



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Bacharelado

Joseline Lima Pereira

**Uma abordagem sobre polinômios ortogonais na
reta real com aplicações nas fórmulas de
quadratura Gaussianas**

São Luís - MA
2024

Joseline Lima Pereira 

Uma abordagem sobre polinômios ortogonais na reta real com aplicações nas fórmulas de quadratura Gaussianas

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Bacharela em Matemática.

Curso de Matemática – Bacharelado

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Jairo Santos da Silva

São Luís - MA

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Lima Pereira, Joseline.

Uma abordagem sobre polinômios ortogonais na reta real com aplicações nas fórmulas de quadratura Gaussianas / Joseline Lima Pereira. - 2024.

69 p.

Orientador(a): Jairo Santos da Silva.

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2024.

1. Polinômios Ortogonais. 2. Função Peso. 3. Fórmulas de Quadratura Gaussiana. 4. . 5. . I. Santos da Silva, Jairo. II. Título.

Joseline Lima Pereira 

Uma abordagem sobre polinômios ortogonais na reta real com aplicações nas fórmulas de quadratura Gaussianas

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Bacharela em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 22/07/2024

Prof. Dr. Jairo Santos da Silva
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof.^a Me. Sonia Rocha Santos Sousa
COLUN/UFMA
Primeira Examinadora

Prof. Me. Cleber Araujo Cavalcanti
DEMAT/UFMA
Segundo Examinador

Ao meu amado pai José de Ribamar Costa Pereira. (in memoriam)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, sem Ele nada disso seria possível. Ao meu amado pai José de Ribamar Costa Pereira (*in memoriam*) que nos deixou há um ano mas ao longo da sua vida foi meu incentivo, inspiração e exemplo. Essa graduação antes de ser um sonho meu foi um sonho dele e por isso em meio a tantas dificuldades eu não desisti.

À minha querida mãe a quem sou grata pela educação, amor incondicional, apoio nos momentos difíceis e por ter me transformado nessa mulher que sou hoje.

Ao meu marido, Sidney Diniz, pelo companheirismo diário, por não me permitir desanimar e por me dar todo o suporte para que eu tivesse tempo para os estudos.

Aos meus professores, em especial a Cleber Cavalcanti, professor e coordenador, que me deu grande apoio e é um dos grandes responsáveis por essa realização. Jairo Santos, meu orientador, agradeço pelos conselhos, ajuda e encorajamento.

Agradeço a todos aqueles que contribuíram de alguma forma pra que esse objetivo se tornasse realidade.

“A educação tem raízes amargas, mas os seus frutos são doces.”

Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.)

Resumo

Nesta pesquisa realizou-se um estudo introdutório referente à Teoria dos Polinômios Ortogonais na reta real, incluindo os, assim chamados, *Polinômios Ortogonais Clássicos*, como os de Jacobi, Laguerre e Hermite, bem como suas aplicações nas fórmulas de quadratura Gaussianas. A metodologia aplicada nesse trabalho foi a pesquisa bibliográfica, de natureza qualitativa, onde utilizou-se, para a fundamentação teórica, de materiais encontrados em base de dados como Scielo, Capes, sites de Universidades, bem como materiais impressos, artigos científicos, dissertações, teses, revistas e outros periódicos. Os polinômios ortogonais, na reta real, podem ser estudados em relação a função peso, a uma medida (positiva) ou, mais geralmente, a um funcional de momento. Entretanto, nesta pesquisa, abordou-se, especificamente, o estudo desses polinômios em relação a uma função peso, onde são apresentadas definições e propriedades bem particulares dos polinômios ortogonais, como por exemplo, a relação de recorrência de três termos satisfeita por esses polinômios e o fato de seus zeros serem todos reais, simples, pertencerem ao intervalo de ortogonalidade dado, além de satisfazerem uma propriedade de entrelaçamento. A revisão de literatura aqui proposta mostra a importância do estudo e conhecimento da Teoria dos polinômios ortogonais uma vez que, por exemplo, os seus zeros são os nós das “famosas” Fórmulas de Quadratura Gaussianas e seus estudos são de grande utilidade na resolução de problemas das ciências e engenharias.

Palavras-chave: Polinômios Ortogonais. Função peso. Fórmulas de Quadratura Gaussianas.

Abstract

In this research, we carried out an introductory study of the theory of orthogonal polynomials on the real line, including the so-called orthogonal polynomials, *Classical Orthogonal Polynomials*, such as Jacobi, Laguerre and Hermite, as well as their applications in Gaussian quadrature formulas. The methodology applied in this work was bibliographical research of a qualitative nature. The methodology applied in this work was qualitative bibliographical research, using materials found in databases such as Scielo, Capes, university websites, as well as printed materials, scientific articles, dissertations, theses, magazines and other periodicals. Orthogonal polynomials on the real line can be studied in relation to a weight function, a (positive) measure or, more generally, a moment functional. However, in this research, we specifically address the study of these polynomials in relation to a weight function, where we present very particular definitions and properties of orthogonal polynomials, such as the three-term recurrence relation satisfied by these polynomials and the fact that their zeros are all real, simple, belong to the given orthogonality interval, in addition to satisfying an interlacing property. The literature review proposed here shows the importance of studying and knowing the theory of orthogonal polynomials since, for example, their zeros are the nodes of the “famous” Gaussian Quadrature Formulas and their study is of great use in solving problems in science and engineering.

Keywords: orthogonal polynomials. weight function. gaussian quadrature formulas.

Lista de símbolos

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto escalar.
\mathbb{P}_n	Espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n .
$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$	Sequência de polinômios ortogonais (SPO).
$\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$	Sequência de polinômios ortogonais mônicos.
$\{P_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$	Sequência de polinômios ortonormais.
$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	Polinômios de Jacobi ($\alpha, \beta > -1$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$	Polinômios de Legendre.
$G_n^{(\lambda)}(x) = P_n^{(\lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2})}(x)$	Polinômios de Gegenbauer ($\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda - \frac{1}{2} > -1$).
$T_n(x) = P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x)$	Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie.
$U_n(x) = P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x)$	Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie.
$L_n^{(\alpha)}(x)$	Polinômios de Laguerre ($\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > -1$).
$H_n(x)$	Polinômios de Hermite.
$x_{n,k}$	Zeros dos polinômios ortogonais $P_n(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$.
$W_{n,k}$	Pesos usados nas fórmulas de quadratura, $k = 1, 2, \dots, n$.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	RESULTADOS PRELIMINARES	13
2.1	Espaço Vetorial	13
2.2	Produto Interno	14
2.3	Funções Especiais: Gama e Beta	14
2.4	Polinômios	15
2.4.1	Interpolação Polinomial	16
2.4.2	Fórmulas de Quadraturas Interpolatórias	17
2.5	Integral de Riemann	17
2.6	Integral de Riemann-Stieltjes	18
2.7	Distribuições	19
3	POLINÔMIOS ORTOGONIAS	21
3.1	Sequência de Polinômios Ortogonais	21
3.2	Propriedades Gerais dos Polinômios Ortogonais	22
3.3	Relação de Recorrência de Três Termos	28
3.4	Zeros de Polinômios Ortogonais	34
3.5	Polinômios Ortogonais Simétricos	36
4	POLINÔMIOS ORTOGONIAS CLÁSSICOS	40
4.1	Polinômios de Jacobi	40
4.1.1	Polinômios de Legendre	42
4.1.2	Polinômios de Gegenbauer	44
4.1.3	Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie	45
4.1.4	Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie	48
4.2	Polinômios de Laguerre	50
4.3	Polinômios de Hermite	52
5	QUADRATURA GAUSSIANA	55
5.1	Fórmulas de Quadratura Gaussiana	55
5.2	Exemplos de Fórmulas de quadratura Gaussianas	59
5.2.1	Fórmulas de Quadratura de Gauss–Legendre	59
5.2.2	Fórmulas de Quadratura de Gauss–Chebyshev	61
5.2.3	Fórmulas de Quadratura de Gauss–Laguerre	63
5.2.4	Fórmulas de Quadratura de Gauss–Hermite	64

CONSIDERAÇÕES FINAIS 67

REFERÊNCIAS 68

1 Introdução

Os polinômios ortogonais surgiram através do estudo de frações contínuas e a partir do século XIX iniciou-se uma análise mais detalhada e exploratória de tais polinômios. Eles contribuem significativamente para resolução de problemas envolvendo diversas áreas da matemática, como por exemplo em estudos relacionados a equações diferenciais, interpolação, aproximação numérica, frações contínuas, estabilidade numérica, além de ter aplicação no ramo da Mecânica Quântica, Física Estatística e outros. Sua aplicação também está bastante relacionada com a revolução dos computadores e ao aumento da atividade na teoria da aproximação e análise numérica (para mais detalhes sobre aplicações dos polinômios ortogonais veja, por exemplo, os trabalhos de (AGARWAL; MILOVANOVIĆ, 2002), (ANSHELEVICH, 2005), (GAUTSCHI, 1985) e (BRACCIALI; LI; RANGA, 2005)).

Apesar da Teoria de polinômios ortogonais na reta real necessitar de pré-requisitos simples (tais como, da Álgebra Linear, da Análise real e do Cálculo Diferencial e Integral), de modo geral, essa teoria não é tão bem explorada e difundida a nível de graduação, o que torna relevante alguns questionamentos sobre essa classe tão importante de polinômios, a saber: o que são, de fato, polinômios ortogonais? quais as principais propriedades desses polinômios? qual a sua relação com a Teoria da aproximação numérica, especificamente no que se refere as “famosas” Fórmulas de Quadratura Gaussianas, que têm máximo grau de precisão algébrica?

Diante do exposto, o presente trabalho tem como principal objetivo realizar um estudo introdutório sobre a Teoria dos polinômios ortogonais na reta real e sua aplicação nas fórmulas de quadratura Gaussianas. Especificamente, pretende-se, com esta pesquisa, estudar pré-requisitos tanto na área de Análise quanto em Álgebra Linear relacionados a Teoria de Polinômios Ortogonais; Introduzir a definição de polinômios ortogonais na reta real, bem como estudar os principais resultados e propriedades destes polinômios; Aplicar a Teoria de Polinômios Ortogonais nas Fórmulas de Quadratura Gaussianas.

Uma abordagem introdutória dentro dessa temática possibilitará a compreensão de muitos outros resultados relacionados a Teoria de polinômios ortogonais na reta real, contribuindo assim para obtenção de novos resultados sobre o tema, os quais estão relacionados, de forma intrínseca, ao crescimento científico e tecnológico do país. Além disso, esta pesquisa contribuirá para o desenvolvimento de estudos futuros dos chamados Polinômios Ortogonais no Círculo Unitário (OPUC) que têm aplicações em diversas áreas da matemática e ciências aplicadas, tais como: regras de quadratura, processamento de sinal, teoria espectral e muitos outros tópicos (SIMON, 2005).

A metodologia aplicada nessa pesquisa foi a revisão de literatura, de natureza

qualitativa. Para isto, foram consultadas obras bibliográficas específicas voltadas à Teoria de Polinômios Ortogonais na reta real, encontradas em livros, dissertações, teses, artigos científicos, revistas e outros periódicos, e como secundário, também foram consultados materiais relacionados a funções especiais e pré-requisitos da Análise, da Álgebra Linear e do Cálculo, que deram suporte para alcançar os objetivos aqui almejados.

O trabalho está organizado em cinco seções, onde a primeira delas é a introdução e as demais são descritas como se segue.

A Seção 2 é dedicada a algumas definições e resultados preliminares que são necessários para maior compreensão e desenvolvimento da temática da presente pesquisa. Aqui, por exemplo, são revisados conceitos da Álgebra Linear como os de espaço vetorial e produto interno. Também são dadas definições de polinômios, zeros de polinômios, funções gama e beta, interpolação polinomial e fórmulas de quadratura interpolatórias.

Na Seção 3 inicia-se, de fato, o estudo dos polinômios ortogonais. Especificamente, são fornecidas definições e propriedades gerais relacionadas a estes polinômios, assim como algumas propriedades particulares associadas ao comportamento dos seus zeros. Nesta seção também será apresentada uma importante propriedade dos polinômios ortogonais na reta real, que é o fato deles serem gerados a partir de uma relação de recorrência de três termos, isto é, dados os dois elementos iniciais da sequência de polinômios ortogonais é possível encontrar o terceiro termo, e assim por diante, facilitando, dessa forma, a obtenção dos demais termos da sequência de polinômios ortogonais.

Já na Seção 4 são apresentados os, assim chamados, *polinômios ortogonais clássicos*. Serão fornecidas definições e propriedades aplicadas aos polinômios clássicos como os de Jacobi, Laguerre e Hermite, denotados, respectivamente, por $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ (com $\alpha, \beta > -1$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), $L_n^{(\alpha)}(x)$ (com $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > -1$) e $H_n(x)$. Apresenta-se, inclusive, alguns casos especiais do polinômio de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, que são os polinômios de Legendre quando $\alpha = \beta = 0$, Gegenbauer quando $\alpha = \beta = \lambda - 1/2 > -1$, Chebyshev de 1ª espécie quando $\alpha = \beta = -1/2$ e Chebyshev de 2ª espécie quando $\alpha = \beta = 1/2$.

Por fim, na Seção 5, apresenta-se uma valiosa aplicação dos polinômios ortogonais na Teoria da aproximação numérica. Especificamente, são fornecidas algumas propriedades relacionadas a aplicação dos polinômios ortogonais nas fórmulas de quadraturas gaussianas. A principal delas é que os zeros dos polinômios ortogonais são os nós da quadratura Gaussiana. A quadratura gaussiana é um método numérico amplamente utilizado para calcular integrais definidas, especialmente em problemas que envolvem funções complexas ou integrais de alta ordem. Ela se baseia na escolha adequada dos nós e pesos de integração, sendo os polinômios ortogonais na reta real essenciais para essa determinação. Escolhendo os nós deste modo a precisão da fórmula é a maior possível.

2 Resultados Preliminares

Nesta seção serão abordados brevemente alguns conteúdos da Álgebra Linear, da Análise e do Cálculo que são pré-requisitos para os estudos relacionados aos polinômios ortogonais. Aos interessados em se aprofundar um pouco mais nos assuntos aqui discutidos recomenda-se, por exemplo, os textos de (ANDREWS; ASKEY; ROY, 1999), (BARTLE, 1983), (BARTLE, 1996), (BOLDRINI, 1980), (DAVIS, 1963), (PHILLIPS; TAYLOR, 1973) e (SANTOS, 2010).

2.1 Espaço Vetorial

Um *espaço vetorial* sobre um corpo \mathbb{K} é um conjunto V onde estão definidas as operações de adição e multiplicação por escalar, satisfazendo as seguintes propriedades:

Para adição:

- i)* $u + v \in V$, para todo $u, v \in V$;
- ii)* $u + v = v + u$, para todo $u, v \in V$ (Comutativa);
- iii)* $u + (v + w) = (u + v) + w$, para todo $u, v, w \in V$ (Associativa);
- iv)* Existe um elemento neutro $0 \in V$, tal que $u + 0 = u$ para todo $u \in V$ (Elemento neutro);
- v)* Para todo $v \in V$ existe um elemento $(-v) \in V$ tal que $v + (-v) = 0$ (Elemento simétrico);

Para multiplicação por escalar:

- i)* $\alpha \cdot v \in V$, para todo $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$;
- ii)* $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, para todo $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ (Distributiva à direita em relação a adição);
- iii)* $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$, para todo $v \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (Distributiva à esquerda em relação a adição);
- iv)* $\alpha \cdot (\beta v) = (\alpha\beta) \cdot v$, para todo $v \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (Associativa);
- v)* Existe um elemento neutro $1 \in \mathbb{K}$, tal que $1 \cdot v = v$, para todo $v \in V$ (Elemento neutro).

Observação 2.1. *Em relação aos espaços vetoriais, vale salientar que:*

- (1) *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então V é chamado de espaço vetorial real;*

- (2) Um elemento v de um espaço vetorial V é chamado vetor;
- (3) Um elemento α de um corpo \mathbb{K} é chamado escalar.

Definição 2.2. Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. O conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é dito linearmente independente (LI), se a equação $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$ implica em $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ (unicamente). Neste caso, os vetores são ditos LI. Além disso, no caso em que existir algum $a_i \neq 0$ diz-se que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente (LD) ou que os vetores são LD.

Um exemplo clássico de espaço vetorial (real) é o conjunto dos vetores no plano bidimensional, conhecido como \mathbb{R}^2 - que é definido como o conjunto de todos os pares ordenados de números reais (x, y) , uma vez que, munido das operações usuais de adição e multiplicação por um escalar, satisfaz todas as propriedades mencionadas acima. Além disso, considerando-se os vetores canônicos de \mathbb{R}^2 , isto é, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, pode-se verificar, facilmente, que o conjunto $\{e_1, e_2\}$ é LI.

2.2 Produto Interno

Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Uma aplicação $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ de $V \times V$ em \mathbb{K} é considerada um *produto interno* (ou *produto escalar*) sobre V se, para todo $u, v, w \in V$ e todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, as seguintes condições são satisfeitas:

- i)* $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$;
- ii)* $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$;
- iii)* $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$;
- iv)* $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;

Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^2 . Para qualquer par de vetores $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ em \mathbb{R}^2 , definindo-se a aplicação $\langle u, v \rangle := u_1v_1 + u_2v_2$ em \mathbb{R}^2 , não é difícil verificar que esta aplicação satisfaz todas as propriedades de *i)* a *iv)* (da definição de produto interno), tornando essa aplicação, de fato, um produto interno sobre \mathbb{R}^2 e, conseqüentemente, \mathbb{R}^2 um espaço vetorial com produto interno.

Observação 2.3. Seja V um espaço vetorial com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diz-se que u e $v \in V$ são ortogonais com relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

2.3 Funções Especiais: Gama e Beta

A função *Gama*, denotada por $\Gamma(x)$, foi descoberta por Euler por volta de 1729 (confira (ANDREWS; ASKEY; ROY, 1999)) no estudo do problema de estender o domínio da

função fatorial. Tal função, para $x \in \mathbb{C}$ e $x \neq 1, -2, \dots$, pode ser definida como

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n}, \quad (2.1)$$

onde $(x)_n = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)$ é conhecido por *símbolo de Pochhammer*. Vale salientar que uma outra forma de definir a função Gama é por meio da *integral de Euler de segunda espécie*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-x} t^{x-1} dt, \quad (2.2)$$

para $x \in \mathbb{C}$ e $\operatorname{Re}(x) > 0$.

A função Gama satisfaz muitas propriedades interessantes, dentre elas tem-se:

Proposição 2.4. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} x\Gamma(x) &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)(x+n)n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)(x+n)} \frac{x+n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x+1)_n} = \Gamma(x+1). \end{aligned}$$

■

Dentre as chamadas *Funções Especiais*, também existe uma outra importante função conectada à Teoria dos polinômios ortogonais, a saber: a *função Beta*, denotada por $B(x, y)$. Esta função, para $x, y \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(x) > 0$ e $\operatorname{Re}(y) > 0$, pode se definida por

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (2.3)$$

conhecida como *integral de Euler de primeira espécie*.

Uma importante relação entre as funções Gama e Beta é dada no teorema a seguir, cuja demonstração pode ser vista, por exemplo, em (ANDRADE; BRACCIALI; RAFAELI, 2012).

Teorema 2.5. *A função Beta pode ser dada em termos da função Gamma da seguinte forma:*

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

com $x, y \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(x) > 0$ e $\operatorname{Re}(y) > 0$.

