



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

**Controle moderno aplicado ao direcionamento de paraquedas para
recuperação de foguetes de sondagem**

Aluno

Emanuel Rodrigues Valentim da Silva
Engenharia da Computação

Orientador

Prof. Dr. Paulo Rogério de Almeida Ribeiro
Coordenação do Curso de Engenharia da Computação

Trabalho de Conclusão de Curso

São Luís, 22 de dezembro de 2023

Emanuel Rodrigues Valentim da Silva

Controle moderno aplicado ao direcionamento de paraquedas para
recuperação de foguetes de sondagem

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
Universidade Federal de Maranhão, como requi-
sito necessário para obtenção do grau de Bacha-
rel em Engenharia da Computação.

**Orientador: Prof. Dr. Paulo Rogério de
Almeida Ribeiro**

São Luís, 22 de dezembro de 2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

DA SILVA, E. R. V.

Controle moderno aplicado ao direcionamento de
paraquedas para recuperação de foguetes de sondagem / E.
R. V. DA SILVA. - 2023.

53 p.

Orientador(a): P. R. A. Ribeiro.

Monografia (Graduação) - Curso de Engenharia da
Computação, Universidade Federal do Maranhão, São Luís,
2023.

1. Controle. 2. Controle Moderno. 3. LMIs. 4. LQR.
5. Paraquedas. I. Ribeiro, P. R. A. II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

EMANUEL RODRIGUES VALENTIM DA SILVA

Esta Monografia foi julgada adequada para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia da Computação, sendo aprovada em sua forma final pela banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rogério de Almeida Ribeiro
Coordenação do Curso de Engenharia da Computação - UFMA

Prof. Dr. Renan Lima Pereira
Divisão de Engenharia Eletrônica, Departamento de Sistemas e Controle - ITA

Prof. Dr. Pedro Baptista Fernandes
Coordenação do Curso de Engenharia da Computação - UFMA

São Luís, 22 de dezembro de 2023

Dedico este trabalho à minha mãe, ao meu pai e à minha irmã, pessoas pelas quais todo esse esforço vale à pena.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, a quem dia após dia me educa na Sua vontade e no Seu tempo.

Agradeço à minha mãe, que me deu todo amor, incentivo e suporte de que precisei nos anos de graduação.

Agradeço ao meu pai, que desde sempre é o meu exemplo de esforço, trabalho e dedicação.

Agradeço à minha irmã, que dividiu comigo a maior parte das nossas vidas e que agora, mesmo em caminhos diferentes continua torcendo pelo meu sucesso.

Agradeço aos meus colegas de universidade, que dividiram comigo os desafios, incertezas, conquistas, frustrações e alegrias da vida acadêmica.

Agradeço aos meus professores, em especial ao meu orientador prof. Paulo Rogério, sem dúvidas um dos maiores presentes da universidade, cuja sabedoria e orientação foram além das páginas deste trabalho e cuja amizade jamais será esquecida.

Agradeço ainda ao prof. Renan Lima, que abraçou o projeto e não mediu esforços para contribuir. Sem ele, este trabalho não seria possível.

“Não há lugar para a sabedoria onde não há paciência.”

Santo Agostinho

Resumo

O setor aeroespacial cresce impulsionado pela aviação comercial e investimentos em defesa. A ascensão do *New Space* destaca a influência do setor privado na redução de custos, focando em operações de lançamento e recuperação de dispositivos espaciais. No contexto dessa redução de custos, muitas entidades concentram seus esforços nas operações de lançamento e recuperação de dispositivos espaciais, como a recuperação por paraquedas, por exemplo. Este estudo procura preencher uma lacuna nas pesquisas da área que frequentemente deixam de incorporar incertezas em seus modelos. Utilizando conceitos de controle moderno, o trabalho foca na dinâmica de um paraquedas, implementando uma estratégia de controle baseada em realimentação de estados. Essa abordagem utiliza técnicas robustas e ótimas, como LMIs e LQR, enquanto considera a Velocidade Relativa do Paraquedas (V_p) como uma variável incerta. *Solvers* especializados, como Sedumi, Yalmip e LQR, no MATLAB, facilitam a análise otimizada para um intervalo de incerteza. O objetivo principal é gerar a matriz de ganho K para uma eficiente realimentação de estados. A validação do comportamento da planta é realizada através da análise das respostas ao degrau para diferentes técnicas e cenários de incerteza, evidenciando a estabilização do sistema em menos de 5 segundos de simulação. LMIs demonstram menor tempo de acomodação e menor *overshoot* em comparação com a abordagem LQR. Durante a análise do comportamento das variáveis de estado, não foram identificados padrões ou comportamentos inadequados. O estudo destaca a eficácia das estratégias de controle moderno na estabilização de sistemas complexos, com aplicações potenciais em diversas áreas. Apesar de limitado a simulações, o projeto oferece uma base sólida para implementações práticas futuras. Possíveis melhorias incluem análise detalhada das restrições matriciais, configuração das matrizes Q , R e N , exploração de incertezas em todos os parâmetros e a realização de experimentos práticos para validar o modelo proposto.

Palavras-chave: Controle; Paraquedas; Controle Moderno; LMIs; LQR.

Abstract

The aerospace sector is growing, driven by commercial aviation and consistent investments in defense. The rise of *New Space* underscores the influence of the private sector in cost reduction, focusing on launch and recovery operations for space devices, such as parachute recovery. This study aims to fill a gap in research in this area, often neglecting uncertainties in models. Utilizing modern control concepts, the work focuses on the dynamics of a parachute, implementing a control strategy based on state feedback. This approach employs robust and optimal techniques, such as *LMIs* and *LQR*, while considering the Relative Velocity of the Parachute (V_p) as an uncertain variable. Specialized solvers like Sedumi, Yalmip, and lqr in MATLAB facilitate an optimized analysis for a range of uncertainties. The primary goal is to generate the gain matrix K for efficient state feedback. Validation of the plant's behavior is conducted by analyzing step responses for different techniques and uncertainty scenarios, demonstrating system stabilization in less than 5 seconds of simulation. LMIs show shorter settling times and lower overshoot compared to the LQR approach. No patterns or inappropriate behaviors were identified during the analysis of the state variables. The study highlights the effectiveness of modern control strategies in stabilizing complex systems, with potential applications in various areas. Although limited to simulations, the project provides a solid foundation for future practical implementations. Possible improvements include a detailed analysis of matrix constraints, configuration of matrices Q , R , and N , exploration of uncertainties in all parameters, and conducting practical experiments to validate the proposed model.

Keywords: Control; Parachutes; Modern Control; LMIs; LQR.

Lista de Figuras

1	Superfícies de Controle de uma Aeronave	18
2	Movimento de <i>Banking Turn</i>	19
3	Processo em um Sistema de Controle	20
4	Exemplos de Sistemas de Controle	21
5	Tipos de Sistemas de Controle quanto à Realimentação	22
6	Sistema de Malha Fechada	23
7	Plano da Frequência Complexa	24
8	Estabilidade Assintótica de acordo com a posição das raízes características	25
9	Tipos de Sinais de Entrada	26
10	Índices de Desempenho	26
11	Diagrama de Blocos Genérico de um Sistema em Malha Fechada	27
12	Diagrama de Blocos do Espaço com as Variáveis de Estados	29
13	Diagrama de Blocos para Observador de Estado	30
14	Diagrama de Blocos sem Observador de Estado	31
15	Diagramas Físico e Esquemático do Sistema a ser controlado	36
16	Diagrama de Blocos Clássico para o Sistema	37
17	Diagrama Esquemático do atuador conectado à superfície de controle	38
18	Resposta ao Degrau para a Planta do Sistema	42
19	Resposta ao Degrau do Sistema Controlado	46
20	Curvas de Respostas do Sistema Controlado no Intervalo de Incertezas	48
21	Curvas de Respostas para demais Variáveis do Sistema via LMIs	49
22	Curvas de Respostas para demais Variáveis do Sistema via LQR	50

Lista de Tabelas

1	Parâmetros do Modelo	39
2	Parâmetros para o método de LMIs	40
3	Parâmetros para o método de LQR	40
4	Parâmetros de Desempenho	41
5	Matriz de Controlabilidade do Sistema	43
6	Matriz de Observabilidade do Sistema	43
7	Matrizes de Ganho K	44
8	Autovalores do sistema usando LMIs	44
9	Autovalores do sistema usando LQR	44
10	Desempenho do Controle via LMI	47
11	Desempenho do Controle via LQR	47

Sumário

Lista de Figuras	9
Lista de Tabelas	10
Sumário	11
1 Introdução	13
1.1 Considerações Iniciais	13
1.2 Objetivos	15
1.2.1 Geral	15
1.2.2 Específicos	16
1.3 Justificativa	16
1.4 Estrutura do Trabalho	17
2 Fundamentação Teórica	18
2.1 Superfícies de Controle	18
2.2 Sistemas de Controle	20
2.2.1 Definição e Terminologia	20
2.2.2 Sistemas de Controle Clássicos	20
2.2.3 Modelo Físico e Matemático	21
2.2.4 Estabilidade e Resposta Dinâmica dos Sistemas	23
2.2.5 Compensadores	26
2.3 Controle Moderno	27
2.3.1 Controlabilidade e Observabilidade	29
2.3.2 Sistema de Controle Ótimo	31
2.3.3 Sistema de Controle Robusto	32
3 Metodologia	36
3.1 Estratégia de Controle	36
3.2 Procedimento Experimental	37
3.2.1 Identificação do Modelo Matemático	37
3.2.2 Identificação das Variáveis Incertas	39
3.2.3 Obtenção da Matriz de Ganho K	39
3.2.4 Realimentação de Estados	40
3.3 Materiais Utilizados	40
3.4 Análise dos Dados	41
4 Resultados e Discussões	42
4.1 Resposta ao Degrau da Planta do Sistema	42
4.2 Matriz de Ganho K	43
4.3 Desempenho dos Modelos e Comparação	45
5 Conclusão	51

1 Introdução

1.1 Considerações Iniciais

Segundo dados fornecidos pela Associação das Indústrias Aeroespaciais (AIA), o setor aeroespacial global apresentou uma movimentação financeira aproximada de U\$1,3 trilhão ao longo dos anos de 2019 e 2020. Esse valor representa um aumento de 70% em relação aos números registrados em 2010 (SHEETZ, 2020).

O mercado aeroespacial e de defesa está experimentando um notável crescimento impulsionado por fatores como uma indústria de aviação comercial robusta, gastos estáveis em defesa e a necessidade de serviços ao longo do ciclo de vida de plataformas. O *Boeing Market Outlook* (BMO) prevê que o mercado atingirá U\$10,7 trilhões na próxima década, com U\$3,1 trilhões destinados a aeronaves comerciais até 2028 e U\$3,1 trilhões em defesa e espaço. O suporte contínuo às plataformas, combinado com avanços tecnológicos, contribuirá para um mercado de serviços estimado em U\$7 trilhões até 2032 (BOEING, 2023). O setor espacial, em particular, teve transações na ordem de 469 bilhões em 2021, projetando-se uma redução dos custos de lançamento com o avanço tecnológico e a popularização de programas espaciais (TEAM, 2023).

Apesar das objeções de setores na sociedade americana - por exemplo, contra o gasto em exploração espacial, o programa espacial, de maneira direta ou indireta, demonstrou relevância para a sociedade. Um exemplo disso são os satélites meteorológicos e de comunicação, conforme mencionado por WHITE (1998) em sua obra *The Overview Effect of Space Exploration and Human Evolution*.

Hoje, o mundo está imerso em uma nova corrida espacial, caracterizada por três tendências profundamente entrelaçadas: democratização, comercialização e militarização. A primeira tendência, democratização, implica que as atividades espaciais estão se expandindo para um número crescente de estados e atores não estatais, diferenciando esta era espacial de uma época em que dois poderes - os Estados Unidos e a União Soviética - eram dominantes (MCDOUGALL, 1985). No entanto, a democratização não significa que os estados em si sejam deslocados. No futuro previsível, os estados continuarão a desempenhar um papel central na saga espacial internacional, muitas vezes como apoiadores e consumidores de tecnologias e produtos espaciais, principais arquitetos de estratégias e políticas, e criadores de estruturas de governança (PEKKANEN, 2019).

A nova era das atividades espaciais, ou *New Space*, é marcada pelo setor privado assumindo o protagonismo que outrora era conferido aos programas espaciais governamentais (PEDOSAUT, 2021). Empresas do setor, como Orbital ATK e SpaceX, estão trabalhando para diminuir os custos de lançamento ao modularizar veículos, modernizar fluxos de trabalho de *design* e fabricação, e integrar verticalmente seus processos de manufatura. Esses avanços tornaram o espaço mais acessível do que nunca, com *startups* buscando preencher nichos específicos e desenvolver serviços de lançamento mais acessíveis, representando uma mudança significativa na acessibilidade econômica ao espaço (BAIOCCHI; WELSER, 2015).

Em 2020, a *SpaceX*, atualmente a empresa espacial mais valiosa do mundo, conquistou um marco ao se tornar a primeira empresa privada a realizar uma missão tripulada para a Estação Espacial Internacional (ISS), marcando uma nova era nos voos espaciais comerciais (ELDRIDGE, 2023). Guiada pelo lema "Fazendo a humanidade multiplanetária", a *SpaceX* atribui seu sucesso a inovadores projetos de engenharia que possibilitaram a reutilização de

seus veículos de lançamento, resultando em uma economia significativa de até 30% nos custos de lançamento (SPACEEX, 2022; AXESS, 2019). A abordagem disruptiva da *SpaceX* em relação ao descarte convencional de veículos após o lançamento tem desempenhado um papel crucial em seu êxito no setor espacial (AXESS, 2019).

O foco desses esforços e tecnologias na nova fase da corrida espacial é a redução de custos associados a operações de lançamento, fabricação de dispositivos e atividades em órbita. Assim como empresas notáveis, como a *SpaceX*, que revolucionaram o mercado espacial atual, as novas contribuições devem seguir abordagens disruptivas para viabilizar a competitividade no mercado restrito, favorecendo a redução de custos (NISHIKAWA et al., 1984).

Este trabalho visa contribuir para a democratização do espaço apresentando um modelo computacional avançado para o sistema de controle destinado à recuperação de veículos lançadores, também conhecidos como foguetes de sondagem. A metodologia proposta incorpora o uso de paraquedas, uma técnica amplamente empregada na recuperação de dispositivos aeroespaciais. Diversos estudos foram conduzidos para avaliar o desempenho desses paraquedas sob diferentes perspectivas. Destacam-se, entre essas pesquisas, aquelas que visam implementar sistemas de controle automáticos para os paraquedas, permitindo um controle ativo da direção durante a recuperação. Nesse contexto, merecem destaque os trabalhos realizados por SLEGGERS; COSTELLO (2003), WATANABE; OCHI (2008), GÖKTOĞAN (2012), CARTER et al. (2005) e SILVA (2023).

O estudo realizado por SLEGGERS; COSTELLO (2003) aborda o controle de um sistema de paraquedas com carga útil, propondo dois modelos para o controle lateral: *roll steering* e *skid steering*. Os resultados destacam a influência significativa de fatores como ângulo de incidência, curvatura do *canopy* e deflexão das superfícies de controle no projeto de um paraquedas controlável. Trabalhos subsequentes dos mesmos autores expandem o controle não apenas lateral, mas também longitudinal, por meio dos ângulos de incidência do perfil aerodinâmico (SLEGGERS; BEYER; COSTELLO, 2008).

O estudo de WATANABE; OCHI (2008) concentra-se na modelagem e simulação da dinâmica não linear de um *Powered Paraglider* (PPG). O modelo proposto atribui 6 graus de liberdade para o movimento do *canopy* e 2 graus para a carga útil associada ao motor. Essa representação simplificada facilita a formulação de vetores de estado para simular a resposta ao longo do tempo, considerando a presença ou ausência do impulso gerado pelo motor. Os resultados obtidos foram validados por meio de comparações com experimentos de voo, atestando a eficácia do modelo para sistemas de paraquedas que incorporam impulso.

O trabalho conduzido por GÖKTOĞAN (2012) apresentou um sistema destinado à orientação, controle e navegação de um *paramotor*. A pesquisa englobou a obtenção do modelo matemático para a planta e o atuador, a identificação dos parâmetros do modelo matemático e o projeto de sistemas de controle lateral e de altitude. Os resultados indicaram que os modelos lateral e de altitude são independentes. Além disso, os autores observaram que a aplicação alcança melhor desempenho por meio de uma lógica de orientação antecipada.

