UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Bacharelado

Carla Beatriz dos Santos

Lema de Zorn: Equivalências e Aplicações

São Luís - MA
2023

Carla Beatriz dos Santos

Lema de Zorn: Equivalências e Aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharela em Matemática.

Curso de Matemática – Bacharelado

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo

São Luís - MA

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Santos, Carla Beatriz dos.
Lema de Zorn: Equivalências e Aplicações / Carla Beatriz dos Santos. - 2023.
38 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo.
Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2023.

1. Aplicações. 2. Axioma da Escolha. 3. Lema de Zorn. 4. Princípio Maximal de Hausdorff. 5. Teorema da Boa Ordenação de Zermelo. I. Macedo, Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues. II. Título.

Carla Beatriz dos Santos

Lema de Zorn: Equivalências e Aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharela em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 21/12/2023

Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo
Orientador
DEMAT/UFMA

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior
Primeiro Examinador
DEMAT/UFMA

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes
Segundo Examinador
DEMAT/UFMA

Aos meus avós.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus e à minha família, em particular aos meus avós Jorge Pataca e Celina Reis, por todo o apoio durante a minha caminhada até aqui.

Aos amigos que fiz durante esses anos de curso Samuel Cantoária, Jonas Vieira, Ygor Carvalho, Rafael Vieira, Davi Komura, Renata França, Gustavo Pinheiro, Irlan Maycon, José Vitor e Ronaldo Pinheiro pela amizade e companheirismo.

Especialmente ao meu amigo Helton Garces por estar sempre ao meu lado, mesmo distante.

Aos meus amigos de longa data Patricia Moraes, Gabriel Carvalho, Willian de Vasconcelos, Urbano Bittencourt e Jéssica Cantuário.

Ao meu orientador Prof. Dr. Elivaldo Macedo pelo apoio e pelos ensinamentos. E a todos os professores que me ajudaram a trilhar esta estrada.

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma fizeram parte dessa caminhada.

"Nesta cadeia alimentar eu estou sempre no topo do topo, o mais alto de todos."

BTS

Resumo

Neste trabalho introduzimos axiomas e definições da Teoria dos Conjuntos que nos permite enunciar e demonstrar a equivalência do Lema de Zorn com o Axioma da Escolha, o Teorema da Boa Ordenação de Zermelo e o Princípio Maximal de Hausdorff. Apresentamos também aplicações do Lema de Zorn na Matemática, especificamente na Álgebra Linear, na Análise Funcional, na Teoria de Anéis e Módulos e na Geometria Diferencial.

Palavras-chave: Lema de Zorn, Axioma da Escolha, Teorema da Boa Ordenação de Zermelo, Princípio Maximal de Hausdorff, Aplicações.

Abstract

In this work we introduce the axioms and definitions of Set Theory that enable us to enunciate and demonstrate the equivalence of Zorn's Lemma with Axiom of Choice, Zermelo's Well-Ordering Theorem, and Hausdorff's Maximal Principle. Additionally, we present applications of Zorn's Lemma in Mathematics, specifically in Linear Algebra, Functional Analysis, Rings and Modules Theory, and Differential Geometry.

Keywords: Zorn's Lemma, Axiom of Choice, Zermelo's Well-Ordering Theorem, Hausdorff Maximal Principle, Applications.

Sumário

Introdução

A Teoria dos Conjuntos, inicialmente desenvolvida por Georg Cantor no fim do século XIX, foi axiomatizada por Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel na primeira metade do século XX. Tal axiomatização ficou conhecida como *sistema Zermelo-Fraenkel*, ou *sistema ZF*, e estabeleceu os princípios fundamentais da Teoria dos Conjuntos.

Um importante teorema da Teoria dos Conjuntos é conhecido como Lema de Zorn, que garante a existência de um elemento maximal em um conjunto parcialmente ordenado onde toda cadeia nesse conjunto tem uma cota superior. Na época da formulação dada por Max Zorn, diversos outros estudos sobre princípios maximais estavam sendo feitos.

Este trabalho tem como objetivo apresentar, demonstrar e fazer aplicações do Lema de Zorn e visa oferecer uma compreensão da relevância do Lema de Zorn em diferentes áreas da Matemática. A metodologia apresentada nesta pesquisa consiste predominantemente na revisão bibliográfica, explorando as contribuições já existentes sobre o Lema de Zorn e suas consequências.

No capítulo 1, introduzimos os axiomas do sistema ZF, assim como definições e teoremas decorrentes da Teoria dos Conjuntos. Essa fundamentação possibilita a compreensão e formulação do Lema de Zorn que é abordado posteriormente.

No capítulo 2, enunciamos e demonstramos o Lema de Zorn a partir da sua equivalência com o Axioma da Escolha, o Teorema da Boa Ordenação de Zermelo e o Princípio Maximal de Hausdorff.

De posse do Lema de Zorn, no capítulo 3, provamos que ele garante a existência de elementos maximais em quatro diferentes áreas da Matemática: na Álgebra Linear, na Análise Funcional, na Teoria de Anéis e Módulos e na Geometria Diferencial; além de apresentarmos duas aplicações do Teorema da Boa Ordenação de Zermelo. Dessa forma, mostramos a importância do Lema de Zorn para a Matemática.

1 Desenvolvimentos Preliminares

Neste capítulo introduzimos axiomas e definições da Teoria dos Conjuntos que servem como base para o capítulo seguinte.

1.1 Teoria dos Conjuntos

Um conjunto é uma lista ou coleção formada por objetos bem definidos, esses objetos são chamados de elementos ou membros. Entre um conjunto e seus elementos existe uma relação de pertinência, quando um elemento arbitrário x pertence a um conjunto A escreve-se: $x \in A$, essa relação é definida em (HALMOS, 2001) como o axioma a seguir:

Axioma 1 (Axioma da Especificação)**.** *Para todo conjunto A e toda condição $S(x)$ corresponde um conjunto B cujos elementos são exatamente aqueles elementos x de A para os quais $S(x)$ é válida, ou seja, $B = \{x \in A : S(x)\}$.*

Quando x não satisfaz a condição $S(x)$ escreve-se que $x \notin B$. Assim, quando nenhum elemento de A satisfaz $S(x)$, o conjunto B não possui elemento algum e é enunciado a partir do axioma da existência.

Axioma 2 (Axioma da Existência)**.** *Existe um conjunto $B = \{x : x \neq x\} = \emptyset$, denominado conjunto vazio.*

O seguinte axioma pode ser encontrado em (JECH, 2003):

Axioma 3 (Axioma da Extensão)**.** *Dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles possuem os mesmos elementos, isto é, $\forall A, \forall B, A = B \Leftrightarrow (\forall z, z \in A \Leftrightarrow z \in B)$.*

Os dois últimos axiomas podem ser utilizados para provar o teorema a seguir:

Teorema 1.1. *O conjunto vazio é único.*

Demonstração: Utilizando o axioma da extensão queremos provar que $A = B$ é verdade e, portanto, o conjunto vazio é único. Seja $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$. Suponha, por contradição, que existe $x \in A$ tal que $x \notin B$, que é impossível pois o axioma da existência garante que $A = \emptyset$ não possui elementos, logo a suposição é falsa. Suponha agora, por contradição, que existe $x \in B$ tal que $x \notin A$, que também é impossível, pois o axioma da existência garante que $B = \emptyset$ não possui elementos, logo a suposição também é falsa. Portanto, $A = B$, logo, o conjunto vazio é único.

$\blacksquare$

A seguir em (HALMOS, 2001), temos:

Axioma 4 (Axioma da União)**.** *Para toda coleção de conjuntos existe um conjunto que contém todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos da dada coleção, ou seja,*

$$U = \{x \in U : x \in A \textit{ para algum } A \textit{ em } \mathcal{C}\},$$

onde $\mathcal{C}$ *é uma coleção.*

Existe pelo menos um conjunto A com as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \in A$;
2. se $x \in A$ então $(x \cup \{x\}) \in A$.

Isto é, existe pelo menos um conjunto que é indutivo, como é afirmado pelo axioma do infinito em (JECH, 2003).

Axioma 5 (Axioma do Infinito)**.** *Existe um conjunto indutivo.*

Sejam A e B conjuntos, diz-se que B é um subconjunto de A quando todos os elementos de B também forem elementos de A e denota-se por $B \subset A$, em outras palavras, B é parte de A. Um subconjunto B é dito subconjunto próprio ou parte própria de A se $B \subset A$ e $B \neq A$. De posse disso, temos:

Teorema 1.2. *O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.*

Demonstração: Sejam A um conjunto arbitrário e $B = \emptyset$. É necessário mostrar que $B \subset A$. Uma vez que o conjunto vazio não possui elemento algum, não há elementos em B que não sejam elementos de A, logo $B \subset A$. Portanto, $\emptyset$ é subconjunto de A, para qualquer que seja A.

■

De acordo com (JECH, 2003) o conjunto das partes tem o seguinte:

Axioma 6 (Axioma do Conjunto das Partes)**.** *Para algum conjunto* A *existe um conjunto* $B = \mathcal{P}(A)$*, o conjunto de todas os subconjuntos de* A*.*

Em outras palavras, o axioma do conjunto das partes quer dizer que dado um conjunto A, o conjunto formado pelos subconjuntos de A é indicado por $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}$, ou seja, $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto das partes de A. Assim, conforme (LIMA, 2014), $\mathcal{P}(A)$ nunca é vazio, pois nele existe pelo menos $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $A \in \mathcal{P}(A)$.

Sejam A, B conjuntos, a intersecção de conjuntos é a parte comum entre eles, isto é, $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$, quando $A \cap B = \emptyset$ diz-se que A e B são disjuntos. Já a união dos dois conjuntos é formada pelos elementos de A e os elementos de B, ou seja, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$. A diferença entre esses dois conjuntos é dada pelos elementos que estão em A mas não estão em B, denotada por $A - B = \{x : x \in A$ e $x \notin B\}$.

Um importante conceito no estudo de conjuntos é o de par ordenado. Ele estabelece que dados dois objetos, x e y, um par ordenado é formado ao selecionar um desses objetos, por exemplo, x para ser a primeira coordenada e o objeto y para ser a segunda coordenada, assim, ele é denotado por (x, y). A partir desse conceito é possível estabelecer a operação do produto cartesiano entre dois conjuntos como em (LIPSCHUTZ, 1973).

Definição 1.3 (Produto Cartesiano)**.** *Sejam dois conjuntos A e B. O produto cartesiano de A e B, ou conjunto produto de A e B, consiste de todos os pares ordenados (x, y), onde $x \in A$ e $y \in B$. É denotado por*

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Baseado no conceito de par ordenado e na definição de produto cartesiano, pode-se introduzir o conceito de relação definido em (MUNKRES, 2000).