2.4 Polinômios

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $a_{n,n}, a_{n,n-1}, \dots, a_{n,0} \in \mathbb{R}$ (com $a_{n,n} \neq 0$), chama-se *polinômio* (de grau n) a função $P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$P_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n,1}x + a_{n,0}. \quad (2.4)$$

O espaço vetorial dos polinômios em geral é denotado por \mathbb{P} e o espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo n são denotados por \mathbb{P}_n .

Observação 2.6. *Seja $P_n(x)$ um polinômio. Chama-se raiz (ou zero) do polinômio $P_n(x)$ o número real α tal que $p(\alpha) = 0$. Logo, α é uma raiz de $P_n(x)$ se, e somente se, $p(\alpha) = 0$ e $p(x)$ pode ser dado por*

$$P_n(x) = (x - \alpha)Q(x),$$

onde $Q(x)$ é um polinômio de grau menor do que n .

2.4.1 Interpolação Polinomial

A *interpolação polinomial* consiste em aproximar funções por uma classe de funções mais simples. Para interpolação pode-se utilizar as funções trigonométricas, exponenciais, racionais, entre outras. Todavia, tendo em vista o desenvolvimento da Teoria de polinômios ortogonais, as funções que atenderão melhor o objetivo da temática da presente pesquisa serão as polinômias.

Tomando um conjunto de $n + 1$ pontos distintos, $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$, de um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e uma $f(x)$ definida em $[a, b]$ com valores reais tais que

$$y_{n,k} = f(x_{n,k}), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

chama-se de *polinômio de interpolação* de $f(x)$ sobre os $n + 1$ pontos distintos $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$, o polinômio de grau n , $P_n(x)$, que coincide com $f(x)$ nos $n + 1$ pontos distintos dados, ou seja,

$$y_{n,k} = P_n(x_{n,k}), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Observação 2.7. *Em relação a interpolação polinomial, pode-se mostrar que:*

- (1) *O polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre os $n + 1$ pontos distintos $x_{n,k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$), $P_n(x)$, existe e é único. Além disso, o polinômio de interpolação de Lagrange de $f(x)$ sobre os $n + 1$ pontos distintos $x_{n,k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$), $P_n(x)$, é escrito como*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_{n,k}) \left[\frac{\pi(x)}{(x - x_{n,k})\pi'(x_{n,k})} \right],$$

onde $\pi(x) = (x - x_{n,0})(x - x_{n,1}) \dots (x - x_{n,n})$ (chamado de *polinômio dos nós*).

- (2) *No processo de interpolação polinomial existe um erro, $R_n(x)$, que pode ser dado por*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{\pi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x), \quad a < \xi_x < b, \quad (2.5)$$

onde $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$ (isto é, f contínua com derivadas contínuas até a ordem $n + 1$), $P_n(x)$ é o polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre os $n + 1$ pontos distintos, $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$, de $[a, b]$, e $\pi(x)$ é o polinômio dos nós.

A interpolação polinomial é amplamente utilizada em várias áreas. Através dela pode-se encontrar um logaritmo, o valor de uma função trigonométrica, pressão de gás correspondente ou, ainda, o volume para uma determinada temperatura química. A interpolação permite encontrar um valor que não esteja listado em uma tabela de referência ou como um ponto no gráfico.

2.4.2 Fórmulas de Quadraturas Interpolatórias

Uma das importantes aplicações do polinômio interpolador é na construção das chamadas *fórmulas de quadratura interpolatórias* que são utilizadas para aproximar o valor numérico da integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ e f uma função contínua em (a, b) . Essas fórmulas são classificadas como aquelas do tipo:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^n W_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n(f),$$

onde, para todo $k = 0, 1, \dots, n$, os valores $W_{n,k}$ são chamados *pesos* enquanto $x_{n,k}$ são denominados de *nós* da fórmula de quadratura. Aqui, $E_n(f)$ representa o erro obtido na aproximação.

Observação 2.8. (1) *Uma regra de quadratura tem grau de precisão n , se $E_n(f) = 0$ para todo $f(x) \in \mathbb{P}_n$ e existe um polinômio de grau $n+1$, $\tilde{f}(x)$, para o qual $E_n(\tilde{f}) \neq 0$;*

(2) *Na construção das fórmulas de quadratura é possível mostrar que os pesos, $W_{n,k}$, e o erro, $E_n(f)$, são dados, respectivamente, por:*

$$W_{n,k} = \frac{1}{\pi'(x_{n,k})} \int_a^b \frac{\pi(x)}{x - x_{n,k}} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

e

$$E_n(f) = \int_a^b R_n(x)dx = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \pi(x) f^{(n+1)}(\xi_x) dx,$$

onde $a < \xi_x < b$ e $\pi(x)$ é o polinômio dos nós, dado como na Observação 2.7;

(3) *Pode-se mostrar também que uma fórmula de quadratura é interpolatória se, e somente se, $E_n(f) = 0$ para todo $f(x) \in \mathbb{P}_n$.*

2.5 Integral de Riemann

Considere $[a, b]$ um intervalo finito e f uma função real, limitada, definida em $[a, b]$. Denomina-se *partição de $[a, b]$* (denotada por Δ) uma sequência de números reais $x_k, k = 0, 1, \dots, m$, onde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b.$$

Agora, considere para cada partição Δ de $[a, b]$, $M_k = \sup f(x)$ e $m_k = \inf f(x)$, onde $x_{k-1} \leq x \leq x_k$. Daí, fazendo-se

$$U(\Delta, f) = \sum_{k=1}^m M_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{e} \quad u(\Delta, f) = \sum_{k=1}^m m_k(x_k - x_{k-1}),$$

diz-se que f é integrável em $[a, b]$ no sentido de Riemann se

$$\lim_{\|\Delta\|=0} U(\Delta, f) = \lim_{\|\Delta\|=0} u(\Delta, f) = I,$$

onde $\|\Delta\|$ denota a norma da partição Δ (de $[a, b]$), definida por:

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leq k \leq m} |x_k - x_{k-1}|.$$

No caso em que f for integrável no intervalo $[a, b]$ (no sentido de Riemann), I será o valor da integral de f nesse intervalo, o qual é denotado por:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

2.6 Integral de Riemann-Stieltjes

Seja $[a, b]$ um intervalo finito, ψ uma função real não decrescente, definida em $[a, b]$, f uma função definida, também, em $[a, b]$ e Δ uma partição de $[a, b]$.

Considerando-se, agora, o subconjunto \mathcal{C} , da partição Δ , de pontos \tilde{x}_k tais que

$$x_{k-1} \leq \tilde{x}_k \leq x_k, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

e definindo-se a soma

$$S(\Delta, \mathcal{C}) = \sum_{k=1}^m f(\tilde{x}_k)[\psi(x_k) - \psi(x_{k-1})],$$

diz-se que f é integrável no sentido de Riemann-Stieltjes se existe um número S de modo que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que, para toda partição Δ , com $\|\Delta\| < \delta$, e para toda escolha de \mathcal{C} , tem-se

$$|S(\Delta, \mathcal{C}) - S| < \epsilon.$$

Ou seja, se

$$\lim_{\|\Delta\|=0} S(\Delta, \mathcal{C})$$

existe, então este limite é chamado de integral de Riemann-Stieltjes (ou, simplesmente, integral de Stieltjes) de f com respeito a ψ no intervalo $[a, b]$, a qual é, geralmente, denotada por

$$\int_a^b f(x)d\psi(x).$$

Observação 2.9. *As propriedades da integral de Stieltjes são bastante semelhantes às propriedades da integral de Riemann. Por exemplo, não é difícil verificar a validade de propriedades usuais tais como:*

(1)

$$\int_a^b cf(x)d\psi(x) = c \int_a^b f(x)d\psi(x), \quad \forall c \in \mathbb{R};$$

(2)

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] d\psi(x) = \int_a^b f_1(x)d\psi(x) + \int_a^b f_2(x)d\psi(x);$$

(3)

$$\int_a^b d\psi(x) = \psi(b) - \psi(a);$$

(4) *Para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$, tem-se:*

$$\int_a^b f(x)d\psi(x) = \int_a^c f(x)d\psi(x) + \int_c^b f(x)d\psi(x).$$

Para mais propriedades e detalhes das integrais de Riemann-Stieltjes, sugere-se, por exemplo, o texto de (RUDIN, 1971).

2.7 Distribuições

Definição 2.10. *Seja ψ uma função real, não decrescente, definida no intervalo em $[a, b]$. Chama-se ponto de aumento de ψ qualquer ponto $\xi \in [a, b]$ tal que $\psi(\xi + \epsilon) - \psi(\xi - \epsilon) > 0$, para todo $\epsilon > 0$. Um ponto de aumento ξ , de ψ , é dito isolado se existir $\epsilon > 0$ tal que ψ é constante nos intervalos $(\xi - \epsilon, \xi)$ e $(\xi, \xi + \epsilon)$.*

Definição 2.11. *Diz-se que ψ é uma distribuição (ou medida positiva) em $[a, b]$ se ψ for uma função definida em $[a, b]$, não decrescente, limitada, com infinitos pontos de aumento em $[a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, e tal que as integrais de Stieltjes*

$$\mu_k = \int_a^b x^k d\psi(x) \tag{2.6}$$

existam para $k = 0, 1, 2, \dots$

Observação 2.12. (1) *Os valores μ_k , dados em (2.6), são chamados de momentos da distribuição ψ . No caso desses momentos μ_k existirem para $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, ψ é dita uma distribuição forte em $[a, b]$;*

(2) *O número infinito de pontos de aumento na Definição 2.11 garante que*

$$\int_a^b [f(x)]^2 d\psi(x) > 0,$$

para qualquer polinômio não identicamente nulo em $[a, b]$. Este fato será essencial para a Teoria de polinômios ortogonais que será estudada na próxima seção.

(3) Quando o intervalo $[a, b]$ é tal que $[a, b] \subseteq (0, \infty)$, a distribuição ψ é chamada de distribuição de Stieltjes.

Um exemplo interessante de integral de Stieltjes é obtido quando ψ é uma função do “tipo escada” (definida num intervalo $[a, b]$, com saltos nos pontos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \leq x \leq \xi_1, \\ c_1, & \text{se } \xi_1 < x \leq \xi_2, \\ c_1 + c_2, & \text{se } \xi_2 < x \leq \xi_3, \\ \vdots & \vdots \\ c_1 + c_2 + \dots + c_n, & \text{se } \xi_n < x \leq b, \end{cases}$$

onde c_1, c_2, \dots, c_n são números arbitrários. Neste caso, pode-se mostrar, a partir da definição de Riemann-Stieltjes, que

$$\int_a^b f(x) d\psi(x) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) c_k,$$

para qualquer função contínua f , definida em $[a, b]$. Para um estudo mais aprofundado sobre as distribuições recomenda-se, por exemplo, os textos de (CHIHARA, 1978) e (SZEGŐ, 1939).

3 Polinômios Ortogonias

Nesta seção iniciamos o estudo dos chamados polinômios ortogonais. Como mencionado anteriormente na introdução deste trabalho, a teoria de polinômios ortogonais tem vasta aplicação em muitos tipos de problemas da Matemática Pura e Ciências Aplicadas. Tais polinômios podem ser estudados tanto na reta real como no círculo unitário, entretanto o estudo aqui proposto está relacionado a Teoria dos polinômios ortogonais na reta real, onde serão apresentadas definições e importantes propriedades satisfeitas por esses polinômios (bem como pelos seus zeros). Usamos como referência e indicamos para estudos mais detalhados dos assuntos abordados nessa seção, os livros de (ANDRADE; BRACCIALI; RAFAELI, 2012), (CHIHARA, 1978), (ISMAIL, 2005) e (SZEGŐ, 1939).

3.1 Sequência de Polinômios Ortogonais

Seja ψ uma distribuição como na Definição 2.11. Se $d(\psi) = w(x)dx$, então, de acordo com o item (2) da Observação 2.12, deve-se ter $w(x) \geq 0$ em $[a, b]$ (mas não identicamente nula). Nesta situação, a função $w(x)$ será chamada de *função peso*.

Apesar da Teoria de polinômios ortogonais na reta real poder ser estudada, também, em relação a um *funcional de momento* ou, mais geralmente, a uma medida positiva ψ qualquer, considera-se, nesta pesquisa, apenas o caso em que $d(\psi) = w(x)dx$ (ou seja, a medida ψ é dada, particularmente, em termos de uma função peso $w(x)$). Neste caso, define-se, em $\mathcal{C}[a, b]$, o seguinte produto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \quad (3.1)$$

Definição 3.1. *Seja $P_n(x)$ um elemento de \mathbb{P}_n . Diz-se que a sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais (SPO) com relação à função peso $w(x)$ no intervalo (a, b) se:*

(i) $P_n(x)$ é de grau exatamente n , $n \geq 0$;

$$(ii) \langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } n = m \end{cases}.$$

Observação 3.2. (1) *Note que, novamente a partir do item (2) da Observação 2.12, tem-se:*

$$\rho_n = \int_a^b [P_n(x)]^2 w(x)dx > 0.$$

(2) Usando o delta de Kronecker $\delta_{m,n}$, definido por

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ 1, & \text{se } m = n \end{cases}, \quad (3.2)$$

o item (ii) da Definição 3.1 pode ser reescrito como:

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \delta_{m,n}\rho_n, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

(3) Se $\rho_n = 1$ então a SPO é denominada sequência de polinômios ortonormais (SPO*), e será denotada por $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^\infty$.

(4) Os polinômios ortogonais de grau n , $P_n(x)$, serão denotados, nesse texto, por:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_{n,j}x^j, \quad a_{n,n} \neq 0.$$

(5) Na Seção 4 serão apresentadas, explicitamente, algumas sequências de polinômios ortogonais (os chamados polinômios ortogonais clássicos), onde serão constatadas, também, muitas das propriedades apresentadas ao longo da presente seção.

3.2 Propriedades Gerais dos Polinômios Ortogonais

Nesta seção serão apresentadas algumas importantes propriedades satisfeitas pelos polinômios ortogonais. A primeira delas trata da independência linear dos primeiros $m + 1$ ($m \geq 0$) termos de uma SPO conforme descrito na proposição a seguir.

Proposição 3.3. *Se $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$ pertencem a uma SPO então eles são linearmente independentes.*

Demonstração: Considere a seguinte combinação linear nula dos $m + 1$ polinômios dados:

$$\sum_{j=0}^m c_j P_j(x) = O(x) = O,$$

onde $c_j \in \mathbb{R}$, para todo $j = 0, 1, 2, \dots, m$.

Agora, para cada polinômio $P_k(x)$, $0 \leq k \leq m$, usando-se o produto escalar definido em (3.1), tem-se

$$\left\langle \sum_{j=0}^m c_j P_j, P_k \right\rangle = \langle O, P_k \rangle = 0,$$

ou, ainda,

$$\sum_{j=0}^m c_j \langle P_j, P_k \rangle = 0. \quad (3.3)$$

Uma vez que $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$ pertencem a uma SPO, então, por definição, tem-se $\langle P_k, P_k \rangle > 0$ e $\langle P_j, P_k \rangle = 0$ para $j \neq k$. Consequentemente, a partir de (3.3), obtém-se

$$0 = \sum_{j=0}^m c_j \langle P_j, P_k \rangle = c_k \langle P_k, P_k \rangle, \quad 0 \leq k \leq m.$$

Finalmente, da última igualdade, como $\langle P_k, P_k \rangle > 0$, conclui-se que $c_k = 0$, para todo $k = 0, 1, 2, \dots, m$. ■

Observação 3.4. Como consequência da Proposição 3.3, pode-se afirmar que os polinômios ortogonais $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$, formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a m , \mathbb{P}_m .

O próximo resultado (que é uma consequência direta da Proposição 3.3) fornece uma importante caracterização para uma SPO. A saber:

Teorema 3.5. Considere uma seqüência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $w(x)$ uma função peso no intervalo (a, b) . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma SPO com relação à função peso $w(x)$ em (a, b) ;
- (b) $\langle P_n, \pi \rangle = 0, \forall \pi(x) \in \mathbb{P}_{n-1}, n \geq 1$, e $\langle P_n, \pi \rangle \neq 0$ se $\pi(x)$ tem grau n ;
- (c) $\langle x^m, P_n \rangle = \int_a^b x^m P_n(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq m \leq n-1, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$

Demonstração: Suponha, inicialmente, que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma SPO com relação à função peso $w(x)$ em (a, b) , e seja $\pi(x)$ um polinômio de grau menor ou igual a $n-1$ qualquer. A partir da Proposição 3.3 (veja também Observação 3.4) sabe-se que $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n-1}(x)$ formam uma base para o espaço \mathbb{P}_{n-1} . Logo, existem constantes reais $\alpha_k, 0 \leq k \leq n-1$, tais que

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x).$$

Agora, como $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma SPO com relação à função peso $w(x)$ em (a, b) , segue por definição que $\langle P_n, P_k \rangle = 0$ para $0 \leq k \leq n-1$. Consequentemente,

$$\langle P_n, \pi \rangle = \left\langle P_n, \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \langle P_n, P_k \rangle = 0.$$

Analogamente, se $\pi(x)$ for um polinômio qualquer de grau n (isto é, $\pi(x) \in \mathbb{P}_n$), então existem constantes reais $\beta_k, 0 \leq k \leq n$, tais que

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k P_k(x), \quad \text{com } \beta_n \neq 0.$$

Logo,

$$\langle P_n, \pi \rangle = \left\langle P_n, \sum_{k=0}^n \beta_k P_k \right\rangle = \sum_{k=0}^n \beta_k \langle P_n, P_k \rangle = \beta_n \langle P_n, P_n \rangle \neq 0,$$

uma vez que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma SPO com relação à função peso $w(x)$ em (a, b) , e isto conclui a prova de (b).

Suponha, agora, que $\langle P_n, \pi \rangle = 0$ para qualquer polinômio $\pi(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$, $n \geq 1$, e que $\langle P_n, \pi \rangle \neq 0$ se $\pi(x)$ tem grau n . Então, claramente, tem-se $\langle P_n, x^m \rangle = 0$ se $m < n$ (ou seja, se $0 \leq m \leq n-1$). Por outro lado, se $m = n$, então $\pi(x) = x^n \in \mathbb{P}_n$, e considerando-se a SPO $\{\tilde{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ com relação à função peso $\tilde{w}(x)$ em (a, b) (onde, neste caso, $\tilde{P}_0(x), \tilde{P}_1(x), \dots, \tilde{P}_n(x)$ formam uma base para o espaço \mathbb{P}_n), é possível encontrar constantes $\gamma_k \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq n$, de modo que

$$x^n = \sum_{j=0}^n \gamma_j \tilde{P}_j(x), \quad \text{com } \gamma_n \neq 0.$$

Mas, pela hipótese considerada, sabe-se que $\langle P_n, \tilde{P}_j \rangle = 0$ para $j < n$, e $\langle P_n, \tilde{P}_n \rangle \neq 0$. Daí,

$$\langle x^n, P_n \rangle = \langle P_n, x^n \rangle = \left\langle P_n, \sum_{j=0}^n \gamma_j \tilde{P}_j(x) \right\rangle = \sum_{j=0}^n \gamma_j \langle P_n, \tilde{P}_j \rangle = \gamma_n \langle P_n, \tilde{P}_n \rangle \neq 0,$$

o que finaliza a prova do item (c).