O pesquisador CARTER et al. (2005) desenvolveu um *software* autônomo focado em Guiagem, Navegação e Controle (GN&C). Esse *software* é projetado para possibilitar a entrega precisa de carga útil usando grandes paraquedas. O modelo dinâmico utilizado foi derivado de um *framework* originado em pesquisas sobre o *Precision Guided Airdrop System* (PGAS) e no programa NASA X-38. O estudo envolve uma investigação inicial da resposta do sistema a movimentos laterais específicos, visando aprimorar a função de transferência que descreve a dinâmica de resposta do sistema. Com base nessas análises, o autor implementa controladores PID para mitigar os efeitos de distúrbios no sistema.

No trabalho de SILVA (2023), são propostos métodos de sintonia automática para controladores PID aplicados ao controle lateral de um paraquedas, utilizando ferramentas computacionais. A abordagem adotada demonstra resultados promissores, especialmente diante de uma modelagem dinâmica que resultou em um sistema de ordem elevada, inviabilizando a aplicação de métodos analíticos de sintonia.

Os estudos conduzidos por SLEGGERS; COSTELLO (2003) e WATANABE; OCHI (2008) estão limitados à validação de modelos analíticos, sem aplicação direta no projeto de sistemas de controle. No caso de GÖKTOĞAN (2012), embora tenha desenvolvido um sistema de controle, não abordou de maneira abrangente o projeto do compensador, incluindo seus métodos de sintonia, que são essenciais para alcançar índices de desempenho satisfatórios para a resposta do sistema a um sinal de referência. Por sua vez, CARTER et al. (2005) e SILVA (2023) empregam técnicas que não consideram adequadamente as incertezas inerentes à modelagem e aos parâmetros do sistema.

Com base em um modelo matemático predefinido para a dinâmica de um paraquedas, esta pesquisa investiga técnicas avançadas da teoria de controle aplicadas à regulação do referido modelo, com o intuito de contemplar as incertezas, tanto estruturadas quanto não estruturadas, inerentes ao sistema. A metodologia empregada envolve o controle por realimentação de estados, utilizando técnicas de controle robusto, por meio do emprego de desigualdades matriciais lineares (em inglês, LMIs - *Linear Matrix Inequalities*), e controle ótimo, através da aplicação do *Linear Quadratic Regulator* (LQR), para obter a matriz de ganho K . Não se estabelecem requisitos de desempenho no início do projeto, uma vez que este visa a validação das técnicas para estabilização do sistema. Entretanto, são realizadas discussões acerca do desempenho relativo de cada técnica, considerando as características físicas viáveis do sistema em questão.

Os resultados deste projeto não apenas possuem relevância para aplicações no setor espacial, mas também apresentam potencial aplicabilidade em diversas áreas, como na indústria aeronáutica, paraquedismo, logística, entre outros domínios.

1.2 Objetivos

Este trabalho visa projetar um sistema de controle para facilitar a recuperação de foguetes de sondagem, de forma a reduzir a distância da zona de impacto em relação à posição de interesse. Adicionalmente, pretende-se abordar as incertezas paramétricas e de modelagem inerentes ao sistema, visando minimizar os erros associados à planta do sistema.

1.2.1 Geral

Desenvolver um sistema de controle para estabilizar a resposta de uma planta referente à dinâmica de um paraquedas sujeita a incertezas.

1.2.2 Específicos

1. Estabilizar o sistema utilizando conceitos de controle moderno por meio de realimentação de estados;
2. Incorporar, pelo menos, um parâmetro como variável incerta no sistema;
3. Aplicar técnicas de controle robusto utilizando Desigualdades Matriciais;
4. Utilizar técnicas de controle ótimo por meio de Reguladores Quadráticos Lineares.
5. Avaliar a viabilidade do comportamento das variáveis de estado;
6. Comparar as respostas do sistema empregando ambas as abordagens.

1.3 Justificativa

A recuperação bem-sucedida de foguetes de sondagem e dispositivos aeroespaciais desempenha um papel estratégico significativo, visando otimizar os recursos financeiros e materiais envolvidos em missões espaciais. Historicamente, cada lançamento implicava na condenação e no projeto de dispositivos para operações únicas e de curto prazo. Contudo, neste século, a reutilização emergiu como uma estratégia para redução de custos, podendo alcançar até 30% da despesa tradicional a curto prazo. A capacidade de recuperar esses equipamentos não apenas viabiliza a reutilização, promovendo eficiência econômica, mas também assegura destinos apropriados, evitando, por exemplo, a descarga no oceano.

Nesse contexto, a pesquisa e desenvolvimento de dispositivos avançados para facilitar a recuperação desses artefatos torna-se um foco relevante para as principais empresas de tecnologia aeroespacial. A incorporação de paraquedas como componente essencial desse sistema exige uma análise cuidadosa das variáveis envolvidas, considerando as complexidades de modelagem e incertezas paramétricas possíveis às operações espaciais.

Considerando as leis de controle que regem a dinâmica de um paraquedas, múltiplas variáveis estão intrinsecamente envolvidas no sistema, configurando-o como um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO). Nesse cenário, a aplicação de abordagens modernas de controle, por meio da realimentação de estado, empregando técnicas robustas e ótimas capazes de lidar com as complexidades do processo de recuperação, se apresentam como uma estratégia tecnológica viável para atingir os objetivos estabelecidos.

Para implementar essa estratégia por meio da realimentação de estados é imperativo obter uma matriz de ganho que possibilite a estabilização da planta do sistema. Portanto, considerar técnicas para a obtenção dessa matriz é de extrema importância. Alternativamente, visando incorporar as incertezas paramétricas inerentes ao sistema, abordagens robustas, por meio de desigualdades matriciais (LMIs), e ótimas, utilizando reguladores lineares quadráticos (LQR), surgem como alternativas viáveis.

1.4 Estrutura do Trabalho

A Seção 2 aborda a fundamentação teórica deste projeto, apresentando os principais conceitos relevantes para a aplicação da metodologia adotada.

Na Seção 3, são detalhadas as etapas da metodologia adotada. Cada fase do desenvolvimento do controlador é explanada, juntamente com as considerações necessárias para permitir a replicação do processo.

A Seção 4 oferece uma apresentação dos resultados obtidos, bem como uma discussão dos mesmos.

Finalmente, a Seção 5 contém as conclusões do trabalho, destacando a aplicabilidade dessas conclusões e propondo direções para trabalhos futuros.

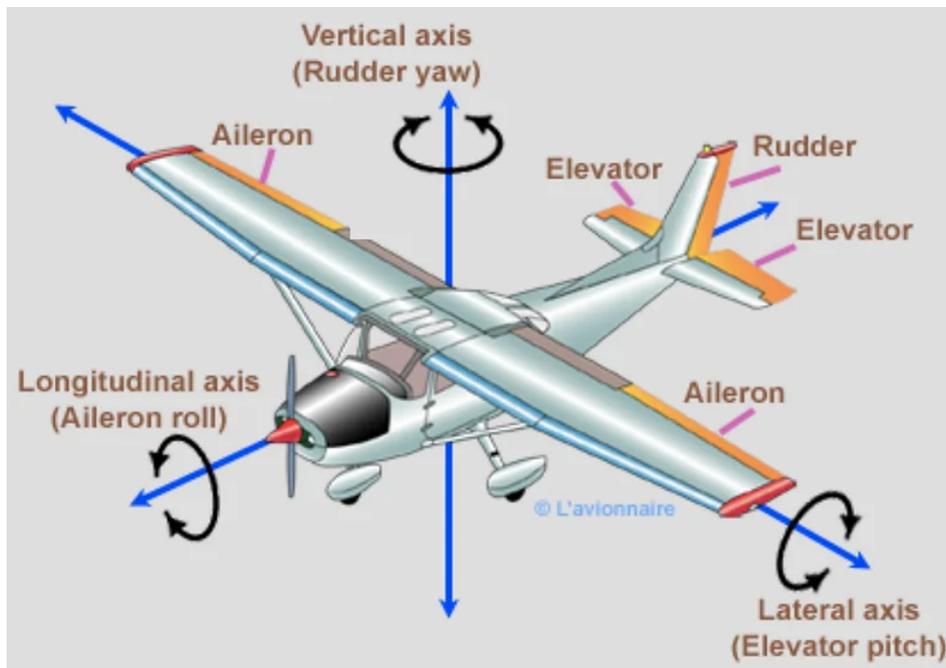
2 Fundamentação Teórica

Este capítulo visa proporcionar aos leitores uma visão abrangente dos conceitos fundamentais para a apreciação do presente trabalho. A abordagem teórica adotada será apresentada, destacando-se, no contexto da dinâmica de controle, os conceitos cruciais de controle por realimentação de estados, controle robusto e ótimo. Estes desempenham papéis fundamentais na compreensão e implementação eficaz das estratégias de controle abordadas no projeto. Além disso, serão abordados os princípios físicos subjacentes às leis de controle, destacando as leis de Newton-Euler do movimento, essenciais para a modelagem matemática do sistema em questão.

2.1 Superfícies de Controle

A maioria dos veículos aeroespaciais são compostos por mais de um corpo. A aeronave apresentada na Figura 1, por exemplo, além da sua fuselagem, possui propulsores, compressores e turbinas. Além disso, possui outras partes móveis que são determinantes para a manobrabilidade da aeronave denominadas superfícies de controle (ZIPFEL, 2009). Em aeronaves, por exemplo, pode-se citar o *elevator*, *aileron* e *rudder*. Essas superfícies são capazes de gerar forças e momentos de controle pela pequena variação na sua deflexão δ em relação a sua posição estacionária, visto que essas forças obedecem uma relação linear com as superfícies de controle (TEWARI, 2011).

Figura 1: Superfícies de Controle de uma Aeronave



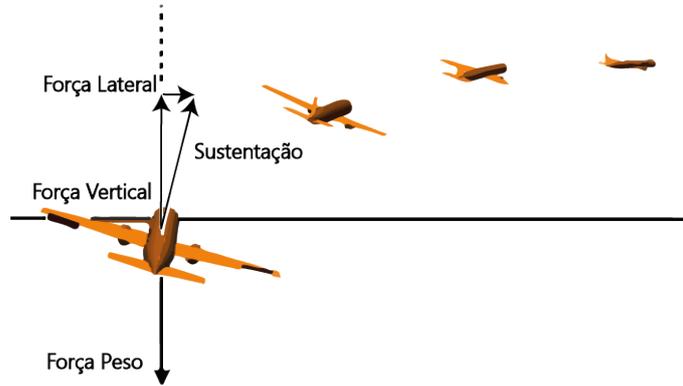
Fonte: (RAWAT, 2023)

Essas superfícies quando defletidas contribuem para a variação na magnitude de forças e momentos. Conforme mostrado na Figura 1, *elevators* são essenciais para controlar a força de sustentação, influenciando o movimento de arfagem. *Rudders* contribuem para o movimento

de guinada, equanto que os *ailerons* favorecem o controle do coeficiente de momento de rolagem, fundamental para a realização de movimento curvilíneos em aeronaves (ZIPFEL, 2009; TEWARI, 2011). Para induzir um momento aerodinâmico desejado associado à rolagem da superfície aerodinâmica, os *ailerons* são inclinados em direções opostas, resultando em uma deflexão assimétrica δ_a entre suas posições angulares.

A rolagem torna possível um fundamental movimento na aviação denominado *banking turn* que é demonstrado na Figura 2.

Figura 2: Movimento de *Banking Turn*



Fonte: Adaptado de (BENSOON, 2023).

O movimento de rolagem resulta em uma força lateral devido à permanência da força de sustentação normal à superfície do veículo. À medida que o veículo avança com a presença dessa força, o mesmo realiza uma trajetória circular, pois essa força lateral atua como a força centrípeta no movimento circular. Em síntese, um movimento de rolagem resulta em um movimento de guinada (BENSOON, 2023). É possível perceber que esse mesmo movimento se aplica aos *gliding parachutes* em que se torna possível o controle de trajetória.

A partir desse princípio associado às leis de Newton-Euler do Movimento, pode ser formulada leis de controle que descrevem o movimento de um paraquedas. Conforme modelagem matemática feita por GÖKTOĞAN (2012), a relação que descreve o movimento de um paraquedas, com perfil aerodinâmico, em queda livre composto por duas superfícies de controle é expressa na Equação 1.

$$I \frac{d\omega^{BG}}{dt} + \Omega^{BG} I \omega^{BG} = M_B^A + M_\delta^A \quad (1)$$

Onde o termo I denota o momento de inércia do corpo, caracterizando como a massa é distribuída em torno do eixo de rotação. O vetor ω^{BG} representa a velocidade angular do corpo em relação ao referencial geográfico G , indicando a taxa de variação angular. A matriz Ω^{BG} descreve a velocidade angular expressa no referencial B , que corresponde ao centro de massa do sistema, oferecendo informações sobre a orientação do corpo em relação a esse referencial. Os termos M_B^A e M_δ^A correspondem aos momentos resultantes aerodinâmicos e das forças aerodinâmicas sobre os ângulos das superfícies de controle δ , respectivamente, ambos expressos no referencial B . Informações mais detalhadas sobre a dinâmica do sistema podem ser encontradas em obras específicas sobre o tema, como as contribuições de GÖKTOĞAN (2012) e ZIPFEL (2009). Esses autores fornecem análises aprofundadas e abrangentes sobre a modelagem e a dinâmica associada aos sistemas de paraquedas e foguetes de sondagem, oferecendo uma base sólida para compreensão dos conceitos discutidos neste trabalho.

2.2 Sistemas de Controle

Esta seção aborda os principais conceitos que envolvem as teorias de controle a serem empregadas neste trabalho.

2.2.1 Definição e Terminologia

Um sistema de controle é o conjunto de componentes interconectados cuja configuração resulta em uma saída desejada para um estímulo de entrada (DORF; BISHOP, 2009). Exemplos de sistemas são circuitos elétricos, dispositivos mecânicos, motores, geradores, etc. O comportamento desses dispositivos é influenciado por ações externas as quais são denominadas entradas do sistema (MAYA; LEONARDI, 2014). As saídas do sistema são denominadas variáveis controladas enquanto que as entradas são conhecidas como variáveis manipuladas (OGATA, 2011). O processo descrito é representado por blocos e apresentado na Figura 3. A relação de entrada-saída apresentada na Figura 3 representa uma relação de causa e efeito de um processo, isto é, um sinal de entrada que é tratado para fornecer um sinal de saída variável (DORF; BISHOP, 2009).

Figura 3: Processo em um Sistema de Controle



Fonte: (DORF; BISHOP, 2009)

A Figura 4 apresenta dois tipos de sistema de controle associados aos seus modelos em blocos. Alguns termos são necessários para caracterizar o comportamento dos componentes internos e externos ao sistema. Além do processo, que já foi definido, é possível identificar a planta e os distúrbios. A planta pode ser entendida como um equipamento ou conjunto de componentes que funcione de forma integrada com o objetivo de realizar determinada operação. Muitos autores consideram planta como a operação a ser controlada sendo, indistinta, ao termo processo. Na Figura 4-a, por exemplo, a planta é o motor. Os distúrbios são sinais que afetam o comportamento da variável de saída de maneira adversa. Um distúrbio ao modelo da 4-b, por exemplo, é a abertura da tampa do forno que favorece as trocas de calor com o ambiente (DORF; BISHOP, 2009).

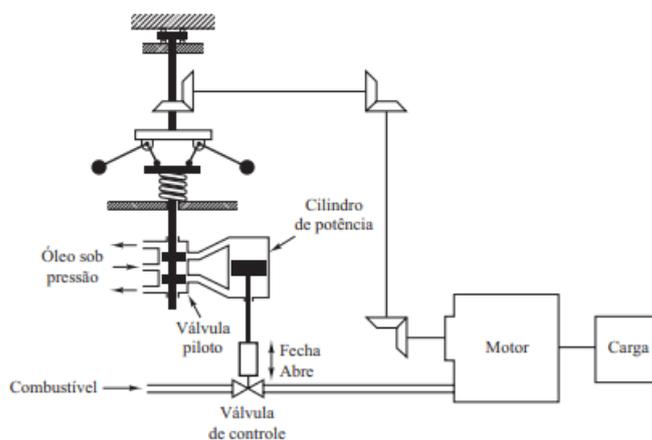
As próximas sub-seções se dedicam à discussão de termos e procedimentos técnicos para a construção de um sistema de controle otimizado.

