



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Curso de Matemática – Bacharelado

Antonio Moraes Junior

# **Estabilidade de Sistemas Lineares Bidimensionais de Equações Diferenciais Ordinárias**

São Luís - MA  
2022

Antonio Moraes Junior 

# **Estabilidade de Sistemas Lineares Bidimensionais de Equações Diferenciais Ordinárias**

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Curso de Matemática – Bacharelado

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho

São Luís - MA

2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Junior, Antonio Moraes.

Estabilidade de Sistemas Lineares Bidimensionais de  
Equações Diferenciais Ordinárias / Antonio Moraes Junior.  
- 2022.

66 p.

Orientador(a): Adecarlos Costa Carvalho.

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática,  
Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2022.

1. Equações diferenciais. 2. Estabilidade. 3.  
Sistemas lineares. I. Carvalho, Adecarlos Costa. II.  
Título.

Antonio Moraes Junior

## **Estabilidade de Sistemas Lineares Bidimensionais de Equações Diferenciais Ordinárias**

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 21/12/2022

---

**Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho**  
Orientador  
DEMAT/UFMA

---

**Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Renata de Farias Limeira Carvalho**  
Primeira Examinadora  
DEMAT/UFMA

---

**Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior**  
Segundo Examinador  
DEMAT/UFMA

*Primeiramente a Deus e aos meus pais, por todo apoio na minha jornada. Amo vocês!*

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus que em um momento muito difícil da minha vida realizou meu grande sonho e permitiu esta conquista.

Aos meus pais Antonio Moraes e Maria Ruth que em um momento muito difícil para mim foram os únicos a mim apoiar e assim realizar este meu grande sonho.

Ao meu amigo João Pedro Costa Bastos e a minha amiga Analissa Barros que sempre mim incentivaram a fazer minha graduação em matemática e acima de tudo sempre acreditaram em mim e no meu potencial até mesmo quando nem eu acreditava.

A minha grande amiga Juliana Rodrigues de Aguiar que em vários momentos difíceis desta conquista mim ajudou muito e tenho muita gratidão e carinho por essa pessoal maravilhosa e tenho o maior prazer em tê-la como amiga.

A todos os meus amigos que fiz durante esta jornada, onde enfrentamos vários desafios e dificuldades mas nunca desistimos e sempre fomos a luta e sempre apoiando uns aos outros.

Ao meu grande orientador Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho que apesar de ter um tempo muito corrido aceitou mim orientar e ajudou muito e até demais durante toda a minha monografia.

Agradeço muito a Universidade Federal do Maranhão por toda sua riqueza no ensino e por está sempre comprometida a levar o melhor em pesquisa, extensão e ensino para seus alunos.

*“Educai as crianças e não será preciso punir os homens.”*

Pitágoras de Samos (570a.C – 495a.C)

# Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso apresentamos conceitos, teoremas e definições de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares e, a partir disto, apresentamos a solução de sistemas lineares bidimensionais de Equações Diferenciais Ordinárias homogêneas com seus coeficientes constantes usando autovalores e autovetores e abordamos os métodos de Coeficientes Indeterminados, Variação dos Parâmetros e Transformadas de Laplace na resolução de sistemas não-homogêneos. Além disso, apresentamos o objetivo principal deste trabalho o estudo da estabilidade de sistemas lineares bidimensionais e fizemos uma classificação em relação a solução de quando é estável, assintoticamente estável ou instável. E por fim, fazemos uma aplicação deste estudo para o pêndulo oscilatório mostrando como a partir de aproximações lineares, ou seja, um sistema linear podemos classificar os pontos críticos de um sistema não linear em relação a estabilidade visando a importância na conclusão de um modelo matemático.

**Palavras-chave:** Sistemas lineares, Soluções de sistemas lineares, Equações Diferenciais Ordinárias, Estabilidade, Pêndulo Oscilatório.



# Abstract

In this course conclusion work we present concepts, theorems and definitions of systems of linear ordinary differential equations and, from this, we present the solution of two-dimensional linear systems of homogeneous Ordinary Differential Equations with their constant coefficients using eigenvalues and eigenvectors and we approach the methods of Undetermined Coefficients, Parameter Variation and Laplace Transforms in the resolution of non-homogeneous systems. In addition, we present the main objective of this work the study of the stability of two-dimensional linear systems and we made a classification in relation to the solution of when it is stable, asymptotically stable or unstable. And finally, we make an application of this study to the oscillatory pendulum showing how from linear approximations, that is, a linear system, we can classify the critical points of a nonlinear system in relation to stability, aiming at the importance in the conclusion of a mathematical model.

