Young.
I	momento de inércia de área.
ρ	densidade.
A	área da seção transversal.
$v(x,t)$	deslocamento transversal ou deflexão.
L	comprimento do elemento de viga.
a	semi-comprimento do elemento de viga.
x	coordenada dimensional.
ξ	coordenada adimensional.
θ	rotação angular da seção transversal.
$[\mathbf{v}]_e$	vetor dos deslocamentos nodais.
$[N(\xi)]$	vetor das funções de forma do modelo de Euler-Bernoulli.
T_e	energia cinética de um elemento de viga.
U_e	energia potencial de um elemento de viga.
$[\mathbf{m}]_e$	matriz de massa de um elemento de viga.
$[\mathbf{k}]_e$	matriz de rigidez de um elemento de viga.
$[\mathbf{D}]_e$	matriz de rigidez dinâmica de um elemento de viga.
ω	frequência angular.
$[\mathbf{F}]_e$	vetor de forças externas aplicadas nos nós.
ω_n	n-ésima frequência angular.
$V(x; \omega)$	deslocamento transversal no domínio da frequência.
k_F	número de onda.
$\Theta(x; \omega)$	Inclinação da seção transversal no domínio da frequência.
$[\mathbf{d}]_e$	vetor de deslocamentos nodais espectrais.

$[N(x; \omega)]$	vetor com as funções de forma espectral.
$[f_{esp}]$	vetor de forças nodais espectral.
$[S_B(\omega)]$	matriz do elemento espectral do modelo de viga de Euler-Bernoulli.
K_c	fator de cisalhamento ou coeficiente de Timoshenko.
G	módulo de cisalhamento.
Φ	constante que aparece no equacionamento do modelo de Timoshenko.
$[Q(\xi)]$	vetor das funções de forma do $v(x, t)$ do modelo de Timoshenko.
$[R(\xi)]$	vetor das funções de forma do $\theta(x, t)$ do modelo de Timoshenko.
$[k_{aux,1}]$	primeira parte da matriz de rigidez de um elemento de viga de Timoshenko.
$[k_{aux,2}]$	segunda parte da matriz de rigidez de um elemento de viga de Timoshenko.
b	largura da seção transversal da viga.
h	altura da seção transversal da viga.
L/h	índice de esbeltez da viga.
f	frequência.
t	tempo.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	OBJETIVOS	20
1.1.1	<i>OBJETIVOS GERAIS</i>	20
1.1.2	<i>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</i>	20
2	TEORIA DE VIGA DE EULER-BERNOULLI	21
2.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.2	ELEMENTO FINITO DE EULER-BERNOULLI	22
2.3	ENERGIA POTENCIAL E CINÉTICA	24
2.4	ELEMENTO ESPECTRAL DA VIGA DE BERNOULLI-EULER	26
3	TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO	31
3.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
3.2	ELEMENTO FINITO DE TIMOSHENKO	33
3.3	ENERGIA POTENCIAL E CINÉTICA	37
4	METODOLOGIA	43
4.1	CONFIGURAÇÃO DE VIGA	43
4.2	SIMULAÇÃO NUMÉRICA	44
4.2.1	<i>ESPECIFICAÇÃO DE MÁQUINA E SOFTWARE</i>	44
4.2.2	<i>ESTRUTURA DO CÓDIGO FEM</i>	44
4.2.3	<i>ESTRUTURA DO CÓDIGO FEM</i>	46
4.2.4	<i>CONVERGÊNCIA DOS MÉTODOS FEM E SEM</i>	48
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	49
5.1	TEORIA DE VIGA DE EULER-BERNOULLI - SEM	49
5.1.1	<i>TVEB - VIGA ENGASTADA-ENGASTADA - SEM</i>	49
5.1.2	<i>TVEB - VIGA BI-APOIADA - SEM</i>	50
5.1.3	<i>TVEB - VALIDAÇÃO DO CÓDIGO - SEM</i>	51
5.2	VIGA DE EULER-BERNOULLI - FEM	51

5.2.1	<i>TVEB - VIGA ENGASTADA-ENGASTADA - FEM</i>	51
5.2.2	<i>TVEB - VIGA BI-APOIADA - FEM</i>	53
5.2.3	<i>TVEB - CONVERGÊNCIA DO MÉTODO FEM</i>	54
5.3	TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO - FEM	55
5.3.1	<i>TVT - VIGA ENGASTADA-ENGASTADA - FEM</i>	55
5.3.2	<i>TVT - VIGA BI-APOIADA - FEM</i>	56
5.3.3	<i>TVT - CONVERGÊNCIA DO MÉTODO FEM</i>	57
6	CONCLUSÃO	61
	REFERÊNCIAS	62
A	EQUACIONAMENTO VIGA DE TIMOSHENKO	64
A.1	Equacionamento Elemento Finito de Timoshenko	64
A.1.1	Determinação da Matriz de Massa	64
A.1.2	SOLUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ [K]	67
B	CÓDIGOS DESENVOLVIDOS EM MATLAB	72
B.1	CÓDIGO FEM	72
B.2	CÓDIGO SEM	75
C	MODOS DE VIBRAÇÃO	78
C.1	TVEB - VIGA ENGASTADA-ENGASTADA	78
C.2	TVT - VIGA ENGASTADA-ENGASTADA	79
C.3	TVEB - VIGA BI-APOIADA	80
C.4	TVT - VIGA BI-APOIADA	81

1 INTRODUÇÃO

Diversos sistemas construídos pelo homem produzem ou são impactados por vibrações mecânicas. No caso de máquinas como bombas centrífugas, ventiladores, turbinas, entre outras, as vibrações são geralmente indesejáveis e podem originar-se devido a desbalanceamentos no maquinário. Já em estruturas como torres, passarelas, edifícios, vasos de pressão, entre outras, estão sujeitas a vibrações causadas por fatores como ventos, terremotos e operação de máquinas (BALACHANDRAN; MAGRAB, 2016).

Compreender o comportamento dinâmico de uma estrutura é crucial. Além disso, prever esse comportamento com precisão e eficiência de recursos é tão necessário quanto. Dentre os tipos de estruturas comumente encontradas na engenharia prática, destacam-se as estruturas do tipo barra, viga, placa, entre outras (LEE, 2009).

Estruturas mais complexas frequentemente podem ser representadas por meio de uma combinação de estruturas mais simples. Nesse contexto, algumas dessas estruturas podem ser simplificadas para formas básicas, sendo as estruturas do tipo viga um exemplo prático. As asas de avião, eixos, trilhos de trens, entre outros, ilustram como uma estrutura complexa pode ser modelada como uma viga. Essa abordagem simplificada facilita a análise e compreensão do comportamento dessas estruturas mais complexas em diversos contextos de engenharia.

A estrutura do tipo viga é caracterizada por ser um elemento estreito que suporta a aplicação de cargas perpendiculares ao longo de seu eixo longitudinal. Em geral, vigas são barras compridas e retas, cuja dimensão longitudinal é muito maior que as dimensões de sua seção transversal. As vigas são comumente classificadas de acordo com os tipos de apoios (HIBBELER, 2010).

Um dos comportamentos dinâmicos presentes na estrutura de vigas é a vibração por flexão. Esse fenômeno, entre outros, vem sendo estudado há vários séculos, e ao longo deste tempo, diversas teorias e modelos matemáticos foram desenvolvidos para descrever o comportamento dinâmico de vigas (RAO, 2008; TIMOSHENKO, 1953).

O progresso no entendimento das vibrações em vigas não apenas abriu caminho para a análise e previsão do comportamento dinâmico de estruturas básicas em distintas condições de contornos, apoios e carregamentos, como também possibilitou o estudo de estruturas e arranjos estruturais mais complexos.

Devido à elevada complexidade das estruturas, torna-se impossível analisar ou prever o comportamento dinâmico de várias delas de maneira analítica. Diante desse desafio, foram

desenvolvidos métodos numéricos para resolver as equações diferenciais dos modelos teóricos, possibilitando assim a obtenção de respostas aproximadas desses sistemas (COOK et al., 2001; NORTON, 2013).

Mesmo com a aplicação de métodos numéricos, surgiram sistemas para os quais obter a resposta dinâmica com um nível aceitável de precisão se mostrava impraticável, devido à extensa demanda computacional necessária. Esse cenário só veio a mudar com a criação e desenvolvimento de computadores (COOK et al., 2001; NORTON, 2013).

Com a integração dos computadores e o avanço no desenvolvimento de programas e algoritmos, ocorreu uma revolução significativa na análise de engenharia. O poder de processamento aumentou expressivamente, resultando em economia de recursos e tempo durante a elaboração de projetos e estudos (NORTON, 2013).

Diversos métodos numéricos são aplicados e empregados para discretizar e solucionar o sistema dinâmico de uma estrutura. Entre esses métodos, destacam-se o Método dos Elementos Finitos (*Finite Element Method* - FEM), Métodos dos Elementos Espectrais (*Spectral Element Method* - SEM), Diferenças finitas, Método dos Elementos de Contorno (*Boundary Element Method* - BEM), entre outros (COOK et al., 2001; LEE, 2009; PETYT, 2010).

Em um amplo espectro de problemas físicos reais, deparamos com diversos modelos teóricos de viga que descrevem de maneira aproximada e satisfatória o comportamento dinâmico. Simultaneamente, observamos um conjunto variado de métodos numéricos desenvolvidos para solucionar as equações associadas, o que possibilita a obtenção das respostas dinâmicas desses modelos.

A investigação do comportamento dinâmico de uma estrutura em forma de viga pode ser realizada por meio da implementação de códigos para simulação dessas estruturas. Nesse contexto, é essencial selecionar um modelo teórico e um método numérico para discretizar o problema. Isso possibilita a comparação dos comportamentos dinâmicos de cada modelo de viga, utilizando um ou mais métodos numéricos. Além disso, é viável avaliar o custo computacional associado a cada método numérico.

O método dos elementos finitos (FEM) é um procedimento numérico que discretiza uma estrutura contínua em diversos elementos. O conjunto destes elementos é chamado de malha, e quanto maior a quantidade de elementos que constituem uma malha, mais ela está refinada. O método FEM aproxima o comportamento de cada elemento por equações algébricas elementares. A sobreposição do equacionamento de todos os elementos gera o sistema global de equações, que descreve o comportamento do modelo simulado (COOK et al., 2001; NUNES, 2005; PETYT, 2010).

Originalmente, o FEM foi criado como um método para a análise de tensões e deformações. Devido à sua versatilidade, o método pode ser aplicado na análise de diversos fenômenos físicos, como transferência de calor, escoamento de fluidos, transporte de massa, campos magnéticos e elétricos, entre outros. O FEM também possibilita a discretização de elementos com diferentes formas, tipos e propriedades físicas, assim como malhas homogêneas ou mistas. A versatilidade do método também suporta diferentes condições de contorno, configurações de carregamentos e geometrias (COOK et al., 2001).

Deste modo, o FEM é um poderoso método computacional. Um simples programa de computador que implemente o método por meio de um algoritmo consegue solucionar um problema físico, independentemente das configurações geométricas, carregamentos, condições de contorno, entre outras características dos *inputs* de dados. Entretanto, raramente é possível obter a resposta exata usando o método FEM, e a precisão do método depende da boa conformidade dos elementos da malha, assim como do refinamento da malha, sendo necessário um grande processamento e/ou tempo para alcançar a precisão requerida em casos mais complexos (COOK et al., 2001; PETYT, 2010).

O método dos elementos espectrais (SEM) é um método numérico relativamente novo em comparação com o FEM, sendo inicialmente investigado por Doyle (1997). O SEM utiliza a mesma discretização espacial do FEM, assim como uma montagem de sistema de equações parecida. A diferença é que, em vez da matriz de rigidez, o SEM usa a matriz de rigidez dinâmica exata (LEE, 2009).

O SEM apresenta a solução exata no domínio da frequência do modelo de viga tratado. Desta forma, o SEM, em teoria, descreve o comportamento dinâmico exato da estrutura. Um único elemento espectral do SEM tem a capacidade de modelar toda a estrutura, não havendo restrições quanto ao seu tamanho. Entretanto, se a estrutura tiver descontinuidades, será necessário criar um elemento espectral adicional para cada descontinuidade existente na estrutura (DOYLE, 1997; LEE, 2009).

Dois pontos negativos do SEM são que o método só pode ser aplicado em equações governantes, modelos onde as soluções exatas já foram determinadas no domínio da frequência. Assim, diversos modelos não possibilitam o uso do SEM. O outro ponto é que, como o SEM é baseado nas técnicas de transformada discreta de Fourier (DFT) e na transformada rápida de Fourier (FFT), ele não pode ser aplicado em sistemas não lineares que variam no tempo (LEE, 2009).

O FEM é um dos métodos mais usados na resolução de problemas de vibração, devido à sua grande versatilidade. Entretanto, o FEM tem problemas práticos quando trabalha em altas frequências, sendo necessário uma malha refinada de modo que o tamanho do elemento seja

uma ordem menor de tamanho que o comprimento de onda para poder descrever adequadamente o modo de onda. Enquanto que no SEM este problema é inexistente, pois o método é pouco sensível à variação do comprimento de onda. Desta forma, o SEM para análises em altas frequências demanda menos poder computacional que o FEM (COOK et al., 2001; DOYLE, 1997; LEE, 2009; PETYT, 2010).

Cook et al. (2001) cita que os problemas de dinâmica podem ser classificados em problemas de dinâmica estrutural e problemas de propagação de ondas. Nos problemas de propagação de ondas, a excitação e conseqüentemente a resposta dinâmica são dadas em altas frequências, e o tempo de análise também é curto, comumente na ordem de tempo necessário para a onda atravessar a estrutura. Nos problemas de dinâmica estrutural, a frequência de excitação é próxima às primeiras frequências naturais de vibração da estrutura.

Os problemas de dinâmica estrutural podem ser ainda subclassificados de acordo com o objetivo, podendo ser a determinação das frequências naturais de vibração e os modos de vibrar da estrutura ou podendo ser a determinação de como a estrutura se comporta no decorrer do tempo sob a ação de um carregamento ou excitação, uma análise *time-history* (COOK et al., 2001).

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 OBJETIVOS GERAIS

- Obter a resposta dinâmica dos modelos de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko através do FEM.
- Avaliar e comparar os modelos de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko para o cálculo de frequências naturais.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desenvolver códigos no software Matlab capazes de obter a resposta dinâmica dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko e dos métodos FEM e SEM.
- Validar os códigos através da comparação de dados experimentais e analíticos disponíveis.
- Calcular a convergência dos modelos de viga através do refinamento de malha utilizando o método FEM.

2 TEORIA DE VIGA DE EULER-BERNOULLI

2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A Teoria da viga de Euler-Bernoulli remonta ao século XVIII e também é chamada de, Teoria clássica de viga, Teoria de viga de Euler, Teoria de viga de Bernoulli, ou Teoria de viga de Bernoulli-Euler, modelo de Euler-Bernoulli (HAN et al., 1999). Neste trabalho usa-se o termo Teoria de viga de Euler-Bernoulli, ou o termo TVEB.

Jacob Bernoulli (1654-1705) iniciou seus estudos investigando a deflexão de uma barra elástica, tornando-se pioneiro ao descobrir que a curvatura de uma viga elástica em qualquer ponto é proporcional ao momento fletor naquele ponto. Leonard Euler (1707-1783) aceitando a teoria de Jacob Bernoulli, teve particular interesse no estudo das curvas geradas por vigas elásticas sobre diferentes condições de carregamentos. Euler fez grandes avanços nesta área (HAN et al., 1999; TIMOSHENKO, 1953).

Daniel Bernoulli (1700-1782), sobrinho de Jacob, foi o primeiro a formular a equação diferencial que rege as vibrações laterais de barras prismáticas e a utilizou para estudar modos específicos desse movimento. Realizou também uma série de experimentos e verificações onde pôde observar o comportamento dinâmico de vigas. Essa abordagem ficou conhecida como Teoria da viga de Euler-Bernoulli (HAN et al., 1999; TIMOSHENKO, 1953).

Com relação às deformações da linha elástica devido à flexão, há duas suposições que são chamadas de hipóteses de Bernoulli, são elas: A primeira, considerar que a seção transversal de qualquer ponto da viga é perpendicular à linha elástica da viga, antes e durante a deformação; A segunda, considerar que o plano da seção transversal continua plano sem quaisquer deformações. (ÖCHSNER, 2021).

A Teoria de viga Euler-Bernoulli é definida mediante as seguintes considerações: vigas retas; ausência de alongamento do corpo ao longo do eixo longitudinal da viga; inexistência de torção em torno do eixo longitudinal; deformações ocorrendo apenas em um único plano; apenas pequenas deformações e seções transversais simples (ÖCHSNER, 2021).

Apesar de a Teoria de Viga de Euler-Bernoulli oferecer uma aproximação satisfatória do comportamento de uma viga elástica, esse modelo tende a superestimar as frequências naturais da estrutura, uma condição que se intensifica à medida que se investigam modos de vibração mais elevados. A precisão da TVEB também é influenciada pela esbeltez da viga; quanto mais esbelta, mais precisa será a previsão (HAN et al., 1999).

A equação (2.1.1) apresenta a equação diferencial que rege o comportamento dinâmico da viga de Euler-Bernoulli (BITTENCOURT, 2014; DOYLE, 2021; PETYT, 2010).

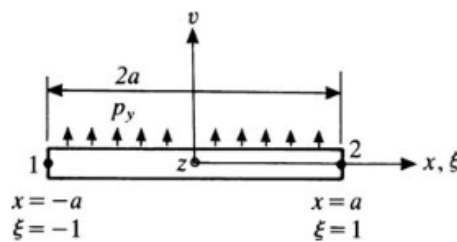
$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v(x,t)}{dx^2} \right) + \rho A \frac{d^2 v(x,t)}{dt^2} = q(x,t) \quad (2.1.1)$$

onde, E é o módulo de Young, I é o momento de inércia de área, ρ é a densidade, A é a área da seção transversal, $q(x,t)$ é uma excitação externa e $v(x,t)$ é o deslocamento transversal da viga.

2.2 ELEMENTO FINITO DE EULER-BERNOULLI

Definindo um sistema de coordenadas cartesianas no centro de um simples elemento de viga, delimitado por 2 nós e comprimento total L , conforme a Fig. 2.2.1, onde o eixo x se estende ao longo do comprimento longitudinal do elemento e o eixo y é ortogonal. O comprimento total é duas vezes o semi-comprimento a , e os nós encontram-se nas posições $x = -a$ e $x = a$.

Figura 2.2.1 – Geometria de um simples elemento de viga.



Fonte: Adaptado de Petyt (2010).