2.2.2 Sistemas de Controle Clássicos

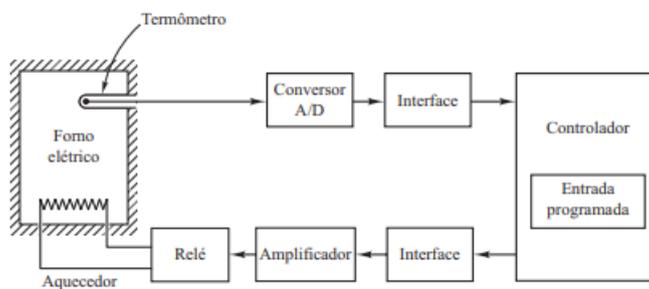
Na abordagem de controle clássico, os sistemas de controle podem ser categorizados quanto à influência do seu sinal de saída na ação de controle no sistema (DORF; BISHOP, 2009). Nos modelos em malha aberta não há quaisquer interferência da saída do sistema no sinal de

Figura 4: Exemplos de Sistemas de Controle

(a) Sistema de Controle de Velocidade



(b) Sistema de Controle de Temperatura



Fonte: (OGATA, 2011)

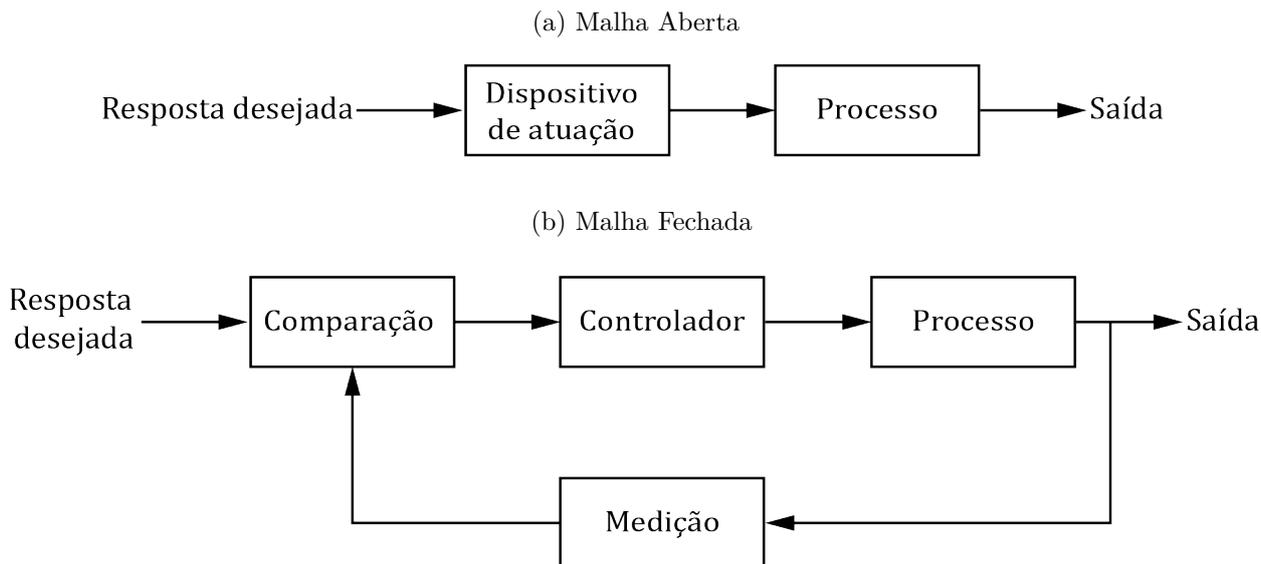
controle. Nesses casos, o comportamento da variável controlada é configurado em função do tempo ou das variáveis de entrada (MAYA; LEONARDI, 2014). Nos sistemas de controle de malha fechada o erro atuante é a diferença entre o sinal de entrada e uma função do sinal de saída (OGATA, 2011). Ambos os modelos podem ser representados por meio de diagramas de bloco conforme apresentado na Figura 5.

A presença de realimentação classifica os sistemas em reguladores, quando a variável de saída mantém um valor constante, igual ou proporcional ao valor de referência, e rastreadores, quando as variáveis de saída devem acompanhar as variáveis de entrada (MAYA; LEONARDI, 2014).

2.2.3 Modelo Físico e Matemático

O modelo físico, ou descritivo, de um sistema consiste em um modelo ideal que revela apenas os aspectos necessários para o estudo do comportamento que se deseja controlar (MAYA; LEONARDI, 2014). Ao realizar uma análise quantitativa, ou matemática, deve-se levar em consideração as leis físicas que governam os fenômenos que estão envolvidos no processo em questão (OGATA, 2011). É baseado no modelo físico que se estabelece o modelo matemático (MAYA; LEONARDI, 2014).

Figura 5: Tipos de Sistemas de Controle quanto à Realimentação



Fonte: (OGATA, 2011)

As etapas de modelagem possuem dois estágios distintos: o primeiro se refere ao modelo de abstração do mundo real em uma linguagem simplificada, e o segundo configura a formalização matemática das características do modelo (MAYA; LEONARDI, 2014).

O modelo dinâmico dos processos geralmente são descritos através de equações diferenciais ordinárias que podem ser lineares ou não. Usualmente, o mundo real é não-linear, sendo os modelos que descrevem seus fenômenos também não-lineares. Se for possível a linearização do sistema, algumas ferramentas matemáticas podem ser empregadas a fim de se obter a solução que descreve a operação do sistema (DORF; BISHOP, 2009). Dentre essas ferramentas, é possível listar a representação por meio de função de transferência, geralmente aplicada para modelos SISO (*Simple Input Simple Output*), e ainda a representação por meio de espaço de estados, vastamente utilizada para sistemas MIMO (*Multiple Input Multiple Output*) em técnicas de controle moderno como será explorado nas seções subsequentes (OGATA, 2011).

A **Função de Transferência** é definida como a relação entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada com as condições iniciais nulas para um sistema Linear e Invariante no Tempo (LIT) (MAYA; LEONARDI, 2014). O formato da transformada de Laplace pode ser observado na Equação 2.

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}(saída)}{\mathcal{L}(entrada)}$$

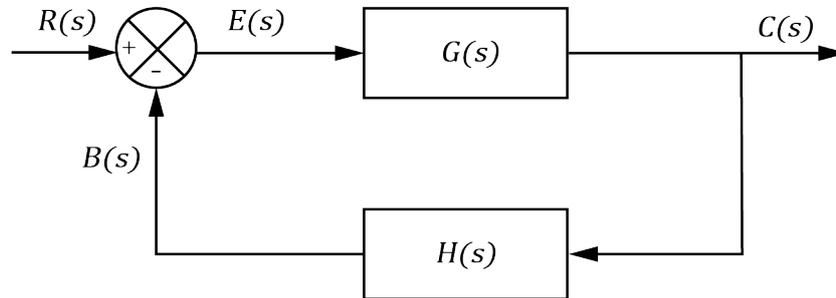
$$= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (2)$$

Onde s corresponde ao domínio de Laplace em que a maior potência de s no denominador, que contém a equação característica do sistema, corresponde à ordem do sistema (OGATA, 2011). A transformada de Laplace, por sua vez, para uma função do tempo é expressa por

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (3)$$

Em vários projetos de engenharia, comumente recorre-se ao uso de tabelas de transformadas de Laplace que fornecem a relação entre as funções e suas transformadas (DORF; BISHOP, 2009). A partir do diagrama de blocos apresentado na Figura 6 é possível estabelecer algumas funções de transferência quanto à realimentação do sistema.

Figura 6: Sistema de Malha Fechada



Fonte: (OGATA, 2011)

A Equação 4 apresenta a função de transferência de malha aberta a partir da relação entre o sinal de realimentação $B(s)$ e o sinal de erro atuante $E(s)$ (OGATA, 2011).

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s) \quad (4)$$

A relação entre saída $C(s)$ e erro atuante $E(s)$ é denominada função de transferência de ramo direto (OGATA, 2011) e pode ser visualizada na Equação 5.

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s) \quad (5)$$

É possível perceber que se a realimentação for unitária, então $B(s) = C(s)$. A função de transferência que relaciona a saída $C(s)$ e a entrada $R(s)$ é denominada função de transferência de malha fechada e é apresentada na Equação 6.

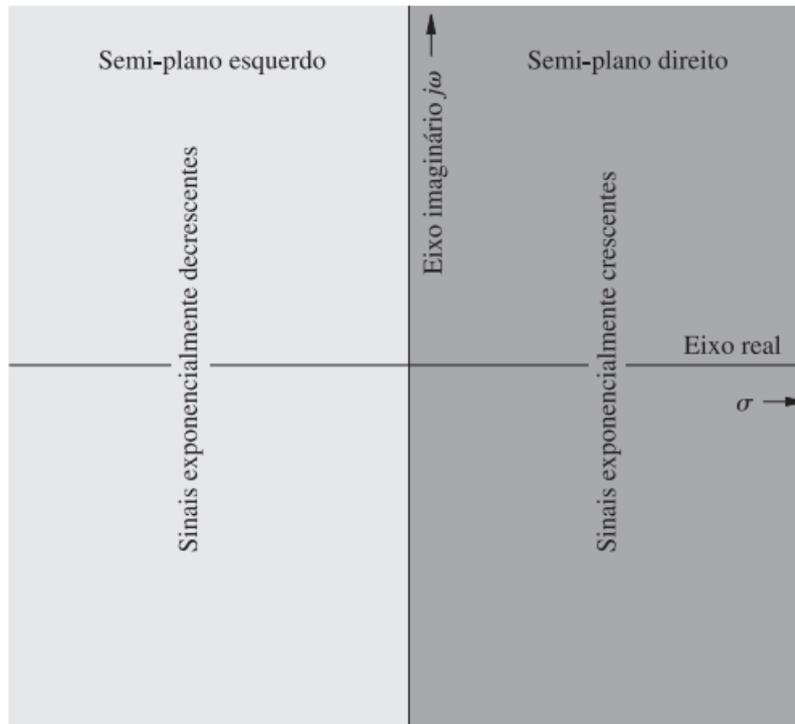
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (6)$$

2.2.4 Estabilidade e Resposta Dinâmica dos Sistemas

Se para uma entrada limitada de um sistema a saída também for limitada, é dito que esse sistema é externamente estável ou BIBO (*Bounded Input Bounded Output*). Se, a uma entrada limitada, o sistema apresentar uma saída ilimitada, o sistema é dito BIBO instável. Uma importante função necessária para descrever a estabilidade de sistemas é o sinal exponencial e^{st} onde s corresponde a um número complexo. Esse número pode ser representado em um plano de frequência complexa (plano s), conforme Figura 7.

Quanto à estabilidade interna (assintótica), um sistema é assintoticamente estável se, e somente se, todas as raízes características estiverem no semiplano esquerdo (SPE) do plano

Figura 7: Plano da Frequência Complexa



Fonte: (LATHI, 2006)

complexo. Caso ao menos uma das raízes se localizar no semiplano direito (SPD) ou existirem raízes repetidas no eixo imaginário, o sistema é instável. O sistema pode ainda ser classificado como marginalmente estável se não existirem raízes repetidas no eixo imaginário (LATHI; GREEN, 2005). A Figura 8 apresenta a localização das raízes características e os seus modos característicos correspondentes.

Um sistema de controle linear e invariante no tempo (LIT) é, portanto, estável, se a saída sempre retorna ao estado de equilíbrio quando o sistema é submetido a uma condição inicial. Alternativamente, é criticamente estável se as oscilações de saída se repetirem de maneira contínua. Por fim, o sistema é instável quando a saída do sistema diverge indefinidamente a partir do estado de equilíbrio em resposta a uma condição inicial. (OGATA, 2011).

A resposta de um sistema linear $y(t)$ é composto pela resposta transitória ($y_{Tr}(t)$) e forçada ($y_F(t)$) associada ao modelo. Nos sistemas estáveis, a resposta natural tende a ser atenuada com o tempo enquanto que a resposta forçada apresenta o padrão do sinal de entrada (MAYA; LEONARDI, 2014). A resposta completa de um sistema, portanto, é descrita conforme Equação 7.

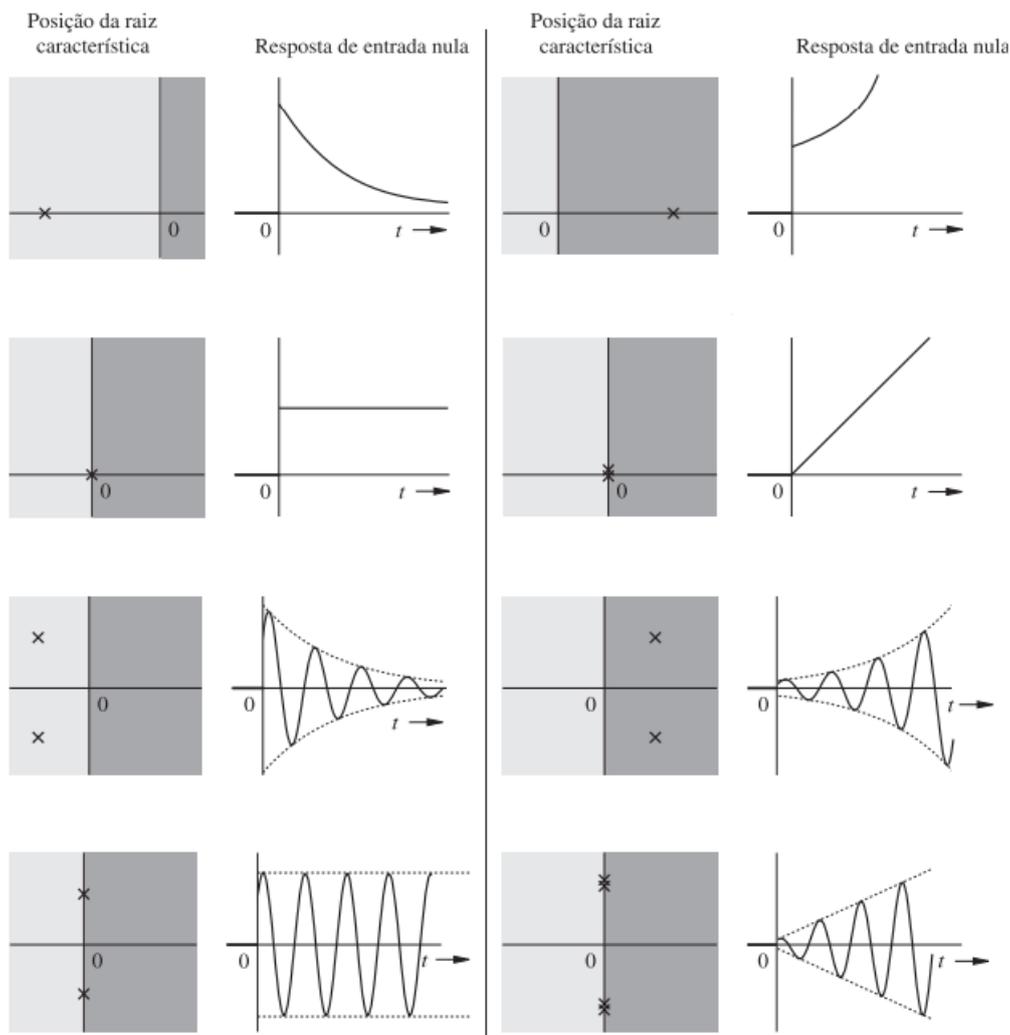
$$y(t) = y_{Tr}(t) + y_F(t) \quad (7)$$

A resposta dinâmica de um sistema está associada à sua componente transitória diante de uma excitação de entrada (MAYA; LEONARDI, 2014). Os sinais de entrada mais comuns são o degrau unitário, a rampa unitária e o impulso unitário e podem ser visualizados na Figura 9.

Antes de atingir o regime permanente, a resposta transitória de um sistema pode apresentar diversas oscilações amortecidas cujas características podem ser especificadas de acordo com:

1. Tempo de atraso (t_a): corresponde ao tempo necessário para que a resposta atinja 50%

Figura 8: Estabilidade Assintótica de acordo com a posição das raízes características



Fonte:(LATHI; GREEN, 2005)

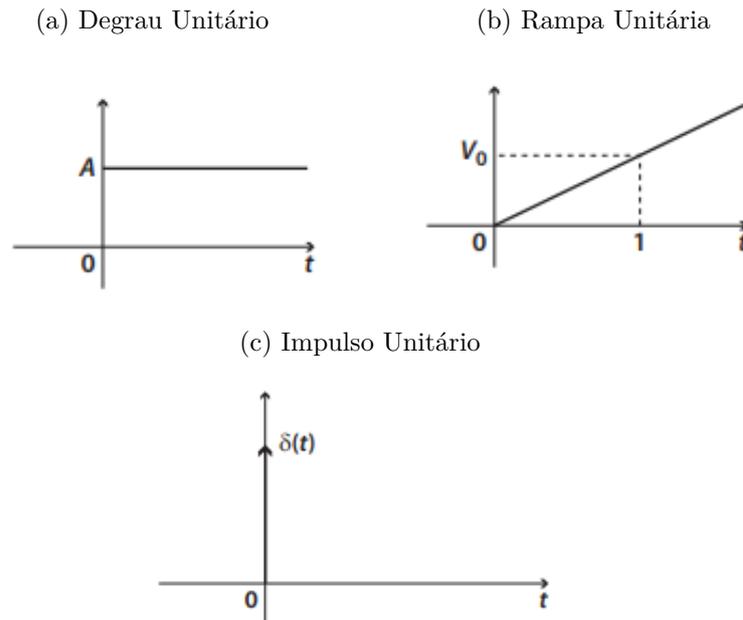
do seu valor final.