Definição 1.4 (Relação)**.** *Uma relação entre os conjuntos A e B é um subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$, denotada por xRy onde $(x, y) \in R$.*

Seja $R \subset (A \times B)$ uma relação. Um conjunto $X \subset A$, dado por todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R, ou seja, $X = \{x : x \in A, (x, y) \in R\}$ é o domínio da relação R de A para B. Um conjunto $Y \subset B$, dado por todos os segundos elementos da relação R , isto é, $Y = \{y : y \in B, (x, y) \in R\}$.

Inspirado pela definição de relação, (LIPSCHUTZ, 1973) definiu uma relação inversa da seguinte forma: toda relação R entre A e B tem uma relação inversa R^{-1} entre B e A, definida por $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$.

A partir da definição de relação pode-se construir o conceito de função, pois uma função f de A para B é um subconjunto de $A \times B$ tal que cada elemento do conjunto A corresponde, de alguma forma, a um único elemento do conjunto B. Essa correspondência é chamada de função e denota-se por $f : A \longrightarrow B$.

De acordo com (LIMA, 2014), as definições de domínio de uma função, contra-domínio, gráfico de uma função e família são dadas da seguinte forma: o conjunto A é denominado o domínio da função f, ou seja, onde a função é definida; B é chamado contradomínio, isto é, o conjunto onde a função toma valores e f é a regra que permite associar a cada elemento de A um único elemento de B. Se $x \in A$, o elemento de B que corresponde a x é denominado imagem de x e é denotado por $f(x)$ e o conjunto $f(A) \subset B$ é chamado de imagem de f.

O gráfico de uma função $f : A \longrightarrow B$ é definido por

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B : x \in A, y = f(x)\}.$$

Daí tem-se que duas funções são iguais se, e somente se, possuem o mesmo gráfico. A restrição de uma função $f : A \longrightarrow B$ a um subconjunto $X \subset A$ é a função $f\big|_X : X \longrightarrow B$, definida por $f\big|_X(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Uma família é uma função $\mathbf{x}$ onde o seu domínio é dado por um conjunto I, chamado de conjunto de índices, e seu contradomínio é dado por X, chamado de conjunto indexado. O valor que $\mathbf{x}$ recebe em cada $\lambda \in I$ é denominado termo da família. Usualmente, os termos são indicados por $\mathbf{x}_\lambda$ e desta forma, a família $\mathbf{x}$ é representada por $\{\mathbf{x}_\lambda\}_{\lambda \in I}$. Quando para cada $\lambda \in I$ faz-se corresponder um conjunto A_λ, diz-se que $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma família de conjuntos com índices em I.

Retomando o conceito de relação, tem-se que uma relação pode ter as seguintes propriedades:

1. reflexividade: $\forall x \in A, (x, x) \in R \subset A \times A$;
2. transitividade: $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$;
3. simetria: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$;
4. antissimetria: $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$.

Uma **ordem parcial** em um conjunto A é uma relação, agora denotada por $\leq$, em A tal que essa relação é reflexiva, transitiva e antissimétrica. Se uma relação $\leq$ em A define uma ordem parcial em A, então isso significa que para todo $(x, y) \in A$ tem-se que $x \leq y$. A partir disso pode-se definir um conjunto parcialmente ordenado:

Definição 1.5 (Conjunto parcialmente ordenado)**.** *Um conjunto A, com uma relação $\leq$, é chamado conjunto parcialmente ordenado e pode ser denotado por $(A, \leq)$.*

Dois elementos x e y, num conjunto parcialmente ordenado, são ditos **não comparáveis** quando $x \not\leq y$ e $y \not\leq x$. Se uma relação R num conjunto A define uma ordem parcial em A, R^{-1} também define uma ordem parcial em A, chamada **ordem inversa**. Em outras palavras, por exemplo, se $\leq$ é uma relação de ordem no conjunto A, a relação inversa, isto é, $\geq$, é também uma ordem parcial em A.

Exemplo 1.6. *A relação de inclusão é uma ordem parcial. A relação $\subset$ é reflexiva, pois $A \subset A$, para qualquer conjunto A; antissimétrica, pois se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$ e; transitiva, pois se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.*

Sejam $(A, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e B um subconjunto de A. Como a relação $\leq$ em A é uma relação de ordem parcial, tem-se que se $x, y \in B$ então $x \leq y$. Desta forma, o par ordenado $(B, \leq)$ é chamado subconjunto parcialmente ordenado de $(A, \leq)$.

Uma **ordem total** em um conjunto A é uma relação $\leq$ em A, tal que essa relação é de ordem parcial e para cada $(x, y) \in A$ tem-se $x < y$ ou $x > y$ ou $x = y$, isto é, a relação $\leq$ em A é reflexiva, transitiva e antissimétrica e seus elementos são comparáveis. A partir disso pode-se definir um conjunto totalmente ordenado, também denominado de cadeia.

Definição 1.7 (Cadeia)**.** *Um conjunto A munido de uma ordem total é chamado de cadeia.*

Exemplo 1.8. *A relação $\leq$ no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é uma ordem total. Ela é reflexiva, pois para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n$; transitiva, pois para todo $n, m, p \in \mathbb{N}$ se $n \leq m$ e $m \leq p$, então $n \leq p$; antissimétrica, pois para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se $n \leq m$ e $m \leq n$, então $n = m$ e; para todo $n, m \in \mathbb{N}$ então $n \leq m$ ou $m \leq n$.*

Um outro exemplo de cadeia pode ser encontrado em (LIPSCHUTZ, 1973):

Exemplo 1.9. *Uma união $\bigcup_{i \in I} A_i$ é totalmente ordenada, onde $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de conjuntos totalmente ordenados de pares disjuntos. Assim, seja $a, b \in \bigcup_{i \in I} A_i$, existe $j, k \in I$ tal que $a \in A_j$ e $b \in A_k$, se $j < k$, então $a < b$ e se $j = k$ então a e b são ordenados pela ordenação de A_j.*

Dado um conjunto ordenado $(A, \leq)$, se existir um $x \in A$ tal que, para todo $y \in A$, tem-se $x \leq y$, então x é denominado **elemento mínimo** de A. De modo análogo, se existir um $y \in A$ tal que, para todo $x \in A$, tem-se $x \leq y$, então y é denominado **elemento máximo** de A.

Se $x, y \in A$ são ambos os elementos mínimos de A então tem-se que $x \leq y$ e $y \leq x$, que implica em $x = y$, desta forma, o elemento mínimo de A, quando ele existe, é único. Analogamente, se $x, y \in A$ são ambos os elementos máximos de A então tem-se que $y \leq x$ e $x \leq y$, que implica em $x = y$, assim, o elemento máximo de A, quando ele existe, é único.

A partir disso pode-se definir os elementos minimal e maximal de um conjunto.

Definição 1.10 (Elemento minimal)**.** *Sejam A um conjunto parcialmente ordenado e $x \in A$. Se $y \leq x$ implica em $y = x$, então x é elemento minimal de A.*

Definição 1.11 (Elemento maximal)**.** *Sejam A um conjunto parcialmente ordenado e $y \in A$. Se $y \leq x$ implica em $y = x$, então y é elemento maximal de A.*

As definições de elemento máximo e elemento maximal são importantes chaves para a demonstração do teorema a seguir, que pode ser encontrado em (LIPSCHUTZ, 1973).

Teorema 1.12. *Seja A um conjunto parcialmente ordenado. Se $y \in A$ é o elemento máximo de A, então y é elemento maximal de A, e o único.*

Demonstração: Suponha que y é um elemento máximo de A, isso significa que, para todo $x \in A$, temos que $x \leq y$. Agora suponha que existe um elemento $z \in A$ tal que $y < z$, isso contradiz a definição de elemento máximo, pois y deve ser maior ou igual a todos os elementos de A, incluindo z. Portanto, não pode existir nenhum elemento $z \in A$ que seja estritamente maior que y, logo y é elemento maximal de A. Para provar que y é o único elemento maximal de A, suponha que exista um outro elemento maximal $z \in A$. Pela definição de elemento maximal, isso significa que não existem elementos em A maiores que z, ou seja, para todo $y \in A$ tem-se $y \leq z$. Como $y \in A$ é o elemento máximo de A, temos que $z \leq y$. Então como $y \leq z$ e $z \leq y$ tem-se, pela antissimetria de uma ordem parcial, que $y = z$. Logo, y é o único elemento maximal de A.

■

De modo similar ao teorema anterior, seja A um conjunto parcialmente ordenado, se $x \in A$ é o elemento mínimo de A, então x é um elemento minimal de A, e o único. A verificação pode ser feita de forma análoga a do teorema.

Segue-se daí em (MUNKRES, 2000) encontramos as definições de ínfimo e supremo de um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado. Sejam A um conjunto parcialmente ordenado e B um subconjunto de A. O subconjunto B é limitado inferiormente se existe $a \in A$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in B$; o elemento a é chamado cota inferior de B. Se o conjunto de todas as cotas inferiores de B tem um elemento máximo, este elemento é chamado ínfimo de B e denotado por $inf(B)$. O ínfimo de B pode ou não pertencer a B, quando pertence ele é o mínimo de B.

De modo análogo, o subconjunto B é limitado superiormente se existe $b \in A$ tal que $x \leq b$, para todo $x \in B$; o elemento b é chamado cota superior de B. Se o conjunto de todas as cotas superiores de B tem um elemento mínimo, este elemento é chamado supremo de B e é denotado por $sup(B)$. O supremo de B pode ou não pertencer a B, quando pertence ele é o elemento máximo de B.

A partir disso, em (SILVA, 2011) é demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 1.13. *Sejam C uma cadeia e $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ um subconjunto de C. Então existe x_i, com $1 \leq j \leq n$, tal que $x_i \leq x_j$, para todo $x_i \in B$. Portanto, qualquer subconjunto finito de uma cadeia possui uma cota superior.*

Demonstração: Utilizando o processo de indução sobre n, temos que quando $n = 1$ nada há para ser provado. Sejam

$$B = \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\} \text{ e } D = \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Pela hipótese de indução tem-se que existe x_j, com $1 \leq j \leq n$, tal que $x_i \leq x_j$ para todo $x_i \in D$. Como C é uma cadeia tem-se que $x_j \leq x_{n+1}$ ou $x_{n+1} \leq x_j$. Assim, existe x_j, com $1 \leq j \leq n+1$, tal que $x_i \leq x_j$, para todo $x_i \in B$.

$\blacksquare$

2 O Lema de Zorn e suas Equivalências

Neste capítulo apresentamos e provamos o Lema de Zorn através de sua equivalência com o Axioma da Escolha, o Teorema da Boa Ordenação de Zermelo e o Princípio Maximal de Hausdorff.