Petyt (2010) adota o uso de uma coordenada adimensional ξ , definida conforme a equação (2.2.1), em vez da coordenada x . O uso dessa mudança de coordenada traz simplificação nos cálculos.

$$\xi = \frac{x}{a} ; \left\{ \begin{array}{ll} x = a, & \xi = +1 \\ x = -a, & \xi = -1 \end{array} \right\} \quad (2.2.1)$$

O deslocamento transversal ou deflexão $v(x,t)$ ao longo de um elemento de viga, conforme definido na Fig. 2.2.1, pode ser aproximado por uma função polinomial de grau 3 com quatro constantes a determinar em função da coordenada parametrizada ξ , considerando-se o caso estático onde $v(x,t) = v(x)$. Assim, o deslocamento transversal é definido como,

$$v = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3 \quad (2.2.2)$$

reescrevendo a equação em forma matricial,

$$v = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

ou,

$$v = [P(\xi)] [\alpha] \quad (2.2.4)$$

Derivando a equação (2.2.2) obtemos a equação equivalente da inclinação da linha elástica $\theta(x)$ em função de ξ . Onde,

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial x} = a\theta_z = \alpha_2 + 2\alpha_3\xi + 3\alpha_4\xi^2 \quad (2.2.5)$$

Avaliando as equações (2.2.2) e (2.2.5), quando $\xi = \mp 1$, temos,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ a\theta_1 \\ v_2 \\ a\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

ou,

$$[\mathbf{v}]_e = [\mathbf{A}]_e [\alpha] \quad (2.2.7)$$

onde, $[\mathbf{v}]_e$ e o vetor dos deslocamentos nodais. Reorganizando a equação (2.2.7) vem,

$$[\alpha] = [\mathbf{A}]_e^{-1} [\mathbf{v}]_e \quad (2.2.8)$$

onde,

$$[\mathbf{A}]_e^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

Substituindo a equação (2.2.8) na (2.2.4), temos,

$$v = [P(\xi)] [A]_e^{-1} [v]_e = [N(\xi)] [v]_e \quad (2.2.10)$$

onde $[N(\xi)]$ é o vetor com as funções de forma e é definida como,

$$[N(\xi)]^T = \begin{bmatrix} N_1(\xi) \\ N_2(\xi) \\ N_3(\xi) \\ N_4(\xi) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 - 3\xi + \xi^3 \\ 1 - \xi - \xi^2 + \xi^3 \\ 2 + 3\xi - \xi^3 \\ -1 - \xi + \xi^2 + \xi^3 \end{bmatrix} \quad (2.2.11)$$

A deflexão $v(x)$ ao longo de um elemento de viga pode ser determinado através do uso das funções de forma e dos valores da deflexão e inclinação nodais, utilizando-se as equações (2.2.10) e (2.2.11).

2.3 ENERGIA POTENCIAL E CINÉTICA

As expressões para a energia cinética e potencial de um simples elemento de viga apresentado na Figura 2.2.1 são dadas por:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{v}^2 dx \quad (2.3.1)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (2.3.2)$$

Substituindo (2.2.10) nas equações (2.3.1) e (2.3.2) e fazendo a mudança de variável, obtemos uma formulação para a energia cinética e potencial em função dos deslocamentos nodais. Assim,

$$\begin{aligned}
T_e &= \frac{\rho A a}{2} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{d}{dt} \left([N(\xi)] [\mathbf{v}]_e \right) \right]^2 d\xi \\
&= \frac{\rho A a}{2} \int_{-1}^{+1} \left([N(\xi)] \frac{d[\mathbf{v}]_e}{dt} \right)^2 d\xi \\
&= \frac{\rho A a}{2} \int_{-1}^{+1} \left([N(\xi)] [\dot{\mathbf{v}}]_e \right)^2 d\xi \\
&= \frac{\rho A a}{2} \int_{-1}^{+1} \left([\dot{\mathbf{v}}]_e^T [N(\xi)]^T [N(\xi)] [\dot{\mathbf{v}}]_e \right) d\xi \\
&= \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{v}}]_e^T \left(\rho A a \int_{-1}^{+1} [N(\xi)]^T [N(\xi)] d\xi \right) [\dot{\mathbf{v}}]_e \\
T_e &= \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{v}}]_e^T [\mathbf{m}]_e [\dot{\mathbf{v}}]_e \tag{2.3.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_e &= \frac{EI a}{2} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left([N(\xi)] [\mathbf{v}]_e \right) \right]^2 d\xi \\
&= \frac{EI}{2a^3} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial^2 [N(\xi)]}{\partial \xi^2} [\mathbf{v}]_e \right)^2 d\xi \\
&= \frac{EI}{2a^3} \int_{-1}^{+1} \left([N''(\xi)] [\mathbf{v}]_e \right)^2 d\xi \\
&= \frac{EI}{2a^3} \int_{-1}^{+1} \left([\mathbf{v}]_e^T [N''(\xi)]^T [N''(\xi)] [\mathbf{v}]_e \right) d\xi \\
&= \frac{1}{2} [\mathbf{v}]_e^T \left(\frac{EI}{a^3} \int_{-1}^{+1} [N''(\xi)]^T [N''(\xi)] d\xi \right) [\mathbf{v}]_e \\
U_e &= \frac{1}{2} [\mathbf{v}]_e^T [\mathbf{k}]_e [\mathbf{v}]_e \tag{2.3.4}
\end{aligned}$$

As equações (2.3.3) e (2.3.4) definem a energia cinética e potencial, respectivamente, de um elemento de viga segundo a teoria de Bernoulli-Euler e são definidas a partir dos deslocamentos nodais e das respectivas matrizes de massa $[\mathbf{m}]_e$ e de rigidez $[\mathbf{k}]_e$ do elemento.

A solução das integrais das equações (2.3.3) e (2.3.4) e determinação das matrizes de massa e rigidez são bastante presentes na literatura. As matrizes de massa e rigidez do elemento encontradas são idênticas as do Petyt (2010). São elas as equações (2.3.5) e (2.3.6).

$$[\mathbf{m}]_e = \frac{\rho A a}{105} \begin{bmatrix} 78 & 22a & 27 & -13a \\ 22a & 8a^2 & 13a & -6a^2 \\ 27 & 13a & 78 & -22a \\ -13a & -6a^2 & -22a & 8a^2 \end{bmatrix} \tag{2.3.5}$$

$$[\mathbf{k}]_e = \frac{EI}{2a^3} \begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ 3a & 3a^2 & -3a & 2a^2 \\ -3 & -3a & 3 & -3a \\ 3a & 2a^2 & -3a & 4a^2 \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

Partindo-se das matrizes de massa e rigidez, é possível determinar a matriz de rigidez dinâmica. Entretanto a matriz de rigidez dinâmica está relacionada a uma frequência específica e é definida como:

$$[\mathbf{D}]_e = [\mathbf{k}]_e - \omega^2 [\mathbf{m}]_e \quad (2.3.7)$$

E segundo Doyle (2021) e Petyt (2010), a relação entre deslocamento e força pode ser expresso por:

$$[\mathbf{D}]_e [\mathbf{v}]_e = [\mathbf{F}]_e \quad (2.3.8)$$

onde, $[\mathbf{F}]_e$ é o vetor de forças externas aplicadas nos nós.

2.4 ELEMENTO ESPECTRAL DA VIGA DE BERNOULLI-EULER

A equação que descreve o comportamento dinâmico da viga de Euler-Bernoulli é descrito pela equação (2.4.1).

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (2.4.1)$$

esta equação considera que o deslocamento transversal $v(x, t)$ não somente é dependente do espaço mais também do tempo. Contudo, o módulo de Young E , o momento de inércia de área I , a densidade ρ e a área da seção transversal A são constantes ao longo da viga e invariantes no tempo.

Para o fenômeno de vibração de flexão livre, tem-se que a força externa $f(x, t)$ é nula, então a equação (2.4.1) se resume a,

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.4.2)$$

Lee (2009) indica que a equação (2.4.2) tem uma solução para a deflexão da viga da forma espectral, dada por,

$$v(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (2.4.3)$$

onde, $V_n(x; \omega_n)$ são os componentes espectrais da deflexão $v(x, t)$. Assumindo que para cada distinta frequência ω_n a equação (2.4.3) satisfaz a equação (2.4.2), então para uma frequência específica onde $\omega_n = \omega$, vem que,

$$EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \omega^2 \rho A V = 0 \quad (2.4.4)$$

A equação (2.4.4) encontra-se no domínio da frequência, assim, para cada frequência dada relaciona-se um deslocamento transversal. Lee (2009) indica que a equação (2.4.4) também pode ser obtida assumido-se que uma solução do tipo harmônica satisfaz a equação (2.4.2).

Considerando que a (2.4.4) tem uma solução geral da forma,

$$V(x) = c e^{-ixk(\omega)} \quad (2.4.5)$$

onde c é uma constante qualquer. Substituindo a equação (2.4.5) na (2.4.4), temos,

$$\begin{aligned} EI k^4 V(x) - \omega^2 \rho A V(x) &= 0 \\ k^4 - k_F^4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

onde, k_F é o número de onda e é definido como,

$$k_F = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \quad (2.4.7)$$

Desta forma a equação (2.4.6) tem duas raízes reais e duas complexas que são dado por,

$$\begin{aligned} k_1 &= k_F & k_3 &= ik_F \\ k_2 &= -k_F & k_4 &= -ik_F \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Para um elemento de viga Euler-Bernoulli de comprimento L a solução geral da equação (2.4.4) pode ser obtida da seguinte forma,

$$V(x; \omega) = c_1 e^{-ik_F x} + c_2 e^{-k_F x} + c_3 e^{+ik_F x} + c_4 e^{+k_F x} \quad (2.4.9)$$

ou em forma matricial,

$$V(x; \omega) = [e(x; \omega)] [c] = \begin{bmatrix} e^{-ik_F x} & e^{-k_F x} & e^{+ik_F x} & e^{+k_F x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (2.4.10)$$

Nota-se que as equações (2.2.2) e (2.2.4) são semelhantes com as (2.4.9) e (2.4.10). Observa-se que o desenvolvimento da formulação do elemento espectral é análogo ao do elemento finito.

Derivando em relação a x a equação (2.4.9) obtemos a equação equivalente para a inclinação da viga, que é dada por,

$$\Theta(x; \omega) = [e'(x; \omega)] [c] = \begin{bmatrix} -ik_F e^{-ik_F x} & -k_F e^{-k_F x} & ik_F e^{+ik_F x} & k_F e^{k_F x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (2.4.11)$$

Avaliando as equações (2.4.10) e (2.4.11) para $x = 0$ e $x = L$, temos,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \Theta_1 \\ V_2 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik_F & -k_F & ik_F & k_F \\ e^{-ik_F L} & e^{-k_F L} & e^{+ik_F L} & e^{+k_F L} \\ -ik_F e^{-ik_F L} & -k_F e^{-k_F L} & ik_F e^{+ik_F L} & k_F e^{k_F L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (2.4.12)$$

ou,

$$[d]_e = [A(\omega)]_e [c]. \quad (2.4.13)$$

onde, $[d]_e$ é o vetor dos deslocamentos nodais espectrais. Reorganizando vem,

$$[A(\omega)]_e^{-1} [d]_e = [c]. \quad (2.4.14)$$

Substituindo a equação (2.4.14) na (2.4.10), vem,

$$V(x; \omega) = [e(x; \omega)] [A(\omega)]_e^{-1} [d]_e = [N(x; \omega)] [d]_e \quad (2.4.15)$$

onde $[N(x; \omega)]$ é o vetor com as funções de forma espectral, e é definido como,

$$[N(x; \omega)] = \begin{bmatrix} N_1(x; \omega) \\ N_2(x; \omega) \\ N_3(x; \omega) \\ N_4(x; \omega) \end{bmatrix} \quad (2.4.16)$$

As expressões para o momento fletor e força cortante espectral, considerando-se a equação (2.4.5), são dadas por,

$$M(x; \omega) = EI \frac{dV(x; \omega)}{dx^2}, \quad Q(x; \omega) = -EI \frac{dV(x; \omega)}{dx^3} \quad (2.4.17)$$

Avaliando a força cortante e momento fletor espectral para $x = 0$ e $x = L$, obtemos o vetor de forças espectrais nodais dado por,

$$[f_{esp}] = \begin{bmatrix} -Q(0) \\ -M(0) \\ Q(L) \\ M(L) \end{bmatrix} \quad (2.4.18)$$

Substituindo a equação (2.4.15) na (2.4.17), e reorganizando em forma matricial, temos,

$$[S_B(\omega)] [d]_e = [f_{esp}] \quad (2.4.19)$$

onde, $[S_B(\omega)]$ é a matriz de elemento espectral da TVEB. Assim,

$$[S_B(\omega)] = [S_B(\omega)]^T = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} S_{B11} & S_{B12} & S_{B13} & S_{B14} \\ \cdots & S_{B22} & S_{B23} & S_{B24} \\ \cdots & \cdots & S_{B33} & S_{B34} \\ \text{simétrico} & \cdots & \cdots & S_{B44} \end{bmatrix} \quad (2.4.20)$$

$$S_{B11} = S_{B33} = \Delta_B \bar{L}^3 (\cos(\bar{L}) \sinh(\bar{L}) + \sin(\bar{L}) \cosh(\bar{L})) \quad (2.4.21)$$

$$S_{B22} = S_{B44} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-2} (-\cos(\bar{L}) \sinh(\bar{L}) + \sin(\bar{L}) \cosh(\bar{L})) \quad (2.4.22)$$

$$S_{B12} = -S_{B34} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-1} (\sin(\bar{L}) \sinh(\bar{L})) \quad (2.4.23)$$

$$S_{B13} = -\Delta_B \bar{L}^3 (\sin(\bar{L}) + \sinh(\bar{L})) \quad (2.4.24)$$

$$S_{B14} = -S_{B22} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-1} (-\cos(\bar{L}) + \cosh(\bar{L})) \quad (2.4.25)$$

$$S_{B24} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-2} (-\sin(\bar{L}) + \sinh(\bar{L})) \quad (2.4.26)$$

$$\Delta_B = \frac{1}{1 - \cos(\bar{L}) \cosh(\bar{L})} \quad (2.4.27)$$

$$\bar{L} = k_F L \quad (2.4.28)$$

3 TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO

3.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Lord Rayleigh (John William Strutt, 1842-1919) contribuiu significativamente em diversos campos de estudo, incluindo o desenvolvimento do método de análise Rayleigh-Ritz. A teoria da viga de Rayleigh incorpora a inércia de rotação ao modelo de Euler-Bernoulli, representando um avanço substancial no desenvolvimento teórico desde o século XVIII. A inclusão da inércia rotacional aprimora a previsão do comportamento dinâmico, entretanto ainda superestimar as frequências naturais (HAN et al., 1999; PETYT, 2010; TIMOSHENKO, 1953).

O modelo de Vlasov, também chamado de modelo de cisalhamento, adiciona a distorção de cisalhamento ao modelo de Euler-Bernoulli, porém, não considera o efeito da inércia de rotação. Assim, ao incorporar a distorção de cisalhamento à viga de Euler-Bernoulli, observa-se uma melhoria significativa na estimativa das frequências naturais (COSTA, 2006; HAN et al., 1999; TIMOSHENKO, 1953).

Timoshenko (1921, 1922) propôs uma teoria de vigas que adiciona tanto o efeito de cisalhamento quanto a inércia de rotação à teoria de viga de Euler-Bernoulli. O modelo de Timoshenko ainda é a maior melhoria para aproximação da resposta de vigas não-deligadas, especialmente em análises de altas frequências, onde os efeitos de cisalhamento ou rotação não podem ser negligenciados. (COSTA, 2006; HAN et al., 1999; TIMOSHENKO, 1953).

Elishakoff (2020) argumenta que a teoria de viga que incorpora tanto a inércia rotacional quanto a deformação por cisalhamento, incluindo o fator de correção de cisalhamento deve ser referida como a Teoria de viga Timoshenko-Ehrenfest. Neste trabalho usa-se o termo Teoria de viga de Timoshenko, ou o termo TVT.

A equação (3.1.1) apresenta a equação diferencial que rege o comportamento dinâmico da viga de Timoshenko (COSTA, 2006; DOYLE, 2021).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K_c GA \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - \theta(x,t) \right) \right] - \rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right] + K_c GA \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - \theta(x,t) \right) - \rho I \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = g(x,t)$$

onde, K_c é o coeficiente de cisalhamento, G é o módulo de cisalhamento, A é a área da seção transversal, E é o módulo de Young, I é o momento de inércia de área, $v(x,t)$ é o deslocamento

transversal, $\theta(x,t)$ é o ângulo de rotação da seção transversal, $f(x,t)$ é uma carga transversal distribuída e $g(x,t)$ é um momento fletor.

O fator de cisalhamento K_c , também conhecido como coeficiente de Timoshenko, foi inicialmente proposto por Timoshenko (1921). Esse fator visa minimizar as limitações do modelo de Timoshenko, uma vez que o modelo presume uma distribuição constante de tensão de cisalhamento nas seções transversais. No entanto, essa distribuição é inconsistente com a deformação das seções (BITTENCOURT, 2014).

Segundo HAN et al. (1999), o fator de cisalhamento depende do coeficiente de Poisson, da forma da seção transversal e da frequência de vibração, embora esta última dependência seja normalmente ignorada. Diferentes trabalhos investigaram e obtiveram diferentes valores do fator de cisalhamento. Entre esses estudos, Cowper (1966) apresenta um método conciso que estima o fator de cisalhamento em função do coeficiente de Poisson e da geometria da seção transversal.

Há trabalhos mais recentes que investigam a dependência do fator de cisalhamento com a frequência. Franco-Villafañe e Méndez-Sánchez (2016) obtiveram valores para o coeficiente de cisalhamento para frequências abaixo e acima da frequência crítica e os compararam com dados experimentais. Abaixo da frequência crítica, a maioria dos valores propostos na literatura apresenta um baixo erro relativo.

O uso da TVT ainda é bastante explorada para obtenção da resposta dinâmica de diversos tipos de estruturas independente da complexidade ou escala envolvida. Cita-se dois tipos estrutura que vem sendo estudadas nas últimas décadas.

A primeira, refere-se a grandes estruturas do tipo *offshore*, plataformas flutuantes. Costa (2006) propõem uma extensão a TVT para estruturas flexíveis modeladas segundo as teorias de TVEB e de Rayleigh e a lei de Morison. Arany et al. (2015) apresenta um modelo analítico de turbinas eólicas *offshore* apoiadas em uma fundação flexível para fornecer uma estimativa rápida e razoavelmente da frequência natural.

A segunda envolve nanotecnologia, como pesquisas em nanotubos de carbono. Wang et al. (2006) comparou as TVT e TVEB para a predição dos modos de vibração de nanotubos de carbono de paredes múltiplas. Chang e Lee (2009) investigaram a vibração por flexão de um nanotubo de carbono de parede única devido ao transporte de fluido. Benzair et al. (2008) estudaram a inclusão do efeito térmico na análise de vibração livre em nanotubos de carbono de parede única, utilizando uma variação da TVT. (YAS; SAMADI, 2012) estudou a vibração livre e analisou a flambagem de vigas nanocompósitos reforçadas por nanotubos de carbono de parede única, (ANSARI et al., 2014) aborda o comportamento de vibração forçada de uma viga similar.