2. Tempo de subida (t_r): trata-se do tempo necessário para que a resposta transcorra de 10% a 90%, 5% a 95% ou 0% a 100% do valor final.
3. Tempo de pico (t_p): é o tempo requerido para que se atinja o primeiro pico de sobressinal
4. Máximo sobressinal (M_p): é o valor máximo de pico.
5. Tempo de acomodação (t_s): É o tempo necessário para que a curva de resposta atinja valores de 2% ou 5% em torno do valor final e permanecendo nele. (OGATA, 2011)

Essas características são denominadas índices de desempenho da resposta completa do sistema e pode ser graficamente observada na Figura 10.

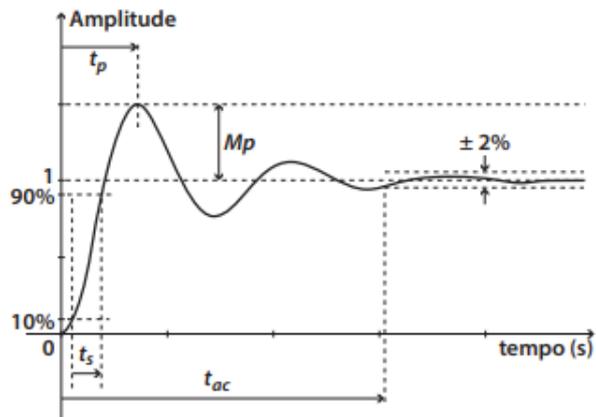
Sistemas que apresentem comportamento instável geralmente não possuem valor prático em projetos de engenharia (DORF; BISHOP, 2009). Uma forma para determinação da estabilidade de um sistema consiste na análise do polinômio característico, conhecido como polinômio de Hurwitz, através do método de Routh-Hurwitz (MAYA; LEONARDI, 2014).

Figura 9: Tipos de Sinais de Entrada



Fonte: (MAYA; LEONARDI, 2014)

Figura 10: Índices de Desempenho



Fonte: (MAYA; LEONARDI, 2014)

2.2.5 Compensadores

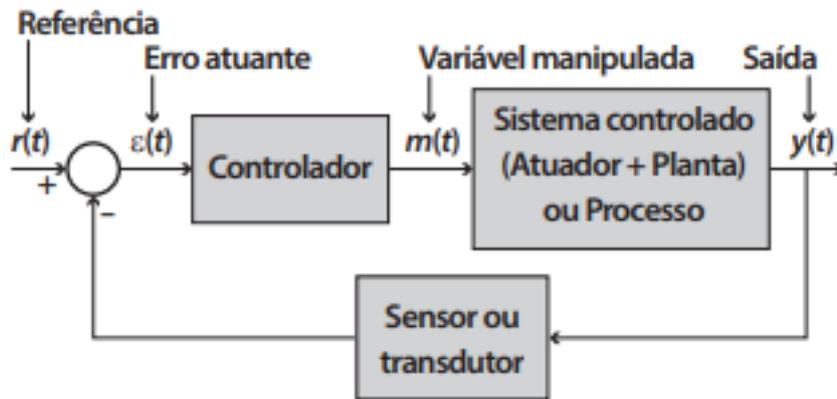
Em um sistema de controle, frequentemente são empregados subsistemas que contribuem para a estabilidade do processo de acordo com os parâmetros desejados. Esses subsistemas são conhecidos como compensadores (ou controladores) e não são intrínsecos às características do sistema (MAYA; LEONARDI, 2014). Dentre os principais tipos de controladores empregados em projetos de engenharia estão os controladores ativos de três termos ou controladores Proporcional, Integral e Derivativo (PID), cuja função de Transferência é

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (8)$$

Onde K_p se refere ao termo proporcional, K_I ao termo integral e K_D ao diferencial. Se o termo derivativo for igual a 0, obtém-se um controlador proporcional integrativo (PI). Da mesma forma, ao anular o termo integrativo obtém-se um controlador proporcional derivativo (PD) (DORF; BISHOP, 2009).

A Figura 11 apresenta um sistema em diagrama de blocos com a presença de um controlador.

Figura 11: Diagrama de Blocos Genérico de um Sistema em Malha Fechada



Fonte: (MAYA; LEONARDI, 2014)

Os controladores devem, primariamente, serem capazes de estabilizar o sistema. Além disso, devem garantir os melhores desempenhos para regime transitório e permanente de acordo com as especificações de projeto apresentadas na Subseção 2.2.4 (MAYA; LEONARDI, 2014). Quando a sintonia de controladores não for possível por métodos diretos, deve-se recorrer a alguns métodos experimentais. Dentre esses métodos, é possível citar os métodos de Ziegler-Nichols de curva de reação e resposta em frequência onde, experimentalmente, a resposta do sistema fornece parâmetros a serem substituídos em uma tabela para gerar os respectivos valores das componentes derivativas, integrativas e proporcionais do controlador (OGATA, 2011).

Esses métodos são caracterizados pela obtenção de dados a partir de uma série de procedimentos experimentais para alcançar resultados qualitativos aproximados (LABORATORIES, 2023). Para alguns sistemas complexos, não é possível aplicar os passos apresentados nos métodos de Ziegler-Nichols. Como alternativa, é possível empregar métodos avançados de controle conforme será discutido na seção subsequente.

2.3 Controle Moderno

Segundo OGATA (2010), a teoria de controle moderno difere da teoria de controle clássico ao ser aplicável a sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas, os quais podem apresentar características lineares ou não lineares, invariantes ou variantes no tempo. Em contrapartida, a teoria de controle clássico restringe-se a sistemas lineares, invariáveis no tempo, com uma única entrada e uma única saída. Adicionalmente, a teoria de controle moderno fundamenta-se primariamente em abordagens no domínio do tempo e no domínio da frequência (especialmente em casos como o controle H-infinito), enquanto a teoria de controle clássico é predominantemente uma abordagem complexa no domínio da frequência (OGATA, 2010). Além disso, os métodos de projeto em controle clássico são frequentemente gráficos, como o lugar geométrico

das raízes, os diagramas de Bode e Nyquist, entre outros, enquanto que os métodos de projeto do controle moderno são geralmente analíticos e demandam conhecimentos matemáticos avançados (PARASKEVOPOULOS, 2017).

Nos sistemas de controle moderno, a análise e o projeto são direcionados para sistemas dinâmicos cujas características podem variar ao longo do tempo. Nesse contexto, torna-se essencial ter uma forma de descrever um sistema em termos temporais. Conforme destacado por DORF; BISHOP (2008), a representação em domínio do tempo é um espaço matemático que engloba a resposta e a descrição de um sistema em relação ao tempo. Nessa abordagem, é introduzido o conceito de *Estado* de um sistema, indispensável para a análise no domínio do tempo e projeto de sistemas de controle (DORF; BISHOP, 2008). Para OGATA (2011) O Estado de um sistema dinâmico consiste no conjunto mínimo de variáveis para a descrição completa do sistema, denominadas *variáveis de estado* e são representadas geralmente por $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Estas variáveis, quando conhecidas em $t = t_0$, juntamente com o conhecimento da entrada para $t \geq t_0$, proporcionam a determinação completa do comportamento do sistema para qualquer instante $t \geq t_0$ (OGATA, 2011). Esse fato, associado ao conhecimento das variáveis internas do sistema, confere independência entre as entradas passadas e futuras, facilitando a previsão e o controle do sistema, representando uma grande vantagem em relação a outras estratégias de controle. Se um sistema requer n *variáveis de estado* para descrever totalmente o seu comportamento, essas n variáveis podem ser representadas como os n componentes de um vetor x , chamado de *vetor de estado*. Esse vetor é essencial para determinar exclusivamente o Estado do sistema $x(t)$ para qualquer instante $t = t_0$, desde que o estado em $t = t_0$ seja conhecido e a entrada $u(t)$ para $t = t_0$ seja especificada.

Adicionalmente, o *espaço de estados*, que é um espaço n -dimensional com eixos coordenados formados pelas variáveis de estado $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, representa geometricamente todas as combinações possíveis das variáveis de estado. Isso oferece uma perspectiva visual do comportamento dinâmico do sistema, onde cada estado do sistema pode ser visualizado como um ponto neste espaço (OGATA, 2011).

Os termos acima descritos contribuem para o entendimento das *Equações no espaço de estados*. No contexto da análise no espaço de estados, são considerados três tipos de variáveis presentes na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado. A resposta de um sistema é descrita pelo conjunto de equações diferenciais de primeira ordem escritas em termo das variáveis de estado ($x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$) e suas entradas ($u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$) conforme Equações 9 e 10.

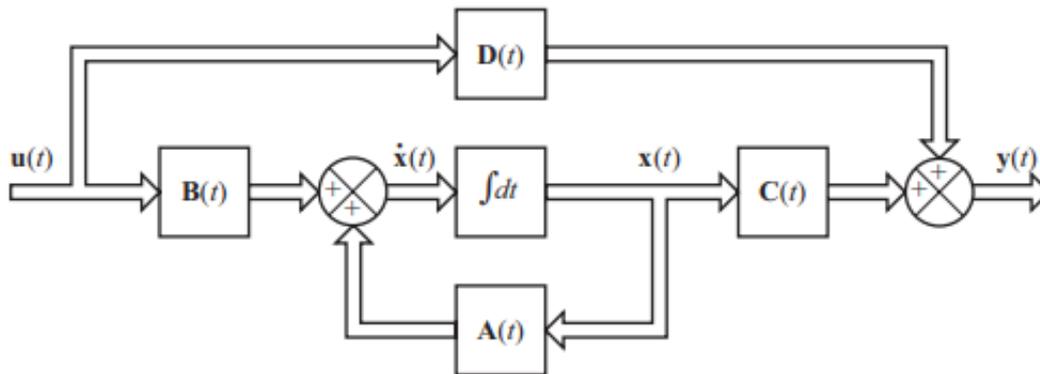
$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \quad (9)$$

Onde x corresponde ao vetor das variáveis de estado, \mathbf{A} à matriz de coeficientes que multiplica o vetor de variáveis de estado, também chamada de matriz de estado, \mathbf{B} à matriz de coeficientes que multiplica o vetor de entrada u , também chamada de matriz de entrada (OGATA, 2011).

$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \quad (10)$$

Onde \mathbf{C} corresponde à matriz de saída e \mathbf{D} a matriz de transmissão direta. A Figura 12 apresenta uma representação em digrama de blocos que pode ser utilizada para se obter a equação de saída de um sistema em espaço de estados com parâmetros variantes no tempo. Essa representação pode ser facilmente abstraída para parâmetros invariantes no tempo (OGATA, 2011).

Figura 12: Diagrama de Blocos do Espaço com as Variáveis de Estados



Fonte: (OGATA, 2011)

2.3.1 Controlabilidade e Observabilidade

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Rudolph Kalman e possuem grande importância teórica e prática no controle moderno. Esses conceitos desempenham um papel crucial na resolução de diversos problemas de controle, como controle ótimo, controle adaptativo, alocação de polos, entre outros (PARASKEVOPOULOS, 2017).

Um sistema é dito totalmente controlável se for possível, por meio de um controle irrestrito $u(t)$, transferir qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outro estado desejado $x(t)$ em um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq T$. De maneira similar, um sistema é completamente observável se, e somente se, existir um tempo finito T tal que o estado inicial $x(0)$ pode ser determinado a partir do histórico de observação $y(t)$ dado o controle $u(t)$, para $0 \leq t \leq T$ (DORF; BISHOP, 2008).

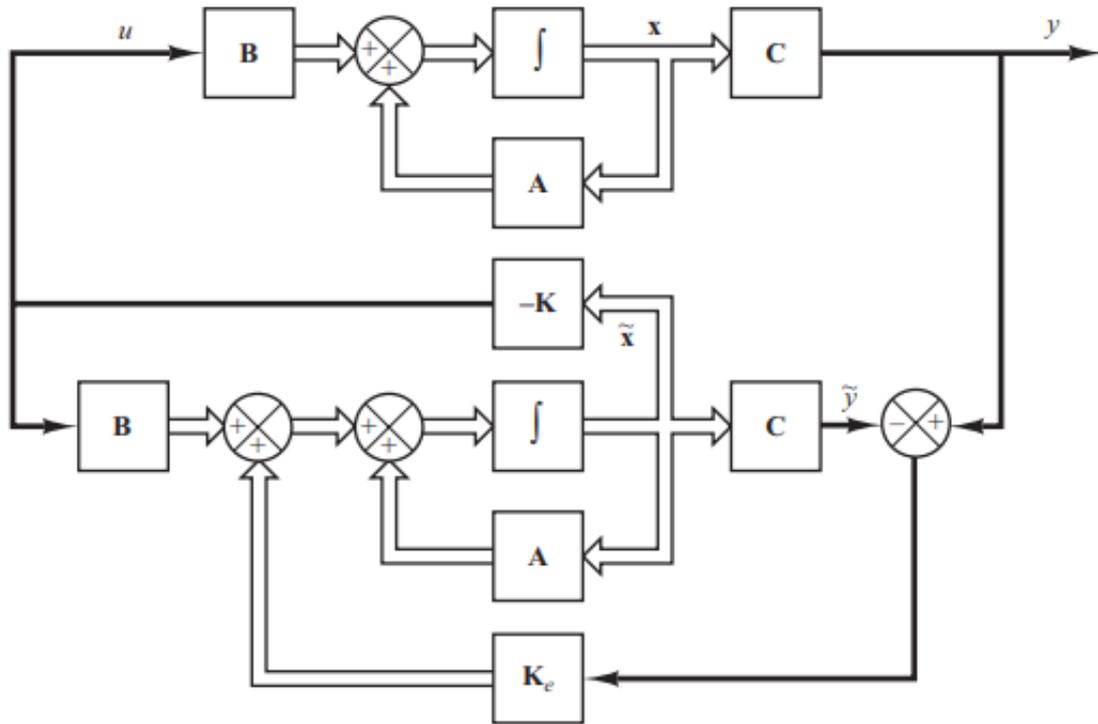
Definida a Matriz de Controlabilidade M_c (Equação 11), o sistema é considerado completamente controlável se o posto da matriz for igual à sua ordem n . Para a Matriz de observabilidade M_o (Equação 12), o sistema é considerado completamente observável se esta matriz possuir posto completo (OGATA, 2011).

$$M_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (11)$$

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Nesse cenário, é comum a implementação de observadores de estado. Trata-se de um recurso necessário para sistemas onde seu estado não é completamente mensurável, exigindo a estimação dos mesmos (OGATA, 2011). A Figura 13 apresenta o digrama de blocos para um sistema de controle realimentado por estado observado.

Figura 13: Diagrama de Blocos para Observador de Estado

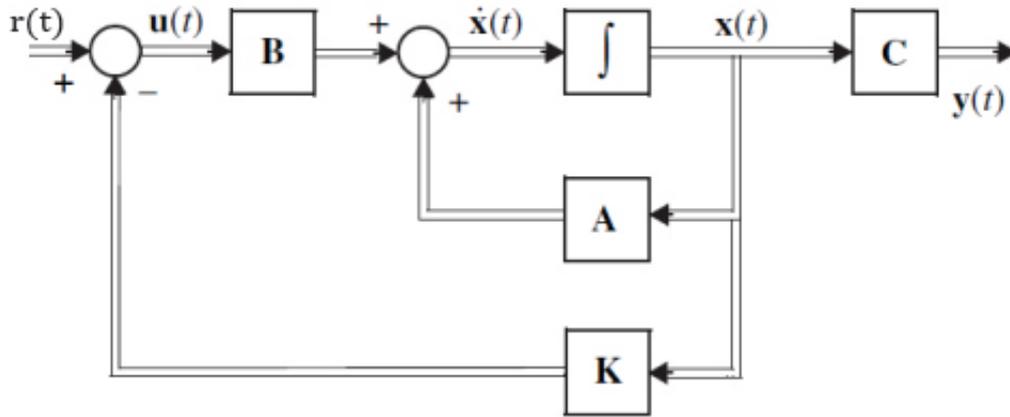


Fonte: (OGATA, 2011)

A equação de estado para o modelo ilustrado na Figura 13 é representada pela Equação 13 onde \tilde{x} corresponde ao valor estimado daquela variável. Em sistemas em que todos os estados podem ser medidos diretamente, o termo de erro $x - \tilde{x}$ torna-se nulo. Nesse cenário, o diagrama de blocos para o sistema assume a forma apresentada na Figura 14. Essa configuração reflete a condição ideal em que todos os estados do sistema são observáveis e mensuráveis, resultando em um sistema sem erro de estimativa.