Por fim, assumindo-se a validade da afirmativa em (c), e considerando-se

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^m a_{m,j} x^j, \quad \text{com } a_{m,m} \neq 0,$$

tem-se:

(i) Se $m < n$ (o caso $m > n$ é análogo), então

$$\langle P_m, P_n \rangle = \left\langle \sum_{j=0}^m a_{m,j} x^j, P_n \right\rangle = \sum_{j=0}^m a_{m,j} \langle x^j, P_n \rangle = 0;$$

(ii) Se $m = n$, então

$$\langle P_n, P_n \rangle = \left\langle \sum_{j=0}^n a_{n,j} x^j, P_n \right\rangle = \sum_{j=0}^n a_{n,j} \langle x^j, P_n \rangle = a_{n,n} \langle x^n, P_n \rangle = a_{n,n} \tilde{\rho}_n \neq 0,$$

de onde segue que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma SPO com relação à função peso $w(x)$ no intervalo (a, b) . ■

Corolário 3.6. *Sejam $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ duas seqüências de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à mesma função peso $w(x)$. Então,*

$$Q_j(x) = c_j P_j(x), \quad j = 0, 1, \dots,$$

onde c_j é uma constante que depende apenas de j .

Demonstração: Considere $Q_j(x) \in \{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Uma vez que a subsequência finita de polinômios ortogonais $\{P_i(x)\}_{i=0}^j$ formam uma base para o espaço dos polinômios \mathbb{P}_j , existem constantes reais c_1, c_2, \dots, c_j tais que:

$$Q_j(x) = \sum_{i=0}^j c_i P_i(x), \quad \text{com } c_j \neq 0. \quad (3.4)$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.5, sabe-se que $\langle Q_j, \pi \rangle = 0$, para todo polinômio $\pi(x)$ de grau menor do que ou igual a $j-1$ (pois $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é, também, uma SPO com relação à mesma função peso $w(x)$ em (a, b)). Consequentemente,

$$\langle Q_j, P_0 \rangle = \langle Q_j, P_1 \rangle = \dots = \langle Q_j, P_{j-1} \rangle = 0$$

Assim, para $k = 0, 1, 2, \dots, j-1$, tem-se

$$0 = \langle Q_j, P_k \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^j c_i P_i, P_k \right\rangle = \sum_{i=0}^j c_i \langle P_i, P_k \rangle = c_k \langle P_k, P_k \rangle, \quad (3.5)$$

já que $\langle P_i, P_k \rangle = 0$ para $i \neq k$.

Finalmente, como $\langle P_k, P_k \rangle \neq 0$, a igualdade em (3.5) implica em $c_k = 0$ para $k = 0, 1, \dots, j-1$, de onde se conclui, por (3.4), que

$$Q_j = c_j P_j(x).$$

■

Observação 3.7. O Corolário 3.6 informa que, a menos de um fator constante, a sequência de polinômios ortogonais com relação a um determinado produto interno, se existir, é única. Além disso, como foi visto, se $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ são duas sequências de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à mesma função peso $w(x)$, então,

$$Q_j(x) = c_j P_j(x), \quad j = 0, 1, \dots$$

Neste caso, a constante c_j pode ser obtida do fato que:

$$\langle Q_j, P_j \rangle = \langle c_j P_j, P_j \rangle = c_j \langle P_j, P_j \rangle,$$

isto é,

$$c_j = \frac{\langle Q_j, P_j \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle}.$$

Um questionamento importante em relação à Teoria de polinômios ortogonais está relacionado as possíveis condições para que exista uma SPO (com relação a uma determinada função peso em um intervalo (a, b)). Visando sanar esse questionamento é necessário apresentar a definição de *determinante de Hankel*, dada a seguir.

Definição 3.8. Chama-se de *determinante de Hankel*, de ordem $n + 1$, aquele definido por

$$H_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0, \quad (3.6)$$

onde, $\mu_r = \int_a^b x^r w(x) dx$, $r = 0, 1, 2, \dots, 2n$, são os momentos dados como (2.6).

Teorema 3.9. Se os momentos μ_r , $r = 0, 1, 2, \dots, 2n$, existem, então o determinante de Hankel, dado em (3.6), é diferente de zero.

Demonstração: Considere o sistema linear homogêneo abaixo:

$$\begin{cases} \mu_0 a_{n,0} + \mu_1 a_{n,1} + \cdots + \mu_n a_{n,n} = 0 \\ \mu_1 a_{n,0} + \mu_2 a_{n,1} + \cdots + \mu_{n+1} a_{n,n} = 0 \\ \vdots \\ \mu_n a_{n,0} + \mu_{n+1} a_{n,1} + \cdots + \mu_{2n} a_{n,n} = 0 \end{cases}. \quad (3.7)$$

Na forma de matriz o sistema acima pode ser reescrito como $\mathcal{H}_n \mathbf{a} = 0$, onde

$$\mathcal{H}_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note que o determinante da matriz dos coeficientes \mathcal{H}_n é o determinante de Hankel H_n . Desta forma, para mostrar que $H_n \neq 0$, é suficiente verificar que a única solução para o sistema linear (3.7) é: $a_{n,0} = a_{n,1} = \cdots = a_{n,n} = 0$. Com efeito, substituindo os momentos $\mu_r = \int_a^b x^r w(x) dx$ no sistema linear (3.7), obtém-se:

$$\begin{cases} a_{n,0} \int_a^b x^0 w(x) dx + \cdots + a_{n,n} \int_a^b x^n w(x) dx = 0 \\ a_{n,0} \int_a^b x w(x) dx + \cdots + a_{n,n} \int_a^b x^{n+1} w(x) dx = 0 \\ \vdots \\ a_{n,0} \int_a^b x^n w(x) dx + \cdots + a_{n,n} \int_a^b x^{2n} w(x) dx = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Agora, multiplicando-se, respectivamente, cada equação do sistema (3.8) por

$a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n}$ e depois somando-as, tem-se

$$\begin{aligned}
& a_{n,0}^2 \int_a^b x^0 w(x) dx + a_{n,1}^2 \int_a^b x^2 w(x) dx + \dots + a_{n,n}^2 \int_a^b x^{2n} w(x) dx \\
& + 2a_{n,0}a_{n,1} \int_a^b x w(x) dx + \dots + 2a_{n,0}a_{n,n} \int_a^b x^n w(x) dx \\
& + 2a_{n,1}a_{n,2} \int_a^b x^3 w(x) dx + \dots + 2a_{n,1}a_{n,n} \int_a^b x^{n+1} w(x) dx \\
& + 2a_{n,2}a_{n,3} \int_a^b x^5 w(x) dx + \dots + 2a_{n,2}a_{n,n} \int_a^b x^{n+2} w(x) dx \\
& \vdots \\
& + 2a_{n,n-1}a_{n,n} \int_a^b x^{n+(n-1)} w(x) dx \\
& = 0,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_a^b (a_{n,0} + a_{n,1}x + \dots + a_{n,n}x^n)^2 w(x) dx = 0.$$

Finalmente, considerando-se $Q(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i}x^i$, a última igualdade pode ser reescrita como

$$\langle Q, Q \rangle = \int_a^b [Q(x)]^2 w(x) dx = 0.$$

Consequentemente, da definição de produto interno, pode-se concluir que $Q(x) \equiv 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de onde segue que

$$a_{n,0} = a_{n,1} = \dots = a_{n,n} = 0$$

é a única solução do sistema linear dado, exatamente como se desejava. ■

O próximo teorema fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de uma SPO.

Teorema 3.10. *Existe uma (única) sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação a função peso $w(x)$ se, e somente se, os determinantes de Hankel, H_n , dados em (3.6), são diferentes de zero para $n = 0, 1, 2, \dots$*

Demonstração: Seja $P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_{n,j}x^j$, $n \geq 0$, um polinômio qualquer. Observe que as condições de ortogonalidade descritas no Teorema 3.5, isto é,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^n a_{n,j} \mu_{j+m} &= \sum_{j=0}^n a_{n,j} \int_a^b x^{m+j} w(x) dx \\
&= \int_a^b x^m \left(\sum_{j=0}^n a_{n,j} x^j \right) w(x) dx \\
&= \int_a^b x^m P_n(x) w(x) dx \\
&= \langle x^m, P_n \rangle = \tilde{\rho}_n \delta_{m,n}, \quad \tilde{\rho}_n \neq 0, \quad m \leq n,
\end{aligned}$$

através do “conhecido” processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Esse processo pode ser julgado por muitos como método um tanto quanto trabalhoso ou, até mesmo, difícil. Todavia, através da *relação de recorrência de três termos* – que é uma das mais importantes propriedades satisfeitas pelos polinômios ortogonais, tais polinômios podem ser facilmente gerados a partir de dois termos iniciais dados. Além disso, várias outras propriedades dos polinômios ortogonais são consequência dessa relação que será apresentada no teorema a seguir.

Teorema 3.11. *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) com relação a função peso $w(x)$. Então,*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (3.10)$$

com $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$, $\alpha_{n+1}, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, e

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0. \quad (3.11)$$

Demonstração: Seja $P_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0} \in \{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Neste caso, $a_{n,n} \neq 0$ para todo $n \geq 0$, pois $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sendo uma SPO garante que $P_n(x)$ tem grau exatamente n para todo $n \geq 0$.

Note que $xP_n(x)$ é um polinômio de grau $n+1$ ($n \geq 0$) e, como os polinômios ortogonais P_1, P_2, \dots, P_{n+1} formam uma base para o espaço vetorial \mathbb{P}_{n+1} , existem constantes reais b_0, \dots, b_{n+1} tais que $xP_n(x)$ pode ser representado por:

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x) \quad (3.12)$$

Note que comparando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os membros da igualdade acima, tem-se

$$a_{n,n} = b_{n+1}a_{n+1,n+1},$$

isto é,

$$b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} \neq 0, \quad \text{para todo } n \geq 0. \quad (3.13)$$

Agora, para $j \leq n-2$, considere o polinômio $\pi(x) = xP_j(x)$ (de grau menor ou igual a $n-1$) e veja que, pelo Teorema 3.5,

$$\begin{aligned} \langle xP_n, P_j \rangle &= \int_a^b [xP_n(x)] P_j(x) w(x) dx \\ &= \int_a^b P_n(x) [xP_j(x)] w(x) dx \\ &= \langle P_n, xP_j \rangle = \langle P_n, \pi \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, como $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma SPO, a igualdade (3.12) garante que:

$$0 = \langle xP_n, P_j \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i, P_j \right\rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i, P_j \rangle = b_j \langle P_j, P_j \rangle, \quad j \leq n-2,$$

pois $\langle P_i, P_j \rangle = 0$, se $i \neq j$. Logo, deve-se ter

$$b_j = 0, \quad j \leq n-2,$$

já que, sendo $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO, $\langle P_j, P_j \rangle \neq 0$.

Dessa forma, usando a equação (3.12) e o fato que $b_j = 0$ para $j \leq n-2$, obtém-se

$$xP_n(x) = b_{n+1}P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (3.14)$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_{-1}(x) = 0$, ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \frac{1}{b_{n+1}}xP_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}P_{n-1}(x) - \frac{b_n}{b_{n+1}}P_n(x) \\ &= \left(\frac{1}{b_{n+1}}x - \frac{b_n}{b_{n+1}} \right) P_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}P_{n-1}(x) \\ &= (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

com $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$, e, para $n \geq 0$,

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}, \quad \beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}. \quad (3.16)$$

Finalmente, resta mostrar que

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0.$$

De fato, considerando os valores de b_{n+1} e γ_{n+1} , dados respectivamente em (3.13) e (3.16), tem-se

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Além disso, usando (3.14) e algumas propriedades do produto interno apresentadas na Seção 2, pode-se concluir que

$$\begin{aligned} \langle xP_n, P_n \rangle &= \langle b_{n+1}P_{n+1} + b_nP_n + b_{n-1}P_{n-1}, P_n \rangle \\ &= b_{n+1}\langle P_{n+1}, P_n \rangle + b_n\langle P_n, P_n \rangle + b_{n-1}\langle P_{n-1}, P_n \rangle \end{aligned}$$

Consequentemente, como $\langle P_{n+1}, P_n \rangle = 0$ e $\langle P_{n-1}, P_n \rangle = 0$ (já que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma SPO), a última igualdade fica

$$\langle xP_n, P_n \rangle = b_n\langle P_n, P_n \rangle.$$

Agora, considerando os valores de β_{n+1} e γ_{n+1} (dados em (3.16)) e o valor de b_n obtido a partir da igualdade anterior, tem-se

$$\beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}} = \gamma_{n+1}b_n = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}.$$

De modo análogo, usando a relação de recorrência de três termos (estabelecida na igualdade (3.15)), propriedades do produto interno e as relações de ortogonalidade $\langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle = 0 = \langle P_n, P_{n-1} \rangle$ (dadas pelo fato de $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ser uma SPO), obtém-se

$$\begin{aligned} 0 = \langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle &= \langle (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n - \alpha_{n+1}P_{n-1}, P_{n-1} \rangle \\ &= \gamma_{n+1}\langle xP_n, P_{n-1} \rangle - \beta_{n+1}\langle P_n, P_{n-1} \rangle - \alpha_{n+1}\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle \\ &= \gamma_{n+1}\langle xP_n, P_{n-1} \rangle - \alpha_{n+1}\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}. \quad (3.17)$$

Entretanto, da relação de recorrência (3.15), isto é,

$$P_n(x) = (\gamma_n x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$

tem-se

$$xP_{n-1}(x) = \frac{1}{\gamma_n}P_n(x) + \frac{\beta_n}{\gamma_n}P_{n-1}(x) + \frac{\alpha_n}{\gamma_n}P_{n-2}(x), \quad n \geq 1. \quad (3.18)$$

Portanto, como

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \int_a^b xP_n(x)P_{n-1}(x)w(x)dx = \int_a^b P_n(x)xP_{n-1}(x)w(x)dx = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle,$$

a igualdade em (3.18) implica em

$$\begin{aligned} \langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle &= \left\langle P_n, \frac{1}{\gamma_n}P_n + \frac{\beta_n}{\gamma_n}P_{n-1} + \frac{\alpha_n}{\gamma_n}P_{n-2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\gamma_n}\langle P_n, P_n \rangle + \frac{\beta_n}{\gamma_n}\langle P_n, P_{n-1} \rangle + \frac{\alpha_n}{\gamma_n}\langle P_n, P_{n-2} \rangle \\ &= \frac{1}{\gamma_n}\langle P_n, P_n \rangle, \end{aligned} \quad (3.19)$$

pois $\langle P_n, P_{n-1} \rangle = 0 = \langle P_n, P_{n-2} \rangle$, já que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma SPO.

Finalmente, substituindo o valor de $\langle xP_n, P_{n-1} \rangle$ (estabelecido na igualdade (3.19)) na expressão para α_{n+1} (dada em (3.17)), conclui-se que

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle},$$

exatamente como se desejava. ■

Observação 3.12. (1) *Uma outra forma de escrever a relação de recorrência de três termos é escrevê-la em sua forma mônica, onde o coeficiente do termo de maior grau de cada polinômio gerado é igual a 1. Nesse caso, usando-se a relação (3.10) (dada no Teorema 3.11) e considerando-se os polinômios ortogonais mônicos, $\hat{P}_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_{n,n}}$, $n \geq 1$, não é difícil ver que a relação de recorrência de três termos, para os polinômios mônicos, fica:*

$$\hat{P}_{n+1}(x) = (x - \hat{\beta}_{n+1}) \hat{P}_n(x) - \hat{\alpha}_{n+1} \hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (3.20)$$

onde $\hat{P}_0(x) = 1$, $\hat{P}_{-1}(x) = 0$,

$$\hat{\beta}_{n+1} = \frac{\langle x \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle} \quad e \quad \hat{\alpha}_{n+1} = \frac{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \rangle}.$$

(2) *É possível escrever, também, a relação de três termos na forma ortonormal, onde cada termo de P_n é dividido pela sua norma. Neste caso, é possível mostrar que a relação de recorrência de três termos para os polinômios ortonormais $P_n^*(x) = \frac{P_n(x)}{\|P_n\|}$, com $\|P_n\| = \sqrt{\langle P_n, P_n \rangle}$, $n \geq 0$, é expressa como:*

$$P_{n+1}^*(x) = (\gamma_{n+1}^* x - \beta_{n+1}^*) P_n^*(x) - \alpha_{n+1}^* P_{n-1}^*(x), \quad n \geq 0, \quad (3.21)$$

onde

$$\gamma_{n+1}^* = \frac{a_{n+1,n+1}^*}{a_{n,n}^*}, \quad \beta_{n+1}^* = \gamma_{n+1}^* \langle x P_n^*, P_n^* \rangle \quad e \quad \alpha_{n+1}^* = \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*},$$

com as mesmas condições iniciais $P_0^*(x) = 1$ e $P_{-1}^*(x) = 0$.

Entre as consequências da relação de recorrência de três termos está a chamada *Identidade de Christoffel-Darboux* que tem importantes implicações no que se refere a zeros de polinômios ortogonais. Tal identidade será apresentada e demonstrada no próximo teorema.

Teorema 3.13. (*Identidade de Christoffel-Darboux*) *Seja $\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos e $\{\hat{\alpha}_n\}_{n=0}^\infty$ a sequência real de coeficientes dados na relação de recorrência (3.20). Então,*

$$\sum_{k=0}^n \frac{\hat{P}_k(x) \hat{P}_k(u)}{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{k+1}} = \frac{\hat{P}_{n+1}(x) \hat{P}_n(u) - \hat{P}_n(x) \hat{P}_{n+1}(u)}{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{n+1} (x - u)}. \quad (3.22)$$

Demonstração: Para demonstrar este teorema será utilizado a relação de recorrência para polinômios ortogonais mônicos dada em (3.20). Precisamente, reescrevendo (3.20) como

$$x \hat{P}_n(x) = \hat{P}_{n+1}(x) + \hat{\beta}_{n+1} \hat{P}_n(x) + \hat{\alpha}_{n+1} \hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (3.23)$$

com $\hat{P}_0(x) = 1$, $\hat{P}_{-1}(x) = 0$, é possível obter, para $m \geq 0$, as seguintes identidades:

$$x \hat{P}_m(x) \hat{P}_m(u) = \hat{P}_{m+1}(x) \hat{P}_m(u) + \hat{\beta}_{m+1} \hat{P}_m(x) \hat{P}_m(u) + \hat{\alpha}_{m+1} \hat{P}_{m-1}(x) \hat{P}_m(u) \quad (3.24)$$

e

$$u\hat{P}_m(u)\hat{P}_m(x) = \hat{P}_{m+1}(u)\hat{P}_m(x) + \hat{\beta}_{m+1}\hat{P}_m(u)\hat{P}_m(x) + \hat{\alpha}_{m+1}\hat{P}_{m-1}(u)\hat{P}_m(x), \quad (3.25)$$

onde a identidade em (3.24) é obtida multiplicando-se, membro a membro, a igualdade dada em (3.23) (com $n = m$) por $\hat{P}_m(u)$, enquanto (3.25) é obtida quando se faz $x = u$ e $m = n$ em (3.24) e, em seguida, multiplica-se (a nova igualdade) por $\hat{P}_m(x)$.

Agora, subtraindo-se, membro a membro, a identidade (3.25) da identidade (3.24), obtém-se

$$(x - u)\hat{P}_m(x)\hat{P}_m(u) = \hat{P}_{m+1}(x)\hat{P}_m(u) - \hat{P}_m(x)\hat{P}_{m+1}(u) - \hat{\alpha}_{m+1} [\hat{P}_m(x)\hat{P}_{m-1}(u) - \hat{P}_{m-1}(x)\hat{P}_m(u)]. \quad (3.26)$$

Daí, denotando-se o lado direito da igualdade em (3.22) por $G_n(x, u)$, ou seja, fazendo-se

$$G_n(x, u) := \frac{\hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}_n(u) - \hat{P}_n(x)\hat{P}_{n+1}(u)}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{n+1}(x - u)}, \quad n \geq 0,$$

e dividindo-se, membro a membro, a igualdade em (3.26) por $(\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{m+1})(x - u)$, tem-se

$$\frac{\hat{P}_m(x)\hat{P}_m(u)}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{m+1}} = G_m(x, u) - G_{m-1}(x, u), \quad m \geq 0, \quad (3.27)$$

onde considera-se, por definição, $G_{-1}(x, u) := 0$.