3.2 ELEMENTO FINITO DE TIMOSHENKO

A deflexão da viga ou deslocamento transversal $v(x,t)$ e a inclinação devido a flexão $\theta(x,t)$ podem ser aproximadas por uma função polinomial de grau 3 com 4 constantes a determinar, em função da coordenada parametrizada ξ da forma:

$$\begin{aligned} v &= v(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\xi^2 + \alpha_4\xi^3 \\ \theta &= \theta(\xi) = \beta_1 + \beta_2\xi + \beta_3\xi^2 + \beta_4\xi^3 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

reescrevendo a equação em forma matricial, temos,

$$\begin{aligned} v &= [P(\xi)] [\alpha] \\ \theta &= [P(\xi)] [\beta] \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

onde $[P(\xi)]$ é o vetor polinomial e $[\alpha]$, $[\beta]$ são os vetores coeficientes da deflexão $v(\xi)$ e da inclinação por flexão $\theta(\xi)$, respectivamente. São definidas por:

$$\begin{aligned} [P(\xi)] &= [1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3] \\ [\alpha]^T &= [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4] \\ [\beta]^T &= [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4] \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Avaliando a equação (3.2.1) para $\xi = \mp 1$, temos os exatos deslocamentos nodais para a deflexão e a inclinação por flexão. A equação (3.2.4) apresenta a relação entre os deslocamentos nodais e os coeficientes da função polinômio, e os subíndice 1 e 2 representam o nó.

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \\ \theta_1 &= \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 \\ v_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \theta_2 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Para a TVT, temos que a força cortante e o momento fletor são dados por,

$$Q(x,t) = -K_c GA \left(\frac{dv(x,t)}{dx} - \theta \right), \quad M(x,t) = EI \frac{d\theta(x,t)}{dx} \quad (3.2.5)$$

onde, K_c é o coeficiente de cisalhamento (também chamado de coeficiente de Timoshenko), G é o módulo de cisalhamento, A é a área da seção transversal, E é o módulo de Young e I é o momento de inércia de área.

Em um dado instante de tempo, em um estado de equilíbrio temos que $Q(x) = \frac{dM(x)}{dx}$. Reorganizando a equação (3.2.5) vem,

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{EI}{k_c GA} \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} + \theta \quad (3.2.6)$$

reorganizando e aplicando a equação (3.2.1), temos,

$$\frac{1}{a} \frac{dv}{d\xi} = -\frac{EI}{k_c GA} \cdot \left(\frac{1}{a^2} \frac{d^2\theta}{d\xi^2} \right) + \theta \quad (3.2.7)$$

reorganizando, temos,

$$\frac{1}{a} \frac{dv}{d\xi} = \theta - \Phi \frac{d^2\theta}{d\xi^2} \quad (3.2.8)$$

onde,

$$\Phi = \frac{EI}{k_c GA a^2} \quad (3.2.9)$$

Resolvendo a equação diferencial (3.2.8), encontra-se uma relação direta o deslocamento transversal e o ângulo de deformação da seção transversal, sem a presença de quaisquer outras variáveis. Destacando que a equação (3.2.8) somente é válida para propriedades físicas constantes ao longo do elemento de viga.

Substituindo a equação (3.2.1) na (3.2.8) temos,

$$\frac{1}{a} (\alpha_2 + 2\alpha_3\xi + 3\alpha_4\xi^2) = (\beta_1 + \beta_2\xi + \beta_3\xi^2 + \beta_4\xi^3) - \Phi (2\beta_3 + 6\beta_4\xi) \quad (3.2.10)$$

reorganizando e forma matricial, vem,

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha_2}{a} & \frac{2\alpha_3}{a} & \frac{3\alpha_4}{a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta_1 - 2\Phi\beta_3) & (\beta_2 - 6\Phi\beta_4) & \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

comparado as expressões em ambos os lados temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_2}{a} &= \beta_1 - 2\Phi\beta_3 \\
\frac{2\alpha_3}{a} &= \beta_2 - 6\Phi\beta_4 \\
\frac{3\alpha_4}{a} &= \beta_3 \\
0 &= \beta_4
\end{aligned}
\tag{3.2.12}$$

Partindo-se das equações (3.2.4) e (3.2.12) obtemos um sistema linear com 8 equações e 8 incógnitas a determinar. Reorganizando em forma matricial vem,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 1 & 0 & -2\Phi & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{a} & 0 & 0 & 1 & 0 & -6\Phi \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{a} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}
\tag{3.2.13}$$

que pode ser resumido pela seguinte expressão:

$$[\mathbf{a}] = [\mathbf{cof}] [\mathbf{b}] \tag{3.2.14}$$

reorganizando a equação para isolar o vetor dos coeficientes temos,

$$[\mathbf{cof}]^{-1} [\mathbf{a}] = [\mathbf{b}] \tag{3.2.15}$$

onde a matriz $[\mathbf{cof}]^{-1}$ é dada por,

$$[\mathbf{cof}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{a}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-a}{4} & 0 & \frac{a}{2} & 0 & \frac{a(1+6\Phi)}{2} \\ \frac{-(3+6\Phi)}{4+12\Phi} & \frac{-a}{4+12\Phi} & \frac{3+6\Phi}{4+12\Phi} & \frac{-a}{4+12\Phi} & \frac{a}{2+6\Phi} & 0 & \frac{a(1+2\Phi)}{2+6\Phi} & 0 \\ 0 & \frac{-a}{4} & 0 & \frac{a}{4} & 0 & \frac{-a}{2} & 0 & \frac{-a(1+6\Phi)}{2} \\ \frac{1}{4+12\Phi} & \frac{a}{4+12\Phi} & \frac{-1}{4+12\Phi} & \frac{a}{4+12\Phi} & \frac{-a}{2+6\Phi} & 0 & \frac{-a(1+2\Phi)}{2+6\Phi} & 0 \\ \frac{-3}{a(4+12\Phi)} & \frac{-1+6\Phi}{4+12\Phi} & \frac{3}{a(4+12\Phi)} & \frac{-1+6\Phi}{4+12\Phi} & \frac{3}{2+6\Phi} & 0 & \frac{1}{2+6\Phi} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{3}{a(4+12\Phi)} & \frac{3}{4+12\Phi} & \frac{-3}{a(4+12\Phi)} & \frac{3}{4+12\Phi} & \frac{-3}{2+6\Phi} & 0 & \frac{-1}{2+6\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.16)$$

ou,

$$[\mathbf{cof}]^{-1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]_{4 \times 4} & [\mathbf{C}]_{4 \times 4} \\ [\mathbf{B}]_{4 \times 4} & [\mathbf{D}]_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (3.2.17)$$

onde $[\mathbf{A}]_{4 \times 4}$, $[\mathbf{B}]_{4 \times 4}$, $[\mathbf{C}]_{4 \times 4}$ e $[\mathbf{D}]_{4 \times 4}$ são submatrizes de $[\mathbf{cof}]^{-1}$.

Da equação (3.2.15) pode-se determinar os vetores $[\alpha]$ e $[\beta]$ da equação (3.2.3), como,

$$[\mathbf{A}] [\mathbf{v}]_e = [\alpha] \quad (3.2.18)$$

$$[\mathbf{B}] [\mathbf{v}]_e = [\beta] \quad (3.2.19)$$

onde $[\mathbf{v}]_e^T = [v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2]$.

Substituindo a equação (3.2.19) na (3.2.2) temos,

$$v = [P(\xi)] [\mathbf{A}] [\mathbf{v}]_e = [Q(\xi)] [\mathbf{v}]_e \quad (3.2.20)$$

$$\theta = [P(\xi)] [\mathbf{B}] [\mathbf{v}]_e = [R(\xi)] [\mathbf{v}]_e \quad (3.2.21)$$

onde $[Q(\xi)]$ e $[R(\xi)]$ são as chamadas funções de forma, e são dadas por:

$$\begin{aligned}
[Q(\xi)]^T &= \frac{1}{4(1+3\Phi)} \begin{bmatrix} Q_1(\xi) \\ Q_2(\xi) \\ Q_3(\xi) \\ Q_4(\xi) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4(1+3\Phi)} \begin{bmatrix} 2(1+3\Phi) - 3(1+2\Phi)\xi + \xi^3 \\ a \left[(1+3\Phi) - \xi - (1+3\Phi)\xi^2 + \xi^3 \right] \\ 2(1+3\Phi) + 3(1+2\Phi)\xi - \xi^3 \\ a \left[-(1+3\Phi) - \xi + (1+3\Phi)\xi^2 + \xi^3 \right] \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

$$\begin{aligned}
[R(\xi)]^T &= \frac{1}{4(1+3\Phi)a} \begin{bmatrix} R_1(\xi) \\ R_2(\xi) \\ R_3(\xi) \\ R_4(\xi) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4(1+3\Phi)a} \begin{bmatrix} -3 + 3\xi^2 \\ a \left[(-1+6\Phi) - 2(1+3\Phi)\xi + 3\xi^2 \right] \\ 3 - 3\xi^2 \\ a \left[(-1+6\Phi) + 2(1+3\Phi)\xi + 3\xi^2 \right] \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

3.3 ENERGIA POTENCIAL E CINÉTICA

A energia potencial e cinética de um elemento de viga de Timoshenko é definido por,

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EI \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} k_c GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right)^2 dx \tag{3.3.1}$$

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho I_z \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 dx \tag{3.3.2}$$

fazendo a transformação de variável de x para ξ e reorganizando os termos, vem,

$$U_e = \frac{EI}{2a} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 d\xi + \frac{k_c GAa}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{a} \frac{dv}{d\xi} - \theta \right)^2 d\xi \tag{3.3.3}$$

$$T_e = \frac{\rho Aa}{2} \int_{-1}^{+1} (\dot{v})^2 d\xi + \frac{\rho I_a}{2} \int_{-1}^{+1} (\dot{\theta})^2 d\xi \tag{3.3.4}$$

Derivando as equações 3.2.20 e 3.2.21 em relação a ξ e o tempo, temos,

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} \left([Q(\xi)][\mathbf{v}]_e \right) \\ &= \frac{d[Q(\xi)]}{d\xi} [\mathbf{v}]_e \\ &= [Q'(\xi)][\mathbf{v}]_e\end{aligned}\tag{3.3.5}$$

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{d}{dt} \left([Q(\xi)][\mathbf{v}]_e \right) \\ &= [Q(\xi)] \frac{d[\mathbf{v}]_e}{dt} \\ &= [Q(\xi)][\dot{\mathbf{v}}]_e\end{aligned}\tag{3.3.6}$$

e de forma análoga,

$$\frac{d\theta}{d\xi} = [R'(\xi)][\mathbf{v}]_e\tag{3.3.7}$$

$$\dot{\theta} = [R(\xi)][\dot{\mathbf{v}}]_e\tag{3.3.8}$$

Substituindo as equações (3.3.5), (3.3.6), (3.3.7) e (3.3.8) dentro das equações (3.3.3) e (3.3.4), temos,

$$\begin{aligned}
U_e &= \frac{EI}{2a} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 d\xi + \frac{k_c GAa}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{a} \frac{dv}{d\xi} - \theta \right)^2 d\xi \\
&= \frac{EI}{2a} \int_{-1}^{+1} \left([R'(\xi)][\mathbf{v}]_e \right)^2 d\xi + \frac{k_c GAa}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{[Q'(\xi)][\mathbf{v}]_e}{a} - [R(\xi)][\mathbf{v}]_e \right)^2 d\xi \\
&= \frac{EI}{2a} \int_{-1}^{+1} \left([R'(\xi)][\mathbf{v}]_e \right)^2 d\xi + \frac{k_c GAa}{2} \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{[Q'(\xi)]}{a} - [R(\xi)] \right) [\mathbf{v}]_e \right]^2 d\xi \\
&= \frac{EI}{2a} \int_{-1}^{+1} \left([R'(\xi)][\mathbf{v}]_e \right)^2 d\xi + \frac{k_c GAa}{2} \int_{-1}^{+1} \left([S(\xi)][\mathbf{v}]_e \right)^2 d\xi \\
&= \frac{EI}{2a} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{v}]_e^T [R'(\xi)]^T [R'(\xi)] [\mathbf{v}]_e d\xi + \frac{k_c GAa}{2} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{v}]_e^T [S(\xi)]^T [S(\xi)] [\mathbf{v}]_e d\xi \\
&= \frac{1}{2} [\mathbf{v}]_e^T \left\{ \frac{EI}{a} \int_{-1}^{+1} [R'(\xi)]^T [R'(\xi)] d\xi + k_c GAa \int_{-1}^{+1} [S(\xi)]^T [S(\xi)] d\xi \right\} [\mathbf{v}]_e \\
&= \frac{1}{2} [\mathbf{v}]_e^T \left\{ \frac{EI}{a} [\mathbf{k}_{aux,1}] + k_c GAa [\mathbf{k}_{aux,2}] \right\} [\mathbf{v}]_e \\
U_e &= \frac{1}{2} [\mathbf{v}]_e^T [\mathbf{k}_e] [\mathbf{v}]_e \tag{3.3.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_e &= \frac{\rho A a}{2} \int_{-1}^{+1} (\dot{v})^2 d\xi + \frac{\rho I a}{2} \int_{-1}^{+1} (\dot{\theta})^2 d\xi \\
&= \frac{\rho A a}{2} \int_{-1}^{+1} \left([Q(\xi)] [\dot{v}]_e \right)^2 d\xi + \frac{\rho I a}{2} \int_{-1}^{+1} \left([R(\xi)] [\dot{v}]_e \right)^2 d\xi \\
&= \frac{\rho A a}{2} \int_{-1}^{+1} \left([\dot{v}]_e^T [Q(\xi)]^T [Q(\xi)] [\dot{v}]_e \right) d\xi + \frac{\rho I a}{2} \int_{-1}^{+1} \left([\dot{v}]_e^T [R(\xi)]^T [R(\xi)] [\dot{v}]_e \right) d\xi \\
&= \frac{1}{2} [\dot{v}]_e^T \left\{ \rho A a \int_{-1}^{+1} \left([Q(\xi)]^T [Q(\xi)] \right) d\xi + \rho I a \int_{-1}^{+1} \left([R(\xi)]^T [R(\xi)] \right) d\xi \right\} [\dot{v}]_e \\
&= \frac{1}{2} [\dot{v}]_e^T \left\{ \rho A a [\mathbf{m}_{\text{aux},1}] + \rho I a [\mathbf{m}_{\text{aux},2}] \right\} [\dot{v}]_e \\
T_e &= \frac{1}{2} [\dot{v}]_e^T [\mathbf{m}_e] [\dot{v}]_e \tag{3.3.10}
\end{aligned}$$

As equações (3.3.9) e (3.3.10) apresentam em forma matricial a equação da energia potencial e cinética de um elemento de viga Timoshenko, respectivamente. Os termos $[\mathbf{k}_e]$ e $[\mathbf{m}_e]$ representam as matrizes de rigidez e de massa do elemento, respectivamente. As matrizes encontradas são similares as apresentadas por Petyt (2010) e Thomas et al. (1973).

Para a determinação das matrizes de rigidez e massa do elemento é necessário determinar as integrais, os cálculos para a determinação das matrizes de rigidez e massa estão dispostos em apêndice. As matrizes são:

$$[\mathbf{k}]_e = \frac{EI}{2a^3 (1 + 3\Phi)} \begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ \dots & a^2(4 + 3\Phi) & -3a & a^2(2 - 3\Phi) \\ \dots & \dots & 3 & -3a \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & a^2(4 + 3\Phi) \end{bmatrix} \tag{3.3.11}$$

e

$$\begin{aligned}
[\mathbf{m}]_e = \frac{\rho A a}{16(1+3\Phi)^2} & \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ \dots & m_5 & -m_4 & m_6 \\ \dots & \dots & m_1 & -m_2 \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & m_5 \end{bmatrix} \\
+ \frac{\rho I}{16a(1+3\Phi)^2} & \begin{bmatrix} m_7 & m_8 & -m_7 & m_8 \\ \dots & m_9 & -m_8 & m_{10} \\ \dots & \dots & m_7 & -m_8 \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & m_9 \end{bmatrix} \quad (3.3.12)
\end{aligned}$$

onde,

$$m_1 = \frac{416}{35} + \frac{336\Phi}{5} + 96\Phi^2 \quad (3.3.13)$$

$$m_2 = a \left(\frac{352}{105} + \frac{88\Phi}{5} + 24\Phi^2 \right) \quad (3.3.14)$$

$$m_3 = \frac{144}{35} + \frac{144\Phi}{5} + 48\Phi^2 \quad (3.3.15)$$

$$m_4 = -a \left(\frac{208}{105} + \frac{72\Phi}{5} + 24\Phi^2 \right) \quad (3.3.16)$$

$$m_5 = a^2 \left(\frac{128}{105} + \frac{32\Phi}{5} + \frac{48\Phi^2}{5} \right) \quad (3.3.17)$$

$$m_6 = -a^2 \left(\frac{32}{35} + \frac{32\Phi}{5} + \frac{48\Phi^2}{5} \right) \quad (3.3.18)$$

$$m_7 = \frac{48}{5} \quad (3.3.19)$$

$$m_8 = a \left(\frac{8}{5} - 24\Phi \right) \quad (3.3.20)$$

$$m_9 = a^2 \left(\frac{64}{15} + 16\Phi + 96\Phi^2 \right) \quad (3.3.21)$$

$$m_{10} = -a^2 \left(\frac{16}{15} + 16\Phi - 48\Phi^2 \right) \quad (3.3.22)$$

Partindo-se das matrizes de massa e rigidez, é possível determinar a matriz de rigidez dinâmica. Entretendo a matriz de rigidez dinâmica está relacionada a uma frequência específica e é definida como:

$$[\mathbf{D}]_e = [\mathbf{k}]_e - \omega^2 [\mathbf{m}]_e \quad (3.3.23)$$

E segundo Doyle (2021) e Petyt (2010), a relação entre deslocamento e força pode ser expresso por:

$$[\mathbf{D}]_e [\mathbf{v}]_e = [\mathbf{F}]_e \quad (3.3.24)$$

onde, $[\mathbf{F}]_e$ é o vetor de forças externas aplicadas nos nós.

4 METODOLOGIA

Desenvolveu-se dois códigos no *software* MATLAB 2022a, cada um implementando um método diferente, o FEM e o SEM, para discretizar e calcular a resposta dinâmica de cada uma de duas configurações de vigas simuladas. Os códigos encontram-se no apêndice.

4.1 CONFIGURAÇÃO DE VIGA

Definiu-se duas configurações distintas de vigas para simulação, diferenciando-se apenas pelo tipo de apoio encontrado nas extremidades. Escolheu-se duas configurações de apoios comumente encontrados no campo de atuação das engenharias. As configurações são:

- **Configuração I:** Viga Engastada-Engastada (VEE).
- **Configuração II:** Viga Bi-Apoiada (VBA).

Nogueira (2015) calculou analiticamente as dez primeiras frequências naturais para 4 distintas configurações de viga, além de estimar experimentalmente estas frequências. As 2 configurações de vigas estudadas estão entre as configurações analisadas pela Tabela 4.1.1. Assim, foram utilizados os dados disponíveis para referência.

Independentemente da configuração de viga simulada, as propriedades físicas e do material utilizadas estão dispostas na Tabela 4.1.1.