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK)x + BK(x - \tilde{x}) \quad (13)$$

Figura 14: Diagrama de Blocos sem Observador de Estado



Fonte: (OGATA, 2011)

2.3.2 Sistema de Controle Ótimo

O controle ótimo constitui uma ramificação específica no âmbito do controle moderno, com o propósito de desenvolver projetos analíticos complexos. O sistema resultante de um projeto ótimo não se limita apenas à estabilidade ou à satisfação de restrições desejáveis associadas ao controle clássico. Sua característica distintiva é ser o sistema mais eficiente possível dentro de uma categoria específica, refletindo assim a designação "ótimo" (GEERING, 2007). Em outras palavras, busca estabelecer a melhor estratégia de controle possível que minimiza uma certa função custo (GEERING, 2007). Essa função custo pode ser apresentada através de reguladores quadráticos ótimos sob o formato da Equação 14.

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (14)$$

Onde \mathbf{x} corresponde ao vetor de estados, \mathbf{u} ao vetor de controle, \mathbf{Q} uma matriz semidefinida positiva e \mathbf{R} uma matriz hermitiana definida positiva. Essas matrizes determinam a importância relativa do erro e do consumo de energia dos sinais de controle (OGATA, 2011). De forma a obter a solução para a minimização da função objetivo apresentada na Equação 14, recorre-se à equação de Riccati apresentada abaixo:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = 0 \quad (15)$$

Na Equação 15, a matriz \mathbf{P} é uma matriz simétrica que representa sua solução. É utilizada na Equação 16 para obtenção da matriz de ganho ótima \mathbf{K} (OGATA, 2011).

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (16)$$

De tal forma que a Equação 17, que representa uma lei de controle linear, seja satisfeita.

$$u = -\mathbf{K}x \quad (17)$$

Essa abordagem configura a resolução de problemas de reguladores lineares quadráticos ótimos ou simplesmente LQR (*Linear Quadratic Regulators*).

2.3.3 Sistema de Controle Robusto

No início do projeto de um sistema de controle, é necessário obter um modelo matemático que represente o objeto de controle com base nas leis da física. Esse modelo pode ser inicialmente não linear e complexo, podendo incluir parâmetros distribuídos. Para facilitar a análise, muitas vezes é feita uma aproximação por meio de uma equação linear com coeficientes constantes. Embora essa simplificação seja necessária para o projeto do sistema de controle, é crucial que o modelo mantenha as características essenciais do sistema real. Ao projetar o sistema de controle, é comum que o modelo contenha erros devido à simplificação. A fim de lidar com a presença de erros de modelagem e incertezas, foi desenvolvida a teoria de controle robusto (OGATA, 2011).

Norma H_∞

A Norma H_∞ (ou norma infinito) é um conceito central na teoria de controle robusto e é utilizada para medir a sensibilidade de um sistema dinâmico em relação a perturbações de forma que a magnitude da função de transferência de um sistema é medido por sua Norma H_∞ .

A norma H_∞ de uma matriz de função de transferência $G(s)$ é definida como:

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega \|G(j\omega)\| \quad (18)$$

Onde $G(j\omega)$ é a matriz de função de transferência avaliada em frequência complexa $j\omega$, e \sup_ω representa o valor singular máximo sobre todas as frequências ω (OGATA, 2011).

Norma H_2

O problema de controle H_2 é formulado similarmente ao problema H_∞ , mas em termos da minimização de $\|T_{z\omega}\|_2$, que representa a relação entre a entrada de uma perturbação ω e a saída da variável de interesse z em um sistema dinâmico. A norma H_2 da função de transferência é dada por:

$$\|T_{z\omega}\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int \text{tr}(T_{z\omega}(j\omega))^{1/2} d\omega \quad (19)$$

com $\text{tr}(A)$ sendo o traço de A . Pode-se dar à norma H_2 a seguinte interpretação: seja $\omega(t)$ uma entrada ruído branco com $E\{\omega(t)\omega^*(t)\} = I\delta(t - \tau)$ e o erro dado por $z = T_{z\omega}\omega$ (DOYLE, 1996).

LMIs para obtenção da matriz de ganho

Considerando o sistema $\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t)$, sua estabilidade pode ser analisada utilizando a função de Lyapunov. O sistema é considerado estável, ou seja, os coeficientes da matriz \mathbf{A} são Hurwitz estáveis, se existir uma matriz simétrica definida positiva \mathbf{P} que satisfaça a condição:

$$\mathbf{P} \succ \mathbf{0}, \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} \prec \mathbf{0} \quad (20)$$

Essas condições garantem que a matriz \mathbf{P} possa ser escolhida de tal forma que a forma quadrática associada, dada por $V(x) = x^T \mathbf{P} x$, seja uma função de Lyapunov decrescente ao longo do tempo, indicando a estabilidade do sistema. A desigualdade mencionada acima é comumente conhecida como a desigualdade de Lyapunov e é expressa como uma LMI (Desigualdade Matricial Linear) para a variável de matriz \mathbf{P} a ser determinada (EBIHARA; PEAUCELLE; ARZELIER, 2015). As *Linear Matrix Inequalities* (LMIs) são desigualdades matriciais cuja linearidade se manifesta nas variáveis matriciais, como destacado por Duan em seu trabalho (DUAN; YU, 2013). Essa característica de linearidade torna as LMIs particularmente apropriadas para análise e resolução eficiente de problemas em diversas áreas da matemática aplicada, incluindo teoria de controle e otimização.

Portanto, uma desigualdade matricial linear (LMI) pode ser definida como sendo,

$$F(x) := \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i > \mathbf{0} \quad (21)$$

em que $x := [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \in \mathbb{R}^m$ é um vetor chamado de variáveis de decisão e $\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{F}_m$ são matrizes reais e simétricas ($\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T$). Portanto, LMIs expressam restrições convexas na variável x . De forma geral, um problema de otimização convexo com restrições na forma LMI pode ser colocado na forma

$$\begin{aligned} \min \rho(x) \\ \text{sujeito a } F(x) < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (22)$$

tal que ρ é uma função convexa, F é uma matriz que depende das variáveis de otimização x e $F(x) < \mathbf{0}$ define a matriz como sendo negativa definida. Sendo assim, problemas em sistemas e controle podem ser abordados eficazmente por meio de otimizações restritas a Inequações Matriciais Lineares (LMIs). Embora, em geral, não haja soluções analíticas para esses problemas, existem métodos numéricos eficientes disponíveis para encontrar soluções. É importante destacar que algumas desigualdades convexas não lineares podem ser transformadas em LMIs utilizando o complemento de Schur. O seguinte lema afirma tal equivalência.

Lema 1 (Complemento de Schur). *Sejam as matrizes $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T$, $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T$, tem-se que*

$$\mathbf{Z} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{X} - \mathbf{Y}^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Y} > \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y}^T \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (23)$$

Neste sentido, o sistema acima $\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t)$, pode assumir incertezas em seus parâmetros, adotando o formato apresentado na Equação 24. Nesse contexto, surge o conceito de sistemas politópicos, ou seja, uma representação matemática que incorpora regiões politópicas (GAHINET et al., 1994). Assim, a estabilidade quadrática descrita pela desigualdade 26 é condição suficiente para a estabilidade robusta de um sistema que incorpora incertezas (EBIHARA; PEAUCELLE; ARZELIER, 2015).

Considere o seguinte sistema incerto

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}(\alpha)x \quad (24)$$

tal que $\mathbf{A}(\alpha)$ pertence a um domínio convexo limitado definido por

$$\Psi_N := \left\{ \mathbf{A}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{A}_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}. \quad (25)$$

Logo, de forma imediata, temos que a estabilidade de um sistema incerto $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x}$ pode ser dada por:

$$\mathbf{P} \succ \mathbf{0}, \mathbf{P}\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} \prec \mathbf{0} \quad (26)$$

Agora, considere que um sistema,

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha)x(t) + \mathbf{B}(\alpha)u(t) \quad (27)$$

sendo a lei de controle de realimentação de estados definida por

$$u(t) = -\mathbf{K}x(t), \quad (28)$$

com $\mathbf{A}(\alpha)$ e $\mathbf{B}(\alpha)$ sendo matrizes incertas, mas pertencem a um domínio convexo Θ dado por:

$$\Theta = \left\{ \mathbf{A}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{A}_i, \mathbf{B}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{B}_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}. \quad (29)$$

Aqui também a estabilidade do sistema em malha fechada $\dot{x}(t) = [\mathbf{A}(\alpha) - \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{K}]x(t)$ pode ser investigada por meio de uma função energia $V(x) = x^T \mathbf{P}x$. Para que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável, duas condições devem ser satisfeitas:

- $V(x) > 0, \forall x \neq 0$
- $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$

Portanto, para determinar se $\mathbf{A}(\alpha) - \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{K}$ é estável assintoticamente, basta procurar uma solução $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ e um ganho \mathbf{K} robusto sujeito à

$$[\mathbf{A}(\alpha) - \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{K}]^T \mathbf{P} + \mathbf{P}[\mathbf{A}(\alpha) - \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{K}] < 0 \quad (30)$$

Desenvolvendo, tem-se

$$\mathbf{A}^T(\alpha)\mathbf{P} - \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T(\alpha)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}(\alpha) - \mathbf{P}\mathbf{B}(\alpha)\mathbf{K} < 0 \quad (31)$$

Pré e pós multiplicando por \mathbf{P}^{-1} ,

$$\mathbf{P}^{-1} [\mathbf{A}^T(\alpha)\mathbf{P} - \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T(\alpha)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}(\alpha) - \mathbf{P}\mathbf{B}(\alpha)\mathbf{K}] \mathbf{P}^{-1} < 0 \quad (32)$$

Definindo $\mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1}$,

$$\mathbf{W}\mathbf{A}^T(\alpha) + \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{K}^T\mathbf{B}^T(\alpha) - \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{K}\mathbf{W} < 0 \quad (33)$$

e $\mathbf{Z} = \mathbf{K}\mathbf{W}$,

$$\mathbf{W}\mathbf{A}^T(\alpha) + \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{W} - \mathbf{Z}^T\mathbf{B}^T(\alpha) - \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{Z} < 0 \quad (34)$$

obtem-se a condição de estabilização assintótica. Contudo, pode-se notar que tal condição não estabelece qualquer critério de desempenho, mas somente de estabilidade. Sendo assim, adotando uma taxa de decaimento $\gamma > 0$ para a convergência dos estados, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} \|x(t)\| = 0, \quad (35)$$

ou seja, a derivada da função energia de Lyapunov $\dot{V}(x) < -2\gamma V(x)$ é limitada superiormente. Portanto, a síntese de um controlador robusto por realimentação de estados adotando a taxa de decaimento pode ser definida a partir do seguinte Teorema.

Teorema 1. *Para $\gamma > 0$, existe um ganho \mathbf{K} robusto tal que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável se existirem $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$ e \mathbf{Z} tais que*

$$\mathbf{A}_i\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}_i\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^T\mathbf{B}_i^T + 2\gamma\mathbf{W} < 0 \quad (36)$$

para $i = 1, \dots, N$, com o ganho

$$\mathbf{K} = -\mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1} \quad (37)$$

A prova do teorema pode ser dada multiplicando $\alpha_i \geq 0$ e somando de 1 até N ,

$$\mathbf{W} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{A}_i \right)^T + \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{A}_i \right) \mathbf{W} - \mathbf{Z}^T \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{B}_i \right)^T - \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{B}_i \right) \mathbf{Z} + 2\gamma\mathbf{W} < 0 \quad (38)$$

Logo,

$$\mathbf{W}\mathbf{A}^T(\alpha) + \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{W} - \mathbf{Z}^T\mathbf{B}^T(\alpha) - \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{Z} + 2\gamma\mathbf{W} < 0 \quad (39)$$

Como $\mathbf{Z} = \mathbf{K}\mathbf{W}$ e pré e pós multiplicando $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{P}$, a prova está completa.

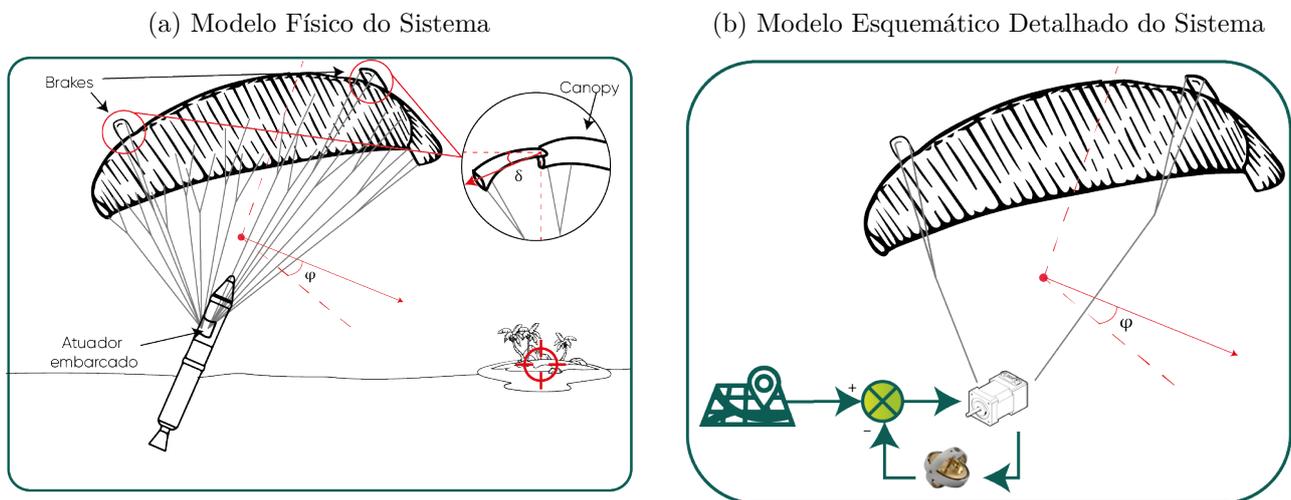
3 Metodologia

Esta seção descreve as etapas do projeto. Inicialmente, serão delineadas as fases do processo de pesquisa, destacando-se a estrutura utilizada para a coleta e análise de dados. Posteriormente, cada etapa do projeto será abordada de maneira detalhada, ressaltando os métodos específicos empregados para assegurar a precisão e confiabilidade dos resultados.

3.1 Estratégia de Controle

O propósito do sistema concebido é efetuar a recuperação de um dispositivo aeroespacial utilizando paraquedas. A Figura 15(a) apresenta um diagrama do modelo físico e seu comportamento. Através da deflexão δ das superfícies de controle é possível controlar o ângulo de referência ψ . A estratégia de controle idealizada para este trabalho é baseada na realimentação de estados. Será implementada utilizando abordagens robustas e ótimas através de técnicas como LMIs e LQR. Estes métodos permitem determinar ganhos ideais, representados pela matriz \mathbf{K} , que minimizam uma função de custo de acordo com as restrições de desempenho do sistema. A matriz de ganho \mathbf{K} é determinada considerando a dinâmica do sistema, a matriz de ponderação dos estados \mathbf{Q} , e a matriz de ponderação das entradas \mathbf{R} . Essa abordagem se torna possível e adequada uma vez que os estados internos do sistema, para uma aplicação real, poderão ser medidos diretamente através de sensores como um acelerômetro, por exemplo. A Figura 15(b) apresenta o modelo mecânico detalhado do sistema. Neste modelo, é possível observar o modelo mecânico detalhado do sistema.

Figura 15: Diagramas Físico e Esquemático do Sistema a ser controlado

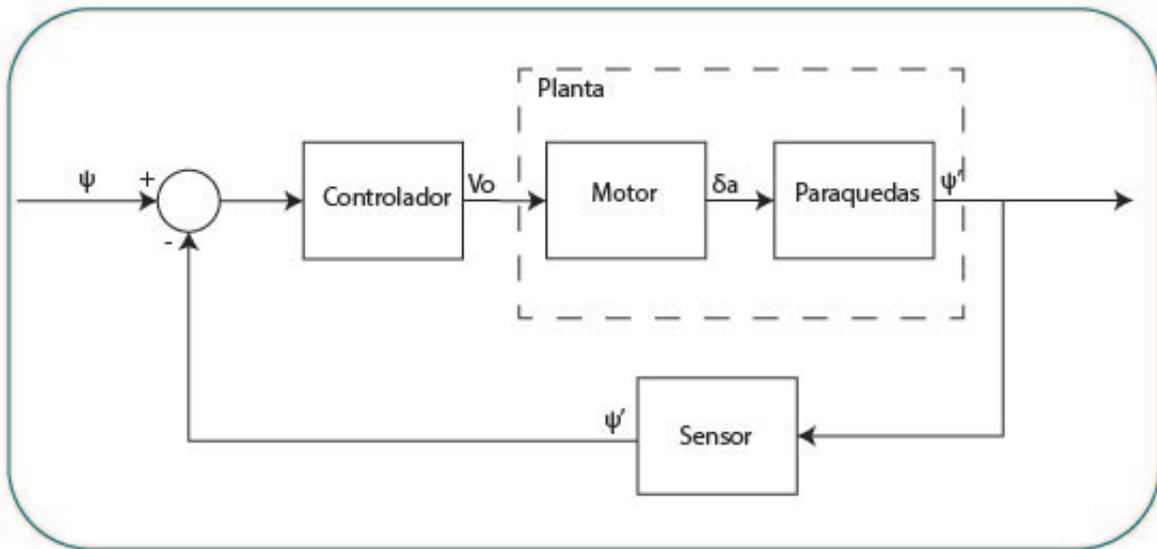


Fonte: Autoria Própria

Nesse modelo, ilustram-se as fases do controle: a partir de um ponto geográfico, é determinado o ângulo de referência a ser seguido pelo sistema. Em seguida, o sinal é processado por um sistema de controle para estabelecer o ângulo de retração das superfícies de controle do paraquedas, os quais são ajustados por meio de atuadores. Após atingir a deflexão desejada das superfícies de controle, o sistema altera sua direção, resultando em um novo ângulo de apontamento (saída do sistema), que é medido por um giroscópio.