**Keywords:** Linear Systems, Linear Systems Solutions, Ordinary Differential Equations, Stability, Oscillating Pendulum.

# Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Gráfico das soluções do sistema 1.18 . . . . .	22
Figura 1.2 – Gráfico das soluções do sistema 1.24 . . . . .	25
Figura 1.3 – Gráfico das soluções do sistema 1.28 . . . . .	28
Figura 3.1 – Ponto crítico estável, instável e assintoticamente estável . . . . .	49
Figura 3.2 – Nó estável . . . . .	50
Figura 3.3 – Ponto de sela . . . . .	51
Figura 3.4 – Nó próprio ou ponto estrela . . . . .	51
Figura 3.5 – Nó impróprio ou degenerado . . . . .	52
Figura 3.6 – Sorvedouro espiral . . . . .	54
Figura 3.7 – Fonte espiral . . . . .	54
Figura 3.8 – Centro . . . . .	55
Figura 4.1 – O pêndulo oscilatório . . . . .	60
Figura 4.2 – Pontos espirais assintoticamente estáveis para o pêndulo . . . . .	63
Figura 4.3 – Pontos de sela instáveis para o pêndulo . . . . .	64

# Sumário

	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	<b>SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES</b>	<b>11</b>
<b>1.1</b>	<b>Conceitos iniciais</b>	<b>11</b>
<b>1.2</b>	<b>Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes</b>	<b>17</b>
1.2.1	Autovalores Reais e Distintos	20
1.2.2	Autovalores Complexos e Conjugados	23
1.2.3	Autovalores Reais e Repetidos	25
<b>1.3</b>	<b>Matrizes Fundamentais</b>	<b>28</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS LINEARES NÃO-HOMOGÊNEOS</b>	<b>35</b>
<b>2.1</b>	<b>Coeficientes Indeterminados</b>	<b>36</b>
<b>2.2</b>	<b>Variação dos Parâmetros</b>	<b>39</b>
<b>2.3</b>	<b>Transformadas de Laplace</b>	<b>42</b>
<b>3</b>	<b>ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES</b>	<b>47</b>
<b>3.1</b>	<b>Aproximações Lineares de Sistemas Não Lineares</b>	<b>57</b>
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES</b>	<b>59</b>
<b>4.1</b>	<b>O Pêndulo Oscilatório</b>	<b>59</b>
	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>65</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>66</b>

# Introdução

Grandes matemáticos como Arquimedes, Kepler e Fermat foram os responsáveis pela introdução do cálculo na humanidade, mas foi a partir do século XVII que o cálculo ganhou notoriedade dentro das ciências através de dois grandes matemáticos Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz onde ambos começaram a desenvolver o cálculo de forma funcional, ou seja, relacioná-lo com os fenômenos existentes da época.

As pesquisas de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz tiveram tanta importância para época, que se reformulou a maneira de se fazer cálculo, hoje os dois são considerados pai do cálculo pela incrível contribuição que trouxeram para o estudo. Assim surgiu o cálculo diferencial e integral ou também conhecido como cálculo infinitesimal que tem como principal função o estudo do movimento e da mudança.

Um objeto importante no estudo do cálculo e também da análise, as equações diferenciais desenvolvem um papel na investigação e explicação de vários fenômenos da natureza sejam eles físicos, químicos, biológicos e até sociais. Vários desses fenômenos podem ser descritos como sistemas de EDO, onde a partir das suas soluções podemos analisar o comportamento, ou seja, o seu crescimento com o passar do tempo, o que representa o estudo da sua estabilidade. Tendo como finalidade alcançar um conhecimento do comportamento das soluções para esses fenômenos.

Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo sobre a estabilidade de sistemas lineares bidimensionais fazendo uma análise geométrica de suas soluções e está dividido em quatro capítulos. Para esta finalidade, apresentamos no primeiro capítulo os conceitos, teoremas e definições importante no entendimento de sistemas lineares. Em seguida apresentamos as soluções de sistemas de EDO homogêneos usando autovalores e autovetores, o conceito de matrizes fundamentais e uma generalização a exponencial de uma matriz.

No segundo capítulo apresentamos os métodos coeficientes indeterminados, variação dos parâmetros e a transformada de Laplace para uma solução particular e assim encontrar a solução geral de sistemas de EDO não homogêneos. No terceiro capítulo apresentamos a classificação de uma solução estável, assintoticamente estável ou instável e um estudo da estabilidade quanto aos seus autovalores e autovetores.