Finalmente, da igualdade em (3.27) resulta que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{\hat{P}_k(x)\hat{P}_k(u)}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{k+1}} &= \sum_{k=0}^n [G_k(x, u) - G_{k-1}(x, u)] \\ &= G_n(x, u) \\ &= \frac{\hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}_n(u) - \hat{P}_n(x)\hat{P}_{n+1}(u)}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{n+1}(x - u)}, \end{aligned}$$

exatamente como se desejava. ■

Observação 3.14. (1) Uma vez que $\hat{P}(x) = \frac{P_n^*(x)}{a_{n,n}^*}$, como consequência do Teorema 3.13, pode-se obter, também, a Identidade de Christoffel-Darboux para os polinômios ortonormais, a saber:

$$\sum_{k=0}^n P_k^*(x)P_k^*(u) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \frac{P_{n+1}^*(x)P_n^*(u) - P_n^*(x)P_{n+1}^*(u)}{x - u}, \quad (3.28)$$

onde γ_{n+1}^* , $n \geq 0$, são os coeficientes dados na relação de recorrência (3.21).

(2) Como consequência da Identidade de Christoffel-Darboux para os polinômios ortonormais, dada em (3.28), é possível obter a chamada Fórmula Confluente (válida para todo $x \in \mathbb{R}$):

$$\sum_{k=0}^n ((P_k^*(x))^2) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} [P_n^*(x)(P_{n+1}^*(x))' - P_{n+1}^*(x)(P_n^*(x))'] > 0, \quad (3.29)$$

onde $(P_j^*(x))'$, $j \geq 0$, denota a derivada do polinômio $P_j^*(x)$. De fato, somando-se e subtraindo-se $P_{n+1}^*(x)P_n^*(x)$ na identidade dada em (3.28), obtém-se

$$\sum_{k=0}^n P_k^*(x)P_k^*(u) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \left\{ P_n^*(x) \frac{(P_{n+1}^*(x) - P_{n+1}^*(u))}{x - u} - P_{n+1}^*(x) \frac{(P_n^*(x) - P_n^*(u))}{x - u} \right\}.$$

Agora, para se obter a Fórmula Confluyente (3.29) basta fazer $u \rightarrow x$ em ambos os membros da última igualdade. Observe que a soma dada no lado direito da igualdade (3.29) é sempre positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, pois $P_0^*(x) = 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3.4 Zeros de Polinômios Ortogonais

Existem muitas propriedades conhecidas relacionadas aos zeros dos polinômios ortogonais. Algumas dessas propriedades serão apresentadas nessa subseção e, como será visto, elas são consequências, justamente, das propriedades satisfeitas pelos polinômios ortogonais que foram apresentadas ao longo desta seção.

A primeira propriedade relacionada aos zeros de polinômios ortogonais, aqui apresentada, garante que dois polinômios consecutivos $P_n(x)$ e $P_{n-1}(x)$ de uma SPO $\{P_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ não possuem zeros em comum. Como veremos no teorema a seguir, essa propriedade é uma aplicação direta da Fórmula Confluyente (3.29).

Teorema 3.15. *Seja $\{P_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação a função peso $w(x)$. Então, dois polinômios consecutivos $P_n(x)$ e P_{n-1} , não têm zeros em comum.*

Demonstração: Denotando por $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ os zeros de $P_n(x)$ (em ordem crescente) e substituindo-os em (3.29) (com $n - 1$ no lugar de n e considerando $P_n^*(x) = \frac{P_n(x)}{\|P_n\|}$), obtém-se, para $k = 1, \dots, n - 1$,

$$P_n(x_{n-1,k})P_{n-1}'(x_{n-1,k}) < 0 \quad \text{ou} \quad P_n(x_{n-1,k})P_{n-1}'(x_{n-1,k}) > 0,$$

se $\gamma_{n+1}^* > 0$ ou $\gamma_{n+1}^* < 0$, respectivamente. Em qualquer dos casos pode-se concluir que $P_n(x_{n-1,k}) \neq 0$ para todo $k = 1, \dots, n - 1$, o que garante a prova do resultado desejado. ■

Outro importante resultado relacionado aos zeros de polinômios ortogonais é o fato de que esses zeros são todos reais, distintos e pertencentes ao intervalo de ortogonalidade (a, b) , da função peso $w(x)$, como mostra o seguinte teorema:

Teorema 3.16. *Seja $\{P_n(x)\}_{j=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) com relação a função peso $w(x)$. Então, os zeros de um dado polinômio $P_n(x)$, $n \geq 1$ (da SPO dada) são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Demonstração: Suponha, inicialmente, por absurdo, que $P_n(x)$ não muda de sinal em (a, b) . Então $P_n(x) \geq 0$ (mas não identicamente nulo) em (a, b) , de onde segue que $\int_a^b P_n(x)w(x)dx > 0$, ou $P_n(x) \leq 0$ em (a, b) implicando em $\int_a^b P_n(x)w(x)dx < 0$. Note que nenhuma das duas desigualdades obtidas relacionadas a integral $\int_a^b P_n(x)w(x)dx$ podem ocorrer, pois, da relação de ortogonalidade, tem-se

$$\int_a^b P_n(x)w(x)dx = \int_a^b 1 \cdot P_n(x)w(x)dx = 0.$$

Portanto $P_n(x)$ deve mudar de sinal pelo menos uma vez no intervalo (a, b) . Sendo assim, existe pelo menos uma raiz real de $P_n(x)$ de multiplicidade ímpar em (a, b) .

Suponha, agora, que as raízes distintas (de multiplicidade ímpar) de $P_n(x)$ em (a, b) são: $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,r}$ ($r < n$). Então

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2})\dots(x - x_{n,r})Q(x) = R(x)Q(x), \quad (3.30)$$

onde $R(x)$ é um polinômio de grau $r < n$ com raízes $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,r}$, e $Q(x)$ é um polinômio de grau $(n - r)$ que tem somente raízes complexas ou raízes de multiplicidade par em (a, b) ou raízes fora de (a, b) . Sendo assim $Q(x)$ não muda de sinal em (a, b) . No entanto, como $r < n$, da relação de ortogonalidade, tem-se

$$\int_a^b R(x)P_n(x)w(x)dx = 0 \quad (3.31)$$

Mas, por (3.30) e pelas definições de $R(x)$, $Q(x)$ e $w(x)$, obtém-se

$$\int_a^b R(x)P_n(x)w(x)dx = \int_a^b R^2(x)Q(x)w(x)dx \neq 0,$$

o que contraria o resultado obtido em (3.31). Portanto, $P_n(x)$ deve ter $r \geq n$ raízes (distintas) de multiplicidade ímpar em (a, b) . Como $P_n(x)$ tem grau n , então $r = n$ e $P_n(x)$ tem n raízes de multiplicidade ímpar em (a, b) , de modo que

$$P_n(x) = a_{n,n}(x - x_{n,1})^{i_1}(x - x_{n,2})^{i_2}\dots(x - x_{n,r})^{i_n}.$$

Como i_1, i_2, \dots, i_n são índices positivos e ímpares, e $i_1 + i_2 + \dots + i_n = n$, conclui-se que $i_1 = i_2 = \dots = i_n = 1$, o que finaliza a prova do teorema. ■

O último resultado apresentado nessa subseção sobre zeros de polinômios ortogonais está relacionado a uma importante relação de *entrelaçamento* dos zeros de polinômios ortogonais de graus consecutivos. Isto é, se colocados em ordem crescente, os zeros de $P_n(x)$ e $P_{n-1}(x)$ satisfazem

$$x_{n,1} < x_{n-1,1} < x_{n,2} < x_{n-1,2} < \dots < x_{n,n-1} < x_{n-1,n-2} < x_{n,n} < x_{n-1,n-1}.$$

Essa propriedade está descrita no teorema a seguir.

Teorema 3.17. *Seja $\{P_j(x)\}_{j=0}^\infty$ uma SPO. Então, entre dois zeros consecutivos do polinômio de grau $n - 1$, $P_{n-1}(x)$, existe somente um zero de $P_n(x)$.*

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que os polinômios $P_j(x)$ sejam ortonormais (denotando, no caso, $P_j(x) := P_j^*(x)$) e $a_{j,j}^* := a_{j,j} > 0$ para $j = 0, 1, 2, \dots$. Sejam $x_{n-1,1} < x_{n-1,2} < \dots < x_{n-1,n-1}$ os zeros de $P_{n-1}(x)$ em ordem crescente. Considere $x_{n-1,k}$ e $x_{n-1,k+1}$, onde $k = 1, 2, \dots, n - 2$, dois zeros consecutivos de $P_{n-1}(x)$.

Observe que, substituindo esses dois zeros consecutivos de $P_{n-1}(x)$ na Fórmula Confluyente (3.29) (com n substituído por $n - 1$), obtém-se

$$P_n(x_{n-1,k})P'_{n-1}(x_{n-1,k}) < 0 \quad \text{e} \quad P_n(x_{n-1,k+1})P'_{n-1}(x_{n-1,k+1}) < 0, \quad (3.32)$$

uma vez que $\gamma_n^* = a_{n,n}^*/a_{n-1,n-1}^* > 0$ e $P_{n-1}^*(x_{n-1,k}) = P_{n-1}^*(x_{n-1,k+1}) = 0$, para $k = 1, 2, \dots, n - 2$.

Agora, da teoria de funções e suas derivadas é fácil observar que $P'_{n-1}(x_{n-1,k})$ e $P'_{n-1}(x_{n-1,k+1})$ possuem sinais opostos, já que $x_{n-1,k}$ e $x_{n-1,k+1}$ são zeros consecutivos de $P_{n-1}(x)$. Consequentemente, dos resultados obtidos em (3.32), conclui-se que $P_n(x_{n-1,k})$ e $P_n(x_{n-1,k+1})$ também possuem sinais opostos, de onde segue que $P_n(x)$ possui pelo menos um zero em $(x_{n-1,k}, x_{n-1,k+1})$, para $k = 1, 2, \dots, n - 2$.

Dessa forma, em cada um dos $n - 2$ subintervalos $(x_{n-1,k}, x_{n-1,k+1})$ de (a, b) (cujos extremos correspondem a dois zeros consecutivos de $P_{n-1}(x)$) já existe pelos menos um zero de $P_n(x)$, e como $P_n(x)$ tem grau exatamente n , so restam apenas dois zeros de $P_n(x)$ para serem localizados no intervalo (a, b) .

Observe que esse dois zeros restantes de $P_n(x)$ devem estar nos intervalos $(a, x_{n-1,1})$ e $(x_{n-1,n-1}, b)$, um em cada intervalo. De fato, como $a_{j,j} > 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$, deve-se ter, necessariamente, $P_j(b) > 0$ (pois se $P_j(b) < 0$ isso implicaria que $P_j(x)$ deveria ter um zero fora do intervalo (a, b) já que, neste caso, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_j(x) = +\infty$, o que seria um absurdo pelo Teorema 3.16) e, portanto, $P'_{n-1}(x_{n-1,k+1}) > 0$. Daí, usando novamente (3.32), tem-se $P_n(x_{n-1,n-1}) < 0$, de onde se conclui que $P_n(x)$ muda de sinal entre $x_{n-1,n-1}$ e b , garantindo-se que $P_n(x)$ tem um zero no intervalo $(x_{n-1,n-1}, b)$.

Analogamente pode-se mostrar que existe um zero de $P_n(x)$ entre a e $x_{n-1,1}$. Para isso, basta observar que, sendo $a_{j,j} > 0$, tem-se

$$\text{signal}[P_j(a)] = (-1)^j,$$

e isto concluí a prova do teorema. ■

3.5 Polinômios Ortogonais Simétricos

Definição 3.18. *Uma função peso $w(x)$ definida em $(-b, b)$ é chamada par se $w(x) = w(-x)$.*

Na próxima seção serão apresentados alguns exemplos clássicos de funções pesos pares, a saber: $w(x) = 1$, $w(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2}$ (onde $\lambda - (1/2) > -1$, com $\lambda \in \mathbb{R}$), $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ e $w(x) = (1 - x^2)^{1/2}$ todas definidas no intervalo $(-1, 1)$, bem como a função peso $w(x) = e^{-x^2}$ definida no intervalo $(-\infty, \infty)$. Tais funções estão associadas, respectivamente, aos polinômios de *Legendre*, *Gegenbauer*, *Chebyshev de 1ª e 2ª espécies*, e *Hermite*, que são alguns dos chamados *polinômios ortogonais clássicos*.

Um importante resultado associado a polinômios que são ortogonais com relação à funções pesos pares é apresentado no teorema a seguir.

Teorema 3.19. *Se uma função peso $w(x)$ definida em $(-b, b)$ é par, então os momentos de ordem ímpar são nulos, isto é, $\mu_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Além disso, se $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequência de polinômios ortogonais relativa a $w(x)$, então*

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad n \geq 0.$$

Demonstração: Uma vez que a função peso $w(x)$ é par, tem-se $w(x) = w(-x)$. Consequentemente, como

$$\mu_{2n+1} = \int_{-b}^b x^{2n+1} w(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

fazendo a mudança de variável $x = -y$, obtém-se

$$\begin{aligned} \mu_{2n+1} &= \int_{-b}^b x^{2n+1} w(x) dx = \int_b^{-b} (-y)^{2n+1} w(-y) [-dy] \\ &= - \int_{-b}^b y^{2n+1} w(y) dy \\ &= -\mu_{2n+1}, \end{aligned}$$

de onde segue que $2\mu_{2n+1} = 0$ ou, ainda, $\mu_{2n+1} = 0$, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$

Agora, considerando, sem perda de generalidade, $\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ a SPO mônicos relativa a função peso par $w(x)$, resta provar que $\hat{P}_n(-x) = (-1)^n \hat{P}_n(x)$, para todo $n \geq 0$. Com efeito, uma vez que $w(x) = w(-x)$, fazendo novamente a mudança de variável $x = -y$, observe que

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b \hat{P}_m(-x) \hat{P}_n(-x) w(x) dx &= \int_b^{-b} \hat{P}_m(y) \hat{P}_n(y) w(-y) [-dy] \\ &= \int_{-b}^b \hat{P}_m(y) \hat{P}_n(y) w(y) dy \\ &= \int_{-b}^b \hat{P}_m(x) \hat{P}_n(x) w(x) dx, \end{aligned} \tag{3.33}$$

onde na última igualdade apenas se troca a notação da variável y por x .

Da igualdade obtida em (3.33) pode-se concluir que $\{\hat{P}_n(-x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ são duas SPO, em $(-b, b)$, relativas a mesma função peso $w(x)$ (já que os respectivos polinômios

de ambas as seqüências, $\hat{P}_n(-x)$ e $\hat{P}_n(x)$, terão grau n e a ortogonalidade da seqüência $\{\hat{P}_n(-x)\}_{n=0}^{\infty}$ é dada a partir da ortogonalidade de $\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Logo, pelo Corolário 3.6, deve-se ter

$$\hat{P}_n(-x) = c_n \hat{P}_n(x) \quad \text{para } n \geq 0, \quad (3.34)$$

onde c_n é uma constante. Mas, sendo

$$\hat{P}_n(x) = x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0},$$

tem-se

$$c_n \hat{P}_n(x) = c_n x^n + c_n a_{n,n-1} x^{n-1} + \dots + c_n a_{n,1} x + c_n a_{n,0} \quad (3.35)$$

e

$$\hat{P}_n(-x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} a_{n,n-1} x^{n-1} + \dots + (-1) a_{n,1} x + a_{n,0}. \quad (3.36)$$

Finalmente, como $\hat{P}_n(-x) = c_n \hat{P}_n(x)$ para $n \geq 0$, comparando-se os coeficientes dos termos de maior grau de $\hat{P}_n(-x)$ e $c_n \hat{P}_n(x)$, dados, respectivamente, por (3.35) e (3.36), obtém-se

$$c_n = (-1)^n, \quad n \geq 0.$$

Por fim, substituindo o valor de c_n , obtido na igualdade acima, na expressão dada em (3.34), conclui-se que $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ para $n \geq 0$, e isso finaliza a prova do teorema. ■

Observação 3.20. De acordo com o resultado dado na segunda parte do Teorema 3.19 os polinômios $P_n(x)$, ortogonais no intervalo $(-b, b)$, com relação à uma função peso par deve sempre satisfazer à condição:

$$\hat{P}_n(-x) = (-1)^n \hat{P}_n(x) \quad \text{para } n \geq 0. \quad (3.37)$$

Tais polinômios serão chamados polinômios ortogonais simétricos.

O teorema a seguir fornece uma importante caracterização relativa a fórmula de recorrência de três termos satisfeita por polinômios ortogonais simétricos, a saber:

Teorema 3.21. Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO relativa à uma função peso $w(x)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ para $n \geq 0$;
- (b) Na relação de recorrência de três termos (3.10), tem-se $\beta_n = 0$ para $n \geq 1$.

Demonstração: Para provar as equivalências (a) e (b) será utilizado novamente, sem perda de generalidade, os polinômios ortogonais simétricos na forma mônica $\hat{P}_n(x)$, ou seja, aqueles polinômios tais que o coeficiente do termo de maior grau é sempre igual a 1.

Para provar que (a) implica em (b) considere, inicialmente, $\hat{Q}_n(x) = (-1)^n \hat{P}_n(-x)$ para todo n . Como, por hipótese, $\hat{P}_n(x) = (-1)^n \hat{P}_n(-x)$, subtraindo a relação de recorrência de $\hat{P}_n(x)$ da relação de recorrência de $\hat{Q}_n(x)$ (dadas, em suas respectivas formas mônicas, por (3.20)), obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{Q}_n(x) - \hat{P}_n(x) \\ &= (x + \hat{\beta}_n)\hat{Q}_{n-1}(x) - \hat{\alpha}_n\hat{Q}_{n-2}(x) - \left[(x - \hat{\beta}_n)\hat{P}_{n-1}(x) - \hat{\alpha}_n\hat{P}_{n-2}(x) \right] \\ &= 2\hat{\beta}_n\hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

de onde chega-se a conclusão que $\hat{\beta}_n = 0$ para todo $n \geq 1$.