Com base no modelo físico e esquemático, é viável identificar o modelo em diagrama de blocos genérico, com abordagem clássica, para abstração das variáveis de entradas e saída do sistema, como pode ser averiguado na Figura 16. A partir dele, busca-se traduzir o modelo matemático em espaço de estados e elaborar um diagrama de blocos para as matrizes A_i , B_i , C e D do sistema resultante conforme ilustrado na Figura 12. O subscrito i denota os diversos cenários de incerteza contemplados no modelo de acordo com a variável incerteza adotada. Nas seções subsequentes, serão abordados os modelos matemáticos e as matrizes do espaço de estado resultantes para distintos cenários de incerteza.

Figura 16: Diagrama de Blocos Clássico para o Sistema



Fonte: Autoria Própria

3.2 Procedimento Experimental

3.2.1 Identificação do Modelo Matemático

Para desenvolver estratégias de controle para o sistema, é necessário primeiro identificar uma relação matemática que descreva a dinâmica do sistema. A partir do modelo dinâmico de uma aeronave (ZIPFEL, 2009), é possível derivar um modelo matemático relevante para o movimento de um paraquedas em queda livre. Este modelo é posteriormente linearizado para facilitar a aplicação de técnicas e ferramentas de controle linear, essenciais para o escopo deste projeto. A linearização é uma abordagem comum para simplificar a análise e permitir a aplicação eficaz de estratégias de controle linear em torno de pontos de operação específicos. Conforme procedimento realizado por (GÖKTOĞAN, 2012), a linearização resulta no modelo em variáveis de estado apresentado na Equação 40.

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \rho A^p V_p^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{I_{XXI}C_{l\phi}}{2} & 0 & \frac{I_{XXI}C_{lp}b^2}{4V_p} & \frac{I_{XZI}C_{nr}b^2}{4V_p} \\ \frac{I_{XZI}C_{l\phi}b}{2} & 0 & \frac{I_{XZI}C_{lp}b^2}{4V_p} & \frac{I_{ZZI}C_{nr}b^2}{4V_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \\ p \\ r \end{bmatrix}$$

$$+\rho A^p V_p^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{I_{XXI}C_{l_{\delta a}}b+I_{XZI}C_{n_{\delta a}}b}{2d} \\ \frac{I_{XZI}C_{l_{\delta a}}b+I_{ZZI}C_{n_{\delta a}}b}{2d} \end{bmatrix} \delta a \quad (40)$$

Onde ρ representa a densidade do ar, A^p é a área da superfície do paraquedas, V_p é a velocidade do paraquedas, I_{XXI} , I_{ZZI} e I_{XZI} são elementos da matriz de inércia do sistema. C_{l_ϕ} , C_{l_p} , C_{n_r} , $C_{l_{\delta a}}$, $C_{n_{\delta a}}$ correspondem aos coeficientes aerodinâmicos associados ao movimento de rolagem e arfagem do aerofólio. Além disso, b corresponde à envergadura da aeronave, d ao comprimento da corda do perfil aerodinâmico das superfícies de controle, δ_a é o ângulo de deflexão assimétrica das superfícies de controle, ϕ e ψ são os ângulos de Euler para rolagem e guinada, respectivamente, enquanto p e r representam a velocidade angular de rotação ao longo dos eixos de rolagem e guinada, respectivamente.

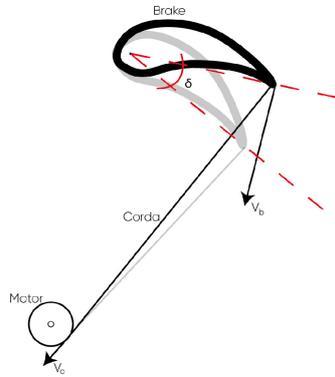
A linearização de uma equação diferencial tem como objetivo aproximar a resposta do sistema em torno de um ponto de operação específico. Entretanto, essa abordagem inevitavelmente introduz incertezas relacionadas à modelagem, uma vez que o sistema real pode divergir do modelo linearizado, especialmente para perturbações significativas. Para lidar com essas incertezas, estratégias de controle avançado são frequentemente empregadas.

Além disso, considerou-se como parte do modelo matemático a dinâmica do atuador a realizar o movimento de retração ou relaxamento das superfícies de controle. Considerando as superfícies de controle como corpos rígidos bem como os fios que as conectam ao atuador como inestensíveis, é possível aproximar a dinâmica ao movimento circular de polias acopladas e abstrair o modelo matemático para obter o modelo apresentado na Equação 41 também em espaço de estados.

$$[\dot{\delta}] = [0]\delta + [\alpha]V_o \quad (41)$$

Onde α corresponde à relação dos raios dos arcos de circunferência formados pela ação do atuador associada à superfície de controle (Figura 17) o qual pode ser obtido experimentalmente ou analiticamente. Esta representação em espaço de estados será condição necessária para a abordagem de controle implementada a ser discutida nas seções subsequentes.

Figura 17: Diagrama Esquemático do atuador conectado à superfície de controle



Fonte: Autoria Própria

3.2.2 Identificação das Variáveis Incertas

Além das incertezas inerentes à modelagem, sistemas complexos frequentemente apresentam incertezas paramétricas. No contexto da Equação 40, é viável atribuir incertezas aos elementos da Matriz de Inércia, aos Coeficientes Aerodinâmicos, à densidade do ar e à Velocidade Relativa do Paraquedas. Neste estudo, optou-se por introduzir incertezas exclusivamente na variável da Velocidade Relativa do Paraquedas. Essa decisão fundamenta-se na consideração de que essa variável é indiretamente influenciada pelas incertezas presentes nas demais variáveis. Ademais, a definição de uma região de incertezas para as demais variáveis demandaria recursos experimentais que não estão disponíveis para este trabalho.

Os valores dos parâmetros foram derivados do estudo conduzido por GÖKTOĞAN (2012), no qual uma Velocidade Relativa de 6 m/s foi adotada como referência. Para a presente pesquisa, optou-se por estabelecer um intervalo que englobe esse valor específico. A Tabela ?? apresenta todos os parâmetros considerados nesta análise.

Tabela 1: Parâmetros do Modelo

Parâmetro	Valor
I_{XXI}	0.336 $\frac{kg \cdot m^2}{rad^2}$
I_{XZI}	-0.059 $\frac{kg \cdot m^2}{rad^2}$
I_{ZZI}	0.109 $\frac{kg \cdot m^2}{rad^2}$
C_{l_p}	-0.1
C_{l_ϕ}	-0.05
C_{n_r}	-0.0035
$C_{l_{\delta a}}$	0.0021
$C_{n_{\delta a}}$	0.004
ρ	1.225 $\frac{kg}{m^3}$
A_p	1.16 m^2
b	2.15 m
α	2.5 m^{-1}
V_p	[5,8] m/s

Fonte: Adaptado de (GÖKTOĞAN, 2012)

3.2.3 Obtenção da Matriz de Ganho K

O cerne deste estudo reside na obtenção da matriz de ganho K , cuja aplicação como realimentação ao sistema é crucial para garantir a estabilidade desejada. Duas abordagens distintas foram adotadas para derivar esta matriz: a formulação de LMIs (*Linear Matrix Inequalities*) e o método LQR (*Linear Quadratic Regulator*). A matriz de ganho resultante pode ser obtida a partir das Equações 37 e 16, correspondentes às abordagens por LMIs e LQR, respectivamente. Os valores dos parâmetros de entrada relevantes para os algoritmos de obtenção da matriz de ganho K são apresentados nas Tabelas 2 e 3. Os respectivos valores foram obtidos mediante algumas simulações que apresentaram as melhores respostas em termos de parâmetros de desempenhos a serem evidenciados na Seção 4.

Além dos parâmetros de entrada para a obtenção da matriz de ganho K , é necessário considerar as matrizes de estado do sistema completo, que incluem as dinâmicas do atuador e do

Tabela 2: Parâmetros para o método de LMIs

Parâmetro	Valor
γ	0.5

Fonte: Autoria Própria

Tabela 3: Parâmetros para o método de LQR

Parâmetro	Valor
Q	$10 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
R	0.1

Fonte: Autoria Própria

paraquedas concatenadas. A concatenação de dois sistemas em série, preserva as características individuais de cada sistema. A representação em diagrama de blocos para a planta do sistema, apresentada na Figura 16, deve ser seguida, garantindo a correta conexão das variáveis de entrada e saída de cada sistema. Dado que incertezas paramétricas estão sendo consideradas, diferentes sistemas devem ser gerados para cada cenário de incerteza, permitindo a otimização da solução K para todos os casos. A partir dos valores incertos para a velocidade relativa do paraquedas V_p da Tabela 1 produziu-se duas matrizes A e duas matrizes B correspondentes aos valores extremos do intervalo apontado. Além disso, como o objetivo é o controle do ângulo de referência ψ tem-se a matriz $C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$.

3.2.4 Realimentação de Estados

A partir da obtenção da matriz de ganho K , é viável implementar a estratégia de realimentação de estados. Adicionalmente, o diagrama de blocos clássico, apresentado na Figura 16 e destinado à observação das variáveis de entrada e saída da planta, é transformado em um diagrama de blocos voltado para uma abordagem moderna, conforme ilustrado na Figura 14, em consonância com a teoria discutida na Subseção 2.3. Nesta abordagem, as variáveis de saída são abstraídas do diagrama para dar lugar às variáveis de estado.

3.3 Materiais Utilizados

Este estudo se dedica à realização de análises numéricas e simulações para sistemas de controle. Com essa proposta, a presente subseção proporciona uma relação dos materiais e recursos utilizados durante a condução da pesquisa.

Entre os recursos físico utilizados, destaca-se:

1. Computador Dell OptiPlex Micro 13^a Geração Intel® Core™ i5-13500T (14 Núcleos, 24MB, 1.60 GHz to 4.60 GHz) com Windows 11 Home, 8 GB DDR4 (1x8GB) 3200MT/s e SSD de 512GB PCIe NVMe M.2 (Classe 25);

2. Acesso à internet Banda Larga;

Entre os recursos de Software utilizados, destaca-se:

1. Software Matlab/Simulink R2022b versão acadêmica;
2. Bibliotecas Yalmip (v. 02/2015) e Sedumi (v. 1.1);
3. Biblioteca lqr (v. R2006a)

As bibliotecas YALMIP e Sedumi foram essenciais para a formulação e resolução do problema de otimização linear usando LMIs, enquanto a biblioteca *lqr* foi utilizada na minimização da função objetivo. Todas essas bibliotecas contribuíram significativamente para a obtenção da matriz de ganho K neste estudo.

3.4 Análise dos Dados

Antes de realizar a modelagem completa do sistema, é conduzida uma verificação do comportamento da planta para análise de conformidade, com base na dinâmica do modelo físico. Essa verificação envolve a análise da planta em ramo direto e em malha fechada. O comportamento é examinado para o valor central do intervalo de incerteza da Velocidade Relativa V_p . A interpretação é feita com o auxílio de gráficos de resposta ao degrau para os modelos correspondentes. Após a análise e validação bem-sucedida do comportamento da planta do sistema, o procedimento de controle prossegue para a fase de realimentação de estados.

A realimentação de estados implementada para ambas as abordagens resultam em um sistema em malha fechada passível de análise para entrada unitária. Verificada a estabilização do sistema, é feita uma comparação de desempenho para as duas técnicas empregadas, usando os valores apresentados na Tabela 4:

Tabela 4: Parâmetros de Desempenho

Parâmetro	Valor
Tempo de Subida	$< 2 s$
Tempo de Acomodação	$< 5 s$
Sobressinal	$< 10\%$
Pico	$1.1 rad$
Tempo de Pico	$< 4.5 s$

Os valores da Tabela 4 foram estabelecidos levando em conta o ambiente de funcionamento do controlador (direcionamento de paraquedas transportando uma carga útil). Adicionalmente, realiza-se uma análise do comportamento das demais variáveis de estado, para além do ângulo de referência. Esta observação visa examinar como essas variáveis se comportam durante o controle, com o propósito de identificar padrões ou comportamentos físicos que possam ser impraticáveis para o sistema.

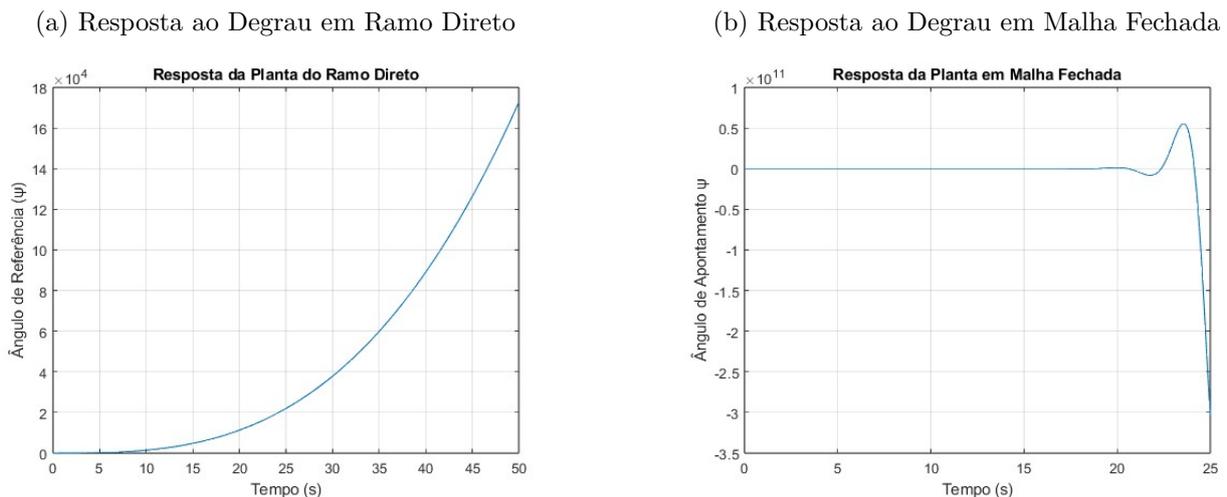
4 Resultados e Discussões

Nesta seção, serão apresentados os resultados das simulações, experimentos ou análises desenvolvidas ao longo do estudo. O objetivo é oferecer uma compreensão clara e abrangente do desempenho do sistema, corroborando ou refutando as hipóteses e objetivos estabelecidos inicialmente. Por meio de gráficos, tabelas e interpretações, serão explorados os aspectos mais relevantes, proporcionando uma visão aprofundada do impacto das estratégias adotadas e do comportamento do sistema em diferentes condições. Esses resultados constituem a base para conclusões robustas e podem servir como orientação para futuras pesquisas ou otimizações.

4.1 Resposta ao Degrau da Planta do Sistema

A partir da concatenação dos blocos que representam a dinâmica do motor e paraquedas obtém-se a planta do sistema apresentado na Figura 16. A resposta ao degrau para uma simulação de 50 s apresentou comportamento conforme o gráfico da Figura 18.

Figura 18: Resposta ao Degrau para a Planta do Sistema



Fonte: Autoria Própria

A planta resultante apresenta em seu sistema como entrada a velocidade linear V_o , responsável pela rotação do motor que confere a deflexão assimétrica δ_a às superfícies de controle do paraquedas. A saída, por sua vez, consiste no ângulo de apontamento ψ' . Conforme pode ser observado no gráfico da Figura 18(a), a resposta da planta consiste numa curva de potência positiva, isto é, apresenta comportamento divergente na malha em ramo direto. Essa resposta é condizente com o comportamento físico do sistema, uma vez que, para uma velocidade constante de rotação do motor, a deflexão assimétrica tenderia a crescer linearmente.