2.1 O Lema de Zorn

Em 1934, Max Zorn apresentou um artigo à AMS- American Mathematical Society (Sociedade Americana de Matemática) com o título “A remark on method in transfinite algebra”, que foi publicado no ano seguinte. Em (ZORN, 1935) ele apresenta as duas definições a seguir:

Definição 2.1. *Um conjunto $\mathcal{B} = \{B\}$ de conjuntos B é chamado uma cadeia se para cada dois conjuntos B_1, B_2, ou $B_1 \subset B_2$ ou $B_2 \subset B_1$*

Definição 2.2. *Um conjunto $\mathcal{U}$ de conjuntos A é dito fechado (fechado à direita), se ele contém a união $\sum_{B \in \mathcal{B}} B$ de todas cadeia $\mathcal{B}$ contida em $\mathcal{U}$.*

Assim, ele formulou seu princípio maximal da seguinte forma:

PM. *Em um conjunto fechado $\mathcal{U}$ de conjuntos A existe no mínimo um, $A*$, não contido como um subconjunto próprio em qualquer outro $A \in \mathcal{U}$.*

Ele ainda propôs que em um artigo futuro ele discutiria as equivalências entre o seu princípio maximal, o Axioma da Escolha e o Teorema da Boa Ordenação.

De acordo com (MOORE, 1982), Chevalley, amigo de Max Zorn, introduziu o princípio maximal de Zorn ao grupo de matemáticos franceses de pseudônimo Nicolas Bourbaki. Os Bourbakis, por sua vez, se referiram a este princípio maximal, no primeiro livro publicado por eles em 1939, da seguinte forma:

Proposição 2.3. *Seja E um conjunto ordenado no qual todo subconjunto bem ordenado é limitado superiormente; então E é tem um elemento maximal.*

Em 1940, John Tukey utilizou o Lema de Zorn como um axioma e o enunciou de quatro formas equivalentes. Enunciamos aqui apenas a primeira forma dada em (TUKEY, 1941):

Teorema 2.4. *Um sistema ordenado, onde cada um de seus subsistemas lineares tem uma cota superior, contém um elemento maximal.*

A hipótese do Lema de Zorn garante a existência da cota superior para uma cadeia $\mathcal{C}$ em um conjunto parcialmente ordenado X. E a sua conclusão é a existência de um elemento m em X com a propriedade que se $m \leq x$ então tem-se $m = x$.

Enunciamos a seguir o Lema de Zorn como encontrado em (HALMOS, 2001):

Teorema 2.5 (Lema de Zorn)**.** *Se X é um conjunto parcialmente ordenado tal que para toda cadeia em X há uma cota superior, então X contém um elemento maximal.*

2.2 As equivalências do Lema de Zorn

Nesta seção provamos algumas das equivalências do Lema de Zorn, especificamente a sua equivalência com o Axioma da Escolha, o Teorema da Boa Ordenação de Zermelo e o Princípio Maximal de Hausdorff.

2.2.1 Axioma da Escolha

A primeira referência específica ao Axioma da Escolha, de acordo com (RUBIN; RUBIN, 1970), foi feita em 1890 por George Peano, em um de seus trabalhos, ao provar um teorema de existência para equações diferenciais ordinárias. O axioma também foi utilizado anteriormente por Georg Cantor, no entanto ele não foi especificamente mencionado. Em 1904, Ernst Zermelo deu nome ao Axioma da Escolha e provou a sua equivalência com o Princípio da Boa Ordenação.

Enunciamos a seguir o Axioma da Escolha como encontrado em (LIPSCHUTZ, 1973).

Axioma 7 (Axioma da Escolha)**.** *Se $\mathcal{A}$ é um família de conjuntos não vazios, existe uma função f tal que, para todo $X \in \mathcal{A}$, $f(X) \subset X$.*

Intuitivamente, f escolhe um elemento de cada subconjunto não vazio de uma família $\mathcal{A}$, ou seja, $f : \mathcal{A} \to X$, sendo assim chamada de função escolha.

A demonstração da equivalência entre o Axioma da Escolha e o Lema de Zorn é uma adaptação das demonstrações encontradas em (GARLING, 2013), (KOMJÁTH; TOTIK, 2006) e (HALMOS, 2001). Provamos primeiro que o Axioma da Escolha é uma consequência do Lema de Zorn e em seguida que a sua recíproca é verdadeira.

Para estabelecer que o Lema de Zorn implica o Axioma da Escolha consideramos X um conjunto não vazio e $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família de conjuntos não vazios tal que $I = \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$. Definimos $\mathcal{E}$ como o conjunto de funções com domínio $Y \subset I$ e $f(i) \in A_i$ para todo $i \in Y$, isto é,

$$\mathcal{E} = \{f : Y \longrightarrow A_i : Y \subset I, f(i) \in A_i \text{ para todo } i \in Y\}.$$

Sejam $f, g \in \mathcal{E}$ funções onde $Y \subset I$ é o domínio de f e $Y_\alpha \subset I$ é o domínio de g. Considere $f \leq g$ se:

1. $Y \subset Y_\alpha$;

2. $f(i) = g(i)$, para todo $i \in Y$.

Proposição 2.6. *$\mathcal{E}$ é parcialmente ordenado.*

Demonstração: Note que o conjunto $\mathcal{E}$ não é vazio, pois contém pelo menos uma função para cada $A_i \in \{A_i\}i \in I$, que é não vazio. A relação é reflexiva pois como $Y \subset Y$ e $f = f$ então $f(i) = f(i)$ para todo $i \in Y$. A propriedade da transitividade é satisfeita pois se $f \leq g$ então $Y \subset Y_{\alpha_1}$ e $f(i) = g(i)$ para todo $i \in Y$ e se $g \leq h$ então $Y_{\alpha_1} \subset Y_{\alpha_2}$ e $g(i) = h(i)$ para todo $i \in Y$, assim tem-se $f \leq g \leq h$, então $Y \subset Y_{\alpha_1} \subset Y_{\alpha_2}$ e $f(i) = g(i) = h(i)$ para todo $i \in Y$. Note ainda que se $f \leq g$ e $g \leq f$ então $Y \subset Y_{\alpha_1}$ e $Y_{\alpha_1} \subset Y$, logo $Y = Y_{\alpha_1}$ e $f(i) = g(i)$ para todo $i \in Y$, assim $f = g$, que satisfaz a propriedade da antissimetria.

■

Proposição 2.7. *Toda cadeia em $\mathcal{E}$ possui cota superior.*

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia em $\mathcal{E}$, assim, para $f, g \in \mathcal{C}$ temos $f \leq g$ ou $g \leq f$. Defina p uma função cujo domínio é a união dos domínios das funções f pertencentes a $\mathcal{C}$, ou seja, $Y_\beta = \bigcup_{Y \in I} Y$, e para cada $i \in Y_\beta$ tem-se $f(i) = p(i)$. Como $Y \subset Y_\beta$ então p é cota superior de $\mathcal{C}$ e $p \in \mathcal{E}$.

■

Como $\mathcal{E}$ é parcialmente ordenado e toda cadeia $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ tem cota superior, temos, pelo Lema de Zorn, que $\mathcal{E}$ tem um elemento maximal, digamos h.

Teorema 2.8. *Se o Lema de Zorn é válido então o Axioma da Escolha também é válido.*

Demonstração: Seja Y_δ o domínio de h. Devemos mostrar que $Y_\delta = I$. Se $Y_\delta \neq I$ então existe $i \in I$ tal que $i \in I - Y_\delta$. Seja x um elemento de A_i e seja r uma função escolha tal que r é uma extensão de h, com domínio $Y_\lambda = Y_\delta \cup \{i\}$ e $r(i) = x$. Assim, $r(i) = x$ para todo $i \in Y_\lambda$. Note que $Y_\delta \subset Y_\lambda$ e $r(i) \in A_i$ para todo $i \in Y_\lambda$. Então $r \in \mathcal{E}$, o que contradiz a maximalidade de h. Portanto, $Y_\delta = I$ e $h(I) \subset I$.

■

Antes de provarmos que o Lema de Zorn é uma consequência do Axioma da Escolha, precisamos pontuar algumas definições.

Seja X um conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadeia $Y \subset X$ tem uma cota superior. Considere o conjunto de todas as cadeias em X, isto é,

$$S = \{Y : Y \subset X, \text{ onde Y é uma cadeia}\}$$

e ordene S por inclusão de conjuntos. Defina

$$T = \{x \in X : (Y \cup \{x\}) \subset S\},$$

donde tem-se que $Y \subset T$ para todo $Y \in S$. Como queremos provar que o Lema de Zorn é uma consequência do Axioma da Escolha, vamos considerar que o Axioma da Escolha é válido. Então, sejam $f : \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \longrightarrow X$ uma função escolha e $g : S \longrightarrow S$ definida como segue

$$g(Y) = \begin{cases} Y, & \text{se} \quad (T - Y) = \emptyset \\ Y \cup \{f(T - Y)\}, & \text{se} \quad (T - Y) \neq \emptyset. \end{cases}$$

A função g está bem definida pois $Y \cup \{f(T - Y)\} \subset S$.

Segue da definição de T que $T - Y = \emptyset$ se, e somente se, Y é um conjunto maximal. De fato, suponha que $Y \subset S$ é maximal e seja $x \in T$, então $x \in X$ e $Y \cup \{x\} \subset S$; como $Y \subset Y \cup \{x\}$ e Y é maximal então $Y \cup \{x\} \subset Y$, dessa forma tem-se $Y = Y \cup \{x\}$, logo $Y = T$ e, portanto, $T - Y = \emptyset$. Reciprocamente, suponha que $T - Y = \emptyset$, assim $T = Y$, e seja $A \subset S$ tal que $Y \subset A$; seja a um elemento de A, assim $Y \cup \{a\} \subset A$ e $Y \cup \{a\} \subset S$, como por hipótese $T = Y$ então se $a \in T$ tem-se $a \in Y$, dessa forma $A \subset Y$ e, portanto, $A = Y$, logo Y é maximal em S.

Assim devemos provar que existe $Y \subset S$ tal que $g(Y) = Y$.

Definição 2.9 (Torre)**.** *Seja $\mathcal{T}$ uma subcoleção de S, $\mathcal{T}$ é uma torre se:*

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$;
2. *se* $Y \in \mathcal{T}$, *então* $g(Y) \in \mathcal{T}$;
3. *se* C *é uma cadeia em* $\mathcal{T}$, *então* $\bigcup_{Y \in C} Y \in \mathcal{T}$.