E no quarto capítulo fazemos um estudo das equações do pêndulo oscilatório, onde temos um sistema não linear e a partir de aproximações lineares obtemos um sistema linear, que através dos seus autovalores podemos determinar a classificação dos pontos críticos em relação a estabilidade com o objetivo de chegar aos resultados de um modelo matemático.

# 1 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Neste capítulo vamos apresentar o conceito de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem, destacando que trataremos apenas do caso linear, a partir da definição de equações diferenciais ordinárias e introduzir alguns teoremas e definições que são fundamentais no estudo das soluções e de seu comportamento e estabilidade. É importante destacar que existe casos em que é inviável encontrar a solução e se faz necessário o uso de outros métodos para estudar tais soluções.

## 1.1 Conceitos iniciais

Toda equação diferencial ordinária de ordem  $n$  em geral é da forma

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.1)$$

e podemos transformar essa equação (1.1) em um sistema de equações diferenciais de ordem  $n$ , assim fazendo uma mudança de variável temos:

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)},$$

feita a mudança de variável podemos reescrever esta equação (1.1) como um sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= F(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.2)$$

**Exemplo 1.1.** *Vamos transformar a equação diferencial ordinária de 2ª ordem a seguir em um sistema de equações diferenciais lineares com duas ou mais equações. Assim temos*

$$x'' + px' + qx = 0$$

*vamos agora fazer uma mudança de variável sendo  $x' = y$  e  $x'' = y'$  e fazendo as devidas substituições encontramos o sistema de equações diferenciais de 1ª ordem*

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -py - qx \end{cases}$$

O sistema (1.2) é um caso particular de sistemas de equações diferenciais ordinárias e possui uma forma mais geral. Portanto podemos esboçar a **definição** formal para sistemas de equações diferenciais.

**Definição 1.2.** Segundo (FAGUNDES, 2015) “Um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem é a conjunção de duas ou mais equações diferenciais ordinárias com  $n$  variáveis dependentes,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , cada uma delas função de uma única variável independente,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , que podem ser representadas da seguinte forma

$$\begin{cases} x'_1 = F_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ x'_2 = F_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_n = F_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (1.3)$$

onde  $F_i : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , funções contínuas com suas derivadas parciais contínuas, dado um intervalo  $I : \alpha < t < \beta$ .”

**Definição 1.3.** Uma solução para o sistema (1.3) constitui-se de  $n$  funções reais diferenciáveis, ou seja,  $x_j : I \rightarrow \mathbb{R}$  tais que, para cada  $t \in I$ ,

$$x'_j(t) = F_j(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$$

e que satisfazem o sistema (1.3) em todos os pontos desse intervalo.

Um **Problema de Valor Inicial (PVI)** é formado por um sistema de equações diferenciais ordinárias (1.3) e por condições iniciais conhecidas, da seguinte forma

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0 \quad (1.4)$$

onde  $t_0$  é um valor fornecido de  $t$  em  $I$  e  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$  são constantes dadas. As funções expressas no sistema (1.3)  $F_1, F_2, \dots, F_n$  caso sejam funções lineares das variáveis dependentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , esse sistema é chamado **linear** caso contrário ele é **não-linear**, assim temos a seguinte definição. Segundo (BOYCE; DIPRIMA, 2010) “A teoria geral para sistemas de  $n$  equações diferenciais lineares de primeira ordem

$$\begin{cases} x'_1 = p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ \vdots \\ x'_n = p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

é semelhante à teoria para uma única equação linear de ordem  $n$ ”. Observe que a variável  $t$  é a única variável independente do sistema (1.5) e as variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as variáveis dependentes e as funções  $g_1, g_2, \dots, g_n$  são termos independentes. É importante destacar que como estamos trabalhando com sistemas é conveniente colocá-lo na sua forma matricial a fim de melhorar a compreensão e estudo em questão. Assim colocando o sistema (1.5) na sua forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

considerando que  $x'_1(t), \dots, x'_n(t)$  são as componentes do vetor  $x'(t)$ ;  $p_{i,j}(t)$ , com  $i, j = 1, 2, \dots, n$  como as entradas da matriz  $P(t)_{n \times n}$ ;  $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$  como componentes de um vetor  $x = \phi(t)$  e  $g_1(t), \dots, g_n(t)$  como as componentes de um vetor  $g(t)$ . Fazendo as devidas substituições podemos reescrever a forma matricial (1.6) da seguinte forma