Reciprocamente, considerando, na relação de recorrência de três termos (3.10), $\beta_n = 0$ para todo $n \geq 1$ ou, ainda, sem perda de generalidade, $\hat{\beta}_n = 0$ na relação de recorrência de três termos em sua forma mônica (3.20), tem-se que as relações de recorrência para os polinômios $\hat{Q}_n(x) = (-1)^n \hat{P}_n(-x)$ e $P_n(x)$ são dadas, respectivamente, por

$$\hat{Q}_n(x) = x\hat{Q}_{n-1}(x) - \alpha_n\hat{Q}_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$

e

$$\hat{P}_n(x) = x\hat{P}_{n-1}(x) - \alpha_n\hat{P}_{n-2}(x), \quad n \geq 1.$$

Observe que $\hat{Q}_n(x)$ e $\hat{P}_n(x)$ satisfazem a mesma fórmula de recorrência e, além disso,

$$\hat{Q}_{-1}(x) = \hat{P}_{-1}(x) \quad \text{e} \quad \hat{Q}_0(x) = \hat{P}_0(x),$$

isto é, as mesmas condições iniciais. Portanto, deve-se ter

$$\hat{P}_n(x) = \hat{Q}_n(x) = (-1)^n \hat{P}_n(-x), \quad n \geq 0,$$

o que conclui a prova do teorema. ■

Observação 3.22. *Dos resultados obtidos nessa subseção pode-se concluir que se a função peso $w(x)$, definida em $(-b, b)$, for par, então a sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, ortogonais com relação à função peso $w(x)$, é tal que a igualdade em (3.37) ocorre, isto é, os polinômios ortogonais são simétricos. Para esses polinômios se \tilde{x} é um zero $P_n(x)$, então pela relação (3.37), deve-se ter que $-\tilde{x}$ também é um zero de $P_n(x)$. Assim, se n for par só será necessário calcular a metade dos $x_{n,k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) zeros de $P_n(x)$ (já que a outra metade é obtida por simetria). Por outro lado, se n for ímpar, $x = 0$ será sempre um zero de $P_n(x)$ (em virtude do Teorema 3.21) e para calcular os outros $n - 1$ zeros só haverá, necessidade (novamente) de se calcular a metade deles. Em resumo, se $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais simétricos tal que $x_{n,k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), com $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$, são os zeros de $P_n(x)$, e $[m]$ denota o maior número inteiro menor ou igual a m , então:*

- (i) $x_{n,k} = -x_{n,n-k+1}$ para $k = 1, 2, \dots, [n/2]$;
- (ii) Se n for ímpar, tem-se $x_{n,[n/2]+1} = 0$.

4 Polinômios Ortogonias Clássicos

Nesta seção serão apresentados exemplos explícitos de sequências de polinômios ortogonais, os chamados *polinômios ortogonais clássicos*, a saber: os polinômios de Jacobi (incluindo os casos especiais de Legendre, de Gegenbauer, de Chebyshev de 1ª e 2ª espécies), de Laguerre e de Hermite (CHIHARA, 1978). Aqui, será feito um breve estudo desses polinômios, onde poderão ser observadas, por exemplo, as relações de ortogonalidade, recorrência de três termos e propriedades de entrelaçamento de zeros, que foram apresentadas (e demonstradas) na seção anterior. Para um estudo mais detalhado e aprofundado dos polinômios ortogonais clássicos sugere-se, por exemplo, os textos de (ANDRADE; BRACCIALI; RAFAELI, 2012), (CHIHARA, 1978), (ISMAIL, 2005), (KRYLOV, 1962) e (SZEGŐ, 1939).

Segundo Agarwal e Milovanović, os polinômios ortogonais clássicos são aqueles que satisfazem a definição a seguir (AGARWAL; MILOVANOVIĆ, 2002):

Definição 4.1. *Polinômios ortogonais com relação ao produto interno $\langle f, g \rangle_w$ (definido por (3.1) em termos da função peso $w(x)$) no intervalo (a, b) são chamados polinômios ortogonais clássicos se a função peso, $w(x)$, satisfaz a seguinte equação diferencial:*

$$\frac{d}{dx}(M(x)w(x)) = N(x)w(x), \quad \text{onde } M(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } (a, b) = (-1, 1) \\ x, & \text{se } (a, b) = (0, \infty) \\ 1, & \text{se } (a, b) = (-\infty, \infty) \end{cases}$$

e $N(x)$ é um polinômio de primeiro grau.

Observação 4.2. *Não é difícil verificar que, de acordo com a Definição 4.1, os polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite (apresentados nas subseções a seguir) são polinômios ortogonais clássicos, em acordo com a classificação dada por (CHIHARA, 1978).*

4.1 Polinômios de Jacobi

Os *polinômios de Jacobi*, denotados por $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, podem ser definidos por meio da Fórmula de Rodrigues da seguinte maneira (KRYLOV, 1962):

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]. \quad (4.1)$$

Observação 4.3. (1) *Pode-se mostrar que os polinômios de Jacobi, dados a partir da fórmula (4.1), são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ em relação à função peso*

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad (4.2)$$

com $\alpha, \beta > -1$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

- (2) Os polinômios de Jacobi também podem ser definidos como aqueles que são múltiplos da fórmula (4.1), ou seja, no lugar do coeficiente $(-1)^n(2^n n!)^{-1}$ tem-se o coeficiente $(-2)^{-n}(n!)^{-1}$ (CHIHARA, 1978).

Implementando-se a regra de Leibnitz (para calcular a n -ésima derivada do produto de duas funções)

$$\frac{d^n}{dx^n} [f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x), \quad (4.3)$$

na fórmula de Rodrigues (4.1), e fazendo-se algumas manipulações algébricas, pode-se mostrar que o coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Jacobi, $a_{n,n}$, é dado por (ANDRADE; BRACCIALI; RAFAELI, 2012):

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}. \quad (4.4)$$

A ortogonalidade dos polinômios de Jacobi é fundamental para várias aplicações, como na expansão de funções em séries de polinômios e na solução de problemas de integração numérica. Dessa forma, utilizando o produto interno

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \rangle = \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx,$$

juntamente com a definição para os polinômios de Jacobi (dada em (4.1)), o processo de integração por partes, a definição da função beta dada em (2.3) (bem como a relação entre as funções gama e beta dada no Teorema 2.5) e o valor do coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Jacobi $a_{n,n}$ (dado em (4.4)), é possível mostrar que a relação de ortogonalidade para os polinômios de Jacobi fica:

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}, & \text{se } m = n \end{cases}. \quad (4.5)$$

No que tange a relação de recorrência de três termos (dada pelo Teorema 3.11), os polinômios de Jacobi satisfazem:

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 0, \quad (4.6)$$

onde $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ e $P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$. Neste caso, os valores dos coeficientes γ_{n+1} , β_{n+1} e α_{n+1} (calculados por meio das expressões em (3.11)), após a utilização do valor do coeficiente do termo de maior grau, $a_{n,n}$, dos polinômios de Jacobi (dado em (4.4)), de sua relação de ortogonalidade (dada em (4.5)) bem como de algumas manipulações algébricas, são dados, explicitamente, por:

$$\gamma_{n+1} = \frac{(\alpha + \beta + 2n + 2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)}, \quad (4.7)$$

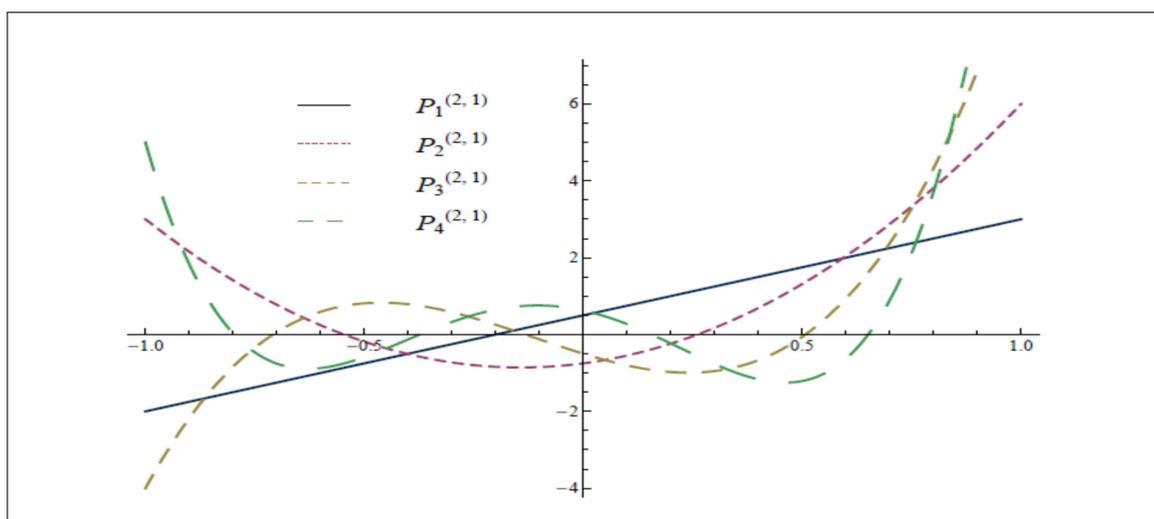
$$\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)} \quad (4.8)$$

e

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)(\alpha + \beta + 2n + 2)}{(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)}. \quad (4.9)$$

No que se refere aos zeros dos polinômios de Jacobi, de acordo com os resultados apresentados na Subseção 3.4, sabe-se que, independente da variação de α e β , esses zeros são reais, distintos e pertencem ao intervalo de ortogonalidade $(-1, 1)$. Além disso, haverá entrelaçamento dos zeros dos polinômios de Jacobi de graus consecutivos, isto é, entre dois zeros consecutivos do polinômio de Jacobi $P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x)$ existe um (e somente um) zero do polinômio de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Na Figura 4.1 são ilustrados os gráficos dos polinômios de Jacobi de graus 1 a 4 para os mesmos valores de α e β (no caso, $\alpha = 2$ e $\beta = 1$), onde é possível observar a propriedade de entrelaçamento descrita acima.

Figura 4.1 – Gráfico dos polinômios de Jacobi de graus 1, 2, 3 e 4 para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.



Fonte: Andrade, Bracciali e Rafaeli (2012).

Ainda falando sobre os zeros dos polinômios de Jacobi é possível mostrar (veja, por exemplo, (SZEGŐ, 1939)) que estes zeros (para polinômios de mesmo grau n) são funções crescentes do parâmetro β , pois a medida que β aumenta, os zeros dos polinômios de Jacobi se deslocam para a direita no eixo x . Por outro lado, estes zeros, são funções decrescentes no que diz respeito ao parâmetro α , pois quando α aumenta, os zeros se deslocam para a esquerda no eixo x . Esta propriedade é bastante útil em problemas onde é necessário manipular ou compreender a distribuição dos zeros dos polinômios de Jacobi.

4.1.1 Polinômios de Legendre

Quando se tem um polinômio de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ onde $\alpha = \beta = 0$, este polinômio é chamado de *polinômio de Legendre*, o qual é denotado por $P_n(x)$. Ou seja, os polinômios de Legendre são casos especiais dos polinômios de Jacobi. Neste caso, a função peso, $w(x)$,

definida no intervalo $(-1, 1)$, e dada em (4.2), é expressa simplesmente por: $w(x) = 1$. Desse modo, fazendo $\alpha = \beta = 0$ na Fórmula de Rodrigues (4.1), que fornece os polinômios de Jacobi, é possível obter os Polinômios de Legendre, $P_n(x)$, a saber:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (4.10)$$

Da mesma forma, considerando-se $\alpha = \beta = 0$ na expressão do coeficiente do termo de maior grau para os polinômios de Jacobi (dada em (4.4)), tem-se que o coeficiente do termo de maior grau, $a_{n,n}$, para os polinômios de Legendre, é dado por:

$$a_{n,n} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Já a relação de ortogonalidade, para polinômios de Legendre, fica

$$\langle P_n, P_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{se } m = n \end{cases},$$

que, obviamente, também pode ser obtida, a partir da relação de ortogonalidade para os polinômios de Jacobi, fazendo-se $\alpha = \beta = 0$ na relação dada em (4.5).

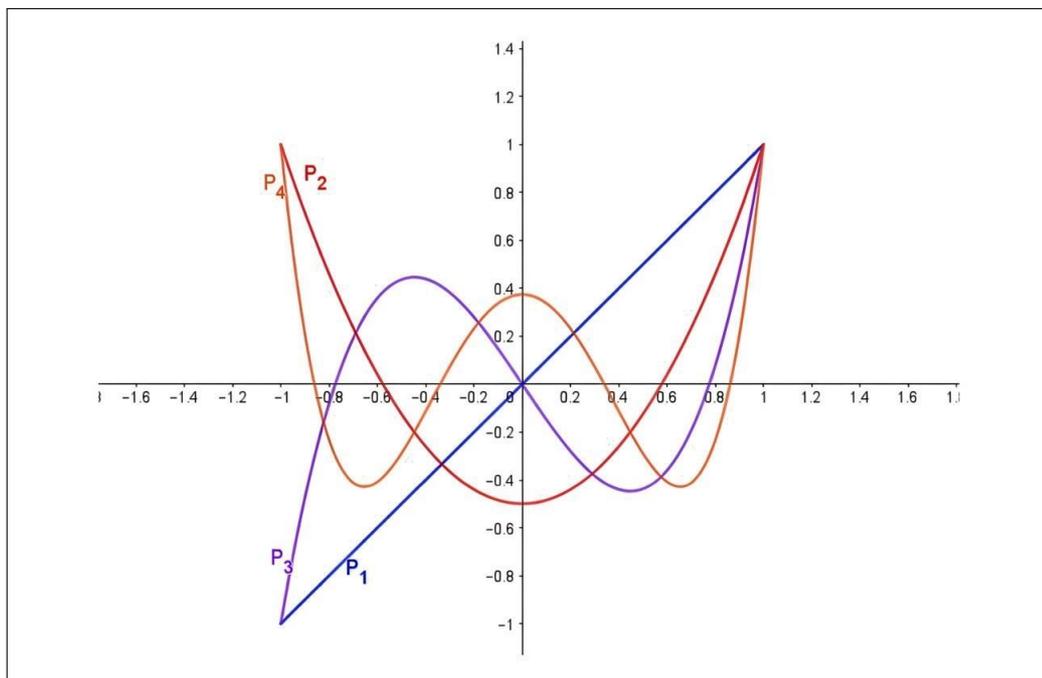
Por fim, substituindo-se $\alpha = \beta = 0$ nas expressões para γ_{n+1} , β_{n+1} e α_{n+1} , dadas, respectivamente, por (4.7), (4.8) e (4.9), uma conta simples mostra que a relação de recorrência de três termos (4.6), agora, para os polinômios de Legendre, pode ser expressa como:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.11)$$

onde, $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$ (observe que neste caso tem-se $\beta_{n+1} = 0$ para $n \geq 0$, exatamente como esperado pelos resultados estabelecidos na Subseção 3.5).

Uma vez que a função peso para os polinômios de Legendre, $w(x) = 1$ definida no intervalo $(-1, 1)$, é uma função par, os resultados apresentados na Subseção 3.5 garantem que os zeros dos polinômios de Legendre, $P_n(x)$, estão simetricamente distribuídos em relação ao eixo x , se n é par. Isso significa que se x_0 é um zero de $P_n(x)$ então $-x_0$ também é um zero de $P_n(x)$ (ou seja, só há necessidade de calcular a metade dos zeros de um polinômio de Legendre de grau par, pois a outra metade é obtida por simetria). Além disso, se n é ímpar, tem-se que $x = 0$ é sempre um zero de $P_n(x)$ e os demais $n - 1$ zeros são simétricas em relação a origem. Na Figura 4.2, onde é ilustrado o esboço do gráfico dos polinômios de Legendre de graus 1 a 4, é possível observar esse comportamento dos zeros dos polinômios de Legendre bem como a propriedade de entrelaçamento dos zeros de polinômios de graus consecutivos descrita no Teorema 3.17.

Figura 4.2 – Gráfico dos polinômios de Legendre de graus 1, 2, 3 e 4.



Fonte: Autoria própria (2024).

4.1.2 Polinômios de Gegenbauer

Os *polinômios de Gegenbauer* (ou polinômios Ultrasféricos) podem, também, ser considerados um caso especial dos polinômios de Jacobi. Na verdade, eles são múltiplos dos polinômios de Jacobi, agora, com $\alpha = \beta = \lambda - (1/2) > -1$, onde λ é um parâmetro real. Esses polinômios são usualmente denotados por $G_n^{(\lambda)}(x)$ e são ortogonais, em $(-1, 1)$, com relação à função peso $w(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2}$ (obtida a partir da função peso dada para os polinômios de Jacobi em (4.2), quando se faz $\alpha = \beta = \lambda - (1/2)$). Dessa forma, os polinômios de Gegenbauer podem ser definidos por

$$G_n^{(\lambda)}(x) = \underbrace{\binom{2\alpha}{\alpha}^{-1} \binom{n+2\alpha}{\alpha}}_{= c_n} \cdot \underbrace{P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)}_{\text{Polinômio de Jacobi}}, \quad (4.12)$$

onde $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ são polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta$ e

$$\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}, \quad x > 0 \quad \text{e} \quad y > 0.$$

Dessa forma, os polinômios de Gegenbauer podem ser reescritos como:

$$G_n^{(\lambda)}(x) = \underbrace{\frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda + \frac{1}{2})}}_{= c_n} \cdot \underbrace{P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x)}_{\text{Polinômio de Jacobi}}$$

onde $\alpha = \lambda - (1/2)$.

Observação 4.4. *Alguns casos especiais dos polinômios de Gegenbauer merecem destaque, a saber:*

$$G_n^{(\frac{1}{2})}(x) = P_n^{(0,0)}(x) = P_n(x) \quad e \quad G_n^{(1)}(x) = U_n(x),$$

onde $P_n(x)$ são os polinômios de Legendre e $U_n(x)$ são os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie que será apresentado mais à frente.

Não é difícil ver que a relação de recorrência de três termos para os polinômios de Gegenbauer fica

$$(n+1)G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda)xG_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-1)G_{n-1}^{(\lambda)}(x),$$

com $G_0^{(\lambda)}(x) = 1$ e $G_{-1}^{(\lambda)}(x) = 0$. Neste caso, essa relação é oriunda da relação de recorrência de Jacobi, dada em (4.6), substituindo-se $\alpha = \beta = \lambda - (1/2)$ nas expressões para γ_{n+1} , β_{n+1} e α_{n+1} , dadas, respectivamente, por (4.7), (4.8) e (4.9), e considerando-se que

$$c_{n+1} = \frac{(n+2\lambda)}{(n+\lambda+\frac{1}{2})}c_n.$$

Observe que, neste caso, também tem-se $\beta_{n+1} = 0$ para $n \geq 0$, o que já era esperado, pois a função peso $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$ ($\lambda - (1/2) > -1$), definida em $(-1, 1)$, é uma função par (veja Teoremas 3.19 e 3.21).

Em relação aos zeros dos polinômios de Gegenbauer, uma vez que sua função peso é par, pode-se afirmar que eles apresentam o mesmo tipo de simetria, no intervalo $(-1, 1)$ que os polinômios de Legendre. Isso significa que se $x_{n,k}^\lambda$ é um zero, então $-x_{n,k}^\lambda$ também o é (lembrando que, neste caso, $x = 0$ é sempre um zero para os polinômios de Gegenbauer de grau ímpar). Além do mais, os zeros dos polinômios de Gegenbauer dependem tanto da ordem n quanto do parâmetro λ . Quando n aumenta, os zeros se tornam mais densamente distribuídos no intervalo $(-1, 1)$.

4.1.3 Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie

Outro caso especial de múltiplos dos polinômios de Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, são os *polinômios de Chebyshev de 1ª espécie*, obtidos, neste caso, quando se faz $\alpha = \beta = -1/2$. Estes polinômios são geralmente denotados por $T_n(x)$, e são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie (em termos dos polinômios de Jacobi) são dados por

$$T_n(x) = \underbrace{2^{2n} \binom{2n}{n}^{-1}}_{= \tilde{c}_n} P_n^{(-1/2,-1/2)}(x),$$

onde para $x > 0$ e $y > 0$, tem-se

$$\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}.$$

Estes polinômios podem, também, ser escritos como

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1] \quad \text{e} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

A forma dada em (4.13) para os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie é bem útil no que se refere a obtenção da relação de recorrência de três termos para esses polinômios, pois, neste caso, usando a identidade trigonométrica

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos(n\theta)\cos\theta$$

e fazendo $x = \cos\theta$ em (4.13), obtém-se, facilmente, que

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.14)$$

com $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$, isto é, a relação de recorrência de três termos para os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_n(x)$. Aqui é possível observar, novamente, que $\beta_{n+1} = 0$ para $n \geq 0$, exatamente como esperado pelos resultados fornecidos na Subseção 3.5, já que a função peso $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, definida em $(-1, 1)$, é uma função par.