Note que o conjunto S é uma torre pois $\emptyset \in S$; pela definição da função g, se $Y \subset S$ então $g(Y) \in S$ para ambos os casos e; se $C \in S$ é uma cadeia tal que $C = \{Y_i\}_{i \in I}$, então, para todo $i \in I$, $Y_i \subset X$ assim $\bigcup_{i \in I} Y_i \subset X$, como $Y_i \subset S$ é cadeia, temos que $\bigcup_{i \in I} Y_i \in S$.

Em (HALMOS, 2001), o autor define que a interseção de uma coleção de torres é ela própria uma torre, segue-se em particular que se $\mathcal{T}_0$ é a interseção de todas as torres então $\mathcal{T}_0$ é a menor torre.

Seja $\mathcal{T}_0$ a menor torre em S. Um conjunto $C \in \mathcal{T}_0$ é comparável se para todo $Y' \in \mathcal{T}_0$ tem-se $Y' \subset C$ ou $C \subset Y'$.

Proposição 2.10. *$\mathcal{T}_0$ é uma cadeia.*

Demonstração: Suponha que $Y' \in \mathcal{T}_0$ e seja Y' um subconjunto próprio de C. Se C é comparável então $g(Y') \subset C$ ou $C \subset g(Y')$, com $C \neq g(Y')$. Pela definição de g, quando C é subconjunto próprio de $g(Y')$, tem-se $g(Y') = Y' \cup \{f(T' - Y')\}$. Dessa forma, existe $y \in g(Y')$ tal que $y \notin C$ e existe $x \in C$ tal que $x \notin Y'$. Assim, $x \in g(Y') = Y' \cup \{f(T' - Y')\}$ com $x \in f(T' - Y')$. Como $x \in C$ então $x \neq y$ e $y \in g(Y') = Y' \cup \{x\}$, logo $y \in D \subset C$, que contradiz o fato de que $y \notin C$, logo $g(Y') \subset C$.

Considere a coleção $\mathcal{V}$ de todos os conjuntos $Y' \in \mathcal{T}_0$ para os quais $Y' \subset C$ ou $g(C) \subset Y'$, isto é,

$$\mathcal{V} = \{Y' \in \mathcal{T}_0 : Y' \subset C \text{ ou } g(C) \subset Y'\},$$

onde C é um conjunto comparável em $\mathcal{T}_0$. Note que se $Y' \in \mathcal{V}$, como $C \subset g(C)$ tem-se $Y' \subset g(C)$ ou $g(C) \subset Y'$.

Vamos provar que $\mathcal{V}$ é uma torre. A primeira condição é satisfeita, pois $\emptyset \subset C$ fixado e $\emptyset \in \mathcal{T}_0$. Para provar a segunda condição temos três casos: se Y' é subconjunto próprio de C, então $g(Y') \subset C$, de fato, já que $g(Y') \subsetneq C$ ou $C \subsetneq g(Y')$, mas $C \subsetneq g(Y')$ não ocorre, pois $Y' \subsetneq C$ e, pela definição de g, $g(Y') = Y'$ ou $g(Y')$ é a união de Y' com um ponto, assim $g(Y') \subset C$, segue-se daí que $g(Y') \in \mathcal{V}$; se $Y' = C$, então $g(Y') = g(C)$, ou seja, $g(C) \subset g(Y')$ e, portanto, $g(Y') \in \mathcal{V}$; se $C \subsetneq Y'$, então $g(C) \subset Y'$, mas $Y' \subset g(Y')$, portanto $g(Y') \in \mathcal{V}$. Para a terceira condição, tomemos $\mathcal{C}$ uma cadeia em $\mathcal{V}$ e provemos que $\bigcup_{\mathcal{C} \in \mathcal{V}} \mathcal{C} \in \mathcal{V}$, de fato, se $Y' \subset C$, para todo $Y' \in \mathcal{C}$, então $\bigcup_{\mathcal{C} \in \mathcal{V}} \mathcal{C} \in C$, agora, se existe $Y'_0 \in \mathcal{C}$ tal que $Y'_0 \subsetneq C$, como $Y'_0 \in \mathcal{V}$, segue-se que $g(C) \in Y'_0 \in \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathcal{V}} \mathcal{C} \in \mathcal{V}$, logo a terceira condição sobre torres é satisfeita. Portanto, $\mathcal{V}$ é uma torre contida em $\mathcal{T}_0$. Note que como $\mathcal{T}_0$ é a menor torre em S, então $\mathcal{V} = \mathcal{T}_0$.

Dessa forma, para cada conjunto comparável C tem-se que o conjunto $g(C)$ também é comparável. Considere o conjunto

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{T}_0 : C \text{ é comparável}\}.$$

Note que $g(Y') \subset \mathcal{C}$. Seja C uma cadeia em $\mathcal{C}$, como $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}_0$, tem-se que a união dos subconjuntos de C estão em $\mathcal{T}_0$. Seja $E \in \mathcal{T}_0$ temos que $C \in E$ ou $E \in C$. Se $C \in E$ então $C_i \subset E$ para todo $i \in I$ e, portanto, $\bigcup_{i \in I} C_i \subset E$. Se $E \in C$ então $E \subset \bigcup_{i \in I} C_i \subset C$. Logo $\bigcup_{i \in I} C_i \in \mathcal{C}$. Portanto, $\mathcal{C}$ é uma torre. Dessa forma, os conjuntos comparáveis em $\mathcal{T}_0$ constituem uma torre, assim $\mathcal{T}_0$ é uma cadeia. ∎

Teorema 2.11. *Se o Axioma da Escolha é válido então o Lema de Zorn também é válido.*

Demonstração: Seja $\mathcal{A} = \bigcup_{Y \in \mathcal{T}_0} Y$, note que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_0$, $g(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}_0$, $g(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ e, pela definição da função g temos, $\mathcal{A} \subset g(\mathcal{A})$, dessa forma $g(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Considere o conjunto

$$T_\alpha = \{x \in X : \mathcal{A} \cup \{x\} \in S\}.$$

Como $g(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, pela definição de g, temos que $T_\alpha - \mathcal{A} = \emptyset$, logo $T_\alpha = \mathcal{A}$. Seja $B \subset S$ tal que $\mathcal{A} \subset B$. Dado $x \in B$ temos que $\mathcal{A} \cup \{x\} \subset B$ e $\mathcal{A} \cup \{x\} \subset S$. Assim, $x \in T_\alpha = \mathcal{A}$ e, portanto, $B \subset \mathcal{A}$. Dessa forma $\mathcal{A} = B$, logo $\mathcal{A}$ é maximal em S.

Seja $a \in X$ tal que $x \leq a$ com x maximal em $\mathcal{A}$. Então o conjunto $\mathcal{A} \cup \{a\}$ é uma cadeia em X. Como $\mathcal{A}$ é maximal em S, temos que $a \in \mathcal{A}$, logo $a \leq x$ e assim tem-se que $a = x$. Portanto x é maximal em X.

■

2.2.2 Teorema da Boa Ordenação de Zermelo

O princípio da boa ordenação já era conhecido antes mesmo de Zermelo provar que é uma consequência do axioma da escolha. Ele era considerado autoevidente. De acordo com (RUBIN; RUBIN, 1970), outros autores, como Cantor, já utilizavam esse princípio em seus trabalhos.

Segundo (HALMOS, 2001), um conjunto parcialmente ordenado pode ou não possuir um elemento mínimo, e quando ele possui, este elemento mínimo pode não estar contido em algum subconjunto.

Seja X um conjunto parcialmente ordenado, é dito **bem ordenado** se para todo $Y \subset X$, tal que $Y \neq \emptyset$, Y possui um elemento mínimo. A ordem do conjunto X é chamada de **boa ordenação**.

Enunciamos a seguir o Teorema da Boa Ordenação de Zermelo formalmente.

Teorema 2.12 (Teorema da Boa Ordenação de Zermelo)**.** *Todo conjunto pode ser bem ordenado.*

A demonstração de que o Teorema da Boa Ordenação de Zermelo é uma consequência do Lema de Zorn é uma adaptação das demonstrações encontradas em (GARLING, 2013), (LIPSCHUTZ, 1973) e (SILVA, 2011).

Seja X um conjunto qualquer, tal que $X \neq \emptyset$. Seja $Y \subset X$, onde $Y \neq \emptyset$, podemos construir um conjunto $\mathcal{A}$ de todos os conjuntos bem ordenados Y de X. Assim, temos:

$$\mathcal{A} = \{(Y, \leq_Y) : Y \subset X, Y \neq \emptyset\},$$

onde a notação $\leq_Y$ define a ordem em Y.

Definimos uma relação em $\mathcal{A}$ por $(Y_1, \leq_{Y_1}) \leq (Y_2, \leq_{Y_2})$ se, e somente se, $(Y_1, \leq_{Y_1})$ é um segmento inicial de $(Y_2, \leq_{Y_2})$. Em outras palavras, isso significa que:

Definição 2.13. *Seja* $(Y_1, \leq_{Y_1}), (Y_2, \leq_{Y_2}) \in \mathcal{A}$*. Então* $(Y_1, \leq_{Y_1}) \leq (Y_2, \leq_{Y_2})$ *se, e somente se,*

1. $Y_1 \subset Y_2$*;*
2. *se* $x, y \in Y_1$*, então* $x \leq_{Y_1} y$ *se, e somente se,* $x \leq_{Y_2} y$*:*
3. *se* $x \in Y_1$ *e* $y \in (Y_2 - Y_1)$*, então* $x \leq_{Y_2} y$*.*

Proposição 2.14. $\mathcal{A}$ *é não vazio e parcialmente ordenado.*

Demonstração: Provaremos primeiro que $\mathcal{A}$ é não vazio e $(\mathcal{A}, \leq)$ é parcialmente ordenado: como o conjunto X é não vazio, existe um $x \in X$ tal que o conjunto unitário $\{x\} \subset X$. Seja $\{x\} = \mathcal{X}$, então $a \leq_{\mathcal{X}} b$ se, e somente se, $a = b$. Queremos provar que $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$ é bem ordenado, ou seja, $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$ é uma cadeia com um elemento mínimo. Sejam $a, b, c \in \mathcal{X}$, quando $a = x$, tem-se que $a \leq_{\mathcal{X}} a$, portanto a propriedade da reflexividade é satisfeita; se $a \leq_{\mathcal{X}} b$ e $b \leq_{\mathcal{X}} c$, segue que $a \leq_{\mathcal{X}} c$ pois $a = x = b$ e $b = x = c$ e assim a propriedade da transitividade é satisfeita; para $a \leq_{\mathcal{X}} b$ e $b \leq_{\mathcal{X}} a$ tem-se $a = x = b$, logo a propriedade da antissimetria também é satisfeita; para todo $a \in \mathcal{X}$, o conjunto $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$ é comparável pois $x = a$, logo $x \leq_{\mathcal{X}} a$ e então x é o elemento mínimo do conjunto. Dessa forma, $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$ é um conjunto bem ordenado de X e portanto $\mathcal{A}$ é não vazio.