$$x'(t) = P(t)x + g(t) \quad (1.7)$$

O vetor  $x(t) = \phi(t)$  é um vetor solução da equação (1.7) quando seus componentes satisfazem o sistema de equações (1.5) e seus componentes podem ser interpretados de forma geométrica como um conjunto de equações paramétricas. Observe que a equação (1.7) se tiver seu vetor  $g(t) = 0$ , ou seja, se todas as funções  $g_1(t), \dots, g_n(t)$  forem nulas no intervalo  $I : \alpha < t < \beta$  o sistema é chamada de **homogêneo**, caso  $g(t) \neq 0$  o sistema é chamado **não homogêneo**. No caso em que ele é homogêneo a equação (1.7) fica da seguinte forma

$$x'(t) = P(t)x \quad (1.8)$$

**Teorema 1.4.** (*Existência e Unicidade*). *Suponha que cada uma das funções  $F_1, \dots, F_n$  no sistema (1.3) tenha derivadas parciais  $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$ , contínuas em uma região  $R$  do espaço  $tx_1x_2 \dots x_n$  definida por  $\alpha < t < \beta$ , tal que  $\alpha_1 < x_1 < \beta_1, \dots, \alpha_n < x_n < \beta_n$ , e suponha que o ponto  $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  está em  $R$ . Então, existe um intervalo  $|t - t_0| < h$  no qual existe uma única solução  $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$  do sistema de equações diferenciais (1.3) que também satisfaz as condições iniciais (1.4).*

**Demonstração:** A demonstração deste teorema pode ser encontrado em (CODDINGTON; CARLSON, 1997). ■

Trataremos agora de teoremas importantes que estruturam os resultados sobre as soluções de sistemas lineares homogêneos e a seguir apresentaremos métodos para encontrar as soluções.

**Teorema 1.5.** (*Princípio da Superposição*) *Considere duas funções vetoriais  $x^{(1)}$  e  $x^{(2)}$  como soluções do sistema (1.8), então a combinação linear  $c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias, também é uma solução.*

**Demonstração:** Primeiramente derivarmos a combinação linear, e assim obtemos

$$[c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}]' = c_1[x^{(1)}]' + c_2[x^{(2)}]'$$

e temos como nossa hipótese, que as funções vetoriais  $x^{(1)}$  e  $x^{(2)}$  são soluções do sistema (1.8), temos que  $[x^{(1)}]' = P(t)x^{(1)}$  e  $[x^{(2)}]' = P(t)x^{(2)}$ , então

$$\begin{aligned} c_1[x^{(1)}]' + c_2[x^{(2)}]' &= c_1P(t)x^{(1)} + c_2P(t)x^{(2)} \\ &= P(t)[c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}] \end{aligned}$$

portanto, a combinação linear  $c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}$  é uma solução do sistema (1.8). ■

Observe que se aplicarmos várias vezes o Teorema 1.5 temos que  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$  são soluções do sistema (1.8), então  $c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \dots + c_kx^{(k)}$  também é solução,  $\forall c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ .

**Definição 1.6.** Considere a seguinte solução  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  do sistema (1.8) e a matriz  $\mathbf{X}(t)$  onde suas colunas são vetores  $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ :

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

As colunas da matriz (1.9) são linearmente independentes para um determinado valor de  $t$  se, e somente se,  $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$ . Esse determinante é chamado de **Wronskiano** das  $n$  soluções  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  e denotamos da seguinte forma

$$W[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}](t) = \det \mathbf{X}(t).$$

Concluimos então, que as soluções  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  são linearmente independentes em um determinado ponto se, e somente se,  $W[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}](t) \neq 0$  nesse ponto.

**Teorema 1.7.** Considere as funções vetoriais  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  como soluções linearmente independentes de (1.8) em  $\alpha < t < \beta$ , então toda solução  $x = \phi(t)$ , é expressa de forma única como combinação linear de  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ , ou seja,

$$\phi(t) = c_1x^{(1)}(t) + c_2x^{(2)}(t) + \dots + c_nx^{(n)}(t) \quad (1.10)$$

**Demonstração:** Primeiramente observe que, toda solução da forma (1.10) é uma solução do sistema (1.8) pelo Teorema 1.5. Vamos mostrar que dada qualquer solução  $\phi(t)$  do sistema (1.8), temos  $\phi(t) = c_1x^{(1)}(t) + c_2x^{(2)}(t) + \dots + c_nx^{(n)}(t)$  para valores apropriados de  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Considere  $t = t_0$  um ponto no intervalo  $\alpha < t < \beta$  e  $\xi = \phi(t_0)$ . Vamos determinar se existe alguma solução da forma  $x = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \dots + c_nx^{(n)}$  onde também satisfaz a condição inicial  $x(t_0) = \xi$ , ou seja, se existem valores  $c_1, c_2, \dots, c_n$  que satisfaz