Tabela 4.1.1 – Propriedades do material e dimensões da estrutura tipo viga simulada

Geometria e Propriedades	Nomeclatura	Valor
Módulo de Young [MPa]	E	71000,0
Módulo de cisalhamento [MPa]	G	25000,0
Fator de cisalhamento [-]	K_c	0,8333
Densidade [kg/m^3]	ρ	2770,0
Largura [m]	b	0,0508
Altura [m]	h	0,0031
Área seção transversal [m^2]	A	0,00015748
Comprimento [m]	L	1,0
Índice de esbeltez [-]	L/h	332

Fonte: Adaptado (NOGUEIRA, 2015)

Todos os valores da Tabela 4.1.1 estão disponíveis por Nogueira (2015), exceto o módulo de cisalhamento do alumínio 6060 e o fator de cisalhamento que são necessários para os cálculos da teoria de viga de Timoshenko. O valor para o módulo de cisalhamento utilizado é

disponibilizado por CALLISTER e RETHWISCH (2012). O valor do fator de cisalhamento utilizado é de $K_c = 5/6$ (COWPER, 1966; FRANCO-VILLAFANE; MÉNDEZ-SÁNCHEZ, 2016).

4.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

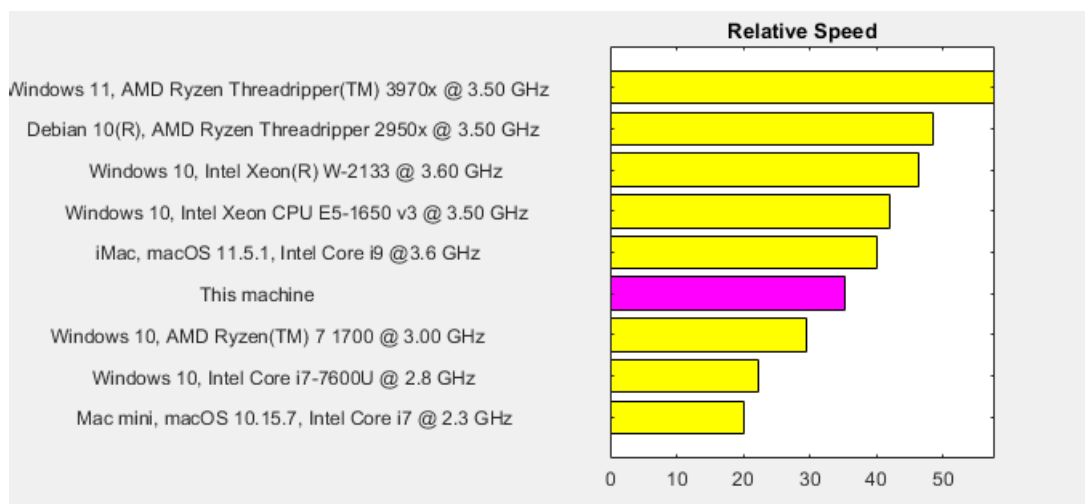
4.2.1 ESPECIFICAÇÃO DE MÁQUINA E SOFTWARE

As especificações do PC são: Laptop Acer NITRO AN515-51; Sistema operacional Windows 10 Pro 64 bits; Processador Intel(R) Core(TM) i5-7300HQ; Memória RAM de 16GB DDR4 a 2666 MHz; Placa de vídeo NVIDIA GeForce GTX 1050 com 4GB de VRAM.

As especificações do *software* são: MATLAB Version 9.12.0.2009381 (R2022a) Update 4 64-bits, licença Academic.

O *software* MATLAB tem uma rotina interna que calcular a performance do PC usando a função interna *bech()*. Segundo The MathWorks Inc. (2022) a função *bech()* executa um conjunto de 6 rotinas internas e é esperado uma margem de erro de 5% à 10% nos resultados obtidos de repetidos testes em uma mesma máquina. A Figura 4.2.1 apresenta o resultado da execução desta rotina.

Figura 4.2.1 – Resultado obtido pelo teste de performance do MATLAB

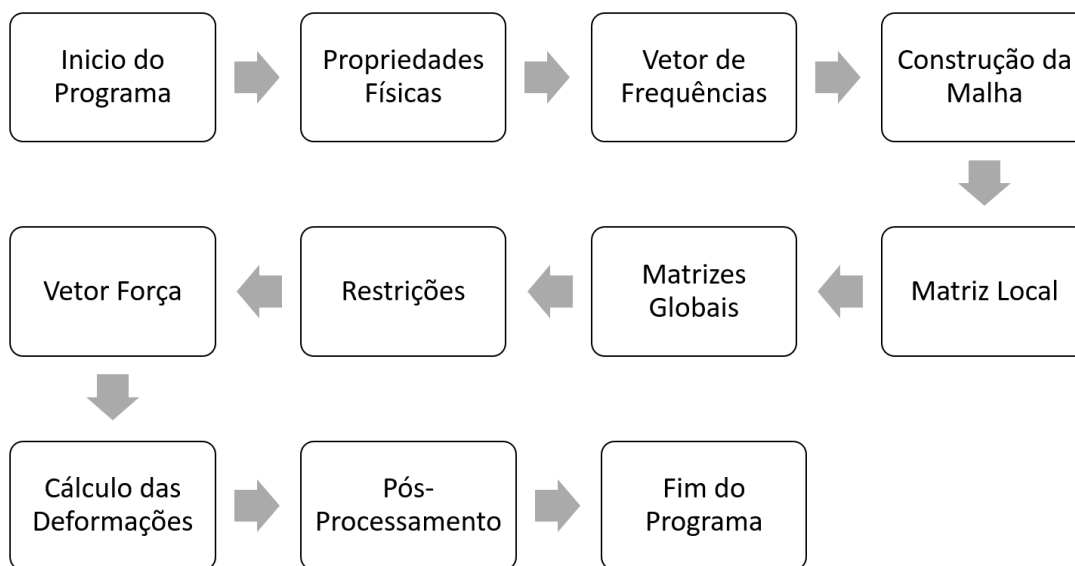


Fonte: Autor (2023)

4.2.2 ESTRUTURA DO CÓDIGO FEM

O código desenvolvido para simular o comportamento dinâmico da viga usando o método FEM, foi construído como uma cadeia de blocos, onde cada bloco só é executado quando o anterior terminar sua rotina interna. A Figura 4.2.2 apresenta o fluxograma executado pelo código.

Figura 4.2.2 – Fluxograma de execução do algoritmo do código FEM



Fonte: Autor (2023)

Onde cada bloco tem as seguintes funções:

- **Início do Programa:** Neste bloco ocorre a limpeza de variáveis e inicialização do código.
- **Propriedades Físicas:** Neste bloco ocorre o carregamento dos dados relacionados as propriedades físicas (comprimento, largura, área, etc.) e do material (módulo de Young, densidade, etc.) da viga.
- **Vetor de Frequências:** Neste bloco ocorre a definição de quais são as frequências que serão usadas para simular o comportamento dinâmico da viga.
- **Construção da Malha:** Neste bloco ocorre a definição do número total de elementos e nós internos que serão usados para discretizar a viga.
- **Matriz Local:** Neste bloco ocorre a escolha de qual modelo de viga sera usado, ou Euler-Bernoulli ou Timoshenko, e calcula as matrizes de rigidez e massa locais para cada elemento interno da viga.
- **Matrizes Globais:** Neste bloco ocorre a construção das matrizes globais de rigidez e massa da viga.
- **Restrições:** Neste bloco ocorre a modificação das matrizes globais de acordo com a configuração da viga simulada (engastada, apoiada, livre).
- **Vetor Força:** Neste bloco ocorre a construção do vetor força nodal, assim como qual nó, intensidade e tipo de força aplicado.

- **Cálculo das Deformações:** Neste bloco ocorre a construção da matriz de rigidez dinâmica e o cálculo das deformações nodais para cada frequência definida no vetor de frequências.
- **Pós-processamento:** Neste bloco ocorre o pós-processamento dos dados calculados, o armazenamento do campo de deformações e a montagem dos gráficos de FRF.
- **Fim do Programa:** Neste bloco ocorre o encerramento do programa.

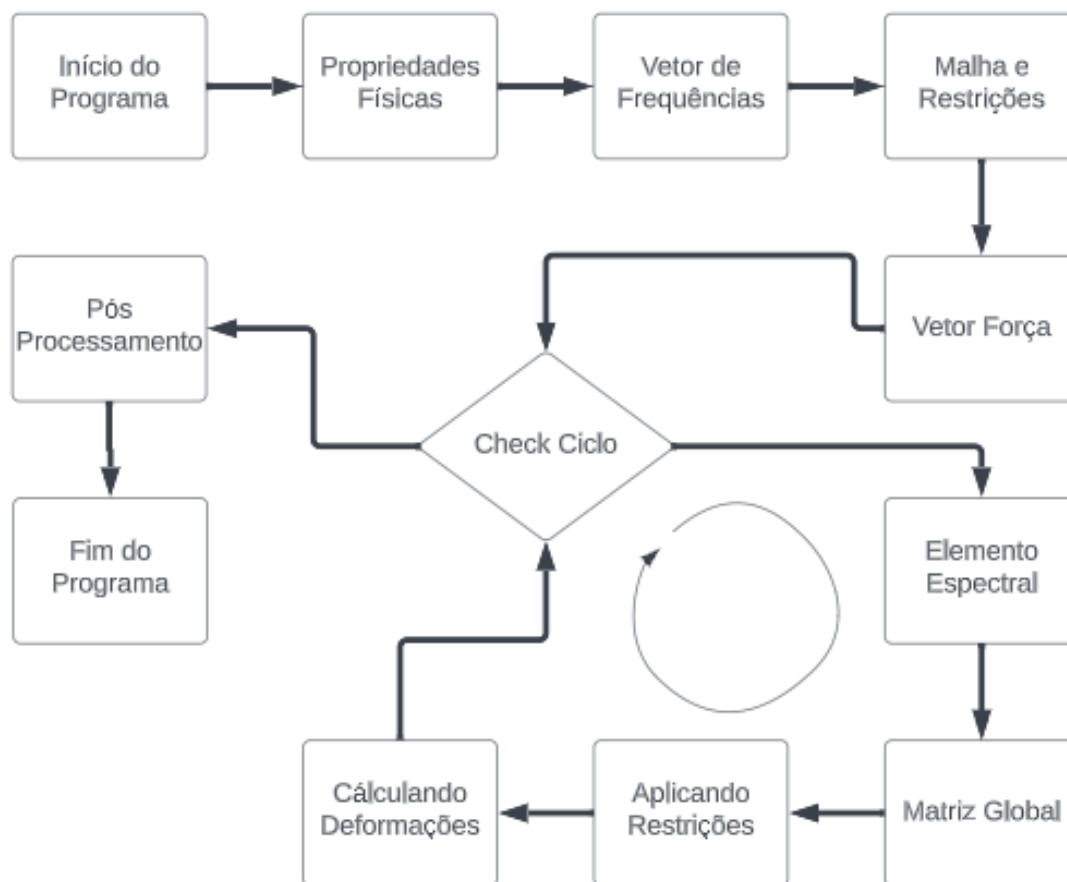
O código foi desenvolvido desta maneira para possibilitar organização, fácil localização, fácil alteração de parâmetros, fácil alteração entre os modelos de viga e fácil obtenção do tempo de processamento.

4.2.3 ESTRUTURA DO CÓDIGO FEM

Diferentemente da estrutura do código FEM, que realiza a simulação em uma única sequência, a estrutura do código SEM se dá na forma de ciclos, onde para cada ciclo calcula-se o campo de deformações nodais para uma frequência específica. Logo, para cada frequência desejada na resposta dinâmica, deve-se recomeçar o ciclo. A Figura 4.2.3 apresenta o fluxograma executado pelo código, com as seguintes etapas:

- **Início do Programa:** Neste bloco ocorre a limpeza de variáveis e inicialização do código.
- **Propriedades Físicas:** Neste bloco ocorre o carregamento dos dados relacionados as propriedades físicas (comprimento, largura, área, etc.) e do material (módulo de Young, densidade, etc.) da viga.
- **Vetor de Frequências:** Neste bloco ocorre a definição de quais são as frequências que serão usadas para simular o comportamento dinâmico da viga.
- **Malha e Restrições:** Neste bloco se defini o tamanho de malha e os tipos de apoios que serão simulados.
- **Vetor Força:** Neste bloco ocorre a construção do vetor força nodal, assim como qual nó, intensidade e tipo de força aplicado.
- **Check Ciclo:** Neste bloco é onde ocorrer o início do ciclo que compreende definir uma frequência, e calcular o campo de deformação.
- **Elemento Espectral:** Neste bloco entra a construção do elemento espectral de Euler-Bernoulli.
- **Matriz Global:** Neste bloco ocorre a montagem da matriz de rigidez dinâmica global.
- **Aplicando Restrições:** Neste bloco ocorre a modificação da matriz de rigidez global de acordo com as restrições pré-definidas.

Figura 4.2.3 – Fluxograma de execução do algoritmo do código SEM



Fonte: Autor (2023)

- **Calculando Deformações:** Neste bloco ocorre o solucionamento do sistema de equações para obter o campo de deformações.
- **Pós-processamento:** Neste bloco ocorre o pós-processamento dos dados calculados, o armazenamento do campo de deformações e a montagem dos gráficos de FRF.
- **Fim do Programa:** Neste bloco ocorre o encerramento do programa.

Apesar do número de operações requeridas para executar método SEM serem maiores que as do métodos FEM, este demanda menos tempo de processamento, uma vez que um único elemento é suficiente para descrever o comportamento dinâmico real da estrutura simulada, deste modo a solução da matriz de rigidez dinâmica é reduzida, em contraponto ao método FEM que a medida que é necessário haver uma refinamento da malha, aumentando-se o número de elementos e nós internos, para poder obter soluções mais precisas.

4.2.4 CONVERGÊNCIA DOS MÉTODOS FEM E SEM

A análise de convergência do método FEM será feita através do cálculo do erro relativo das frequências naturais obtidas durante a simulação para diferentes refinamentos de malha, conforme a equação:

$$E_{relativo,i} = \frac{f_{referencia,i} - f_{estimado,i}}{f_{referencia,i}} \cdot 100 \quad (4.2.1)$$

Onde, $E_{relativo,i}$ é o erro percentual relativo da i -ésima frequência natural, $f_{real,i}$ é a i -ésima frequência natural real, $f_{FEM,i}$ é a i -ésima frequência natural estimada pelo código usando método FEM.

Assim pode-se estimar o quanto a refinamento de malha melhora a precisão dos resultados obtidos usando-se o método FEM. Esta análise vai ser aplicada para ambos os modelos de viga de Euler-Bernoulli e o de Timoshenko.

As frequências naturais reais para cada configuração de viga serão consideradas as frequências calculadas utilizando-se o método SEM, devido a natureza do método que dar a resposta dinâmica exata do problema.

A acurácia dos resultados obtidos pela aplicação do métodos SEM serão comparadas com os dados disponíveis pelo Nogueira (2015), para todas as três configurações de vigas estudadas.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

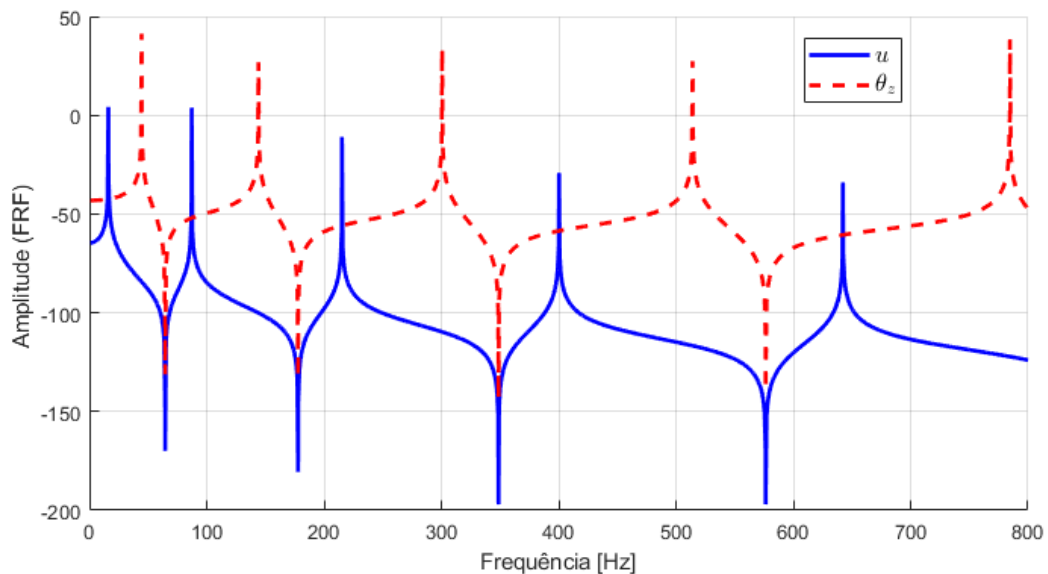
As dez primeiras frequências naturais foram obtidas para duas configurações de vigas, utilizando os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Cada frequência natural está vinculada a um modo de vibração específico. No apêndice, são apresentados os 10 modos de vibração correspondentes a todas as combinações de vigas simuladas.

5.1 TEORIA DE VIGA DE EULER-BERNOULLI - SEM

5.1.1 TVEB - VIGA ENGASTADA-ENGASTADA - SEM

A Figura 5.1.1 apresentam os gráficos FRF (Frequency Response Function) para a configuração de viga engastada-engastada, variando a frequência de 1 até 800 Hz com passo de 0,01 Hz. Posicionou-se uma forças unitária de excitação perpendicular ao eixo longitudinal e um momento fletor unitário no centro da viga. O nó de análise escolhido foi o nó de aplicação das excitações, deste modo só é necessário 2 elementos espectrais.

Figura 5.1.1 – FRF - TVEB - Viga Engastada-Engastada - SEM



Fonte: Autor (2023)

Dentro da faixa de 1 até 800 Hz, encontram-se as 10 primeiras frequências naturais para a viga simulada. Na Figura 5.1.1, pode-se observar que os picos superiores da amplitude indicam um fenômeno característico quando se está próximo de uma das frequências naturais. As frequências obtidas foram comparadas com os dados disponíveis por Nogueira (2015) e são apresentadas na Tabela 5.1.1.

A maior divergência entre os valores calculados e os de referência para a viga engastada-engastada é inferior a ordem de 10^{-2} , que é o tamanho do passo adotado.