Para provar que $(\mathcal{A}, \leq)$ é parcialmente ordenado mostraremos que as propriedades da reflexividade, transitividade e antissimetria são válidas para todo $(Y_1, \leq_{Y_1}), (Y_2, \leq_{Y_2})$, $(Y_3, \leq_{Y_3}) \in \mathcal{A}$: seja $(Y_1, \leq_{Y_1}) \leq (Y_1, \leq_{Y_1})$, então $Y_1 \subset Y_1$, assim para $x, y \in Y_1$ tem-se $x \leq_{Y_1} y$ se, e somente se, $x \leq_{Y_1} y$, que prova a reflexividade; seja $(Y_1, \leq_{Y_1}) \leq (Y_2, \leq_{Y_2})$, então $Y_1 \subset Y_2$, para $x, y \in Y_1$ tem-se $x \leq_{Y_1} y$ se, e somente se, $x \leq_{Y_2} y$ e seja $(Y_2, \leq_{Y_2}) \leq (Y_3, \leq_{Y_3})$, então $Y_2 \subset Y_3$, para $x, y \in Y_2$ tem-se $x \leq_{Y_2} y$ se, e somente se, $x \leq_{Y_3} y$, pela definição, $Y_1 \subset Y_2$ e $Y_2 \subset Y_3$ implica em $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3$ e, portanto, $Y_1 \subset Y_3$, pela transitividade da relação de inclusão, assim, para $x, y \in Y_1$ tem-se $x \leq_{Y_1} y$ se, e somente se, $x \leq_{Y_3} y$, para $x \in Y_1$ e $y \in Y_3 - Y_1$ tem-se $x \leq_{Y_3} y$, que termina a prova da transitividade; seja $(Y_1, \leq_{Y_1}) \leq (Y_2, \leq_{Y_2})$ e $(Y_2, \leq_{Y_2}) \leq (Y_1, \leq_{Y_1})$ então tem-se $Y_1 \subset Y_2$ e $Y_2 \subset Y_1$, assim para $x, y \in Y_1$ temos que $x \leq_{Y_1} y$ implica em $x \leq_{Y_2} y$, portanto $(Y_1, \leq_{Y_1}) = (Y_2, \leq_{Y_2})$ e a propriedade da antissimetria é válida.

■

Pela proposição anterior estabelecemos que $\leq$ é uma ordem parcial em $\mathcal{A}$. Para que o Lema de Zorn seja satisfeito, devemos mostrar que a proposição a seguir é válida.

Proposição 2.15. *Toda cadeia em* $\mathcal{A}$ *tem uma cota superior.*

Demonstração: Seja $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{C} = \{(Y_i, \leq_{Y_i}); i \in I\}$, isto é, $\mathcal{C}$ é uma cadeia em $\mathcal{A}$. Definiremos $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$. Suponha $a, b \in Y$, tem-se $a, b \in Y_j$ para algum $j \in I$ pois $\mathcal{C}$ é uma cadeia. Assim, $a \leq_Y b$ se, e somente se, $a \leq_{Y_j} b$. Seja $k \in I$, tal que $Y_j \subset Y_k$, então $a \leq_{Y_j} b$ se, e somente se, $a \leq_{Y_k} b$.

O conjunto $(Y, \leq_Y)$ é parcialmente ordenado pois como a relação $\leq_Y$ está bem definida, temos que para todo $x \in Y$, existe um Y_i tal que $x \in Y$, assim, como a relação de ordem $\leq_{Y_i}$ em Y_i é reflexiva, então $x \leq_Y x$ pois $x \leq_{Y_i} x$, mostra que a propriedade da reflexividade é válida; seja $x, y, z \in Y$ tal que $x \leq_Y y$ e $y \leq_Y z$, assim existe $Y_i, Y_j \in Y$ tal que $x \leq_{Y_i} y$ e $y \leq_{Y_j} z$ para $x, y \in Y_i$ e $y, z \in Y_j$, pela transitividade de $\leq_{Y_i}$ e $\leq_{Y_j}$ temos $x \leq_Y z$, que mostra que a propriedade da transitividade é válida; seja $x, y \in Y$ tal que $x \leq_Y y$ e $y \leq_Y x$, então existem $Y_i, Y_j \in Y$ tal que $x, y \in Y_i$ e $x, y \in Y_j$, assim $x \leq_{Y_i} y$ e $y \leq_{Y_j} x$, pela antissimetria de $\leq_{Y_i}$ e $\leq_{Y_j}$ concluimos que $x = y$ e $x = y \in Y$ e portanto $\leq_Y$ é antissimétrica.

Para todo $x, y \in Y$, ou $x \leq_Y y$ ou $y \leq_Y x$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia de $\mathcal{A}$, para $x \in Y_i \subset Y$ e $y \in Y_j \subset Y$, temos que Y_i e Y_j são comparáveis, assim, ou $(Y_i, \leq_{Y_i}) \leq_Y (Y_j, \leq_{Y_j})$ ou $(Y_j, \leq_{Y_j}) \leq_Y (Y_i, \leq_{Y_i})$. Para $Y_i \subset Y_j$ temos $(Y_i, \leq_{Y_i}) \leq_Y (Y_j, \leq_{Y_j})$, então $x \leq_{Y_i} y$ e $x \leq_Y y$; para $Y_j \subset Y_i$ temos $(Y_j, \leq_{Y_j}) \leq_Y (Y_i, \leq_{Y_i})$, então $y \leq_{Y_j} x$ e $y \leq_Y x$. Portanto, $(Y, \leq_Y)$ é uma cadeia.

Seja $A \subset Y$, $A \neq \emptyset$. Existe $Y_i \in \mathcal{C}$ para algum $i \in I$, tal que $A \cap Y_i \neq \emptyset$. Como Y_i é bem ordenado, existe um elemento mínimo $a \in A \cap Y_i$. Suponha que a não é elemento mínimo de A, então existe $b < a$ para algum $b \in A$. Note que pela definição de a, o elemento $b \notin Y_i$. Então existe $Y_j \in \mathcal{C}$, tal que $j \in I$ e $j \neq i$, onde $b \in Y_j - Y_i$. Então $a < b$ pela definição de $\leq_Y$, que é uma contradição. Logo a é elemento mínimo de A, assim $(Y, \leq_Y)$ é bem ordenado.

Relembre que $Y_i \subset Y$ para todo $i \in I$. Pelo fato de Y ser parcialmente ordenado, dado $j \in I$ e $a, b \in Y_j$ tem-se que $a \leq_{Y_j} b$ se, e somente se, $a \leq_Y b$. Dessa forma, como $\mathcal{C}$ é uma cadeia, para $a \in Y_j$ e $b \in (Y - Y_j)$, faremos $(Y - Y_j) = Y_k$ tal que $k \neq j$, assim $(Y_j, \leq_{Y_j}) \leq (Y_k, \leq_{Y_k})$ ou $(Y_k, \leq_{Y_k}) \leq (Y_j, \leq_{Y_j})$. Como $b \in Y_k$ então $b \notin Y_j$, assim $A_j \subset A_k$, logo $(Y_j, \leq_{Y_j}) \leq (Y_k, \leq_{Y_k})$. Pela definição, $a \leq_{A_k} b$ e portanto $a \leq_A b$. Dessa forma, para todo $i \in I$ tem-se $(Y_i, \leq_{Y_i}) \leq (Y, \leq_Y)$, logo $(Y, \leq_Y)$ é cota superior de $\mathcal{C}$.

■

De posse dos fatos de que $\mathcal{A}$ é parcialmente ordenado e toda cadeia $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ tem uma cota superior, temos, pelo Lema de Zorn, que $\mathcal{A}$ tem um elemento maximal, ou seja, existe $M \subset \mathcal{A}$ tal que $(M, \leq_M)$ é maximal.

Teorema 2.16. *Se o Lema de Zorn é válido então o Teorema da Boa Ordenação de Zermelo também é válido.*

Demonstração: Construiremos um conjunto L bem ordenado. Seja $L = \{M \cup \{x\}; x \in X\}$, como L é bem ordenado, tem-se, para $(L, \leq_L)$ e $a, b \in M$, $a \leq_L b$ se, e somente se, $a \leq_M b$ e, para $b = x$, $a \leq_L b$. Assim, como L é um conjunto bem ordenado de X, temos que $L \subset \mathcal{A}$. Pela construção de L, $M \subset L$, assim, $(M, \leq_M) \leq (L, \leq_L)$ implica que, pela maximalidade de $(M, \leq_M)$, $M = L$. Portanto, $x \in M$, dessa forma, $X \subset M$. Como provamos que $X \subset M$ e, pelo Lema de Zorn, $M \subset X$, então $X = M$. O que conclui que X é bem ordenado.

■

Para provar que a recíproca do teorema anterior é verdadeira adaptamos a demonstração dada em (KOMJÁTH; TOTIK, 2006).

Teorema 2.17. *Se o Teorema da Boa Ordenação de Zermelo é válido então o Lema de Zorn também é válido.*

Demonstração: Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadeia $Y \subset X$ possui uma cota superior. Pelo Teorema da Boa Ordenação, X pode ser bem ordenado como

$$X = \{x_\alpha : \alpha \leq \varphi\}.$$

Pode-se construir uma cadeia Y determinando com recursão transfinita se $x_\alpha \in Y$ vale. Primeiro, coloque x_0 em Y. Para $0 \leq \alpha$, adicione x_α em Y se, e somente se, x_α é maior que algum x_β selecionado em Y, com $\beta \leq \alpha$. Dessa forma Y é uma cadeia em X.

Pela hipótese do Lema de Zorn existe uma cota superior x_γ para Y. Afirmamos que x_γ é elemento maximal. Assuma que não. Então $x_\gamma \leq x_\delta$. Quando consideramos x_δ, observamos que este era maior que todo x_β selecionado em Y com $\beta \leq \gamma$, então devemos tê-lo escolhido em Y, isto é, $x_\delta \leq x_\gamma$. Assim, $x_\delta = x_\gamma$. Portanto, x_γ é maximal em X.

■

2.2.3 Princípio Maximal de Hausdorff

De acordo com (MOORE, 1982), a formulação explícita de um princípio maximal ocorreu pela primeira vez em um trabalho de Felix Hausdorff, em 1909. Durante três décadas, múltiplas descobertas simultâneas envolvendo princípios maximais, tais como o Lema de Zorn e proposições similares foram feitas de formas independentes por matemáticos da época.