De forma análoga, para uma deflexão assimétrica constante, o ângulo de referência (que corresponde ao ângulo em torno do eixo do sistema físico) tende a crescer linearmente quando o tempo tende ao infinito. De forma visual, é possível imaginar o paraquedas girando em torno do seu próprio eixo com velocidade constante.

A resposta linear no domínio do tempo é representada por $\frac{a}{s^2}$ no domínio da frequência de

Laplace. A convolução dos dois sistemas resulta em $\frac{a^2}{s^4}$ que pode ser aproximado para o formato $\frac{n!}{s^{n+1}}$ que configura a curva t^n apresentada na Figura 18(a). Essa é uma forma analítica, e visual, para observar que o comportamento da planta sugere uma representação do modelo físico.

Na análise da malha de realimentação, a resposta do sistema a uma entrada unitária é visualizada no gráfico apresentado na Figura 18(b). Notavelmente, observa-se que o sistema não alcança a estabilidade desejada. Esse comportamento instável sugere a necessidade de adoção de estratégias mais avançadas de controle para corrigir e melhorar o desempenho do sistema.

4.2 Matriz de Ganho K

Antes da obtenção da matriz de Ganho K e como etapa indispensável para o projeto de controle via realimentação de estados, verificou-se se para a planta resultante se o sistema seria *controlável* ou *observável* conforme abordado na Subseção 2.3.1. A Tabela 5 e 6 apresentam as matrizes de controlabilidade e observabilidade do sistema dentro do intervalo de incerteza considerado.

Tabela 5: Matriz de Controlabilidade do Sistema

Limites do intervalo		Matriz				
5 m/s	$M_c =$	0	0	3.9818	-1.0940	-41.9095
		0	0	2.6464	0.1846	15.8826
		0	0.1121	-0.0308	-1.1797	0.6527
		0	0.0745	0.0052	0.4471	-0.1818
		2.5000	0	0	0	0
8 m/s	$M_c = 10^{-5} \times$	0	0	26.1	-11.5	-1807.9
		0	0	17.3	1.9	683.6
		0	3	-1	-199	1760
		0	2	0	75	-49
		25	0	0	0	0

Fonte: Autoria Própria

Tabela 6: Matriz de Observabilidade do Sistema

Limites do intervalo		Matriz				
5 m/s	$M_o =$	0	1.0000	0	0	0
		0	0	0	35.5250	0
		4.0022	0	1.7209	-0.1113	1.0585
		-0.5261	0	141.6979	0.0033	0.0738
		-42.2837	0	-57.7806	0.2402	6.3530
8 m/s	$M_o = 10^3 \times$	0	0	0.0010	0	0
		0	0	0	0.0909	0
		0.0262	0	0.0070	-0.0005	0.0069
		-0.0055	0	2.3822	0.0000	0.0008
		-1.8198	0	-1.5532	0.0065	0.2734

Fonte: Autoria Própria

Nas tabelas anteriores, é evidente, por meio das matrizes apresentadas, que o sistema é tanto controlável quanto observável. Contudo, vale ressaltar que neste projeto não foi implementado

um observador, uma vez que o sistema é concebido com todas as variáveis de estado sendo medidas diretamente.

Para as abordagens através de LMIs e LQR, a Tabela 7 apresenta as Matrizes de Ganho obtidas.

Tabela 7: Matrizes de Ganho K

Método	Matriz K
<i>LMI</i>	$K = \begin{bmatrix} 5.5487 & 4.5194 & 215.6729 & 241.5007 & 5.6316 \end{bmatrix}$
<i>LQR</i>	$K = \begin{bmatrix} 8.1221 & 10.0000 & 224.2913 & 434.9152 & 11.2478 \end{bmatrix}$

Fonte: Autoria própria

As matrizes de ganho de tamanho 1×5 indica que o sistema está sendo controlado por uma única entrada, que corresponde ao ângulo de referência ψ . Além disso cada valor corresponde ao ganho associado à cada variável do sistema (ϕ , ψ , p , r e δ_a).

A partir das matrizes de ganho, analisa-se a convergência do sistema por meio do estudo de seus autovalores. A Tabela 8 apresenta os autovalores correspondentes à matriz de ganho K obtida através de LMIs, considerando os valores extremos do intervalo de incerteza. Analogamente, a Tabela 9 exhibe os autovalores associados à matriz de ganho obtida por meio da abordagem LQR.

Tabela 8: Autovalores do sistema usando LMIs

V_p	5 m/s	8 m/s
λ_1	-10.4104 + 0.0000i	-2.0617 + 9.1258i
λ_2	-0.7523 + 3.0741i	-2.0617 - 9.1258i
λ_3	-0.7523 - 3.0741i	-3.5778 + 4.1532i
λ_4	-1.2215 + 0.6440i	-3.5778 - 4.1532i
λ_5	-1.2215 - 0.6440i	-3.2463 + 0.0000i

Fonte: Autoria Própria

Tabela 9: Autovalores do sistema usando LQR

V_p	5 m/s	8 m/s
λ_1	-25.9900 + 0.0000i	-22.3372 + 0.0000i
λ_2	-0.2948 + 3.2634i	-0.6437 + 8.4667i
λ_3	-0.2948 - 3.2634i	-0.6437 - 8.4667i
λ_4	-0.9095 + 0.8656i	-2.4707 + 2.3721i
λ_5	-0.9095 - 0.8656i	-2.4707 - 2.3721i

Fonte: Autoria Própria

Os autovalores obtidos, que correspondem aos polos do sistema, indicam que o modelo possui, para todos os cenários, 5 modos de oscilação. Como é possível observar nas Tabelas

8 e 9, para todos os cenários apresentados, os autovalores obtido através da matriz de ganho K possuem a parte real no semiplano esquerdo ao eixo imaginário. Trata-se de uma condição necessária e suficiente para garantir a estabilização do sistema.

Essas considerações poderão ser verificadas visualmente e através dos parâmetros de desempenho para cada técnica na próxima subseção.

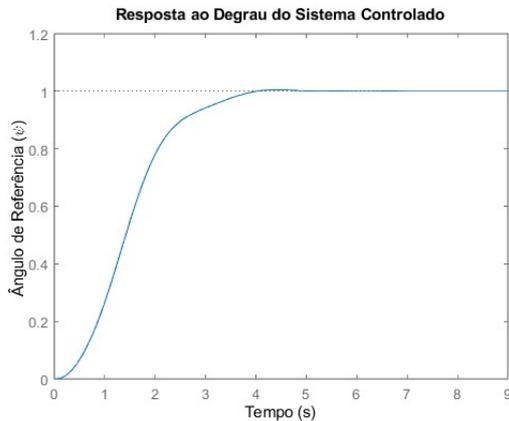
4.3 Desempenho dos Modelos e Comparação

Com o objetivo de verificar o desempenho das matrizes de ganho obtidas por meio das técnicas via LMIs e LQR, plotou-se um gráfico da resposta do sistema para os extremos do intervalo de incerteza. A Figura 19 mostra o comportamento da curva para os dois casos.

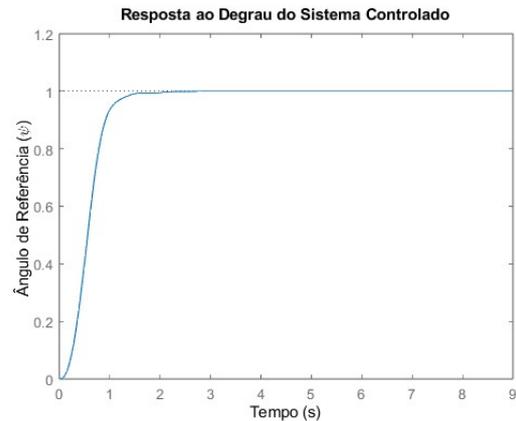
Considerando um período para o planeio de um paraquedas, com uma carga útil, de aproximadamente 5 *min*, ambas as técnicas oferecem resposta unitária dentro de um limite de tempo viável (até 5 *s*). No entanto, a análise da figura indica que, para os extremos do intervalo de incerteza, as matrizes de ganho obtidas por meio das duas técnicas apresentam desempenho distintos. Em geral, enquanto a estratégia via *LMIs* apresenta um tempo de acomodação menor com sua curva de resposta sem oscilações, a estratégia via *LQR* apresenta oscilações e desempenho mais demorado. O critério para o tempo de acomodação adotado foi para estabilização dentro dentro de 2% da resposta final do sistema.

Figura 19: Resposta ao Degrau do Sistema Controlado

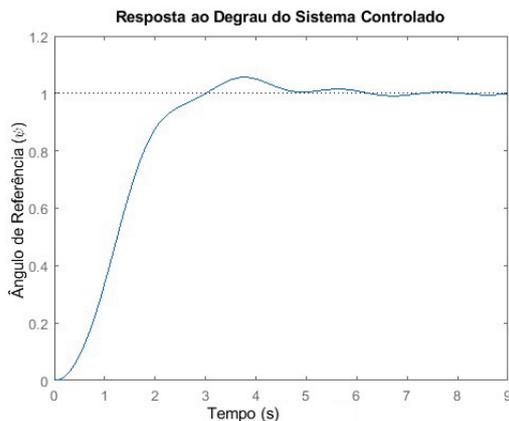
(a) Resposta para um Valor
 V_p de 5 m/s via *LMI*s



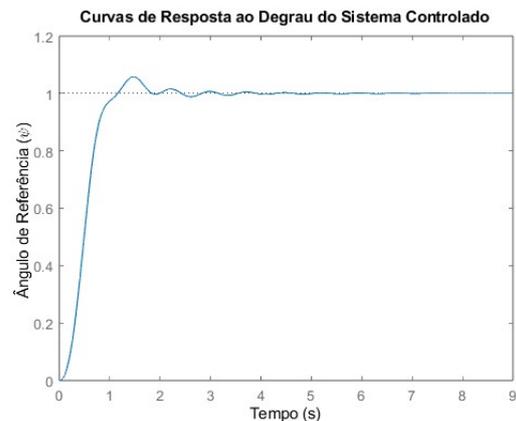
(b) Resposta para um Valor
 V_p de 8 m/s via *LMI*s



(c) Resposta para um Valor
 V_p de 5 m/s via *LQR*



(d) Resposta para um Valor
 V_p de 8 m/s via *LQR*



Fonte: Autoria Própria

Essa conclusão pode ser observada através das informações quanto ao desempenho dos sistemas apresentadas nas Tabelas 10 e 11.

Em termos de tempo de resposta, as duas estratégias apresentam um desempenho semelhante, sendo a resposta via LMIs ligeiramente mais rápida. No entanto, quando são analisadas as oscilações presentes nos sistemas, observa-se um desempenho superior do controle via estratégia robusta. Esse comportamento já era esperado quando analisado a alocação dos polos dos sistemas, onde para a estratégia via controle ótimo apresentou autovalores menores em relação à estratégia robusta. Apesar disso, o máximo sobressinal de 5% do valor de entrada pode ser considerado um desempenho excelente, pois, para uma entrada unitária, o valor de pico máximo ultrapassaria em 0,050 rad a referência, o que corresponde a apenas 2 graus de erro.

Tabela 10: Desempenho do Controle via LMI

V_p	5 m/s	8 m/s
<i>Tempo de Subida</i>	1.9217 s	0.6551 s
<i>Tempo de Acomodação</i>	3.5631 s	1.3074 s
<i>Sobressinal</i>	0.4986 %	0 %
<i>Valor de Pico</i>	1.0050 rad	0.9999 rad
<i>Tempo de Pico</i>	4.4111 s	2.8230 s

Fonte: Autoria Própria

Tabela 11: Desempenho do Controle via LQR

V_p	5 m/s	8 m/s
<i>Tempo de Subida</i>	1.5640 s	0.5668 s
<i>Tempo de Acomodação</i>	4.4576 s	1.7135 s
<i>Sobressinal</i>	5.6163 %	5.8263 %
<i>Valor de Pico</i>	1.0562 rad	1.0583 rad
<i>Tempo de Pico</i>	3.7470 s	1.4725 s

Fonte: Autoria Própria

O desempenho ligeiramente superior da abordagem robusta é atribuído à incorporação de um método de otimização para a obtenção da matriz de ganho K por meio dos *solvers* YALMIP e SEDUMI. Em contrapartida, a otimização realizada via LQR restringiu-se à obtenção da matriz de ganho K ótima para o valor central do intervalo, sendo aplicada aos demais valores. Considerando técnicas adicionais, a estratégia robusta demonstrou maior eficácia no contexto estudado.

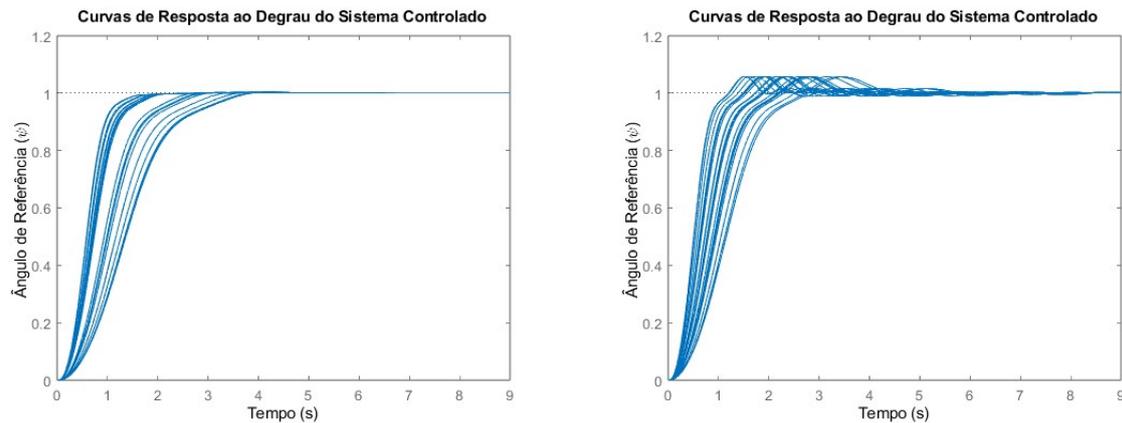
Outro ponto a se destacar, consiste no fato de ambas as técnicas apresentarem desempenho consideravelmente superior para cenários de velocidade relativa maiores. Para os valores extremos do intervalo de incerteza, é possível constatar uma diminuição no tempo de acomodação de até 2,74 s.

Para analisar os diferentes cenários, é plotada na Figura 20 todas as respostas para as duas estratégias dentro do intervalo de incerteza (5 m/s a 8 m/s) para a Velocidade Relativa (V_p) do paraquedas. Pelo apresentado, verifica-se que o método de obtenção da matriz de ganho K pelas duas estratégias garantiram a estabilização do sistema para todos os valores no intervalo de incerteza.

Figura 20: Curvas de Respostas do Sistema Controlado no Intervalo de Incertezas

(a) Através de *LMI*s

(b) Através de *LQR*

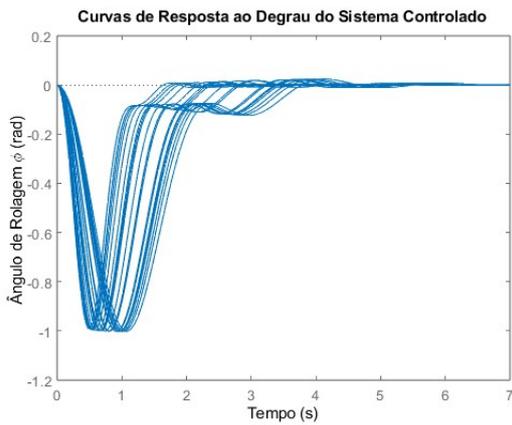


Fonte: Autoria Própria

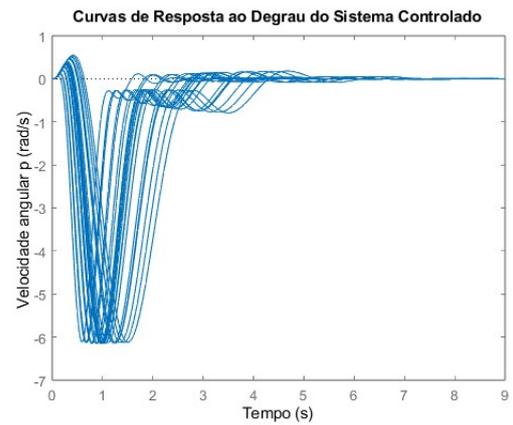
Por fim, com o objetivo de avaliar o desempenho das variáveis restantes (ϕ , p , r , e δ_a), as Figuras 21 e 22 ilustram o comportamento individual de cada variável conforme o controle é aplicado pelas duas abordagens. Observa-se que todas as variáveis, em ambas as estratégias de controle, assumem valores dentro dos limites aceitáveis. A deflexão assimétrica (ver Figuras 21.d e 22.d) não excede 0,14 rad ($8,02^\circ$) enquanto que, na estratégia robusta, mantém-se abaixo de 0,06 rad. A estratégia via LQR apresenta desempenho ligeiramente superior em termos do módulo do ângulo máximo alcançado e da velocidade máxima desses ângulos (ver Figuras 22.a, 22.b e 22.c), sendo menores para ambos os casos. Além disso, quanto à deflexão assimétrica δ_a , o valor máximo alcançado é a metade desse mesmo valor via técnica robusta (ver Figuras 21.d e 9.d). Apesar disso, sua natureza oscilatória a classifica como inferior à abordagem via LMI, que assegura uma resposta mais suave para o movimento de rolagem. Essa afirmação leva em consideração as características mecânicas da aplicação, visto que a carga útil a ser transportada pode configurar material sensível, como experimentos, por exemplo.