Tabela 5.1.1 – Frequências - TVEB - Viga Engastada-Engastada - SEM

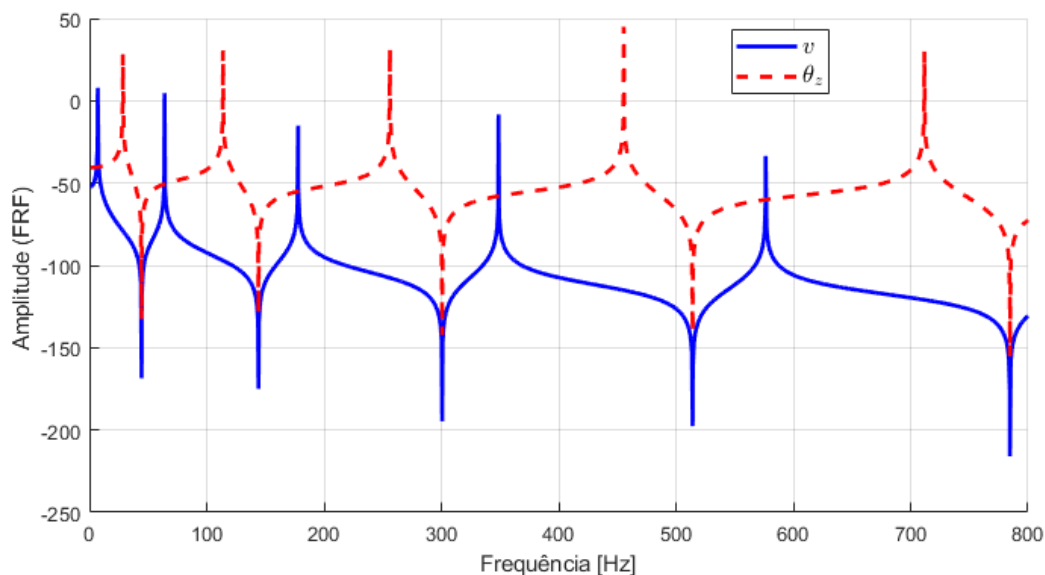
Modo de vibração	f [Hz] (NOGUEIRA, 2015)	Frequência [Hz]
1	16,133	16,13
2	44,471	44,47
3	87,180	87,18
4	144,114	144,11
5	215,281	215,28
6	300,682	300,68
7	400,316	400,32
8	514,183	514,18
9	642,285	642,28
10	784,619	784,62

Fonte: Autor (2023)

5.1.2 TVEB - VIGA BI-APOIADA - SEM

A Figura 5.1.2 apresentam os gráficos FRF (Frequency Response Function) para a configuração de viga bi-apoiada, variando a frequência de 1 até 800 Hz com passo de 0,01 HZ.

Figura 5.1.2 – FRF - TVEB - viga Bi-apoiada - SEM



Fonte: Autor (2023)

Para a configuração bi-apoiada é possível observar as 10 primeiras frequências naturais, sinalizadas pelos picos superiores da amplitude. As frequências obtidas para cada modo de vibração estão na Tabela 5.1.2.

Tabela 5.1.2 – Frequências - TVEB - viga Bi-apoiada - SEM

Modo de vibração	f [Hz] (NOGUEIRA, 2015)	Frequência [Hz]
1	7,117	7,12
2	28,467	28,47
3	64,051	64,05
4	113,868	113,87
5	177,918	177,92
6	256,202	256,20
7	348,720	348,72
8	455,470	455,47
9	576,455	576,45
10	711,673	711,67

Fonte: Autor (2023)

A maior diferença encontrada entre o valor calculado e o de referência para a viga bi-apoiada é de 0,005 Hz, valor inferior ao passo adotado.

5.1.3 TVEB - VALIDAÇÃO DO CÓDIGO - SEM

O código SEM desenvolvido apresentou boa precisão nas duas configurações de vigas adotadas, a diferença entre as frequências naturais calculadas e as de referência é de uma escala menor que a precisão adotada na simulação que é na ordem de 10^{-2} . Usando a equação (4.2.1), o maior erro percentual encontrado foi de 0,05%.

Com relação ao tempo de execução, o código desenvolvido gerou um custo operacional na ordem de 2 segundos, o que é consequência da natureza do método que requer poucos elementos para realizar a simulação. Nas simulações geradas, foram necessários apenas 2 elementos espectrais.

Desta forma, pode-se afirmar que o código está validado e pode ser usado para simular o comportamento dinâmico de estruturas do tipo viga usando o modelo de Euler-Bernoulli, desde que o apoio seja do tipo engastado ou apoiado e em baixas frequências.

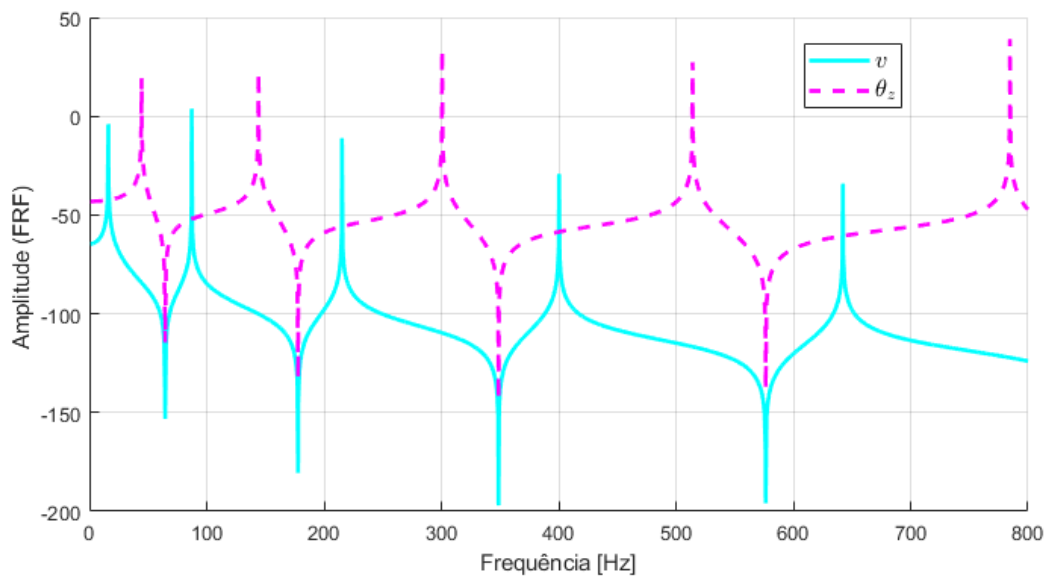
5.2 VIGA DE EULER-BERNOULLI - FEM

5.2.1 TVEB - VIGA ENGASTADA-ENGASTADA - FEM

A Figura 5.2.1 apresenta o gráfico FRF da simulação da viga engastada-engastada, variando a frequência de 1 até 800 Hz com passo de 0,01 Hz. Utilizando-se do método FEM, a malha gerada é de 300 elementos internos.

O gráfico da Figura 5.2.1 é similar ao da Figura 5.1.1, o que indica que uma malha

Figura 5.2.1 – FRF - TVEB - Viga Engastada-Engastada - FEM (300 elementos)



Fonte: Autor (2023)

de 300 elementos gera uma precisão aceitável para a estimativa do comportamento dinâmico da estrutura. As dez primeiras frequências naturais calculadas, que correspondem aos dez primeiros modos de vibração estão disponíveis na Tabela 5.2.1.

O erro relativo foi obtido usando a equação (4.2.1), onde a frequência real foi tomada como sendo a frequência calculada pelo código SEM e a estimada pelo código FEM. O maior erro percentual foi inferior a 0,01%, reforçando que a utilização de uma malha fina com 300 elementos apresenta boa precisão.

Tabela 5.2.1 – Frequências - TVEB - Viga Engastada-Engastada - FEM (300 elementos)

Modo de vibração	f (SEM) [Hz]	f (FEM) [Hz]	Erro percentual
1	16,13	16,13	0
2	44,47	44,47	0
3	87,18	87,18	0
4	144,11	144,12	-0,0069%
5	215,28	215,29	-0,0046%
6	300,68	300,69	-0,0033%
7	400,32	400,33	-0,0025%
8	514,18	514,19	-0,0019%
9	642,28	642,30	-0,0031%
10	784,62	784,64	-0,0025%

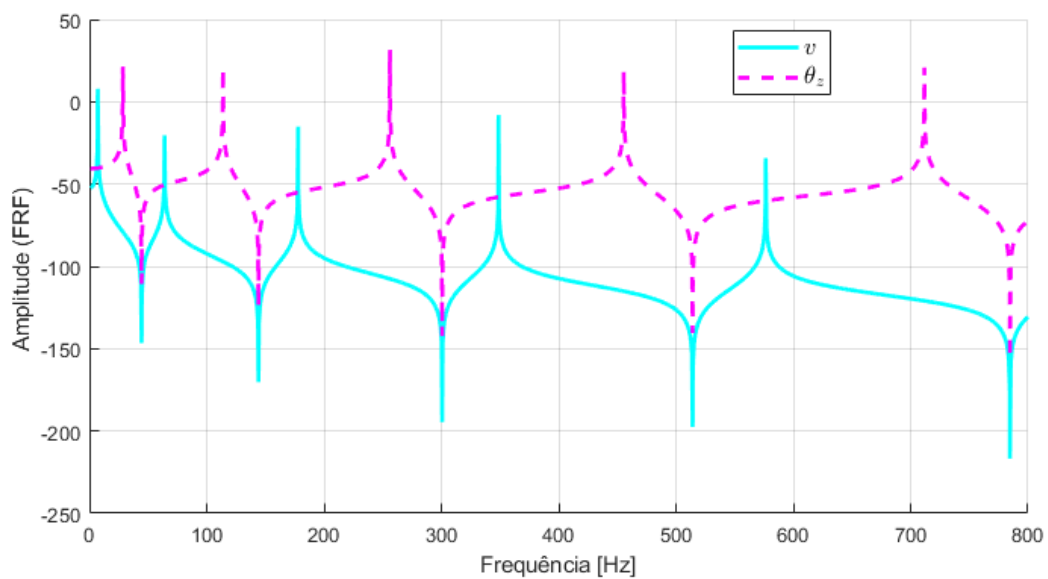
Fonte: Autor (2023)

5.2.2 TVEB - VIGA BI-APOIADA - FEM

A Figura 5.2.2 apresenta as frequências naturais da simulação da viga bi-apoiada, com a frequência variando de 1 até 800 Hz com passo de 0,01 Hz. Nesta simulação, utilizou-se uma malha com 300 elementos.

As frequências naturais obtidas nesta simulação são apresentadas na Tabela 5.2.2. Observa-se que a precisão obtida é satisfatória, pois o erro relativo encontrado é inferior a 0,01%, e só é detectável nas frequências mais altas.

Figura 5.2.2 – FRF - TVEB - Viga Bi-apoiada - FEM (300 elementos)



Fonte: Autor (2023)

Tabela 5.2.2 – Frequências - TVEB - Viga Bi-apoiada - FEM (300 elementos)

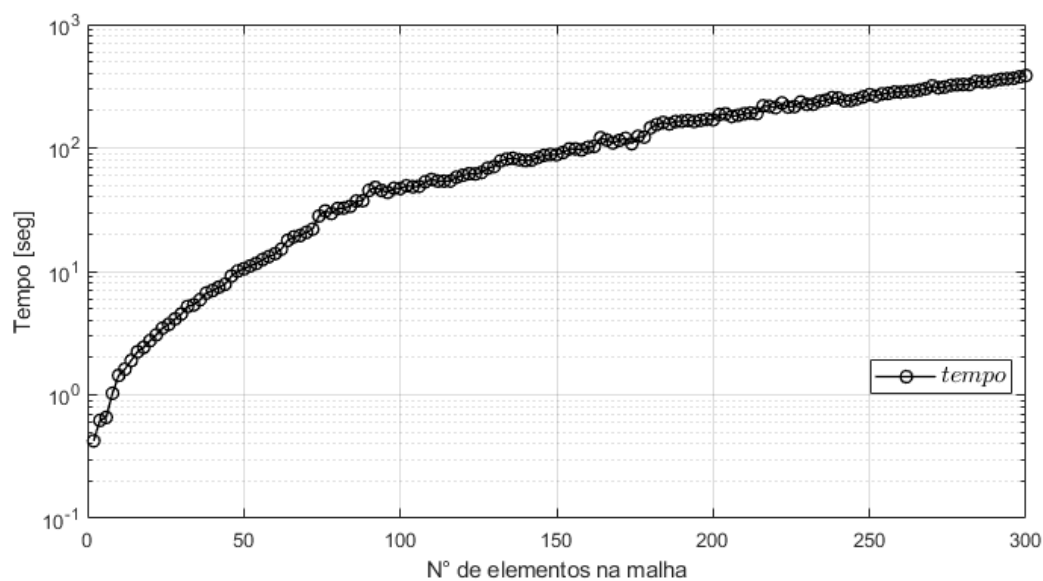
Modo de vibração	f (SEM) [Hz]	f (FEM) [Hz]	Erro percentual
1	7,12	7,12	0%
2	28,47	28,47	0%
3	64,05	64,05	0%
4	113,87	113,88	-0,0088%
5	177,92	177,92	0%
6	256,20	256,21	-0,0039%
7	348,72	348,73	-0,0029%
8	455,47	455,48	-0,0022%
9	576,45	576,47	-0,0035%
10	711,67	711,69	-0,0028%

Fonte: Autor (2023)

5.2.3 TVEB - CONVERGÊNCIA DO MÉTODO FEM

Com o aumento do refinamento da malha, aumenta-se a precisão do método em estimar e prever as frequências críticas da estrutura simulada. Entretanto, o custo computacional aumenta exponencialmente, como pode ser observado durante a análise do trabalho. A Figura 5.2.3 apresenta o gráfico do tempo de execução do código FEM desenvolvido em função do refinamento da malha. Esta curva foi obtida através da simulação a VEE, variando-se a malha de 2 até 300 elementos com passo de 2.

Figura 5.2.3 – TVEB - Relação entre tempo de execução e refinamento de malha



Fonte: Autor (2023)

Na Figura 5.2.3, observa-se que a curva do tempo de execução em função do número de elementos na malha apresenta um comportamento exponencial, crescendo rapidamente quando a malha varia entre 2 e 50 elementos. Neste intervalo, a execução do código fica abaixo de 10^1 segundos. A partir de 80 elementos, a taxa de crescimento é menor; no entanto, o tempo de execução já ultrapassa 10^2 segundos.

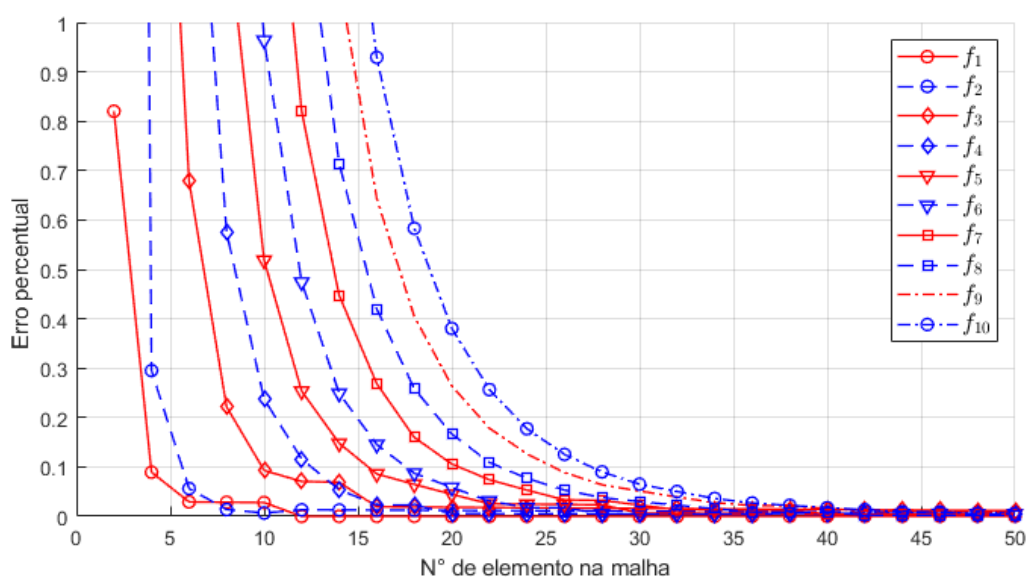
A Figura 5.2.4 apresenta as curvas do erro relativo para as 10 frequências naturais em função do número de elementos presentes na malha. Os dados presentes nos gráficos são da simulação da viga engastada-engastada, onde variou-se a malha de 2 até 50 elementos com passo de 2.

É notável que para malhas mais grossas, ou seja, com menos elementos, não é possível determinar modos de vibração de maior valor. Somente uma malha com mais de 16 elementos torna possível determinar todas as 10 frequências naturais com um erro relativo inferior a 1%. Com uma malha com 26 elementos, é possível estimar a décima frequência natural com um erro

inferior a 0.1%, e a partir de 46 elementos, o erro fica na ordem de 0.01%.

Analisando os gráficos das Figuras 5.2.3 e 5.2.4, tem-se que uma malha com um refinamento acima de 50 elementos não apresenta ganhos substanciais na precisão da determinação do comportamento dinâmico de uma estrutura do tipo viga, frente ao aumento do custo operacional requerido.

Figura 5.2.4 – TVEB - Relação entre erro relativo e refinamento de malha



Fonte: Autor (2023)

5.3 TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO - FEM

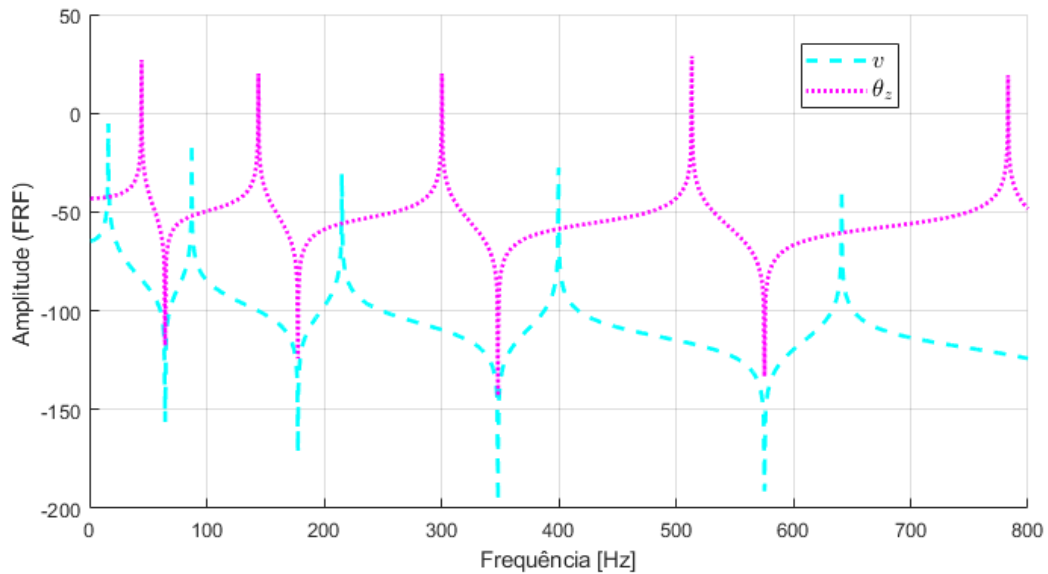
5.3.1 TVT - VIGA ENGASTADA-ENGASTADA - FEM

A Figura 5.3.1 apresenta a amplitude FRF obtida através da simulação da viga engastada-engastada usando o modelo de Timoshenko e método FEM, com uma malha de 300 elementos. A faixa de frequência analisada foi de 1 até 800 Hz com passo de 0,01 Hz.