Em 1909, em um artigo publicado, Hausdorff enunciou seu princípio maximal. Em 1914, em seu livro *Grundzüge der Mengenlehre* (Fundamentos da Teoria dos Conjuntos), o resultado foi aperfeiçoado. Ele não tinha pretenção de que suas proposições fossem tidas como um axioma. Em 1927, na segunda edição de seu livro, ele estabeleceu a formulação do seu princípio maximal e do princípio minimal correspondente. Ainda nesta edição de

Grundzüge der Mengenlehre ele pontuou que a partir do princípio maximal pode ser obtida uma base de Hamel para os números reais.

Em (RUDIN, 1987), o Princípio Maximal de Hausdorff é enunciado da seguinte forma:

Teorema 2.18 (Princípio Maximal de Hausdorff)**.** *Todo conjunto parcialmente ordenado, não vazio, contém uma cadeia maximal.*

No teorema a seguir afirmamos que o Princípio Maximal de Hausdorff é uma consequência do Lema de Zorn. A demonstração é uma adaptação da encontrada em (RUDIN, 1987).

Teorema 2.19. *Se o Lema de Zorn é válido então o Princípio Maximal de Hausdorff também é válido.*

Demonstração: Seja X um conjunto parcialmente ordenado por $\leq_X$, pelo Lema de Zorn, toda cadeia em X tem uma cota superior e, assim, X tem um elemento maximal. Pela hipótese do Princípio Maximal de Hausdorff, suponha que $\mathcal{C} = (C, \leq_C)$ é uma cadeia maximal em $(X, \leq_X)$. Queremos mostrar que $\mathcal{C}$ é maximal. Seja c o elemento maximal de X, então não existe $d \in X$ tal que $c < d$. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq c$, então, por definição, c é cota superior de $\mathcal{C}$ e como c é elemento maximal de X, logo $\mathcal{C}$ é uma cadeia maximal.

■

A seguir afirmamos a recíproca do teorema anterior também é válida. A demonstração é uma adaptação da encontrada em (SILVA, 2011).

Teorema 2.20. *Se o Princípio Maximal de Hausdorff é válido então o Lema de Zorn também é válido.*

Demonstração: Seja X um conjunto parcialmente ordenado por $\leq_X$, pelo Princípio Maximal de Hausdorff, $(X, \leq_X)$ tem uma cadeia maximal $\mathcal{C} = (C, \leq_C)$. Pela hipótese do Lema de Zorn, $\mathcal{C}$ tem uma cota superior em X. Seja c a cota superior de $\mathcal{C}$ em X, c é um elemento maximal de X. Suponha que existe $d \in X$ tal que $c < d$, a $\mathcal{C} \cup \{d\}$ é uma cadeia pois $b < d$ para todo $b \in \mathcal{C}$, o que contradiz a maximalidade de $\mathcal{C}$. Logo, não existe $d \in X$ tal que $c < d$ e, portanto, c é um elemento maximal de X.

■

3 Aplicações

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações do Lema de Zorn em diferentes áreas da Matemática, mais especificamente na Álgebra Linear, na Análise Funcional, na Teoria de Anéis e Módulos e na Geometria Diferencial. Também apresentamos duas aplicações do Teorema da Boa Ordenação de Zermelo.

3.1 Álgebra Linear

Uma importante aplicação do Lema de Zorn é prova da existência de uma base para todo espaço vetorial, que é fundamental na Álgebra Linear. A partir disso, nessa seção apresentamos algumas definições da Álgebra Linear encontradas em (LIPSCHUTZ; LIPSON, 2011) e provamos que a existência de uma base para todo espaço vetorial é uma consequência do Lema de Zorn.

Definição 3.1 (Espaço Vetorial)**.** *Seja V um conjunto não vazio de vetores com duas operações:*

1. *Adição: sejam $u, v \in V$, a soma $u + v \in V$;*

2. *Multiplicação: sejam $u \in V$ e $a \in K$, o produto $au \in V$,*

V é um K-espaço vetorial, isto é, V é um espaço vetorial sobre um corpo K, se as seguintes propriedades são satisfeitas:
[A_1] Para todo $u, v, w \in V$, $(u + v) + w = u + (v + w)$;
[A_2] Existe $\boldsymbol{0} \in V$, tal que para todo $u \in V$, $u + \boldsymbol{0} = u = \boldsymbol{0} + u$;
[A_3] Para cada $u \in V$, existe um simétrico $-u$ tal que $u + (-u) = \boldsymbol{0} = (-u) + u$;
[A_4] Para todo $u, v \in V$, $u + v = v + u$;
[M_1] Para todo $u, v \in V$ e $a \in K$, $a(u + v) = av + au$;
[M_2] Para todo $a, b \in K$ e $u \in v$, $(a + b)u = au + bu$;
[M_3] Para todo $a, b \in K$ e $u \in v$, $(ab)u = a(bu)$;
[M_4] Para todo $u \in V$ e $1 \in K$, onde 1 é o escalar unitário de K, $1u = u$.

A partir da definição de um K-espaço vetorial podemos definir combinação linear.

Definição 3.2 (Combinação Linear)**.** *Seja V um K-espaço vetorial. Um vetor $v \in V$ é uma combinação linear dos vetores $u_1, ..., u_n \in V$ se existirem escalares $a_1, ..., a_n \in K$ tais que $v = a_1u_1 + ... + a_nu_n$.*

De posse da definição de combinação linear podemos introduzir a definição de subespaço gerado como segue.

Definição 3.3 (Conjunto Gerador)**.** *Sejam V um K-espaço vetorial e $B \subset V$. Dizemos que B é um conjunto gerador de V se, ou seja, B gera V, se cada elemento de V se escreve como combinação linear de um número finito de elementos de B.*

A definição dada a seguir desempenha um papel essencial na Álgebra Linear.

Definição 3.4 (Dependência Linear e Independência Linear)**.** *Sejam $u_1, ..., u_n \in V$. Eles são linearmente dependentes se existirem escalares $a_1, ..., a_n \in K$, com pelo menos um $a_i \neq 0$ tais que $a_1u_1 + ... + a_nu_n = 0$. Se todos os escalares da combinação linear forem iguais a zero, então os vetores são linearmente independentes.*

Com a definição de independência linear podemos definir base de um espaço vetorial como segue.

Definição 3.5 (Base de um Espaço Vetorial)**.** *Seja V um K-espaço vetorial. Dizemos que um subconjunto $B \subset V$ é uma base de V se*

1. *B é linearmente independente;*

2. *B gera V.*

A partir das definições anteriores podemos apresentar e provar o resultado principal dessa seção.

Teorema 3.6. *Todo espaço vetorial tem uma base.*

Demonstração: Seja V um K-espaço vetorial. Se $V = \{\mathbf{0}\}$ então $\emptyset$ é uma base de V. Seja $V \neq \{\mathbf{0}\}$, isto é, V é um espaço vetorial não nulo e seja S o conjunto de conjuntos linearmente independentes de V, ou seja,

$$S = \{W \subset V : \text{W é linearmente independente}\}.$$

Um vetor $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$ é um conjunto linearmente independente, então o conjunto $\{v\} \in S$. Portanto, $S \neq \emptyset$. Defina em S a ordem parcial dada pela inclusão, ou seja, para $W_\alpha, W_\beta \in S$, $W_\alpha \leq W_\beta$ se $W_\alpha \subset W_\beta$.

Seja $C = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cadeia de S, isto é, todo W_α é um conjunto linearmente independente em V e para qualquer $\alpha, \beta \in A$ tem-se $W_\alpha \subset W_\beta$ ou $W_\beta \subset W_\alpha$. Seja a união $U = \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha$ cota superior de C, devemos mostrar que U é linearmente independente: seja $\{v_1, ..., v_n\} \in U$, cada v_i desse conjunto pertence a pelo menos um W_α de U, digamos $v_1 \in W_{\alpha_1}, ..., v_n \in W_{\alpha_n}$, então existe um conjunto W_{α_0} que contém todos os outros W_{α_i}'s pois como C é uma cadeia, todo subconjunto finito de C possui cota superior; isso significa que $\{v_1, ..., v_n\} \in W_{\alpha_0}$ então W_{α_0} é linearmente independente, logo, U é linearmente independente e, então, $U \subset S$.

Pelo Lema de Zorn S tem um elemento maximal, isto é, existe um conjunto linearmente independente $\beta \subset V$ tal que não existe outro conjunto $\beta_0 \subset V$ com $\beta < \beta_0$. Assim, seja $\beta \subset V$, para que β seja base de V é preciso mostrar que β gera V. Para isso, suponha, por absurdo que β não gera V, ou seja, $[\beta]$ é subconjunto próprio de V. Dessa forma, existe $v \in V$ tal que $v \notin [\beta]$. Considere o conjunto $(\beta \cup \{v\}) \subset V$. Como β é linearmente independente, então $a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_1 = ... = a_n = 0$, para todo $a_1, ..., a_n \in K$ e para todo $v_1, ..., v_n \in \beta$. O conjunto $(\beta \cup \{v\})$ é linearmente independente, pois se não fosse existiria um escalar $b \in K$, $b \neq 0$ tal que para todo $v_1, ..., v_n, v \in (\beta \cup \{v\})$ teríamos $a_1v_1 + ... + a_nv_n + bv = 0 \Rightarrow bv = 0$, dessa forma v seria combinação linear e assim seria pertenceria a $[\beta]$, o que contradiz o fato de $[\beta]$ ser subconjunto próprio de V. Assim, a afirmação de que $(\beta \cup \{v\})$ é linearmente independente contradiz a maximalidade de β. Portanto, $[\beta]$ não é subconjunto próprio de V, logo β gera V. Como β é linearmente independente e gera V, β é base de V.

■

3.2 Análise Funcional

Um dos resultados mais fundamentais da Análise Funcional é o teorema de Hahn-Banach que, por sua vez, é uma importante aplicação do Lema de Zorn.

Teorema 3.7 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $p : V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz:*

1. *$p(\lambda x) = \lambda p(x)$, para todo $x \in V$ e para todo $\lambda > 0$;*
2. *$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in V$.*

Sejam $W \subseteq V$ um subespaço vetorial e $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $f(x) \leq p(x)$, para todo $x \in W$. Então, existe um funcional linear $\tilde{f} : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende f, isto é, $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in W$ e que satisfaz $\tilde{f}(x) \leq p(x)$, para todo $x \in V$.

Demonstração: Considere a seguinte família $\mathcal{P}$ de funcionais lineares definidos em subespaços de V que contém W,

$$\mathcal{P} \doteq \{(\phi, D(\phi)); \phi : D(\phi) \longrightarrow \mathbb{R}\},$$

onde $D(\phi)$ é subespaço vetorial de V, $W \subset D(\phi)$, ϕ estende f e $f(x) = p(x)$ para todo $x \in D(\phi)$. Sobre $\mathcal{P}$ definimos a relação de ordem parcial onde $(\phi_1, D(\phi_1)) \leq (\phi_2, D(\phi_2))$ se, e somente se, $D(\phi_1) \subset D(\phi_2)$ e $\phi_2\Big|_{D(\phi_1)} = \phi_1$. Note que $\mathcal{P}$ é não vazio, pois $f \in \mathcal{P}$.