A partir da relação de recorrência (4.14) e dos polinômios iniciais (condições iniciais) das seqüências dos polinômios de Chebyshev de 1ª espécie ($T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x = 2^0x$) é possível observar que:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 2^2x^3 - 3x$$

e, por recorrência,

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots,$$

de onde segue que o coeficiente do termo de maior grau para os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie, $a_{n,n}$, é dado por:

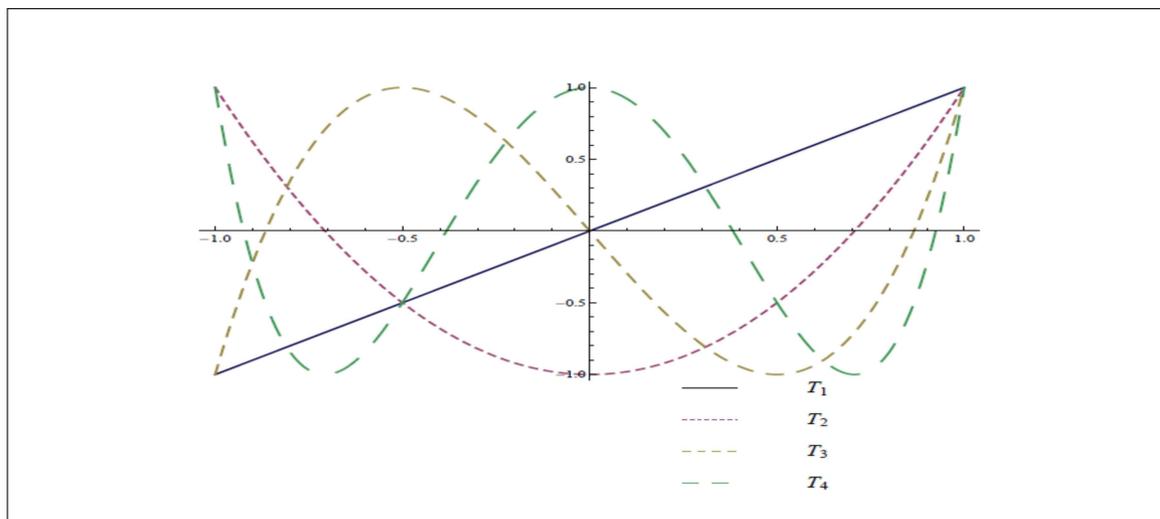
$$a_{n,n} = 2^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Por fim, considerando a definição dada em (4.13) para os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie, não é difícil mostrar que as relações de ortogonalidade (em relação a função peso $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$), para esses polinômios, ficam:

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)w(x)dx = \begin{cases} \pi, & \text{se } m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n > 0, \\ 0, & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Abaixo, na Figura 4.3, apresenta-se um esboço dos gráficos dos polinômios de Chebyshev de 1ª espécie de graus 1 a 4. É possível observar, claramente, nessa figura, a propriedade de entrelaçamentos dos zeros de polinômios de Chebyshev de 1ª espécie de graus consecutivos, conforme demonstrado no Teorema 3.17. Além disso, pode-se observar que os valores mínimo e máximo dos polinômios de Chebyshev de 1ª espécie, no intervalo $(-1, 1)$, são, respectivamente, iguais a -1 e 1 .

Figura 4.3 – Gráfico dos polinômios de Chebyshev de 1ª espécie de graus 1, 2, 3 e 4.



Fonte: Andrade, Bracciali e Rafaeli (2012).

Observação 4.5. (1) Para calcular os zeros dos polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_n(x)$ ($n \geq 1$), dados por (4.13), basta fazer $x = \cos \theta$ e considerar a equação

$$\cos(n\theta) = T_n(x) = 0, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Uma vez que $T_n(x)$ tem grau n , a equação anterior apresenta como solução

$$(n\theta)_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

ou, equivalentemente,

$$\theta_{n,k} = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Dessa forma, os zeros, $x_{n,k}$, dos polinômios de Chebyshev de 1ª espécie, $T_n(x)$, são dados, explicitamente, por

$$x_{n,k} = \cos \theta_{n,k} = \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.15)$$

(2) Analogamente, para determinar os pontos de máximo e de mínimo (no intervalo $[-1, 1]$) dos polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_n(x)$, dados por (4.13), basta considerar $x = \cos \theta$ e resolver a equação

$$T_n(x) = \cos(n\theta) = \pm 1, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi,$$

que tem como solução

$$\tilde{\theta}_{n,k} = \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Portanto, os pontos extremos, $\tilde{x}_{n,k}$, dos polinômios de Chebyshev de 1ª espécie, $T_n(x)$ ($n \geq 1$), são dados, explicitamente, por

$$\tilde{x}_{n,k} = \cos \tilde{\theta}_{n,k} = \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

4.1.4 Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie

Os *polinômios de Chebyshev de 2ª espécie*, denotados por $U_n(x)$, são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso $w(x) = (1 - x^2)^{1/2}$. Estes polinômios são, também, múltiplos dos polinômios de Jacobi, quando se considera $\alpha = \beta = 1/2$. Neste caso,

$$U_n(x) = \underbrace{2^{2n} \binom{2n+1}{n+1}^{-1}}_{=\tilde{c}_n} P_n^{(1/2,1/2)}(x),$$

onde

$$\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}, \quad x > 0 \quad \text{e} \quad y > 0.$$

Os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie também podem ser definidos por:

$$U_n(x) = \frac{\text{sen}((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\text{sen}((n+1)\theta)}{\text{sen}\theta}, \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.16)$$

onde $x = \cos\theta$ e $\theta \in (0, \pi)$.

Note que, usando a relação trigonométrica

$$\text{sen}(n+2)\theta + \text{sen}(n\theta) = 2\cos\theta\text{sen}(n+1)\theta$$

com $x = \cos\theta$, e a definição dada em (4.16), a relação de recorrência de três termos para os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie fica:

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.17)$$

tendo $U_0(x) = 1$ e $U_1(x) = 2x$ como condições iniciais.

Comparando-se a relação de recorrência de três termos (4.17) com a relação de recorrência (3.10), nota-se, mais uma vez, que $\beta_{n+1} = 0$ para $n \geq 0$. Esse fato é uma consequência esperada dos Teoremas 3.19 e 3.21, já que a função peso $w(x) = (1 - x^2)^{1/2}$, definida em $(-1, 1)$, é uma função par.

Para saber como se comporta o coeficiente, $a_{n,n}$, do termo de maior grau dos polinômios de Chebyshev de 2ª espécie, como no caso dos polinômios de Chebyshev de 1ª espécie, basta observar os primeiros polinômios e, por recorrência, deduzir a expressão geral para esse coeficiente. De fato, uma vez que

$$U_0(x) = \frac{\text{sen}(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = 1$$

e

$$U_1(x) = \frac{\text{sen}(2\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\text{sen}\theta\cos\theta}{\text{sen}\theta} = 2x,$$

utilizando a relação de recorrência de três termos, obtém-se

$$\begin{aligned} U_2(x) &= 2x U_1(x) - U_0(x) = 2^2 x^2 - 1 \\ U_3(x) &= 2x U_2(x) - U_1(x) = 2^3 x^3 - 4x \\ &\vdots \\ U_n(x) &= 2^n x^n + \dots \end{aligned}$$

Ou seja, por recorrência, conclui-se que o coeficiente do termo de maior grau para os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie é dado por

$$a_{n,n} = 2^n, \quad n \geq 0.$$

Finalmente, usando a definição dada em (4.16) para os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie, é possível verificar que a relação de ortogonalidade (com respeito a função peso $w(x) = (1 - x^2)^{1/2}$), para esses polinômios, é tal que:

$$\langle U_n, U_m \rangle = \int_{-1}^1 U_n(x) U_m(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Observação 4.6. (1) Os zeros dos polinômios de Chebyshev de 2ª espécie $U_n(x)$ ($n \geq 1$), definidos como em (4.16), são os pontos $x_{n,k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) tais que

$$\text{sen}[(n+1)\theta_{n,k}] = U_n(x_{n,k}) = 0, \quad \text{para } 0 < \theta_{n,k} < \pi,$$

onde $x_{n,k} = \cos \theta_{n,k}$. Consequentemente, esses zeros são dados, explicitamente, por

$$x_{n,k} = \cos \theta_{n,k} = \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

(2) Uma vez que os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie, $T_n(x)$, são dados por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

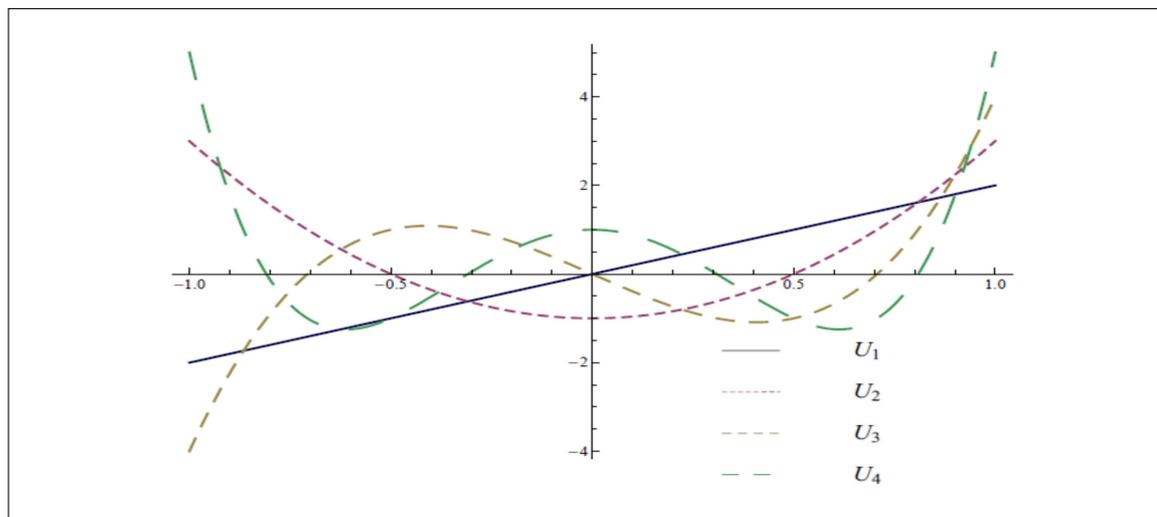
então, derivando $T_n(x)$ em relação a x e observando a definição dada em (4.16) para os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie $U_n(x)$, tem-se

$$T'_n(x) = \text{sen}(n \arccos x) \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} = n U_{n-1}(x),$$

de onde é possível se concluir que os zeros de $U_{n-1}(x)$ são os pontos de máximo e mínimo de $T_n(x)$.

Um esboço dos gráficos dos polinômios de Chebyshev de 2ª espécie de graus 1 a 4 é fornecido na Figura 4.4. Note que a propriedade de entrelaçamentos dos zeros dos polinômios de Chebyshev de 2ª espécie de graus consecutivos também ocorre (o que já era esperado de acordo com o Teorema 3.17). Além disso, comparando-se o polinômio de Chebyshev de 2ª espécie de grau 3, $U_3(x)$, com o Polinômio de Chebyshev de 1ª espécie de grau 4, $T_4(x)$, e observando as figuras 4.3 e 4.4, é possível notar que os zeros de $U_3(x)$ são os pontos de máximo e mínimo locais de $T_4(x)$, exatamente como mencionado no item (2) da Observação 4.6.

Figura 4.4 – Gráfico dos polinômios de Chebyshev de 2ª espécie de graus 1, 2, 3 e 4.



Fonte: Andrade, Bracciali e Rafaeli (2012).

4.2 Polinômios de Laguerre

Os *polinômios de Laguerre*, denotados por $L_n^{(\alpha)}(x)$, são aqueles definidos (a partir da fórmula de Rodrigues) por:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n} e^{-x}]. \quad (4.18)$$

Os polinômios de Laguerre são ortogonais no intervalo $[0, \infty)$ em relação à função peso $w(x) = x^\alpha e^{-x}$, com $\alpha > -1$. No texto de (CHIHARA, 1978) é possível observar os polinômios de Laguerre sendo definidos como um múltiplo da fórmula dada em (4.18). Além disso, nesse mesmo texto, Chihara menciona que, originalmente, Laguerre fez estudos com $\alpha = 0$, tal que, $L_n(x) = L_n^{(0)}(x)$, porém $L_n^{(\alpha)}$ é apenas uma generalização desde que $\alpha > -1$.

Usando a regra de Leibnitz, dada em (4.3), com $f(x) = x^{\alpha+n}$ e $g(x) = e^{-x}$, na expressão (4.18) - que define os polinômios de Laguerre, e após algumas manipulações algébricas, pode-se mostrar que (ANDRADE; BRACCIALI; RAFAELI, 2012):

$$L_n^{(\alpha)}(x) = x^n - n(\alpha + n)x^{n-1} + \dots$$

Conseqüentemente, tem-se que os polinômios de Laguerre, definidos como em (4.18), são mônicos, isto é, são tais que o coeficiente do termo de maior grau, $a_{n,n}$, satisfaz

$$a_{n,n} = 1, \quad n \geq 1.$$

Um outro ponto importante em relação aos polinômios de Laguerre diz respeito a sua ortogonalidade, no intervalo $[0, \infty)$, com respeito à função peso $w(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$. Neste sentido, considerando o produto interno

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx$$

e a definição dada em (4.1) para os polinômios de Laguerre, é possível verificar (após uso do método de integração por partes bem como da definição da função Gamma dada em (2.2)) que essa ortogonalidade é dada por:

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ n! \Gamma(n + \alpha + 1), & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (4.19)$$

Como já se é conhecido (veja Teorema 3.11), os polinômios de Laguerre também satisfazem uma relação de recorrência de três termos, a saber:

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})L_n^{(\alpha)}(x) - \alpha_{n+1}L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0, \quad (4.20)$$

onde $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$, $L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0$, $\alpha_{n+1}, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, e

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xL_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle}{\langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle}{\langle L_{n-1}^{(\alpha)}, L_{n-1}^{(\alpha)} \rangle}. \quad (4.21)$$

Neste caso, usando a ortogonalidade dada em (4.19) e o fato que $a_{n,n} = 1$, $n \geq 1$, é possível mostrar que os valores dos coeficientes γ_{n+1} , β_{n+1} e α_{n+1} da relação de recorrência (4.20) (calculados por meio das expressões em (4.21)), são dados, explicitamente, por

$$\gamma_{n+1} = 1, \quad \beta_{n+1} = 2n + \alpha + 1 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = n(n + \alpha), \quad n \geq 0,$$

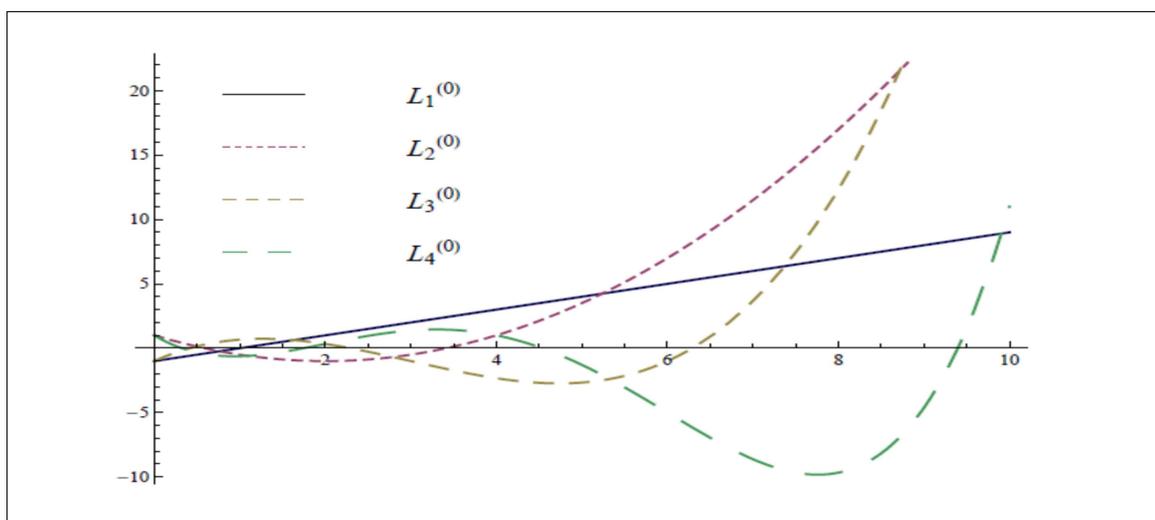
e a relação de recorrência de três termos para os polinômios de Laguerre fica:

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = [x - (2n + \alpha + 1)]L_n^{(\alpha)}(x) - n(n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0, \quad (4.22)$$

com $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0$.

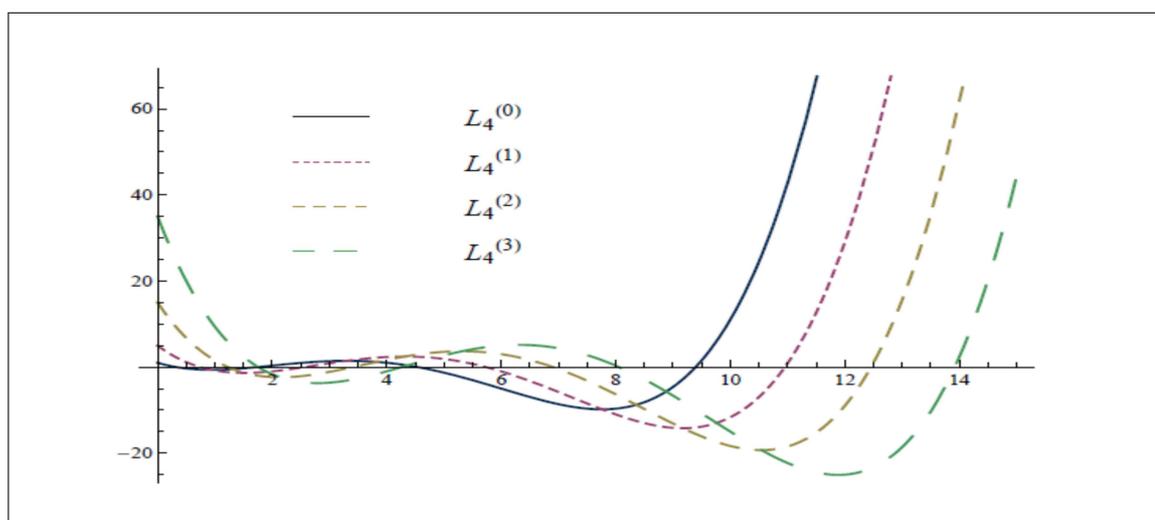
Na Figura 4.5 são apresentados os esboços dos gráficos dos polinômios de Laguerre $L_n^{(0)}(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4$ (com parâmetro $\alpha = 0$) onde é possível observar a propriedade de entrelaçamento dos zeros dos polinômios de Laguerre de graus consecutivos, descrita no Teorema 3.17. Por outro lado, na Figura 4.6, são fornecidos os esboços dos gráficos dos polinômios de Laguerre $L_4^{(\alpha)}(x)$ para $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Neste segundo caso, é possível observar o crescimento do zero $x_{4,i}$, de $L_4^{(\alpha)}(x)$, com o crescimento do parâmetro α para cada $i = 1, 2, 3, 4$. Na verdade é possível mostrar (mais geralmente) que os zeros dos polinômios de Laguerre (para polinômios de mesmo grau n) são, de fato, funções crescentes do parâmetro α (veja, por exemplo, o texto de (SZEGŐ, 1939)).