As frequências obtidas na simulação da viga usando o modelo de Timoshenko foram comparadas com as obtidas pela TVEB usando o método SEM. Os valores das frequências naturais estão apresentados na Tabela 5.3.1.

A maior diferença percentual e absoluta ocorre quando comparamos a décima frequência natural, cuja diferença é de 0,2%. Observa-se que todas as frequências estimadas são ligeiramente inferiores às obtidas pela TVEB pelo método SEM, exceto a primeira. Isto está de acordo com a literatura que indica que a TVEB superestima as frequências naturais (DOYLE, 2021; HAN et al., 1999; THOMAS et al., 1973; THOMAS; ABBAS, 1975).

Figura 5.3.1 – FRF - TVT - Viga Engastada-Engastada - FEM(300 elementos)



Fonte: Autor (2023)

Tabela 5.3.1 – Frequências - TVT - Viga Engastada-Engastada - FEM(300 elementos)

Modo de vibração	f_{EU} (SEM) [Hz]	f_T (FEM) [Hz]	Diferença percentual
1	16,13	16,13	0
2	44,47	44,46	0,0225%
3	87,18	87,16	0,0229%
4	144,11	144,06	0,0347%
5	215,28	215,14	0,0650%
6	300,68	300,44	0,0798%
7	400,32	399,88	0,1099%
8	514,18	513,48	0,1361%
9	642,28	641,2	0,1682%
10	784,62	783,04	0,2014%

Fonte: Autor (2023)

5.3.2 TVT - VIGA BI-APOIADA - FEM

A Figura 5.3.2 apresenta a amplitude FRF calculada para a viga bi-apoiada usando o modelo de Timoshenko e o método FEM, com uma malha de 300 elementos. O intervalo de frequência analisado vai de 1 até 800 Hz com passo de 0,01 Hz.

Graficamente, os resultados obtidos aplicando-se o modelo de Timoshenko e o modelo Euler-Bernoulli são semelhantes. A Tabela 5.3.2 apresenta os valores das 10 frequências naturais e os compara diretamente com as frequências obtidas pela TVEB usando o método SEM.

Observa-se que há uma diferença na estimativa das frequências naturais, usando os

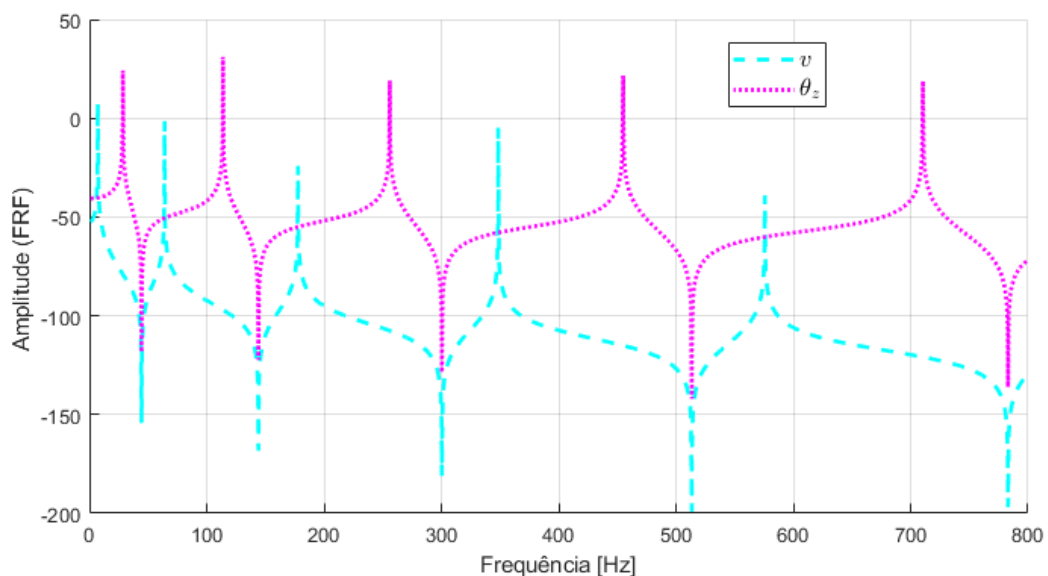
Tabela 5.3.2 – Frequências - TVT - Viga Bi-apoiada - FEM(300 elementos)

Modo de vibração	f_{EB} (SEM) [Hz]	f_T (FEM) [Hz]	Diferença percentual
1	7,12	7,12	0%
2	28,47	28,46	0,0351%
3	64,05	64,04	0,0156%
4	113,87	113,84	0,0263%
5	177,92	177,84	0,0450%
6	256,20	256,06	0,0546%
7	348,72	348,44	0,0803%
8	455,47	455,00	0,1032%
9	576,45	575,70	0,1301%
10	711,67	710,50	0,1644%

Fonte: Autor (2023)

dois modelos. A partir da segunda frequência até a décima, o valor estimado pelo modelo Timoshenko é ligeiramente menor que o apresentado pelo modelo EB, chegando a ser cerca de 0,16% abaixo. É esperado que para o modelo de Timoshenko, as frequências sejam ligeiramente menores que as da TVEB (DOYLE, 2021; HAN et al., 1999; THOMAS et al., 1973; THOMAS; ABBAS, 1975).

Figura 5.3.2 – FRF - TVT - Viga Bi-apoiada - FEM(300 elementos)



Fonte: Autor (2023)

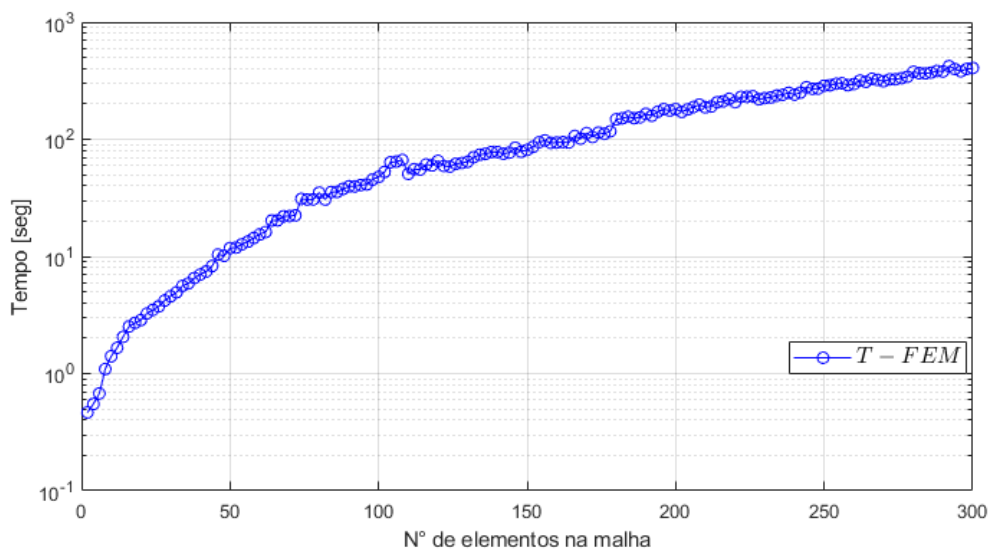
5.3.3 TVT - CONVERGÊNCIA DO MÉTODO FEM

(HAN et al., 1999) cita que um índice de esbelteza, h/L , igual ou superior a 100 é suficiente para que haja pouca diferença entre os modelos de Timoshenko e Euler-Bernoulli. O índice de esbelteza da viga simulada é de $h/L = 322$. Isto explica a razão pela qual as frequências

calculadas pelo modelo de Timoshenko foram tão próximas às do modelo de Euler-Bernoulli. Entretanto, a TVT e o código FEM tiveram sensibilidade para calcular os efeitos de cisalhamento e inércia rotacional de uma viga demasiadamente esbelta, e apresentando as frequências naturais relacionadas.

A Figura 5.3.3 apresenta o gráfico do tempo de execução do código FEM em função do tamanho da malha. Este gráfico foi obtido simulando-se VEE usando TVT e variando o refinamento da malha de 2 até 300 elementos, com um incremento de 2 elementos.

Figura 5.3.3 – TVT - Relação entre tempo de execução e refinamento de malha



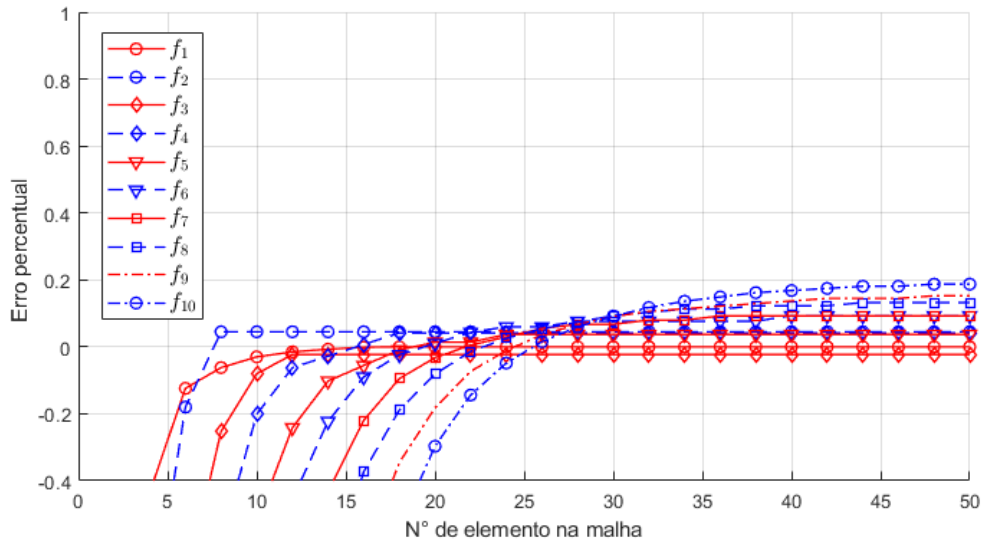
Fonte: Autor (2023)

A Figura 5.3.4 apresenta as curvas do erro percentual entre o modelo de Timoshenko usando o método FEM e o modelo de Euler-Bernoulli usando o método SEM. Observa-se que à medida que a malha vai ficando mais refinada, o erro percentual passa a ser positivo, indicando que as frequências naturais estimadas pelo modelo de Timoshenko são menores que as frequências de referência.

Observa-se que a partir de 25 elementos, todas as frequências estimadas apresentam erros percentuais positivos. Quanto maior a frequência, maior é a distância entre os valores estimados pelos modelos de Timoshenko e Euler-Bernoulli. O erro relativo torna-se inferior a 0.1% a partir da malha de 36 elementos (adotando-se como frequência de referência os valores calculados para a malha de 300 elementos).

A Tabela 5.3.3 mostrar o tempo gasto, em segundos, para a simulação da viga bi-apoiada, para 6 configurações de malhas (2, 10, 20, 50, 100 e 300 elementos) e os modelos de viga estudados, usando os métodos FEM e SEM.

Figura 5.3.4 – TVT - Relação erro relativo e refinamento de malha



Fonte: Autor (2023)

Tabela 5.3.3 – Comparação entre os tempos de execução

Nº de elementos	t [seg] (TVEB-FEM)	t [seg] (TVEB-FEM)	t [seg] (TVT-SEM)
2	0,475	1,482	0,466
10	1,501	3,812	1,405
20	2,764	7,118	2,863
50	11,128	20,677	11,784
100	45,849	60,766	47,750
300	388,801	492,493	406,269

Fonte: Autor (2023)

Observa-se que para uma malha com a mesma quantidade de elementos, o código SEM gasta mais tempo do que o código FEM para obter a resposta dinâmica. Doyle (2021) e Lee (2009) citam que a resolução do método SEM demanda mais recursos, pois é necessário recalcular toda a malha para cada nova frequência analisada. A vantagem do método reside na característica de necessitar de um número menor de elementos para discretizar um problema e na solução obtida ser exata. Nas configurações de vigas simuladas, foram necessários apenas 2 elementos espectrais para discretizá-las.

O custo operacional para executar o código FEM usando o modelo de Timoshenko é essencialmente o mesmo que o custo operacional usando o modelo de Euler-Bernoulli, mas é cerca de 5% mais devagar. Isso se deve à estrutura adotada durante a elaboração do código FEM, que é executado em blocos. Uma vez que o tamanho das matrizes de massa e rigidez dos modelos de viga possui a mesma dimensão e o modelo de Timoshenko não possui uma quantidade de operações matemáticas tão superior ao do modelo de Euler-Bernoulli.

Para malhas inferiores a 20 elementos não observa-se uma vantagem no tempo de execução perceptível entre a TVEB e TVT. Entretanto a medida que aumenta-se o número de elementos para 50, 100 e 300, o tempo gasto para simular a viga usando a TVT é aproximadamente 5% mais demorado que a TVEB.

6 CONCLUSÃO

Desenvolveram-se dois códigos modulares no *software* MATLAB de maneira satisfatória, o que possibilita a alteração rápida de parâmetros, tais como: propriedades físicas; intervalo de frequência; condições de apoio; modelo de viga. Cada código apresenta um método de discretização distinto, sendo um baseado no Método dos Elementos Finitos (FEM) e o outro no Método dos Elementos Espectrais (SEM).

Conseguiu-se validar com boa precisão os códigos desenvolvidos, simulando duas configurações de viga e comparando os resultados com dados experimentais disponíveis na literatura.

O código SEM demanda mais tempo de processamento em comparação com o código FEM, considerando uma malha de mesmo tamanho. Entretanto, devido à natureza do método, são necessários menos elementos para descrever uma estrutura e o comportamento dinâmico obtido é exato.

As dez primeiras frequências naturais obtidas para as duas configurações de vigas estudadas usando o modelo de Euler-Bernoulli e método FEM tornaram-se efetivamente precisas a partir de uma malha com 26 elementos. Para o modelo de Timoshenko usando método FEM, a precisão relativa, considerando-se os valores obtidos para uma malha de 300 elementos como os reais, foi alcançada com uma malha de 40 elementos.

Mesmo para uma estrutura de viga excessivamente esbelta, como a simulada, foi possível observar os efeitos do cisalhamento e inércia rotacional na previsão das dez frequências naturais calculadas para as duas configurações de vigas.

Como sugestão para trabalhos futuros:

- Ampliar a versatilidade do código FEM introduzindo outros modelos de viga como exemplo o modelo de Rayleigh;
- Ampliar a versatilidade do código SEM introduzindo o modelo de Timoshenko;
- Analisar outras configurações de apoios, como a livre-livre;
- Estudar e simular o comportamento dinâmico de vigas em altas frequências.

REFERÊNCIAS

- ANSARI, R.; SHOJAEI, M. F.; MOHAMMADI, V.; GHOLAMI, R.; SADEGHI, F. Nonlinear forced vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite timoshenko beams. **Composite Structures**, Elsevier, v. 113, p. 316–327, 2014.
- ARANY, L.; BHATTACHARYA, S.; ADHIKARI, S.; HOGAN, S.; MACDONALD, J. H. G. An analytical model to predict the natural frequency of offshore wind turbines on three-spring flexible foundations using two different beam models. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, Elsevier, v. 74, p. 40–45, 2015.
- BALACHANDRAN, B.; MAGRAB, E. B. **Vibrações mecânicas**. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2016.
- BENZAIR, A.; TOUNSI, A.; BESSEGHIER, A.; HEIRECHE, H.; MOULAY, N.; BOUMIA, L. The thermal effect on vibration of single-walled carbon nanotubes using nonlocal timoshenko beam theory. **Journal of Physics D: Applied Physics**, IOP Publishing, v. 41, n. 22, p. 225404, 2008.
- BITTENCOURT, M. L. **Computational solid mechanics: variational formulation and high order approximation**. [S.l.]: CRC Press, 2014.
- CALLISTER, W. D.; RETHWISCH, D. G. **Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução, 8ª edição, LTC**. [S.l.: s.n.], 2012.
- CHANG, W.-J.; LEE, H.-L. Free vibration of a single-walled carbon nanotube containing a fluid flow using the timoshenko beam model. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 373, n. 10, p. 982–985, 2009.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4. ed. New York: Wiley, 2001.
- COSTA, S. N. J. **O modelo de Timoshenko em vigas elásticas, estruturas offshore e nanotubos de carbono através da resposta fundamental de valor inicial**. Tese (Doutorado), 2006.
- COWPER, G. The shear coefficient in timoshenko's beam theory. **Journal of applied mechanics**, ASME International, v. 33, n. 2, p. 335–340, 1966.
- DOYLE, J. **Wave Propagation in Structures**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2021. ISBN 9783030596804.
- DOYLE, J. F. **Wave propagation in structures: spectral analysis using fast discrete Fourier transforms**. New York: Springer-Verlag, 1997.
- ELISHAKOFF, I. Who developed the so-called timoshenko beam theory? **Mathematics and Mechanics of Solids**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 25, n. 1, p. 97–116, 2020.
- FRANCO-VILLAFANE, J.; MÉNDEZ-SÁNCHEZ, R. On the accuracy of the timoshenko beam theory above the critical frequency: best shear coefficient. **Journal of Mechanics**, Cambridge University Press, v. 32, n. 5, p. 515–518, 2016.

- HAN, S. M.; BENAROYA, H.; WEI, T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. **Journal of Sound and Vibration**, v. 225, n. 5, p. 935–988, 1999. ISSN 0022-460X.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. [S.l.]: Pearson Educación, 2010.
- INC., T. M. **MATLAB version: 9.13.0 (R2022b) - Documentation**. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks Inc., 2022. Disponível em: <<https://www.mathworks.com>>.
- LEE, U. **Spectral element method in structural dynamics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.
- NOGUEIRA, A. A. N. *Determinação Analítica e Validação Experimental das Frequências Naturais de uma Estrutura Tipo Viga em Diferentes Condições De Contorno*. Trabalho de conclusão de curso pela Universidade Federal do Piauí. Teresina-PI, 2015.
- NORTON, R. L. **Projeto de máquinas: Uma abordagem integrada**. Tradução: Konstantinos Dimitriou Stavropoulos, et al. Porto Alegre: bookman editora, 2013.
- NUNES, J. d. B. **Uma Abordagem Numérica e Analítica para Determinação da Temperatura e do Momento Fletor Crítico em Vigas de Aço em Situação de Incêndio**. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília.(in Portuguese), 2005.
- ÖCHSNER, A. **Classical beam theories of structural mechanics**. [S.l.]: Springer, 2021. v. 42.
- PETTY, M. **Introduction to finite element vibration analysis**. [S.l.]: Cambridge university press, 2010.
- RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. Revisor técnico: Lima Jr., J. J. Tradução: Simille, A. São Paulo: Pearson Printice Hall, 2008.
- THOMAS, D.; WILSON, J.; WILSON, R. Timoshenko beam finite elements. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 315–330, 1973.
- THOMAS, J.; ABBAS, B. Finite element model for dynamic analysis of timoshenko beam. **Journal of sound and vibration**, Elsevier, v. 41, n. 3, p. 291–299, 1975.
- TIMOSHENKO, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. **Philosophical Magazine**, v. 41, p. 744–764, 1921.
- TIMOSHENKO, S. P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 43, n. 253, p. 125–131, 1922.
- TIMOSHENKO, S. P. **History of Strength of Materials**. New York: Dover Publications, 1953.
- WANG, C.; TAN, V.; ZHANG, Y. Timoshenko beam model for vibration analysis of multi-walled carbon nanotubes. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 294, n. 4-5, p. 1060–1072, 2006.
- YAS, M.; SAMADI, N. Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite timoshenko beams on elastic foundation. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, Elsevier, v. 98, p. 119–128, 2012.