Seja $\mathcal{T} \doteq \{(\phi_i, D(\phi_i)) : i \in I\}$ cadeia em $\mathcal{P}$. $\mathcal{T}$ possui cota superior. De fato, defina $\phi : D(\phi) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $D(\phi) = \bigcup_{i \in I} D(\phi_i)$, $\phi(x) = \phi_i(x)$ se $x \in D(\phi_i)$ para algum $i \in I$. Note que a boa definição de ϕ decorre da ordenação total de $\mathcal{T}$. É imediato que $\phi \in \mathcal{P}$ e que ϕ é cota superior para $\mathcal{T}$.

Pelo Lema de Zorn, $\mathcal{P}$ possui um elemento maximal, digamos $\widetilde{f}$. Precisamos verificar que $D(\widetilde{f}) = V$. De fato, suponha que $D(\widetilde{f}) \neq V$. Nesse caso, podemos escolher $x_0 \in V - D(\widetilde{f})$ e definir $\widetilde{\phi} : D(\widetilde{\phi}) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $D(\widetilde{\phi}) = D(\widetilde{f}) + [x_0]$ e $\widetilde{\phi}(x + tx_0) = \widetilde{f}(x) + t\alpha$, onde α é uma constante que será escolhida posteriormente de forma a garantir que $\widetilde{\phi} \in \mathcal{P}$. Queremos, por enquanto, que α satisfaça as seguintes desigualdades:

$$\widetilde{f}(x) + \alpha = \widetilde{\phi}(x + x_0) \leq p(x + x_0), \text{ para todo } x \in D(\widetilde{f}) \text{ e}$$

$$\widetilde{f}(x) - \alpha = \widetilde{\phi}(x - x_0) \leq p(x - x_0), \text{ para todo } x \in D(\widetilde{f}).$$

Por isso devemos escolher α de modo que,

$$\underset{x \in D(\widetilde{f})}{sup} \{\widetilde{f}(x) - p(x - x_0)\} \leq \alpha \leq \underset{x \in D(\widetilde{f})}{inf} \{p(x + x_0) - \widetilde{f}(x)\}.$$

Note que essa escolha é de fato possível pois para $x, y \in D(\widetilde{f})$ temos,

$$\widetilde{f}(x) + \widetilde{f}(y) = \widetilde{f}(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0 + y - x_0) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0),$$

e consequentemente,

$$\widetilde{f}(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - \widetilde{f}(x),$$

para quaisquer $x, y \in D(\widetilde{f})$. Portanto, podemos escolher α dentro de tais condições. Assim, temos que:

- para $t > 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}(x + tx_0) &= \widetilde{\phi}\left(t\left(\frac{x}{t} + x_0\right)\right) \\
&= t\widetilde{\phi}\left(\frac{x}{t} + x_0\right) \\
&= t\left(\widetilde{f}\left(\frac{x}{t}\right) + \alpha\right) \\
&\leq tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) \\
&= p(x + tx_0)
\end{aligned}$$

- para $t < 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}(x + tx_0) &= \widetilde{\phi}\left(-t\left(\frac{x}{-t} - x_0\right)\right) \\
&= -t\widetilde{\phi}\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) \\
&= -t\left(\widetilde{f}\left(-\frac{x}{t}\right) - \alpha\right) \\
&\leq -tp\left(-\frac{x}{t} - x_0\right) \\
&= p(x + tx_0)
\end{aligned}$$

- para $t = 0$, tem-se

  $\widetilde{\phi}(x + tx_0) = \widetilde{\phi}(x) = \widetilde{f}(x) \leq p(x) = p(x + tx_0)$.

Segue então que $\widetilde{\phi} \in \mathcal{P}$, $\widetilde{f} \leq \widetilde{\phi}$ e $\widetilde{f} \neq \widetilde{\phi}$. No entanto, isso contradiz a maximalidade de $\widetilde{f}$. Logo, $D(\widetilde{f}) = V$.

■

3.3 Anéis e Módulos

O Lema de Zorn desempenha um papel fundamental na prova da existência de um submódulo maximal para módulos finitamente gerados. Assim, apresentamos a seguir algumas definições da Teoria de Anéis e Módulos que são importantes para a demonstração do resultado principal desta seção.

Uma estrutura algébrica do tipo $(G, *)$ é definido como um monóide, com uma operação $*$ sobre um conjunto G, quando satisfaz a propriedade associativa e possui um elemento neutro. A partir disso podemos definir um grupo abeliano como um monóide se, e somente se, os elementos de G são invertíveis e se a sua operação é comutativa. $(\mathbb{R}, +)$, por exemplo, é um grupo abeliano.

O terno ordenado $(A, +, \cdot)$ é um anel se $(A, +)$ é um grupo abeliano, se o produto é associativo e se a soma e o produto são distributivos. Se o anel A tem identidade para o produto então $(A, \cdot)$ é um monóide, nesse caso dizemos que A é um anel unitário. Um anel é abeliano quando $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in A$. Os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com as operações de soma e produto são anéis abelianos unitários.

Assim podemos definir módulos à direita e à esquerda como segue.

Definição 3.8 (Módulo à direita)**.** *Seja R um anel com identidade. Um R-módulo à direita, denotado por M_R, é um grupo abeliano $(M, +)$ junto com a função*

$$\begin{array}{rcl} M \times R & \longrightarrow & R \\ (m, a) & \longmapsto & m \cdot a \end{array}$$

que satisfaz as seguintes propriedades, para todo $m, n \in M$ e $a, b \in R$,

1. *$(m + n)a = ma + na$;*
2. *$m(a + b) = ma + mb$;*
3. *$m(ab) = (ma)b$;*
4. *$m1_R = m$.*

Definição 3.9 (Módulo à esquerda). *Seja R um anel com identidade. Um R-módulo à esquerda, denotado por ${}_RM$, é um grupo abeliano $(M,+)$ junto com a função*

$$\begin{array}{rcl} R \times M & \longrightarrow & M \\ (a,m) & \longmapsto & a \cdot m \end{array}$$

que satisfaz as seguintes propriedades, para todo $m,n \in M$ e $a,b \in R$,

1. $a(m+n) = am + an$;
2. $(a+b)m = am + bm$;
3. $(ab)m = a(bm)$;
4. $1_R m = m$.

Se R é um anel comutativo e M_R é um módulo, podemos definir

$$\begin{array}{rcl} R \times M & \longrightarrow & M \\ (a,m) & \longmapsto & a \cdot m = m \cdot a \end{array}$$

então ${}_RM$ é um R-módulo à esquerda então

$$\begin{aligned} (ab)m &= m(ab) \\ a(bm) = (mb)a &= m(ba) \end{aligned}$$

Se R é comutativo podemos falar de R-módulo M.

A seguir apresentamos alguns exemplos de módulo.

Exemplo 3.10. $(G,+)$ *é um grupo abeliano em um $\mathbb{Z}$-módulo de forma natural com $\mathbb{Z} \times G \longrightarrow G$ e*

$$(n,g) \longmapsto n \cdot g = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g_i, & se \quad n > 0 \\ 0, & se \quad n = 0 \\ \displaystyle -\sum_{i=1}^{n} g_i, & se \quad n < 0 \end{cases}$$

com $g_i = g$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Exemplo 3.11. *Se R é um anel, $R_{R,R}R$*

$$\begin{array}{rcl} R \times R & \longrightarrow & R \\ (a,m) & \longmapsto & a \cdot m \\ (m,a) & \longmapsto & m \cdot a \end{array}$$

Exemplo 3.12. *Se I é um ideal à direita de um anel R, então I é um R-módulo à direita*

$$\begin{array}{rcl} I \times R & \longrightarrow & I \\ (y, a) & \longmapsto & y \cdot a \end{array}$$

Exemplo 3.13. *Seja I um ideal de um anel R, podemos considerar R/I*

$$\begin{array}{rcl} R/I \times R & \longrightarrow & R/I \\ (x + I, a) & \longmapsto & xa + I \end{array}$$

com R-módulo à direita.

Exemplo 3.14. *Seja K um corpo e V um K-espaço vetorial.*

$$\begin{array}{rcl} V \times End_K(V) & \longrightarrow & V \\ (v, T) & \longmapsto & (v)T \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} End_K(V) \times V & \longrightarrow & V \\ (T, v) & \longmapsto & T(v) \end{array}$$

onde $End_K(V) = \{T : V \longrightarrow V,\ T\ K\text{-linear}\}$.

A partir da definição de módulo podemos definir submódulo.

Definição 3.15 (Submódulo)**.** *Seja R um anel com identidade e M_R um R-módulo. Um subconjunto N de M é um submódulo de M se satisfaz*

1. $0 \in N$;
2. *se $m, n \in N$, então $m - n \in N$;*
3. *se $a \in R$, $n \in N$, então $an \in N$.*

Com notação $N \leq M$.

Alguns exemplos de submódulos são apresentados como segue.

Exemplo 3.16. *M é um K-espaço vetorial. Então K-submódulos $\cong$ K-subespaços.*

Exemplo 3.17. *$(G, +)$ é um grupo abeliano em $\mathbb{Z}$-módulo. Então $\mathbb{Z}$-submódulos $\equiv$ subgrupos.*

Exemplo 3.18. *Submódulos de $R_R \equiv$ ideais à direita e submódulos de ${}_RR \equiv$ ideais à esquerda.*

Agora podemos introduzir o resultado principal desta seção.

Teorema 3.19. *Se $M_R \neq 0$ é um módulo finitamente gerado, então todo submódulo N próprio, $N \neq M$, está contido em algum submódulo maximal.*

Demonstração: Seja $N \leq M_R$ com M_R finitamente gerado então existem $x_1, x_2, ..., x_n$ em M_R tais que $N + x_1R + x_2R + ... + x_nR = M_R$. Escolhemos n maximal. Seja $K = N + x_1R + x_2R + ... + x_{n-1}R \neq M_R$. Considere o conjunto

$$(T = \{L \neq M, K \subseteq L, x_n \notin L\}, \subseteq).$$

Note que $T \neq \emptyset$ pois $K \in L$ pela construção de T. Seja $\mathcal{C} = \{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cadeia de T. Queremos mostrar que $U = \bigcup_{\alpha \in A} N_\alpha$ é um submódulo de N contido em T.