Figura 4.5 – Gráfico dos polinômios de Laguerre de graus 1, 2, 3 e 4 para $\alpha = 0$.



Fonte: Andrade, Bracciali e Rafaeli (2012).

Figura 4.6 – Gráfico dos polinômios de Laguerre de grau 4 para $\alpha = 0, 1, 2, 3$.



Fonte: Andrade, Bracciali e Rafaeli (2012).

4.3 Polinômios de Hermite

Originados a partir da fórmula de Rodrigues, os *polinômios de Hermite*, denotados por $H_n(x)$, podem ser definidos da seguinte maneira:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]. \quad (4.23)$$

É possível mostrar que esses polinômios são ortogonais, no intervalo $(-\infty, \infty)$, com relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$ (veja, por exemplo, (KRYLOV, 1962) ou (CHIHARA, 1978)).

Usando a definição dada em (4.23) para os polinômios de Hermite, pode-se mostrar que a relação de recorrência de três termos (descrita no Teorema 3.11), para esses polinômios, é expressa como:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.24)$$

com $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = 2x$. Daí, uma vez que $H_0(x) = 1 = 2^0$ e $H_1(x) = 2x = 2^1x$, calculando-se os próximos polinômios de Hermite da sequência, isto é,

$$\begin{aligned} H_2(x) &= 2x H_1(x) - 2H_0(x) = 2x(2x) - 2 = 2^2x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 2x H_2(x) - 4H_1(x) = (2x)(2^2x^2 - 2) - 4(2x) = 2^3x^3 - 12x \\ &\vdots \\ H_n(x) &= 2^n x^n + \dots, \end{aligned}$$

é possível afirmar, por recorrência, que o coeficiente do termo de maior grau, $a_{n,n}$, dos polinômios de Hermite, é dado por

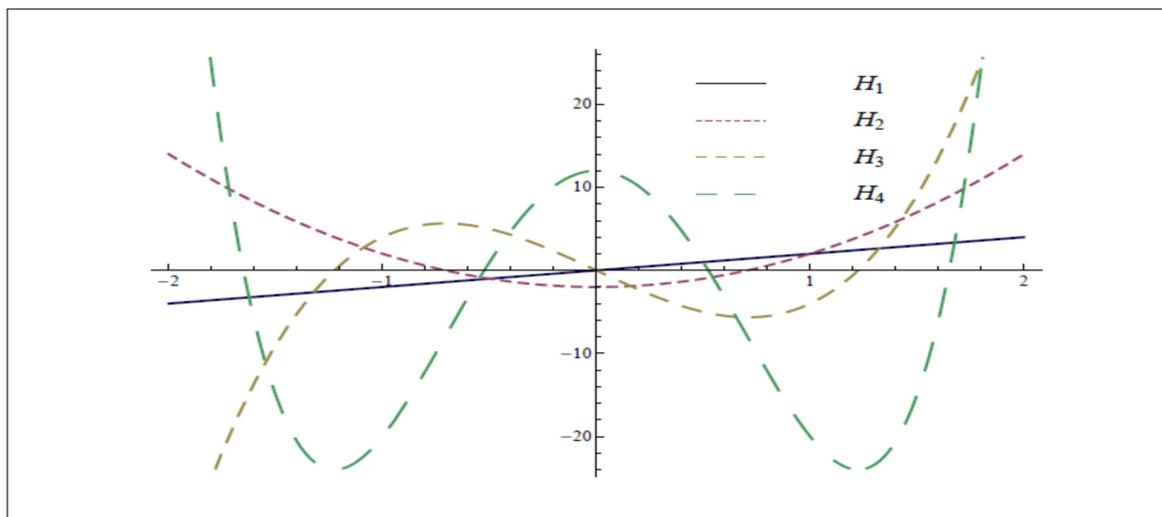
$$a_{n,n} = 2^n, \quad n \geq 0.$$

Em relação a ortogonalidade (com respeito à função peso $w(x) = e^{-x^2}$), a definição (4.23) juntamente com o processo de integração por partes garantem que

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Uma vez que a sequência de polinômios de Hermite, $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, é uma sequência de polinômios ortogonais (no caso, ortogonais com relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$), estes polinômios devem, também, satisfazer a propriedade de entrelaçamento dos zeros dos polinômios de graus consecutivos, descrita no Teorema 3.17. Esta propriedade pode ser observada, por exemplo, na Figura 4.7, onde são fornecidos os esboços dos gráficos desses polinômios do grau 1 até o grau 4.

Figura 4.7 – Gráfico dos polinômios de Hermite de graus 1, 2, 3 e 4.



Fonte: Andrade, Bracciali e Rafaeli (2012).

- Observação 4.7.** (1) Uma vez que a função peso $w(x) = e^{-x^2}$, definida em $(-\infty, \infty)$, é uma função par, os resultados estabelecidos na Subseção 3.5 classificam os polinômios de Hermite como polinômios ortogonais simétricos. Além disso (veja Teoremas 3.19 e 3.21), na relação de recorrência de três termos (3.10), deve-se ter: $\beta_{n+1} = 0$ para $n \geq 0$, exatamente como pode ser observado a partir da relação de recorrência (4.24).
- (2) Considerando $y(x) = e^{-x^2}$ e observando a definição dos polinômios de Hermite dada em (4.23), obtém-se

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}] = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x). \quad (4.25)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} y^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} [(-1)^n e^{-x^2} H_n(x)] \\ &= (-1)^n [-2xe^{-x^2} H_n(x) + e^{-x^2} H'_n(x)] \\ &= (-1)^{n+1} e^{-x^2} [2xH_n(x) - H'_n(x)]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Agora, substituindo o valor de $y^{(n+1)}(x)$ obtido por (4.25) (quando se troca n por $n + 1$) na expressão (4.26), pode-se concluir que

$$H_{n+1} = 2xH_n(x) - H'_n(x).$$

Assim, obtém-se uma outra relação para os polinômios de Hermite muito útil para estabelecer uma expressão explícita para os pesos das fórmulas de quadratura de Gauss–Hermite que serão estudadas na próxima seção (veja Subsubseção 5.2.4).

5 Quadratura Gaussiana

O termo quadratura é sinônimo de integração numérica em uma dimensão e o uso da quadratura Gaussiana tem justamente o objetivo de ganhar mais exatidão no cálculo de aproximação das integrais, pois existem integrais definidas que não são tão fáceis de se calcular analiticamente, o que vem motivando cientistas e matemáticos a utilizarem métodos numéricos para superar tal dificuldade. Neste caso, é possível substituir essa integral por uma soma ponderada através da integração numérica e existem vários métodos de integração numérica para avaliação de integrais definidas, entre eles as regras de quadratura Gaussianas, que são fórmulas de quadratura com n pontos que têm precisão $2n - 1$.

Nesta seção serão apresentadas aplicações dos polinômios ortogonais na quadratura Gaussiana. Aqui será feita uma breve explicação de como podemos usar os polinômios ortogonais no cálculo de aproximação das integrais. Precisamente, utilizando-se os zeros dos polinômios ortogonais como os nós das fórmulas de quadratura Gaussianas, pode-se mostrar que a precisão desta fórmula é a maior possível.

As principais referências utilizadas nessa seção (e as quais também se indica para um estudo mais detalhado das aplicações dos polinômios ortogonais na quadratura Gaussiana) são os livros de (ANDRADE; BRACCIALI; RAFAELI, 2012), (DAVIS, 1975) e (STROUD; SECREST, 1966).

5.1 Fórmulas de Quadratura Gaussiana

Considere integrais da forma:

$$I(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx, \quad (5.1)$$

onde $w(x)$ é uma função peso em $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$.

Sejam $a \leq x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n} \leq b$, n pontos distintos em $[a, b]$. De acordo com os resultados apresentados na subseção 2.4, é possível construir o polinômio de interpolação de Lagrange de $f(x)$ sobre os n pontos distintos $x_{n,k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$), denotado por $P_{n-1}(x)$, de modo que $f(x) = P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$, onde

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n f(x_{n,k}) \left[\frac{\pi(x)}{(x - x_{n,k})\pi'(x_{n,k})} \right],$$

com $\pi(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,n})$ (conhecido como polinômio dos nós), e

$$R_{n-1}(x) = f(x) - P_{n-1}(x) = \frac{\pi(x)}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi_x), \quad a < \xi_x < b,$$

onde $f \in \mathcal{C}^n[a, b]$. Consequentemente, a integral em (5.1) fica

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b [P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)]w(x)dx \\ &= \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,k})\pi'(x_{n,k})} f(x_{n,k}) + R_{n-1}(x) \right] w(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\pi'(x_{n,k})} \int_a^b \frac{\pi(x)}{x - x_{n,k}} w(x)dx \right] f(x_{n,k}) + \int_a^b R_{n-1}w(x)dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k}f(x_{n,k}) + E_n(f) \quad (5.2)$$

onde os pesos, $W_{n,k}$, e o erro, $E_n(f)$, são dados, respectivamente, por:

$$W_{n,k} = \frac{1}{\pi'(x_{n,k})} \int_a^b \frac{\pi(x)}{x - x_{n,k}} w(x)dx, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.3)$$

e

$$E_n(f) = \int_a^b R_{n-1}(x)w(x)dx,$$

sendo $\pi(x)$ o polinômio dos nós.

Como mencionado na subseção 2.4, as fórmulas do tipo (5.2) (como pesos dados por (5.3)) são conhecidas como fórmulas (ou regras) de quadratura. Essas fórmulas são do tipo interpolatória já que $E_n(f) = 0$ para todo $f(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$. Além disso, uma regra de quadratura tem grau de precisão n (ou, ainda, é exata), se $E_n(f) = 0$ para todo $f(x) \in \mathbb{P}_n$ e existe um polinômio de grau $n + 1$, $\tilde{f}(x)$, para o qual $E_n(\tilde{f}) \neq 0$.

Definição 5.1. *Toda fórmula de quadratura com n pontos que tem precisão $2n - 1$ é chamada de Fórmula de Quadratura Gaussiana.*

Um importante resultado relacionado a fórmulas de quadratura Gaussianas é apresentado no teorema a seguir.

Teorema 5.2. *A regra de quadratura (5.2), com pesos dados pela equação (5.3), é exata para polinômios de grau no máximo $2n - 1$ se, e somente se,*

(i) *é interpolatória;*

(ii) *o polinômio dos nós $\pi(x)$ é ortogonal em (a, b) , com relação à função peso $w(x)$, a todo polinômio de grau menor que n .*

Demonstração: Suponha, inicialmente, que a regra de quadratura (5.2), com pesos dados pela equação (5.3), é exata para polinômios de grau no máximo $2n - 1$. Neste caso, tem-se $E_n(f) = 0$ para todo $f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$ e, em particular, para todo $f(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$, de onde segue que regra de quadratura (5.2) é interpolatória (veja item (3) da Observação 2.8).

Agora, uma vez que o polinômio dos nós $\pi(x)$ é dado por

$$\pi(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,n}),$$

então $\pi(x_{n,k}) = 0$, para todo $k = 1, 2, \dots, n$. Além disso, como $\pi(x)$ tem grau n , então para qualquer polinômio $Q(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$, tem-se $\pi(x)Q(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Conseqüentemente, como, por hipótese, a regra de quadratura (5.2), com pesos dados pela equação (5.3), é exata para polinômios de grau no máximo $2n - 1$, obtém-se

$$\langle \pi, Q \rangle = \int_a^b \pi(x)Q(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k}\pi(x_{n,k})Q(x_{n,k}) = 0,$$

ou seja, o polinômio dos nós $\pi(x)$ é ortogonal em (a, b) , com relação à função peso $w(x)$, a todo polinômio de grau menor que n .

Reciprocamente, suponha que os itens (i) e (ii) ocorrem e considere um polinômio qualquer $P(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Observe que $P(x)$ pode ser reescrito como:

$$P(x) = \pi(x)Q(x) + r(x),$$

onde $Q(x), r(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$. Conseqüentemente, como $\pi(x_{n,k}) = 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$, tem-se $P(x_{n,k}) = r(x_{n,k})$. Além disso,

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)w(x)dx &= \int_a^b [\pi(x)Q(x) + r(x)]w(x)dx \\ &= \int_a^b \pi(x)Q(x)w(x)dx + \int_a^b r(x)w(x)dx. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Mas, pela hipótese (ii), sabe-se que

$$\int_a^b \pi(x)Q(x)w(x)dx = 0.$$

Por outro lado, pela hipótese (i), a regra de quadratura (5.2) (com pesos dados pela equação (5.3)) sendo interpolatória garante que $E_n(f) = 0$ para todo $f(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ e, em particular, $E_n(r) = 0$. Daí, uma vez que $P(x_{n,k}) = r(x_{n,k})$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$, da igualdade em (5.4), obtém-se

$$\int_a^b P(x)w(x)dx = \int_a^b r(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k}r(x_{n,k}) + E_n(r) = \sum_{k=1}^n W_{n,k}P(x_{n,k}),$$

ou seja, a regra de quadratura (5.2) (com pesos dados pela equação (5.3)) é exata para polinômios de grau no máximo $2n - 1$, e isto finaliza a prova do teorema. ■

Como consequência do teorema anterior é possível provar uma propriedade bem útil relacionada a zeros de polinômios ortogonais, a saber:

Teorema 5.3. *Entre quaisquer dois zeros de $P_N(x)$ existe pelo menos um zero de $P_{N+1}(x)$, $n > N \geq 2$.*

Demonstração: Inicialmente, suponha que para algum $n > N$, $P_n(x)$ não possui zeros entre $x_{N,p}$ e $x_{N,p+1}$ ($1 \leq p \leq N$). Daí, fazendo

$$\rho(x) = \frac{P_N(x)}{(x - x_{N,p})(x - x_{N,p+1})},$$

conclui-se que $\rho(x)$ tem grau $N - 2$ e $\rho(x)P_N(x) \geq 0$, para todo $x \notin (x_{N,p}, x_{N,p+1})$. Mas, de acordo com o Teorema 5.2, na quadratura Gaussiana com n pontos, para qualquer $P(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$, tem-se

$$\int_a^b P(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k}P(x_{n,k}).$$

Sendo assim, como $n > N$ e $\rho(x)P_N(x)$ tem grau $2N - 2$, então

$$\int_a^b \rho(x)P_N(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k}\rho(x_{n,k})P_N(x_{n,k}).$$

Observe que $\rho(x)P_N(x)$ não pode se anular em todo $x_{n,k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), já que $n > N$. Além do mais, $\rho(x)P_N(x) \geq 0$ para todo $x \notin (x_{N,p}, x_{N,p+1})$. Dessa forma,

$$\int_a^b \rho(x)P_N(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k}\rho(x_{n,k})P_N(x_{n,k}) > 0,$$

o que contradiz o fato de $P_N(x)$ ser um polinômio ortogonal em (a, b) em relação a $w(x)$.

Logo, para $n > N$, deve existir $x_{n,k}$ ($1 \leq k \leq n$) tal que $x_{N,p} < x_{n,k} < x_{N,p+1}$, exatamente como se desejava. ■

Observação 5.4. (1) *É possível mostrar que se a fórmula de quadratura (5.2) é exata para polinômios de grau menor ou igual a $2n - 2$, então os pesos $W_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$ (dados por (5.3)) são positivos;*

(2) *Se $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) , em relação à função peso $w(x)$, e $P_n(x) \in \{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$, então, pelo Corolário 3.6, tem-se*

$$P_n(x) = c_n \pi(x).$$

Logo, $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, que são os zeros do polinômio dos nós $\pi(x)$ (ortogonal em (a, b) com relação à função peso $w(x)$), são, também, os zeros de $P_n(x)$. Daí, como $P'_n(x) = c_n \pi(x)$, obtém-se uma outra expressão para os pesos $W_{n,k}$, a saber:

$$W_{n,k} = \frac{1}{P'_n(x_{n,k})} \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x - x_{n,k})} w(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Utilizando a teoria dos polinômios ortogonais apresentada na Seção 3 é possível mostrar, também, que estes mesmos pesos podem ser dados por

$$W_{n,k} = \frac{a_{n,n} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}{a_{n-1,n-1} P'_n(x_{n,k}) P_{n-1}(x_{n,k})}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.5)$$

onde $a_{j,j}$ é o coeficiente do termo de maior grau de $P_j(x) \in \{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$.

- (3) Quando a fórmula de quadratura, dada por (5.2), se depara com um erro, ou seja, sem precisão exata, existe uma maneira de calcular esse erro (conhecido como Teorema Geral do Erro). Neste caso, se $f(x) \in C^{2n}[a, b]$, então, pode-se mostrar (veja, por exemplo, (ANDRADE; BRACCIALI; RAFAELI, 2012)) que

$$\begin{aligned} E_n(f) &= \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{k=1}^n W_{n,k}f(x_{n,k}) \\ &= \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b \pi^2(x)w(x)dx, \quad a < \eta < b. \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.2 Exemplos de Fórmulas de quadratura Gaussianas

Nessa subseção serão apresentados alguns exemplos de quadratura Gaussianas associadas aos polinômios ortogonais de Legendre, Chebyshev, Laguerre e Hermite. Precisamente, serão utilizados, respectivamente, os zeros desses polinômios (juntamente com as propriedades e resultados apresentados ao longo das seções anteriores) para a construção das fórmulas de quadratura de Gauss-Legendre, Gauss-Chebyshev, Gauss-Laguerre e Gauss-Hermite. O intuito aqui é fazer uma breve aplicação da teoria dos polinômios ortogonais desenvolvida ao longo desse trabalho.

5.2.1 Fórmulas de Quadratura de Gauss–Legendre

Como foi visto, os polinômios de Legendre $P_n(x)$, definidos em (4.10), são ortogonais com relação à função peso $w(x) = 1$ no intervalo $(-1, 1)$. Logo, para se construir fórmulas de quadratura gaussianas associadas a esses polinômios, deve-se utilizar os zeros, $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, desses polinômios como nós e calcular os pesos, $W_{n,k}$, também utilizando-se os polinômios de Legendre. Tais fórmulas de quadratura serão, portanto, do tipo

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k}f(x_{n,k}) + E_n(f), \quad (5.7)$$

onde os pesos $W_{n,k}$ e o erro $E_n(f)$ são dados, respectivamente, por (5.5) e (5.6). Além disso, sabe-se que a precisão dessa fórmula de quadratura é $2n - 1$, isto é, ela é exata para polinômios de grau no máximo $2n - 1$ ou, ainda, $E_n(f) = 0$ se $f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

Como exemplo, considere $n = 2$. Neste caso, os nós $x_{2,1}$ e $x_{2,2}$, da fórmula de quadratura (5.7), serão os zeros do polinômio de Legendre $P_2(x)$, o qual, pela relação de recorrência de três termos (4.11) (em que $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$), é dado por

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Consequentemente,

$$x_{2,1} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad x_{2,2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Por outro lado, usando (5.5) e os resultados apresentados nas seções anteriores, não é difícil verificar que os pesos $W_{2,1}$ e $W_{2,2}$ são tais que

$$W_{2,1} = \frac{a_{2,2}\langle P_1, P_1 \rangle}{a_{1,1}P_2'(x_{2,1})P_1(x_{2,1})} = 1 \quad \text{e} \quad W_{2,2} = \frac{a_{2,2}\langle P_1, P_1 \rangle}{a_{1,1}P_2'(x_{2,2})P_1(x_{2,2})} = 1.$$

Portanto, a fórmula de quadratura de Gauss–Legendre (5.7), para o caso $n = 2$, fica

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + E_n(f), \quad (5.8)$$

sendo exata para polinômios de grau no máximo $2n - 1 = 3$ (já que $n = 2$ nesse caso), isto é, $E_2(f) = 0$ se $f(x) \in \mathbb{P}_3$.