A EQUACIONAMENTO VIGA DE TIMOSHENKO

Esta seção contém todo o desenvolvimento matemático para a abordagem adotada na determinação das matrizes de massa e rigidez de um elemento de viga de Timoshenko.

A.1 EQUACIONAMENTO ELEMENTO FINITO DE TIMOSHENKO

As funções de forma para a deflexão e a inclinação da seção transversal são dadas, respectivamente, por,

$$\begin{aligned}
 [Q(\xi)]^T &= \frac{1}{4(1+3\Phi)} \begin{bmatrix} Q_1(\xi) \\ Q_2(\xi) \\ Q_3(\xi) \\ Q_4(\xi) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{4(1+3\Phi)} \begin{bmatrix} 2(1+3\Phi) - 3(1+2\Phi)\xi + \xi^3 \\ a \left[(1+3\Phi) - \xi - (1+3\Phi)\xi^2 + \xi^3 \right] \\ 2(1+3\Phi) + 3(1+2\Phi)\xi - \xi^3 \\ a \left[-(1+3\Phi) - \xi + (1+3\Phi)\xi^2 + \xi^3 \right] \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

$$\begin{aligned}
 [R(\xi)]^T &= \frac{1}{4(1+3\Phi)a} \begin{bmatrix} R_1(\xi) \\ R_2(\xi) \\ R_3(\xi) \\ R_4(\xi) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{4(1+3\Phi)a} \begin{bmatrix} -3 + 3\xi^2 \\ a \left[(-1 + 6\Phi) - 2(1+3\Phi)\xi + 3\xi^2 \right] \\ 3 - 3\xi^2 \\ a \left[(-1 + 6\Phi) + 2(1+3\Phi)\xi + 3\xi^2 \right] \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.1.2}$$

A.1.1 DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE MASSA

A matriz de massa é dada pela seguinte formula,

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{m}] &= \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{v}}]_e^T \left\{ \rho A a \int_{-1}^{+1} ([Q(\xi)]^T [Q(\xi)]) d\xi + \rho I a \int_{-1}^{+1} ([R(\xi)]^T [R(\xi)]) d\xi \right\} [\dot{\mathbf{v}}]_e \\
 [\mathbf{m}] &= \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{v}}]_e^T \{ \rho A a [\mathbf{m}_{\text{aux},1}] + \rho I a [\mathbf{m}_{\text{aux},2}] \}
 \end{aligned} \tag{A.1.3}$$

$$[Q(\xi)]^T [Q(\xi)] = \frac{1}{16(1+3\Phi)^2} \begin{bmatrix} Q_1(\xi)^2 & Q_1(\xi)Q_2(\xi) & Q_1(\xi)Q_3(\xi) & Q_1(\xi)Q_4(\xi) \\ \dots & Q_2(\xi)^2 & Q_2(\xi)Q_3(\xi) & Q_2(\xi)Q_4(\xi) \\ \dots & \dots & Q_3(\xi)^2 & Q_3(\xi)Q_4(\xi) \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & Q_4(\xi)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.4})$$

onde,

$$Q_1(\xi)^2 = (\xi - 1)^2 (2(1+3\Phi) - \xi - \xi^2)^2 \quad (\text{A.1.5})$$

$$Q_1(\xi)Q_2(\xi) = a(\xi - 1)^2 (\xi + 1) (2(1+3\Phi) - \xi - \xi^2) ((1+3\Phi) - \xi) \quad (\text{A.1.6})$$

$$Q_1(\xi)Q_3(\xi) = -(\xi - 1) (\xi + 1) (2(1+3\Phi) - \xi - \xi^2) (2(1+3\Phi) + \xi - \xi^2) \quad (\text{A.1.7})$$

$$Q_1(\xi)Q_4(\xi) = -a(\xi - 1)^2 (\xi + 1) (2(1+3\Phi) - \xi - \xi^2) ((1+3\Phi) + \xi) \quad (\text{A.1.8})$$

$$Q_2(\xi)^2 = a^2 (\xi - 1)^2 (\xi + 1)^2 ((1+3\Phi) - \xi)^2 \quad (\text{A.1.9})$$

$$Q_2(\xi)Q_3(\xi) = -a(\xi - 1) (\xi + 1)^2 ((1+3\Phi) - \xi) (2(1+3\Phi) + \xi - \xi^2) \quad (\text{A.1.10})$$

$$Q_2(\xi)Q_4(\xi) = -a^2 (\xi - 1)^2 (\xi + 1)^2 ((1+3\Phi) - \xi) ((1+3\Phi) + \xi) \quad (\text{A.1.11})$$

$$Q_3(\xi)^2 = (\xi + 1)^2 (2(1+3\Phi) + \xi - \xi^2)^2 \quad (\text{A.1.12})$$

$$Q_3(\xi)Q_4(\xi) = a(\xi - 1) (\xi + 1)^2 (2(1+3\Phi) + \xi - \xi^2) ((1+3\Phi) + \xi) \quad (\text{A.1.13})$$

$$Q_4(\xi)^2 = a^2 (\xi - 1)^2 (\xi + 1)^2 ((1+3\Phi) + \xi)^2 \quad (\text{A.1.14})$$

$$\int_{-1}^{+1} [Q(\xi)]^T [Q(\xi)] d\xi = [\mathbf{m}_{\text{aux},1}] = \frac{1}{16(1+3\Phi)^2} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ \dots & m_5 & -m_4 & m_6 \\ \dots & \dots & m_1 & -m_2 \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & m_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.15})$$

onde,

$$m_1 = \frac{416}{35} + \frac{336\Phi}{5} + 96\Phi^2 \quad (\text{A.1.16})$$

$$m_2 = a \left(\frac{352}{105} + \frac{88\Phi}{5} + 24\Phi^2 \right) \quad (\text{A.1.17})$$

$$m_3 = \frac{144}{35} + \frac{144\Phi}{5} + 48\Phi^2 \quad (\text{A.1.18})$$

$$m_4 = -a \left(\frac{208}{105} + \frac{72\Phi}{5} + 24\Phi^2 \right) \quad (\text{A.1.19})$$

$$m_5 = a^2 \left(\frac{128}{105} + \frac{32\Phi}{5} + \frac{48\Phi^2}{5} \right) \quad (\text{A.1.20})$$

$$m_6 = -a^2 \left(\frac{32}{35} + \frac{32\Phi}{5} + \frac{48\Phi^2}{5} \right) \quad (\text{A.1.21})$$

$$[R(\xi)]^T [R(\xi)] = \frac{1}{16a^2(1+3\Phi)^2} \begin{bmatrix} R_1(\xi)^2 & R_1(\xi)R_2(\xi) & R_1(\xi)R_3(\xi) & R_1(\xi)R_4(\xi) \\ \dots & R_2(\xi)^2 & R_2(\xi)R_3(\xi) & R_2(\xi)R_4(\xi) \\ \dots & \dots & R_3(\xi)^2 & R_3(\xi)R_4(\xi) \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & R_4(\xi)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.22})$$

$$R_1(\xi)^2 = 9 - 18\xi^2 + 9\xi^4 \quad (\text{A.1.23})$$

$$R_1(\xi)R_2(\xi) = 3a(\xi-1)^2(\xi+1)((1-6\Phi)+3\xi) \quad (\text{A.1.24})$$

$$R_1(\xi)R_3(\xi) = -R_1(\xi)^2 \quad (\text{A.1.25})$$

$$R_1(\xi)R_4(\xi) = 3a(\xi-1)(\xi+1)^2(-(1-6\Phi)+3\xi) \quad (\text{A.1.26})$$

$$R_2(\xi)^2 = a^2(\xi-1)^2((1-6\Phi)+3\xi)^2 \quad (\text{A.1.27})$$

$$R_2(\xi)R_3(\xi) = -R_1(\xi)R_2(\xi) \quad (\text{A.1.28})$$

$$R_2(\xi)R_4(\xi) = a^2(\xi-1)(\xi+1)((1-6\Phi)+3\xi)(-(1-6\Phi)+3\xi) \quad (\text{A.1.29})$$

$$R_3(\xi)^2 = R_1(\xi)^2 \quad (\text{A.1.30})$$

$$R_3(\xi)R_4(\xi) = -R_1(\xi)R_4(\xi) \quad (\text{A.1.31})$$

$$R_4(\xi)^2 = a^2(\xi+1)^2(-(1-6\Phi)+3\xi)^2 \quad (\text{A.1.32})$$

$$\int_{-1}^{+1} [R(\xi)]^T [R(\xi)] d\xi = [\mathbf{m}_{\text{uax},2}] = \frac{1}{16a^2(1+3\Phi)^2} \begin{bmatrix} m_7 & m_8 & -m_7 & m_8 \\ \dots & m_9 & -m_8 & m_{10} \\ \dots & \dots & m_7 & -m_8 \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & m_9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.33})$$

onde,

$$m_7 = \frac{48}{5} \quad (\text{A.1.34})$$

$$m_8 = a \left(\frac{8}{5} - 24\Phi \right) \quad (\text{A.1.35})$$

$$m_9 = a^2 \left(\frac{64}{15} + 16\Phi + 96\Phi^2 \right) \quad (\text{A.1.36})$$

$$m_{10} = -a^2 \left(\frac{16}{15} + 16\Phi - 48\Phi^2 \right) \quad (\text{A.1.37})$$

A matriz de massa de um elemento de viga de Timoshenko com comprimento de $2a$ é dado por:

$$[\mathbf{m}]_e = \rho A a [\mathbf{m}_{\text{aux},1}] + \rho I a [\mathbf{m}_{\text{aux},2}]$$

$$[\mathbf{m}]_e = \frac{\rho A a}{16(1+3\Phi)^2} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ \dots & m_5 & -m_4 & m_6 \\ \dots & \dots & m_1 & -m_2 \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & m_5 \end{bmatrix} + \frac{\rho I}{16a(1+3\Phi)^2} \begin{bmatrix} m_7 & m_8 & -m_7 & m_8 \\ \dots & m_9 & -m_8 & m_{10} \\ \dots & \dots & m_7 & -m_8 \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & m_9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.38})$$

Realizando as devidas modificações no termo Φ e trabalhando com o comprimento do elemento L a invés do semi-comprimento a , a matriz de massa encontrada é idêntica a apresentada por Thomas et al. (1973). Com leve alterações chega-se a matriz de rigidez apresentada por Petyt (2010).

A.1.2 SOLUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ [K]

Temos,

$$\begin{aligned}
[R'(\xi)]^T &= \frac{1}{4(1+3\Phi)a} \begin{bmatrix} R'_1(\xi) \\ R'_2(\xi) \\ R'_3(\xi) \\ R'_4(\xi) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4(1+3\Phi)a} \begin{bmatrix} +6\xi \\ a[-2(1+3\Phi)+6\xi] \\ -R'_1(\xi) \\ a[+2(1+3\Phi)+6\xi] \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.1.39}$$

Assim,

$$[R(\xi)]^T [R(\xi)] = \frac{1}{16a^2(1+3\Phi)^2} \begin{bmatrix} R'_1(\xi)^2 & R'_1(\xi)R'_2(\xi) & -R'_1(\xi)^2 & R'_1(\xi)R'_4(\xi) \\ \dots & R'_2(\xi)^2 & -R'_1(\xi)R'_2(\xi) & R'_2(\xi)R'_4(\xi) \\ \dots & \dots & R'_1(\xi)^2 & -R'_1(\xi)R'_4(\xi) \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & R'_4(\xi)^2 \end{bmatrix} \tag{A.1.40}$$

onde,

$$R'_1(\xi)^2 = 36\xi^2 \tag{A.1.41}$$

$$R'_1(\xi)R'_2(\xi) = 6a\xi(-2(1+3\Phi)+6\xi) \tag{A.1.42}$$

$$R'_1(\xi)R'_4(\xi) = 6a\xi(2(1+3\Phi)+6\xi) \tag{A.1.43}$$

$$R'_2(\xi)^2 = a^2(-2(1+3\Phi)+6\xi)^2 \tag{A.1.44}$$

$$R'_2(\xi)R'_4(\xi) = a^2(-2(1+3\Phi)+6\xi)(2(1+3\Phi)+6\xi) \tag{A.1.45}$$

$$R'_4(\xi)^2 = a^2(2(1+3\Phi)+6\xi)^2 \tag{A.1.46}$$

Temos,

$$\int_{-1}^{+1} [R(\xi)]^T [R(\xi)] d\xi = [\mathbf{k}_{\text{aux},1}] = \frac{1}{16a^2(1+3\Phi)^2} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & -k_1 & k_2 \\ \dots & k_3 & -k_2 & k_4 \\ \dots & \dots & k_1 & -k_2 \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & k_3 \end{bmatrix} \tag{A.1.47}$$

$$k_1 = 24 \quad (\text{A.1.48})$$

$$k_2 = 24a \quad (\text{A.1.49})$$

$$k_3 = 8a^2(4 + 6\Phi + 9\Phi^2) \quad (\text{A.1.50})$$

$$k_4 = -8a^2(-2 + 6\Phi + 9\Phi^2) \quad (\text{A.1.51})$$

Para determinar $[S(\xi)]$ vem que,

$$[S(\xi)]^T = \frac{[Q'(\xi)]^T}{a} - [R(\xi)]^T \quad (\text{A.1.52})$$

$$\begin{bmatrix} S_1(\xi) \\ S_2(\xi) \\ S_3(\xi) \\ S_4(\xi) \end{bmatrix} = \frac{1}{4a(1+3\Phi)} \begin{bmatrix} Q'_1(\xi) \\ Q'_2(\xi) \\ -Q'_1(\xi) \\ Q'_4(\xi) \end{bmatrix} - \frac{1}{4a(1+3\Phi)} \begin{bmatrix} R_1(\xi) \\ R_2(\xi) \\ -R_1(\xi) \\ R_4(\xi) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.53})$$

$[Q'(\xi)]$ é dado por,

$$\begin{aligned} [Q'(\xi)]^T &= \frac{1}{4(1+3\Phi)} \begin{bmatrix} Q'_1(\xi) \\ Q'_2(\xi) \\ Q'_3(\xi) \\ Q'_4(\xi) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4(1+3\Phi)} \begin{bmatrix} -3(1+2\Phi) + 3\xi^2 \\ a[-1 - 2(1+3\Phi)\xi + 3\xi^2] \\ -Q'_1(\xi) \\ a[-1 + 2(1+3\Phi)\xi + 3\xi^2] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.1.54})$$

assim,

$$\begin{bmatrix} S_1(\xi) \\ S_2(\xi) \\ S_3(\xi) \\ S_4(\xi) \end{bmatrix} = \frac{1}{4a(1+3\Phi)} \begin{bmatrix} -6\Phi \\ -6a\Phi \\ 6\Phi \\ -6a\Phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.55})$$

logo,

$$[S(\xi)]^T [S(\xi)] = \frac{1}{16a^2(1+3\Phi)^2} \begin{bmatrix} 36\Phi^2 & 36a\Phi^2 & -36\Phi^2 & 36a\Phi^2 \\ \dots & 36a^2\Phi^2 & -36a\Phi^2 & 36a^2\Phi^2 \\ \dots & \dots & 36\Phi^2 & -36a\Phi^2 \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & 36a^2\Phi^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.56})$$

então,

$$\int_{-1}^{+1} [S(\xi)]^T [S(\xi)] d\xi = [\mathbf{k}_{\text{aux},2}] = \frac{72\Phi^2}{16a^2(1+3\Phi)^2} \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & a \\ \dots & a^2 & -a & a^2 \\ \dots & \dots & 1 & -a \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & a^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.57})$$

A matriz de rigidez para um elemento de viga de Timoshenko de comprimento $2a$ é dado por:

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}]_e &= \frac{EI}{a} [\mathbf{k}_{\text{aux},1}] + k_c GAa [\mathbf{k}_{\text{aux},2}] \\ &= \frac{EI}{16a^3(1+3\Phi)^2} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & -k_1 & k_2 \\ \dots & k_3 & -k_2 & k_4 \\ \dots & \dots & k_1 & -k_2 \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & k_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{72k_c GAa^2\Phi^2}{16a^3(1+3\Phi)^2} \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & a \\ \dots & a^2 & -a & a^2 \\ \dots & \dots & 1 & -a \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & a^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{24EI}{16a^3(1+3\Phi)^2} \begin{bmatrix} \frac{k_1}{24} & \frac{k_2}{24} & -\frac{k_1}{24} & \frac{k_2}{24} \\ \dots & \frac{k_3}{24} & -\frac{k_2}{24} & \frac{k_4}{24} \\ \dots & \dots & \frac{k_1}{24} & -\frac{k_2}{24} \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & \frac{k_3}{24} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{24EI}{16a^3(1+3\Phi)^2} 3\Phi \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & a \\ \dots & a^2 & -a & a^2 \\ \dots & \dots & 1 & -a \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & a^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{24EI}{16a^3(1+3\Phi)^2} \begin{bmatrix} \frac{k_1}{24} + 3\Phi & \frac{k_2}{24} + 3a\Phi & -(\frac{k_1}{24} + 3\Phi) & \frac{k_2}{24} + 3a\Phi \\ \dots & \frac{k_3}{24} + 3a^2\Phi & -(\frac{k_2}{24} + 3a\Phi) & \frac{k_4}{24} + 3a^2\Phi \\ \dots & \dots & \frac{k_1}{24} + 3\Phi & -(\frac{k_2}{24} + 3a\Phi) \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & \frac{k_3}{24} + 3a^2\Phi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo os termos matriciais da equação cima obtemos uma equação simplificada para a matriz de rigidez, dada por:

$$[\mathbf{k}]_e = \frac{EI}{2a^3 (1 + 3\Phi)} \begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ \dots & a^2(4 + 3\Phi) & -3a & a^2(2 - 3\Phi) \\ \dots & \dots & 3 & -3a \\ \text{simétrico} & \dots & \dots & a^2(4 + 3\Phi) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.58})$$

Realizando as devidas modificações no termo Φ e alterando o comprimento para o total do elemento L ao invés do semi-comprimento a , a matriz de rigidez encontrada é idêntica a apresentada por Thomas et al. (1973). Com leve alterações chega-se a matriz de rigidez apresentada por Petyt (2010).