De fato, sejam $n_1, n_2 \in U$ e $a \in R$. Se $n_1 \in U$ então $n_1 \in N_{\alpha_1}$ para algum $\alpha_1 \in A$ e se $n_2 \in U$ então $n_2 \in N_{\alpha_2}$ para algum $\alpha_2 \in A$. Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia então temos ou $N_{\alpha_1} \subset N_{\alpha_2}$ ou $N_{\alpha_2} \subset N_{\alpha_1}$. Se $N_{\alpha_1} \subset N_{\alpha_2}$, então para $n_1 \in N_{\alpha_1}$ tem-se $n_1 \in N_{\alpha_2}$ e, para $n_2 \in N_{\alpha_2}$, como N_{α_2} é um submódulo temos que $n_1 + n_2 \in N_{\alpha_2} \subset U$, isto é, $n_1 + n_2 \in U$. Se $N_{\alpha_2} \subset N_{\alpha_1}$, então para $n_2 \in N_{\alpha_2}$ tem-se $n_2 \in N_{\alpha_1}$ e, para $n_1 \in N_{\alpha_1}$, como N_{α_1} é um submódulo temos que $n_1 + n_2 \in N_{\alpha_1} \subset U$, isto é, $n_1 + n_2 \in U$.

Observe ainda que se $n \in U$ então $n \in N_\alpha$ para algum $\alpha \in A$. Como N_α é submódulo então $na \in N_\alpha$ para algum $\alpha \in A$ logo $na \in U$. Portanto, U é submódulo contido em T. Assim temos que $K \subseteq U$ pois $K \subseteq N_\alpha$ para todo $\alpha \in A$ e $x_n \notin U$ pois se $x_n \in U$ então $x_n \in N_\alpha$ para algum $\alpha \in A$. Como $N_\beta \subseteq U$, para todo $\beta \in A$, temos que U é uma cota superior em T de $\mathcal{C}$.

Pelo Lema de Zorn, existe pelo menos um módulo maximal em T, digamos Q tal que $L \subseteq Q$. Assim, queremos mostrar que Q é maximal em M. Note que, seja $\widetilde{L} \leq M_R$ tal que $Q \leq \widetilde{L}$, ou $x_n \in \widetilde{L}$ ou $x_n \notin \widetilde{L}$. Se $x_n \in \widetilde{L}$ então $K \subseteq Q \subseteq \widetilde{L}$ assim $K + x_nR \subseteq \widetilde{L}$ logo $\widetilde{L} = M$. Se $x_n \notin \widetilde{L}$ então $\widetilde{L} \in T$ assim $\widetilde{L} \leq Q$. Como Q é maximal em T, então $Q = \widetilde{L}$.

■

3.4 Geometria Diferencial

O Lema de Zorn também pode ser utilizado na Geometria Diferencial. Nesta seção o resultado principal tem como objetivo utilizar o Lema de Zorn para construir uma superfície maior possível em um cone satisfazendo as propriedades de um dado problema do tipo Björling.

Aplicação 3.20 (Um problema do tipo Björling)**.** *Seja c uma curva tipo espaço de $\mathbb{R}$ no cone de luz C. Suponha que exista um vetor L de tipo luz tal que $\langle c'(t), L\rangle = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então é possível construir uma superfície $S \subset C$ maior possível satisfazendo:*

1. *$c(t) \in S$ para todo $\mathbb{R}$*
2. *$\overrightarrow{H}_S = \psi L$, onde $\psi \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{P}$ um conjunto não vazio tal que

$$\mathcal{P} = \{X_i : (a_i, b_i) \times J \longrightarrow C \text{ é a solução do problema de Björling}\},$$

onde $(a_i, b_i) \times J = M_i$. Defina em $\mathcal{P}$ a ordem parcial dada por $X_i \leq X_j$ se $M_i \subset M_j$ e $X_i = X_j\big|_{M_i}$, onde $X_i, X_j \subset \mathcal{P}$ e M_k é o domínio de X_k. Seja $\mathcal{P}' = \{X_i\}_{i\in A} \subset \mathcal{P}$ uma cadeia, isto é, para todo $i, j \in A$ tem-se $X_i \leq X_j$ ou $X_j \leq X_i$, ou seja, $M_i \subset M_j$ e $X_i = X_j\big|_{M_i}$ ou $M_j \subset M_i$ e $X_j = X_i\big|_{M_j}$.

Sejam $M = \bigcup_{i\in A} M_i$ e $X : M \longrightarrow C$, pondo $X(w) \doteq X_i(w)$. Note que X está bem definida, isto é, $X_i(w) = X_j$ se $w \in M_i \cap M_j$. De fato, como $X_i \leq X_j$ então $X_i(w) = X_j\big|_{M_i}(w) = X_j(w)$. Note ainda que $M_i \subset M$ e $X_i = X\big|_{M_i}$, logo, para todo $X_i \in \mathcal{P}'$ tem-se $X_i \leq X$, ou seja, X é cota superior de $\mathcal{P}'$.

Portanto, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{P}$ tem um elemento maximal. Seja W o elemento maximal de $\mathcal{P}$. Suponha que existe $Y \in \mathcal{P}$ tal que $W \leq Y$, então $M_W \subset M_Y$ e $W = Y\big|_{M_W}$. Como W é maximal em $\mathcal{P}$ então $Y \leq W$ para todo $Y \in \mathcal{P}$, então $M_Y \subset M_W$ e $Y = W\big|_{M_Y}$ portanto $W = Y$.

■

3.5 Aplicação do Teorema da Boa Ordenação

Nesta seção apresentamos duas aplicações do Teorema da Boa Ordenação. A primeira aplicação nos prova que o número $\sqrt{2}$ é um número irracional e a segunda aplicação nos mostra que todo número inteiro positivo é maior ou igual ao número 1.

Aplicação 3.21. *$\sqrt{2}$ é irracional.*

Demonstração: Suponha que $\sqrt{2}$ é racional, ou seja, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, então existem $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$ de forma que $\sqrt{2} = a/b$. Desse modo, considere o conjunto

$$A = \{c\sqrt{2} : c \in \mathbb{Z}\}.$$

Note que $A \neq \emptyset$ pois como $\sqrt{2} = a/b$ então $a = b\sqrt{2}$, logo $a \in A$ e A é limitado inferiormente.

Pelo Teorema da Boa Ordenação, A tem um elemento mínimo. Seja $s = t\sqrt{2}$ o elemento mínimo de A. Temos então que $s\sqrt{2} - s = s\sqrt{2} - t\sqrt{2} = \sqrt{2}(s-t)$. Observe que, pela construção do conjunto A, $\sqrt{2}(s-t) \in A$. Então $s\sqrt{2} = t\sqrt{2}\sqrt{2} = 2t$, logo s e $2t$ são números inteiros. Note ainda que como $s\sqrt{2} - s = s(\sqrt{2} - s)$, como $\sqrt{2} > 1$ então s e $2t$ também são positivos. Assim temos que $s(\sqrt{2} - 1) < s$, que contradiz o fato de s ser elemento mínimo de A, portanto $\sqrt{2}$ é irracional pois o que nos levou a esta contradição foi a suposição de que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

$\blacksquare$

Aplicação 3.22. *Todo número inteiro positivo é maior ou igual a* 1.

Demonstração: Suponha que a é um número inteiro positivo tal que $a < 1$, isto é, $a \in \mathbb{Z}$ e $0 < a < 1$. Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < x < 1\} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Note que $A \neq \emptyset$ pois $a \in A$ e A é limitado inferiormente. Pelo Teorema da Boa Ordenação, A possui um elemento mínimo, digamos, b. Como $b \in A$ então $0 < b < 1$, pela construção de A, e então $0 < b^2 < b$. Assim, $0 < b^2 < b < 1$, ou seja, $0 < b^2 < 1$, então $b^2 < b$ contradiz o fato de b ser elemento mínimo de A. Logo, se $a > 0$ então $1 \leq a$.

$\blacksquare$

Considerações Finais

O estudo do Lema de Zorn evidencia sua significativa influência e conexão com princípios fundamentais da Matemática. Ao longo deste trabalho, exploramos a relação entre o Lema de Zorn, o Axioma da Escolha, o Teorema da Boa Ordenação de Zermelo e o Princípio Maximal de Hausdorff, demonstrando como esses conceitos se entrelaçam e se complementam. Ao demonstrar a equivalência entre esses princípios, foi possível mostrar que podemos aplicar o Lema de Zorn em diferentes áreas da Matemática.

As aplicações no campo da Álgebra Linear, da Análise Funcional, da Teoria de Anéis e Módulos e da Geometria Diferencial destacam a versatilidade do Lema de Zorn e sua capacidade de fornecer soluções para questões diversas. É importante ressaltar que a sua relevância vai para além da Teoria dos Conjuntos, o que o torna um elemento essencial na Matemática.

Em suma, esta pesquisa oferece um compreensão sobre o Lema de Zorn, destacando seu papel fundamental na Matemática e sua aplicabilidade em diversas áreas. À medida que encerramos esta exploração do Lema de Zorn e suas implicações, reconhecemos a riqueza de sua relevância.

Referências

GARLING, D. J. *A Course in Mathematical Analysis: Volume I, Foundations and Elementary Real Analysis*. New York: Cambridge University Press, 2013. v. 1. páginas 19, 23

HALMOS, P. R. *Teoria ingênua dos conjuntos*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2001. páginas 11, 12, 19, 21, 23

JECH, T. *Set theory*: The third millennium edition, revised and expanded. Berlin: Springer, 2003. páginas 11, 12

KOMJÁTH, P.; TOTIK, V. *Problems and theorems in classical set theory*. New York: Springer Science & Business Media, 2006. páginas 19, 26

LIMA, E. *Curso de análise, vol. 1*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. páginas 12, 13

LIPSCHUTZ, S. *Teoria dos conjuntos*. São Paulo: Mcgraw-Hill do Brasil, 1973. páginas 13, 15, 16, 19, 23

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L. *Álgebra linear*. Porto Alegre: Bookman, 2011. páginas 28

MOORE, G. H. *Zermelos axiom of choice*: Its origins, development and influence. 1. ed. New York: Springer, 1982. páginas 18, 26

MUNKRES, J. R. *Topology*. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000. páginas 13, 16

RUBIN, H.; RUBIN, J. E. *Equivalents of the axiom of choice*. 2. ed. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1970. páginas 19, 23

RUDIN, W. *Real and complex analysis*. 3. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1987. páginas 27

SILVA, A. A. *Uma introdução axiomática dos conjuntos*. João Pessoa: Editora Universitária da UFPB, 2011. páginas 16, 23, 27

TUKEY, J. W. *Convergence and uniformity in topology*. Ann Arbor: Princeton University Press, 1941. páginas 18

ZORN, M. A remark on method in transfinite algebra. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 41, n. 10, p. 667–670, 1935. páginas 18