Exemplo 5.5. Se $f(x) = x^3$, então usando a quadratura de Gauss–Legendre (5.8) para aproximar o valor da integral $I = \int_{-1}^1 x^3 dx$, tem-se

$$I = \int_{-1}^1 x^3 dx = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + E_n(x^3) = E_n(x^3).$$

Por outro lado, como

$$I = \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

pode-se concluir que $E_n(x^3) = 0$, exatamente como se esperava, já que $f(x) = x^3 \in \mathbb{P}_3$.

Exemplo 5.6. Se $f(x) = \cos x$, então usando a quadratura de Gauss–Legendre (5.8) para aproximar o valor da integral $I = \int_{-1}^1 \cos x dx$, obtém-se

$$I = \int_{-1}^1 \cos x dx \approx \cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1,67582,$$

utilizando-se 5 dígitos significativos de precisão. Tal aproximação (para o valor de I) pode ser considerada “boa”, uma vez que

$$I = \int_{-1}^1 \cos x dx = \sin x \Big|_{-1}^1 = \sin(1) - \sin(-1) = 1,68294, \quad (5.9)$$

também com 5 dígitos significativos de precisão. Usaremos a quadratura de Gauss–Legendre para obter uma aproximação para $I = \int_{-1}^1 \cos x dx$. Calculemos então aproximações para $n = 1, 2$ e 3 pontos.

Observação 5.7. Obviamente as aproximações melhoram à medida que se faz o número n (de nós) aumentarem. Por exemplo, se $n = 3$ os nós, $x_{3,1}$, $x_{3,2}$ e $x_{3,3}$, da fórmula de quadratura (5.7), serão os zeros do polinômio de Legendre $P_3(x)$, o qual, pela relação de recorrência de três termos (4.11) (em que $P_1(x) = x$ e $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$), é dado por

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

Consequentemente,

$$x_{3,1} = -\frac{\sqrt{15}}{5}, \quad x_{3,2} = 0 \quad e \quad x_{3,3} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Além disso, usando novamente a expressão (5.5) (para o cálculo dos pesos) junto com os resultados apresentados nas seções anteriores, pode-se mostrar que os pesos, $W_{3,1}$, $W_{3,2}$ e $W_{3,3}$, são dados, respectivamente, por

$$W_{3,1} = \frac{a_{3,3}\langle P_2, P_2 \rangle}{a_{2,2}P_3'(x_{3,1})P_2(x_{3,1})} = \frac{5}{9},$$

$$W_{3,2} = \frac{a_{3,3}\langle P_2, P_2 \rangle}{a_{2,2}P_3'(x_{3,2})P_2(x_{3,2})} = \frac{8}{9}$$

e

$$W_{3,3} = \frac{a_{3,3}\langle P_2, P_2 \rangle}{a_{2,2}P_3'(x_{3,3})P_2(x_{3,3})} = \frac{5}{9}.$$

Logo, a fórmula de quadratura de Gauss–Legendre (5.7), para o caso $n = 3$, é expressa como

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + E_n(f), \quad (5.10)$$

sendo exata para polinômios de grau no máximo $2n - 1 = 5$ (já que $n = 3$ nesse caso), ou seja, $E_3(f) = 0$ se $f(x) \in \mathbb{P}_5$.

Neste caso, a aproximação para o valor da integral $I = \int_{-1}^1 \cos x dx$ (dada no Exemplo 5.6) fica

$$\int_{-1}^1 \cos x dx \approx \frac{5}{9}\cos\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9}\cos(0) + \frac{5}{9}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) = 1,68300,$$

com 5 dígitos significativos de precisão. Observe que essa aproximação para o valor de I é melhor que aquela dada no Exemplo 5.6, já que, neste caso ($n = 3$), quando comparamos essa aproximação com o valor da integral I dado em (5.9) (retendo-se apenas 5 dígitos significativos de precisão), tem-se 2 dígitos corretos de precisão na aproximação, ao passo que naquele outro caso ($n = 2$) tem-se apenas 1 dígito correto de precisão.

5.2.2 Fórmulas de Quadratura de Gauss–Chebyshev

Quadraturas de Gauss–Chebyshev são as quadraturas gaussianas utilizadas para aproximar integrais do tipo:

$$\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx. \quad (5.11)$$

Uma vez que os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie $T_n(x)$, definidos em (4.13), são ortogonais em relação à função peso $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ no intervalo $(-1, 1)$, então,

para se construir fórmulas de quadratura Gaussianas para aproximar integrais do tipo (5.11), deve-se utilizar esses polinômios para se obter tanto os nós (os quais serão os zeros $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, de $T_n(x)$) quanto os pesos $W_{n,k}$. Assim, as fórmulas de quadraturas de Gauss–Chebyshev são aquelas do tipo:

$$\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n(f), \quad (5.12)$$

onde os pesos $W_{n,k}$ e o erro $E_n(f)$ são dados, respectivamente, por (5.5) e (5.6). Além disso, como visto anteriormente, essas fórmulas de quadratura são exatas para polinômios de grau no máximo $2n - 1$ ou, seja, $E_n(f) = 0$ se $f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

Observe que, de acordo o item (i) da Observação 4.5 (veja também a expressão (4.15), os zeros dos polinômios de Chebyshev (de 1ª espécie), $T_n(x)$, são dados por

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ademais, como para esse polinômios, tem-se (veja subseção 4.1.3)

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1] \quad \text{e} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$a_{n,n} = 2^{n-1} \quad \text{e} \quad \langle T_n, T_n \rangle = \frac{\pi}{2}, \quad n \geq 1,$$

não é difícil ver que os pesos $W_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, dados por (5.5), são tais que

$$W_{1,1} = \frac{a_{1,1} \langle T_0, T_0 \rangle}{a_{0,0} T_1'(x_{1,1}) T_0(x_{1,1})} = \pi$$

e

$$W_{n,k} = \frac{a_{n,n} \langle T_{n-1}, T_{n-1} \rangle}{a_{n-1,n-1} T_n'(x_{n,k}) T_{n-1}(x_{n,k})} = \frac{\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad n \geq 2.$$

Portanto, a fórmula de quadratura de Gauss–Chebyshev (5.12), para $n = 1$ ponto, fica

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx &= W_{1,1} f(x_{1,1}) E_1(f) \\ &= \pi f\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) + E_1(f) \\ &= \pi f(0) + E_1(f), \end{aligned} \quad (5.13)$$

com $E_1(f) = 0$ quando $f(x) \in \mathbb{P}_1$.

Já para $n \geq 2$ pontos, a quadratura de Gauss–Chebyshev (5.12) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx &= \sum_{k=1}^n W_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n(f) \\ &= \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right) + E_n(f), \end{aligned} \quad (5.14)$$

com $E_n(f) = 0$ sempre que $f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

Exemplo 5.8. O valor da integral I ,

$$I = \int_{-1}^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

pode ser aproximado por meio da quadratura de Gauss–Chebyshev de n pontos. Sendo assim, para $n = 1$, usando-se (5.13), obtém-se

$$I = \int_{-1}^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \pi e^0 = \pi = 3,14159.$$

Por outro lado, para $n = 2$ e $n = 3$, usando-se (5.14), tem-se, respectivamente,

$$I = \int_{-1}^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{2} e^{-[\cos(\pi/4)]^2} + \frac{\pi}{2} e^{-[\cos(3\pi/4)]^2} = 1,90547$$

e

$$I = \int_{-1}^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{3} e^{-[\cos(\pi/6)]^2} + \frac{\pi}{3} e^{-[\cos(\pi/2)]^2} + \frac{\pi}{3} e^{-[\cos(5\pi/6)]^2} = 2,03652,$$

onde as aproximações aqui obtidas foram todas com 5 dígitos significativos de precisão.

5.2.3 Fórmulas de Quadratura de Gauss–Laguerre

Para aproximar integrais da forma

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-x} dx$$

usa-se a quadratura de Gauss–Laguerre de n pontos, onde os nós, $x_{n,k}$, são os zeros do n -ésimo polinômio de Laguerre $L_n(x)$, dado por (4.18) (com $\alpha = 0$), já que esses polinômios são ortogonais, no intervalo $[0, \infty)$, com relação à função peso $w(x) = e^{-x}$. Neste caso, essa quadratura é do tipo

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-x} dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n(f), \quad (5.15)$$

onde os pesos $W_{n,k}$ e o erro $E_n(f)$ são dados, respectivamente, por (5.5) e (5.6). Sabe-se, também, que essas fórmulas de quadratura são exatas para polinômios de grau no máximo $2n - 1$ ou, seja, $E_n(f) = 0$ se $f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

A partir da teoria estudada sobre os polinômios de Laguerre $L_n(x)$ (na Subseção 4.2), e observando a expressão em (5.5), é possível mostrar que os pesos $W_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$ (para a fórmula de quadratura Gauss–Laguerre (5.15)), são dados por:

$$W_{n,k} = \frac{[(n-1)!]^2}{L'_n(x_{n,k}) L_{n-1}(x_{n,k})}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.16)$$

Exemplo 5.9. Deseja-se aproximar a integral

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

Para isso será utilizado a fórmula de quadratura de Gauss–Laguerre (5.15) (com pesos dados por (5.16)). A aproximação será realizada para o caso $n = 2$, onde os nós $x_{2,1}$ e $x_{2,2}$, da fórmula de quadratura (5.16), serão os zeros do polinômio de Laguerre $L_2(x)$, o qual, pela relação de recorrência de três termos (4.22) (em que $\alpha = 0$, $L_0(x) = 1$ e $L_1(x) = x - 1$), é dado por

$$P_2(x) = x^2 - 4x + 2.$$

Consequentemente,

$$x_{2,1} = 2 - \sqrt{2} \quad e \quad x_{2,2} = 2 + \sqrt{2}.$$

Agora, substituindo esses valores encontrados para $x_{2,1}$ e $x_{2,2}$ na expressão para os pesos (5.16) (com $n = 2$), é possível mostrar que

$$W_{2,1} = \frac{1}{L_2'(x_{2,1})L_1(x_{2,1})} = 0,85355 \quad e \quad W_{2,2} = \frac{1}{L_2'(x_{2,2})L_1(x_{2,2})} = 0,14645,$$

sendo esses valores aproximações com 5 casas decimais.

Por fim, substituindo os valores dos pesos e nós na fórmula de quadratura de Gauss–Laguerre (5.15), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 e^{-x} &\approx W_{2,1}x_{2,1}^2 + W_{2,2}x_{2,2}^2 \\ &\approx 0,85355 \times (2 - \sqrt{2})^2 + 0,14645 \times (2 + \sqrt{2})^2 \\ &\approx 2,00004. \end{aligned}$$

Portanto, usando a fórmula de quadratura de Gauss–Laguerre (5.15) (com $n = 2$ pontos), o valor aproximado da integral $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$ é 2,00004, com 5 dígitos significativos de precisão.

5.2.4 Fórmulas de Quadratura de Gauss–Hermite

Quadraturas de Gauss–Hermite são as quadraturas gaussianas utilizadas para aproximar integrais do tipo:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-x^2} dx. \quad (5.17)$$

Neste caso, como os polinômios de Hermite $H_n(x)$, definidos em (4.23), são ortogonais em relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$, então, para se construir fórmulas de quadratura Gaussianas para aproximar integrais do tipo (5.17), deve-se utilizar esses polinômios para se obter tanto os nós (os quais serão os zeros $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, de $H_n(x)$) quanto os pesos $W_{n,k}$. Logo, as fórmulas de quadraturas de Gauss–Hermite são aquelas do tipo:

$$\int_{-1}^1 f(x)e^{-x^2} dx = \sum_{k=1}^n W_{n,k}f(x_{n,k}) + E_n(f), \quad (5.18)$$

onde os pesos $W_{n,k}$ e o erro $E_n(f)$ são dados, respectivamente, por (5.5) e (5.6). Essas fórmulas de quadratura também são exatas para polinômios de grau no máximo $2n - 1$ ou, seja, $E_n(f) = 0$ se $f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

Observe que, utilizando os resultados obtidos na Subseção 4.3 (para os polinômios de Hermite $H_n(x)$) e a expressão em (5.5), não é difícil ver que os pesos $W_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, para a fórmula de quadratura Gauss–Hermite (5.18), são dados por:

$$W_{n,k} = \frac{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}}{[H'_n(x_{n,k})]^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.19)$$

Exemplo 5.10. Para aproximar a integral dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx,$$

pode-se utilizar a fórmula de quadratura de Gauss–Hermite (5.18), cujos nós, $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, são os zeros dos polinômios de Hermite $H_n(x)$, e os pesos, $W_{n,k}$, são dados como em (5.19). A aproximação será realizada considerando-se, por exemplo, $n = 3$. Neste caso, da relação de recorrência de três termos (4.24) (em que $H_1(x) = 2x$ e $H_2(x) = 4x^2 - 2$), obtém-se

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

Consequentemente,

$$x_{3,1} = -\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x_{3,2} = 0 \quad e \quad x_{3,3} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Agora, uma vez que $H'_3(x) = 24x^2 - 12$, substituindo os valores dos zeros de $H_3(x)$ (fornecidos acima) na expressão (5.19) (com $n = 3$), tem-se que os pesos $W_{3,1}$, $W_{3,2}$ e $W_{3,3}$ são dados, respectivamente, por

$$W_{3,1} = \frac{2^4 3! \sqrt{\pi}}{[H'_3(-\sqrt{\frac{3}{2}})]^2} = \frac{2^4 6 \sqrt{\pi}}{(2^2 6)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{6},$$

$$W_{3,2} = \frac{2^4 3! \sqrt{\pi}}{[H'_3(0)]^2} = \frac{2^4 6 \sqrt{\pi}}{(-12)^2} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}$$

e

$$W_{3,3} = \frac{2^4 3! \sqrt{\pi}}{[H'_3(\sqrt{\frac{3}{2}})]^2} = \frac{2^4 6 \sqrt{\pi}}{(2^2 6)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{6},$$

Finalmente, considerando os valores dos pesos e nós (obtidos acima) na fórmula de quadratura de Gauss–Hermite (5.18), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx &\approx \sum_{i=1}^3 W_{n,k} x_{n,k}^2 \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{6} \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \frac{2\sqrt{\pi}}{3} (0)^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{6} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= 0,88623. \end{aligned}$$

Assim, usando-se a fórmula de quadratura de Gauss–Hermite (5.18) (com $n = 3$ pontos), pode-se concluir que o valor aproximado da integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ é 0,88623, com 5 dígitos significativos de precisão.

Considerações Finais

Em suma, os polinômios ortogonais na reta real desempenham um papel fundamental em várias áreas da matemática e da física aplicada. Esta monografia explorou a teoria por trás desses polinômios, incluindo suas propriedades matemáticas essenciais e sua relação com a quadratura gaussiana. A quadratura gaussiana é uma técnica poderosa para a integração numérica de funções, e sua eficácia está intrinsecamente ligada à escolha dos polinômios ortogonais apropriados.

Ao longo desse estudo, destacou-se como os polinômios ortogonais, como os polinômios de Legendre, Chebyshev, Laguerre e Hermite, são construídos e como sua ortogonalidade se traduz em fórmulas de quadratura eficientes. Através da aplicação da quadratura gaussiana, pôde-se obter estimativas precisas de integrais definidas, mesmo para funções complexas, com uma quantidade relativamente pequena de pontos de amostragem.

Além disso, discutiu-se como a escolha dos polinômios ortogonais corretos depende da distribuição de peso associada à função a ser integrada. Essa abordagem adaptativa torna a quadratura gaussiana extremamente versátil e aplicável a uma ampla gama de problemas práticos, desde a física computacional até a análise estatística.

Em conclusão, a compreensão dos polinômios ortogonais na reta real e sua aplicação na quadratura gaussiana é essencial para aprimorar técnicas de integração numérica e resolver problemas complexos de forma eficiente e precisa. Esses conceitos desempenham um papel crucial no desenvolvimento de métodos computacionais avançados e na análise de sistemas físicos e matemáticos, destacando sua importância contínua na pesquisa e na prática científica.

Referências

- AGARWAL, R. P.; MILOVANOVIĆ, G. V. Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials. **Appl. Math. Comput.**, v. 128, p. 151–166, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 40.
- ANDRADE, E. X. L. de; BRACCIALI, C. F.; RAFAELI, F. R. **Introdução aos Polinômios Ortogonais**. São Carlos: SBMAC, 2012. Citado 7 vezes nas páginas 15, 21, 40, 41, 50, 55 e 59.
- ANDREWS, G. E.; ASKEY, R.; ROY, R. **Special Functions**. [S.l.]: Encyclopedia of Mathematics and Applications, Cambridge University Press, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- ANSHELEVICH, M. Linearization coefficients for orthogonal polynomials using stochastic processes. **Ann. Probab.**, v. 33, n. 1, p. 114–136, 2005. Citado na página 11.
- BARTLE, R. G. **Elementos de Análise Real**. Rio de Janeiro: Editora Campus Ltda., 1983. Citado na página 13.
- BARTLE, R. G. **Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1996. Citado na página 13.
- BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear**. São Paulo: HARBRA, 1980. Citado na página 13.
- BRACCIALI, C. F.; LI, X.; RANGA, A. S. Real orthogonal polynomials in frequency analysis. **Math. Comp.**, v. 74, p. 341–362, 2005. Citado na página 11.
- CHIHARA, T. S. **An Introduction to Orthogonal Polynomials**. New York: Gordon and Breach, 1978. Citado 6 vezes nas páginas 20, 21, 40, 41, 50 e 52.
- DAVIS, P. J. **Interpolation and Approximation**. New York: Dover Publications, Inc., 1963. Citado na página 13.
- DAVIS, P. J. **Methods of Numerical Integrations**. New York: Academic Press, 1975. Citado na página 55.
- GAUTSCHI, W. Orthogonal polynomials - constructive theory and applications. **J. Comput. Appl. Math.**, v. 12 e 13, p. 61–76, 1985. Citado na página 11.
- ISMAIL, M. E. H. **Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable**. Cambridge: Encyclopedia of Mathematics and its Applications. vol. 98. Cambridge Univ. Press, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 40.
- KRYLOV, V. I. **Approximate Calculation of Integrals**. New York: Macmillan, 1962. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 52.
- PHILLIPS, G. M.; TAYLOR, P. J. **Theory and Applications of Numerical Analysis**. London: Academic Press, 1973. Citado na página 13.
- RUDIN, W. **Princípios de Análise Matemática**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico (trad. E.R.H. Brito), 1971. Citado na página 19.

SANTOS, R. J. **Introdução a Álgebra Linear**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2010. Citado na página 13.

SIMON, B. **Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1 and Part 2. Classical Theory and Spectral Theory**. Providence: In: American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 54. Providence: American Mathematical Society, 2005. Citado na página 11.

STROUD, A.; SECREST, D. **Gaussian Quadrature Formulas**. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966. Citado na página 55.

SZEGŐ, G. **Orthogonal Polynomials**. New York: American Math. Society, Colloq. Publ., vol. 23, 1939. Citado 5 vezes nas páginas 20, 21, 40, 42 e 51.