B CÓDIGOS DESENVOLVIDOS EM MATLAB

B.1 CÓDIGO FEM

```

%% Ubirajara Alves de Sousa Junnyor
% Curso de Engenharia Mecanica - UFMA
% Codigo FEM
close all
clear
clc
tic

%% <1> PARAMETROS DA SIMULACAO
% DIFINICAO DO VETOR FREQUENCIA
    freq_inicial = 1; % [Hz]
    freq_final = 800; % [Hz]
    freq_passo = 1; % [Hz]
    fq = freq_inicial:freq_passo:freq_final; % vetor fq [Hz]

%% <2> DADOS DE ENTRADA
% PROPRIEDADES DIMENSIONAIS
    L = 1.0; % comprimento [m]
    b = 0.0508; % largura [m]
    h = 0.0031; % altura [m]
    A = b*h; % area da secao transversal [m^2]
    I = b*h^3/12; % momento de inercia de area [m^4]
% PROPRIEDADES DO MATERIAL
    eta = 0.00; % fator de amortecimento da estrutura
    E = 71e9*(1 + 1i*eta); % modulo de Young [Pa]
    rho = 2770.0; % densidade [kg/m3]
    kc = 5/6; % coef. de cisalhamento de T. [-]
    G = 26.5e9; % modulo de cisalhamento [Pa]

%% <3> ELEMENTOS DA MALHA
% REFINAMENTO DA MALHA
    tic
    num_ele = 300; % numero de elementos internos da estrutura
    num_nos = num_ele+1; % numero de nos internos da malha

```

```

le = L/num_ele; % comp. do elemento interno
a = le/2; % semi-comprimento do elemento int.
Phi = E*I/(kc*G*A*a^2); % numero adimensional [-]

%% <4> MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ LOCAIS
% TEORIA DE VIGA DE EULER-BERNOULLI
%     ke = FEM_EB_rigidez(E,I,a);
%     me = FEM_EB_massa(rho,A,a);
% TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO
%     ke = FEM_T_rigidez(E,I,a,Phi); % matriz de rigidez local
%     me = FEM_T_massa(rho,A,a,Phi,I); % matriz de massa local

%% <5> MATRIZES GLOBAIS
% DEFININDO AS MATRIZES GLOBAIS
KG = zeros(num_nos*2,num_nos*2);
MG = zeros(num_nos*2,num_nos*2);
for ii = 0:num_ele-1
    pos = ii*2+1:ii*2+4;
    KG(pos,pos) = KG(pos,pos) + ke;
    MG(pos,pos) = MG(pos,pos) + me;
end

%% <6> CONDICÕES DE CONTORNO
%restri = [pos y, rotacao] ; 0==livre ; 1==fixo
restri_A = [1 1]; % restricao da extremidade A
restri_B = [1 1]; % restricao da extremidade B
for aux = 1:2
    if restr_i_A(aux) == 1
        KG(aux,:) = 0;
        KG(:,aux) = 0;
        KG(aux,aux) = 1000;
        MG(aux,:) = 0;
        MG(:,aux) = 0;
    end
    if restr_i_B(aux) == 1
        KG(end-2+aux,:) = 0;
        KG(:,end-2+aux) = 0;
        KG(end-2+aux,end-2+aux) = 1000;
        MG(end-2+aux,:) = 0;
    end
end

```

```

        MG(:,end-2+aux) = 0;
    end
end

%% <7> VETOR FORÇA
FG = zeros(num_nos*2,1); % vetor força.
% aplica-se uma força unitaria de 1N no
% sentido negativo do eixo y no
% centro da viga.
no_forca = round(num_ele/2)+1;
FG(no_forca*2-1) = -1;
FG(no_forca*2) = 1;

%% <8> MATRIZ DINAMICA
for count = 1:length(fq)
% montagem da matriz de rigidez dinamica
    DG = KG - MG*(2*pi*fq(count))^2;
    u = linsolve(DG,FG);
    des(:,count) = u(1:2:end);
    inc(:,count) = u(2:2:end);
end

%% <9> POS-PROCESSAMENTO DOS DADOS
% Plotagem da FRF
no_ana = round(num_ele/2)+1;
p1 = 20*log10(abs(des(no_ana,:)));
pp1 = 20*log10(abs(inc(no_ana,:)));
fig = figure;
hold on
plot(fq,p1,'--c',LineWidth=2)
plot(fq,pp1,':m',LineWidth=2)
hold off
grid on
ylabel('Amplitude (FRF) ')
xlabel('Frequencia [Hz]')
fig.Position = [100 100 800 400];
legend('$v$', '$\theta_{z}$', 'Interpreter', 'latex')
toc
% Fim.

```

B.2 CÓDIGO SEM

```
%% Ubirajara Alves de Sousa Junnyor
```

```
% Curso de Engenharia Mecanica - UFMA
```

```
% Codigo SEM
```

```
close all
```

```
clear
```

```
clc
```

```
tic
```

```
%% <1> DADOS DE ENTRADA
```

```
% PROPRIEDADES DO MATERIAL E DIMENSOES
```

```
    L = 1.0; % comprimento [m]
```

```
    b = 0.0508; % largura [m]
```

```
    h = 0.0031; % altura [m]
```

```
    A = b*h; % area da secao transversal [m2]
```

```
    I = b*h^3/12; % momento de inercia de area [m4]
```

```
% PROPRIEDADES DO MATERIAL
```

```
    eta = 0.00; % fator de amortecimento da estrutura
```

```
    E = 71e9*(1 + li*eta); % modulo de Young [Pa]
```

```
    rho = 2770.0; % densidade [kg/m3]
```

```
    kc = 5/6; % coef. de cisalhamento de T. [-]
```

```
    G = 25e9; % modulo de cisalhamento [Pa]
```

```
% NUMERO DE ELEMENTOS
```

```
    nelem = 2; % numero de elementos interno [-]
```

```
    nnos = nelem+1; % numero de nos [-]
```

```
%% <2> DIFINICAO DO VETOR FREQUENCIA
```

```
    freq_inicial = 1; % [Hz]
```

```
    freq_final = 800; % [Hz]
```

```
    freq_passo = 0.01; % [Hz]
```

```
    fq = freq_inicial:freq_passo:freq_final; % vetor fq [Hz]
```

```
%% <3> RESTRICAO
```

```
    % restri = [pos y, rotacao] ; 0==livre ; 1==fixo
```

```
    restri_A = [1 0]; % restricao da extremidade A
```

```
    restri_B = [1 0]; % restricao da extremidade B
```

```
%% <4> VETOR FORCA
```

```
    F = zeros(nnos*2,1);
```

```
no_forca = round(nelem/2)+1;
F(no_forca*2-1) = -1; % aplicando uma forca no eixo-y
F(no_forca*2) = 1; % aplicando um torque no eixo-z unitario

%% <5> CHECK CICLO
for count = 1:length(fq)

% <6> MATRIZ ESPECTRAL DO ELEMENTO
    se = SEM_EB_espectral(L/nelem,E,I,rho,A,fq(count));

% <7> MATRIZ ESPECTRAL GLOBAL FORCA NO CENTRO DA VIGA
    S = zeros(nnos*2,nnos*2);
    for pivo = 1:nelem
        pos = 2*pivo-1:2*pivo+2;
        S(pos,pos) = S(pos,pos)+se;
    end

% <8> APLICANDO CONDICOES DE CONTORNO
    for aux = 1:2
        if restri_A(aux) == 1
            S(aux,:) = 0;
            S(:,aux) = 0;
            S(aux,aux) = 1000;
        end
        if restri_B(aux) == 1
            S(end-2+aux,:) = 0;
            S(:,end-2+aux) = 0;
            S(end-2+aux,end-2+aux) = 1000;
        end
    end

% <9> RESOLVENDO SISTEMA
    u = linsolve(S,F);
    dados(:,count) = real(u);
end

des = dados(1:2:end,:);
inc = dados(2:2:end,:);

%% <10> POS-PROCESSAMENTO
```

```
no_ana = round(nelem/2)+1;
p = 20*log10(abs(des(no_ana,:)));
pp = 20*log10(abs(inc(no_ana,:)));

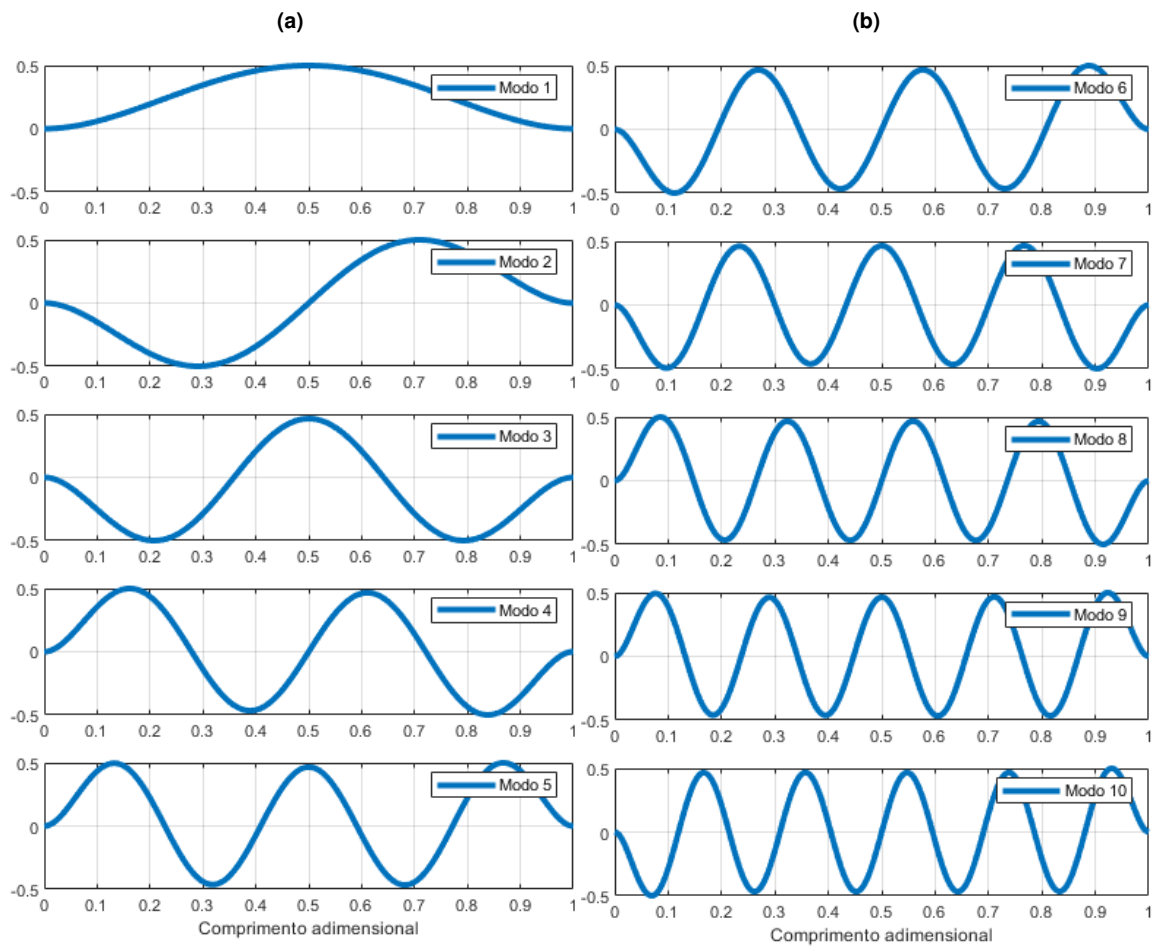
fig = figure;
hold on
plot(fq,p,"-b",LineWidth=2)
plot(fq,pp,"--r",LineWidth=2)
hold off
grid on
ylabel('Amplitude (FRF) ')
xlabel('Frequencia [Hz]')
fig.Position = [100 100 800 400];
legend('$v$', '$\theta_z$', 'Interpreter', 'latex', fontsize=12)

toc
% Fim.
```

C MODOS DE VIBRAÇÃO

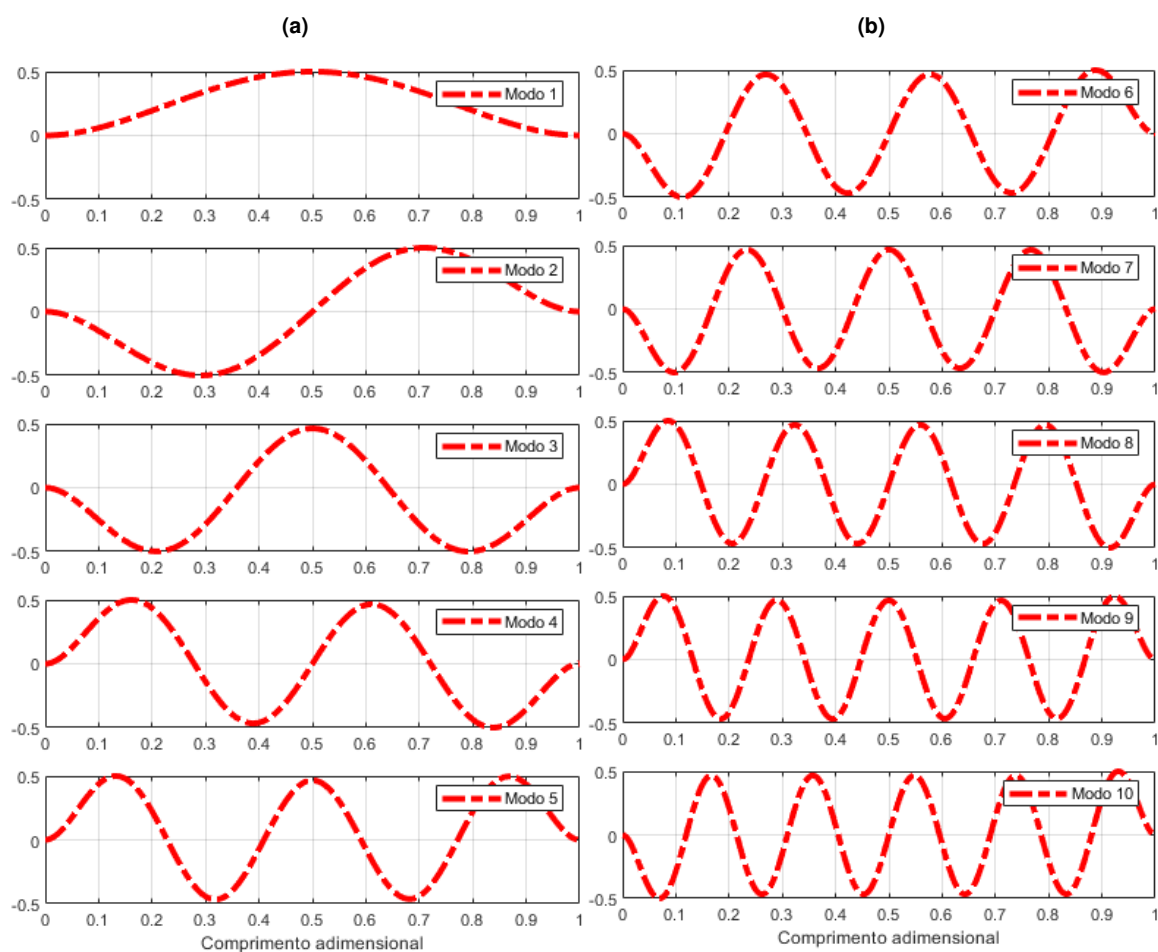
C.1 TVEB - VIGA ENGASTADA-ENGASTADA

Figura C.1.1 – Os 10 primeiros modos de vibração da VEE usando a TVEB



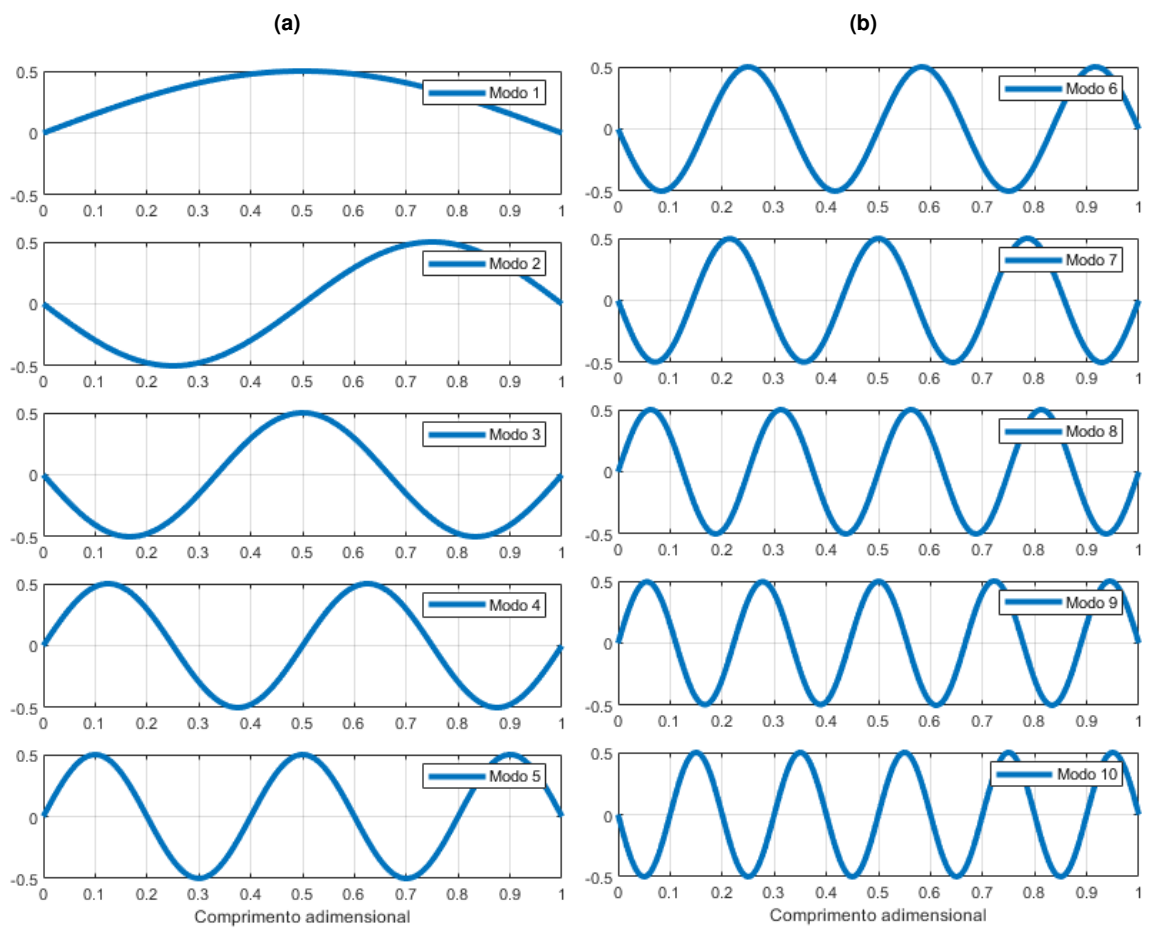
C.2 TVT - VIGA ENGASTADA-ENGASTADA

Figura C.2.1 – Os 10 primeiros modos de vibração da VEE usando a TVT



C.3 TVEB - VIGA BI-APOIADA

Figura C.3.1 – Os 10 primeiros modos de vibração da VBA usando a TVEB



C.4 TVT - VIGA BI-APOIADA

Figura C.4.1 – Os 10 primeiros modos de vibração da VBA usando a TVT