Figura 21: Curvas de Respostas para demais Variáveis do Sistema via LMIs

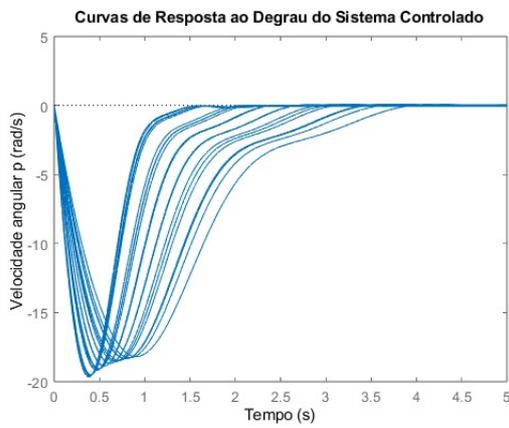
(a) Ângulo de Rolagem ϕ



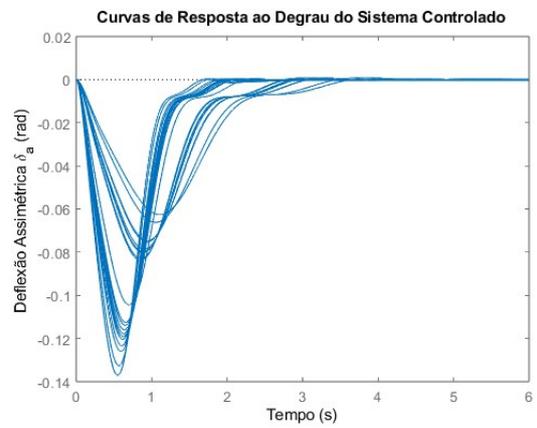
(b) Velocidade Angular p



(c) Velocidade Angular r



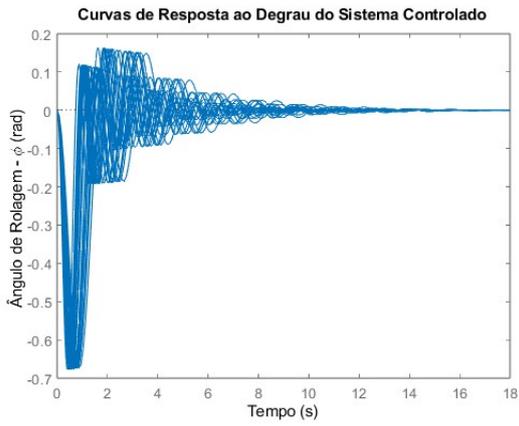
(d) Deflexão Assimétrica δ_a



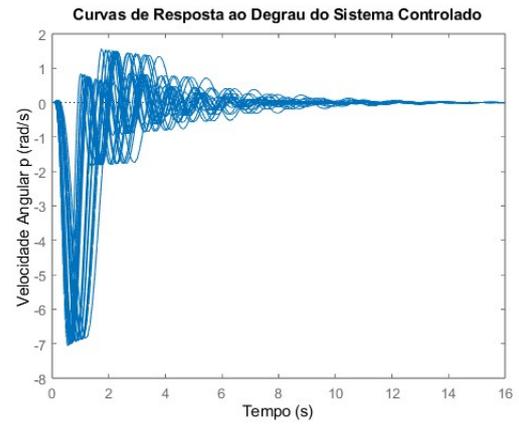
Fonte: Autoria Própria

Figura 22: Curvas de Respostas para demais Variáveis do Sistema via LQR

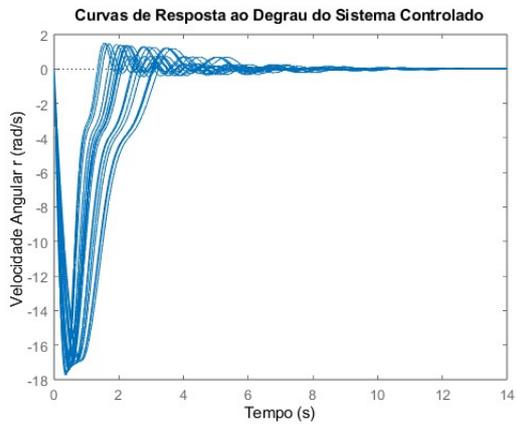
(a) Ângulo de Rolagem ϕ



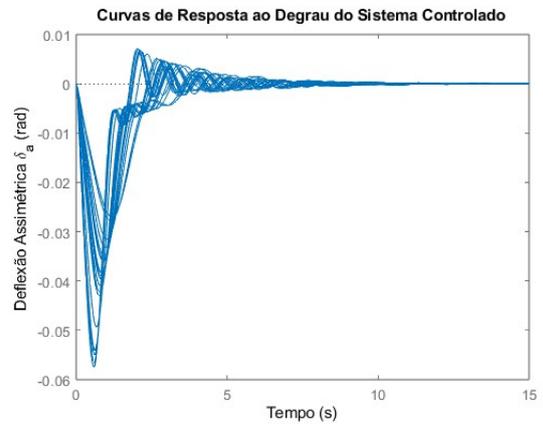
(b) Velocidade Angular p



(c) Velocidade Angular r



(d) Deflexão Assimétrica δ_a



Fonte: Autoria Própria

5 Conclusão

O presente trabalho teve como propósito a implementação de um sistema de controle destinado à recuperação de foguetes de sondagem por meio de paraquedas. O objetivo do controle é garantir que um determinado ângulo de referência ψ seja estabilizado mediante um estímulo, garantindo assim que o sistema seja apontado para um direção de interesse. Nesse sistema, onde o controle é aplicado à dinâmica do paraquedas, a abordagem adotada concentrou-se na investigação de estratégias de controle moderno, especificamente a realimentação de estados. A escolha da estratégia em questão se deve às necessidades de, no estudo, considerar as incertezas paramétricas inerentes ao modelo. Para alcançar esse objetivo, foram exploradas técnicas avançadas visando a obtenção da matriz de ganho K para realimentação do sistema. As metodologias consideradas envolveram conceitos robustos, por meio do uso de LMIs (*Linear Matrix Inequalities*), e princípios de controle ótimo, através do método LQR (*Linear Quadratic Regulator*).

Inicialmente, procedeu-se à identificação do modelo matemático que descreve o comportamento do sistema, considerando as formulações apresentadas por GÖKTOĞAN (2012) e ZIPFEL (2009). A obtenção do modelo para a dinâmica do paraquedas e do atuador, responsável pelo controle das cordas, configurou a planta do problema. A concatenação desses dois sistemas foi realizada conforme o diagrama de blocos do modelo clássico, apresentado na Figura 16.

Em seguida, visando a implementação do controle por realimentação de estados e a consideração de incertezas paramétricas, representou-se a planta do sistema em espaço de estados. A simulação do sistema, com uma entrada unitária, evidenciou comportamentos alinhados ao modelo físico real descrito. Diante desse resultado, avançou-se para a consideração das incertezas, atribuindo um intervalo de incerteza à variável V_p , que encapsula as incertezas dos demais parâmetros. Essa escolha simplificou a análise.

No contexto da realimentação de estados, considerando todos os estados como mensuráveis diretamente, foram obtidas duas matrizes de ganho K : a primeira por meio de *Linear Matrix Inequalities* (LMIs) e a segunda pelo método *Linear Quadratic Regulator* (LQR). Após a implementação da realimentação de estados com as matrizes de ganho obtidas, verificou-se a estabilização do sistema, conduzindo à análise de desempenho e à comparação entre os dois modelos.

Para avaliar o desempenho das matrizes de ganho obtidas por LMIs e LQR, foi plotado um gráfico da resposta do sistema para os extremos do intervalo de incerteza (Figura 19). Ambas as técnicas proporcionam uma resposta dentro de um limite de tempo viável para o período de planeio de um paraquedas, aproximadamente 5 minutos.

A análise das respostas indica que, para os extremos do intervalo de incerteza, as matrizes de ganho obtidas por LMIs apresentam um desempenho mais rápido e sem oscilações, enquanto a abordagem via LQR mostra oscilações e desempenho mais demorado. Apesar disso, ambas as estratégias demonstram excelente desempenho. O desempenho ligeiramente superior da abordagem robusta é atribuído à incorporação de um método de otimização para a obtenção da matriz de ganho K por meio dos *solvers YALMIP* e *SEDUMI*. Em contrapartida, a otimização realizada via LQR restringiu-se à obtenção da matriz de ganho K ótima para o valor central do intervalo, sendo aplicada aos demais valores. A estratégia robusta, ao considerar técnicas adicionais, demonstrou maior eficácia no contexto estudado. Além disso, ambas as técnicas apresentam desempenho consideravelmente superior para cenários de velocidade relativa mais

elevada.

Em resumo, a implementação de estratégias de controle moderno, como a realimentação de estados utilizando LMIs e LQR, demonstrou eficácia na estabilização do sistema de recuperação de foguetes de sondagem por meio de paraquedas. O destaque para o desempenho superior da abordagem robusta, notadamente em relação à suavidade de resposta e à redução de oscilações, representa uma contribuição significativa para a eficácia no controle desse sistema complexo.

O projeto concebido neste trabalho, fundamentado em técnicas avançadas de controle moderno, controle robusto e controle ótimo, tem como foco principal a recuperação de veículos lançadores. Além dessa aplicação primária, o sistema demonstrou potencial para ser aplicado em diversas atividades, tais como transporte de carga em regiões de difícil acesso, medidas de segurança em atividades recreativas, e pesquisas científicas na atmosfera, resgate e salvamento, exploração espacial, logística em ambientes desafiadores, entre outras. Embora o projeto tenha se limitado a simulações computacionais, os resultados obtidos fornecem uma base sólida para a implementação do modelo em um protótipo real.

Potenciais aprimoramentos na pesquisa incluem uma investigação mais aprofundada sobre as restrições matriciais adotadas e a configuração das matrizes Q , R e N para a obtenção das matrizes de ganho, por meio das técnicas via LMIs e LQR, respectivamente. Uma análise mais detalhada desses aspectos proporcionaria um entendimento mais preciso sobre o desempenho da realimentação e, por conseguinte, sobre a dinâmica do sistema. Adicionalmente, é possível explorar a viabilidade de incorporar incertezas em todos os parâmetros suscetíveis a erros, visando uma análise mais abrangente dos cenários. Por fim, a condução de experimentos práticos é essencial para verificar e calibrar o modelo proposto, conferindo uma validação adicional além das simulações computacionais.

Referências Bibliográficas

- AXESS. *SpaceX: reuse rocket parts to reduce costs*. 2019. <<https://axessnet.com/en/spacex-reuse-rocket-parts-to-reduce-costs/>>.
- BAIOCCHI, D.; WELSER, W. The democratization of space. *Foreign Aff.*, HeinOnline, v. 94, p. 98, 2015.
- BENSOON, T. *Banking turn*. 2023. <<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/VirtualAero/BottleRocket/airplane/turns.html>>.
- BOEING. *BOEING MARKET OUTLOOK 2023–2032*. 2023. Acessado em: 14/12/2023. Disponível em: <<https://www.boeing.com/market/index.page>>.
- CARTER, D. et al. Autonomous guidance, navigation and control of large parafoils. In: *18th AIAA Aerodynamic Decelerator Systems Technology Conference and Seminar*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 1643.
- DORF, R.; BISHOP, R. Modern control systems. pearson prentice hall. *Upper Saddle River*, v. 11, 2008.
- DORF, R.; BISHOP, R. *Sistemas de controle modernos*. LTC, 2009. ISBN 9788521617143. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=pT4bQAAACAAJ>>.
- DOYLE, J. Robust and optimal control. In: IEEE. *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 1996. v. 2, p. 1595–1598.
- DUAN, G.-R.; YU, H.-H. *LMIs in control systems: analysis, design and applications*. [S.l.]: CRC press, 2013.
- EBIHARA, Y.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. *S-variable approach to LMI-based robust control*. [S.l.]: Springer, 2015.
- ELDRIDGE, A. *SpaceX - American corporation*. 2023. <<https://www.britannica.com/topic/SpaceX>>.
- GAHINET, P. et al. The lmi control toolbox. In: IEEE. *Proceedings of 1994 33rd IEEE conference on decision and control*. [S.l.], 1994. v. 3, p. 2038–2041.
- GEERING, H. P. *Optimal control with engineering applications*. [S.l.]: Springer, 2007. v. 1.
- GÖKTOĞAN, A. H. Guidance, navigation and control of a small-scale paramotor. *Australian Conference on Robotics and Automation*, Australian Centre for Field Robotics, dez. 2012.
- LABORATORIES, M. *Ziegler-Nichols Tuning for PID*. 2023. <<https://www.mstarlabs.com/control/znrule.html>>.
- LATHI, B. P. *Sinais e sistemas lineares-2*. [S.l.]: Bookman, 2006.
- LATHI, B. P.; GREEN, R. A. *Linear systems and signals*. [S.l.]: Oxford University Press New York, 2005. v. 2.
- MAYA, P.; LEONARDI, F. *Controle Essencial*. [S.l.]: Pearson, 2014. ISBN 9788543002415.
- MCDOUGALL, W. A. *Heavens and the earth: a political history of the space age*. Basic Books Inc., Publishers, New York, NY, 1985.

- NISHIKAWA, Y. et al. A method for auto-tuning of pid control parameters. *Automatica*, Elsevier, v. 20, n. 3, p. 321–332, 1984.
- OGATA, K. *Modern control engineering fifth edition*. [S.l.: s.n.], 2010.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. Pearson Prentice Hall, 2011. ISBN 9788576058106. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=iL3FYgEACAAJ>>.
- PARASKEVOPOULOS, P. N. *Modern control engineering*. [S.l.]: CRC Press, 2017.
- PEDOSSAUT, M. *DEMOCRATIZAÇÃO DO ESPAÇO*. 2021. <<https://ptspace.pt/pt/democratizacao-do-espaco/>>.
- PEKKANEN, S. M. Governing the new space race. *American Journal of International Law*, Cambridge University Press, v. 113, p. 92–97, 2019.
- RAWAT, S. *Aircraft Control Surfaces*. 2023. Acessado em: 11/12/2023. Disponível em: <<https://www.studyaircrafts.com/aircraft-control-surfaces>>.
- SHEETZ, M. *Bank of America expects the space industry to triple to a \$1.4 trillion market within a decade*. 2020. <<https://www.cnbc.com/2020/10/02/why-the-space-industry-may-triple-to-1point4-trillion-by-2030.html>>.
- SILVA, E. R. V. *Modelagem e Controle do direcionamento de um Paraquedas para Recuperação de Foguetes de Sondagem*. Monografia — Bacharelado em Engenharia da Aeroespacial. Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2023.
- SLEGGERS, N.; BEYER, E.; COSTELLO, M. Use of variable incidence angle for glide slope control of autonomous parafoils. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 31, n. 3, p. 585–596, 2008.
- SLEGGERS, N.; COSTELLO, M. Aspects of control for a parafoil and payload system. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 26, n. 6, p. 898–905, 2003.
- SPACEX. *MAKING HUMANITY MULTIPLANETARY*. 2022. <<https://www.spacex.com/mission/#:~:text=MAKING%20HUMANITY%20MULTIPLANETARY,destinations%20in%20the%20solar%20system.>>
- TEAM, S. F. E. *SPACE FOUNDATION RELEASES THE SPACE REPORT 2022 Q2 SHOWING GROWTH OF GLOBAL SPACE ECONOMY*. 2023. <<https://www.spacefoundation.org/2022/07/27/the-space-report-2022-q2/>>.
- TEWARI, A. *Advanced control of aircraft, spacecraft and rockets*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- WATANABE, M.; OCHI, Y. Modeling and simulation of nonlinear dynamics of a powered paraglider. In: *AIAA guidance, navigation and control conference and exhibit*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 7418.
- WHITE, F. *The overview effect: Space exploration and human evolution*. [S.l.]: AIAA, 1998.
- ZIPFEL, P. H. *Modeling and simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. [S.l.]: AIAA Education Series, 2009.