$$c_1x^{(1)}(t_0) + c_2x^{(2)}(t_0) + \dots + c_nx^{(n)}(t_0) = \xi.$$



Colocando na sua forma escalar temos

$$\begin{cases} c_1x_{11}(t_0) + c_2x_{12}(t_0) + \dots + c_nx_{1n}(t_0) = \xi_1 \\ c_1x_{21}(t_0) + c_2x_{22}(t_0) + \dots + c_nx_{2n}(t_0) = \xi_2 \\ \vdots \\ c_1x_{n1}(t_0) + c_2x_{n2}(t_0) + \dots + c_nx_{nn}(t_0) = \xi_n \end{cases} \quad (1.11)$$

Por hipótese temos que  $\det X(t_0) \neq 0$ , pois  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  são linearmente independentes no intervalo  $\alpha < t < \beta$ , logo o sistema (1.11) tem solução **única** da forma  $x = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \dots + c_nx^{(n)}$  e que satisfaz o problema de valor inicial. Logo pelo Teorema 1.4 esta solução é idêntica a  $\phi(t)$ , portanto  $\phi(t) = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \dots + c_nx^{(n)}$ , como queríamos demonstrar. ■

A partir dos teoremas até aqui apresentados podemos esboçar duas definições que são fundamentais para as soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª ordem, assim apresentamos a seguinte definição.

**Definição 1.8.** *Todo conjunto solução  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  linearmente independente em todos os pontos do intervalo  $\alpha < t < \beta$  é chamado de **conjunto fundamental de soluções** nesse intervalo.*

**Definição 1.9.** *Considere  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  o conjunto fundamental de soluções do sistema (1.8) no intervalo  $\alpha < t < \beta$ . A **solução geral** deste sistema no intervalo é dado pela combinação linear dessas soluções assim temos*

$$x = c_1x^{(1)}(t) + c_2x^{(2)}(t) + \dots + c_nx^{(n)}(t)$$

onde as constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são constantes arbitrárias.

**Teorema 1.10.** *Se  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  são soluções do sistema (1.8) no intervalo  $\alpha < t < \beta$ , então o  $W[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}]$  ou é identicamente nulo ou nunca se anula nesse intervalo.*

**Demonstração:** Considere  $x^{(1)}, x^{(2)}$  soluções do sistema (1.8) e seu Wronskiano definido por  $W[x^{(1)}, x^{(2)}]$ . Então,

$$W[x^{(1)}, x^{(2)}] = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} = x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_1^{(2)}x_2^{(1)}.$$

Observe que

$$\frac{dW}{dt} = \left[ \frac{dx_1^{(1)}}{dt} \right] x_2^{(2)} + x_1^{(1)} \left[ \frac{dx_2^{(2)}}{dt} \right] - \left[ \frac{dx_2^{(1)}}{dt} \right] x_1^{(2)} - x_2^{(1)} \left[ \frac{dx_1^{(2)}}{dt} \right] \quad (1.12)$$

Considerando o sistema (1.8), temos que

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}$$

Logo, para

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix},$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1^{(1)} &= p_{11}x_1^{(1)} - p_{12}x_2^{(1)} \\ \frac{d}{dt}x_2^{(1)} &= p_{21}x_1^{(1)} - p_{22}x_2^{(1)} \end{aligned}$$

e para

$$x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix},$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1^{(2)} &= p_{11}x_1^{(2)} - p_{12}x_2^{(2)} \\ \frac{d}{dt}x_2^{(2)} &= p_{21}x_1^{(2)} - p_{22}x_2^{(2)} \end{aligned}$$

Aplicando em (1.12) temos

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= (p_{11}x_1^{(1)} + p_{12}x_2^{(1)})x_2^{(2)} + x_1^{(1)}(p_{21}x_1^{(2)} + p_{22}x_2^{(2)}) - (p_{11}x_1^{(2)} + p_{12}x_2^{(2)})x_2^{(1)} \\ &\quad - (p_{21}x_1^{(1)} + p_{22}x_2^{(1)})x_1^{(2)} \\ &= p_{11}x_1^{(1)}x_2^{(2)} + p_{22}x_2^{(2)}x_1^{(1)} - p_{11}x_1^{(2)}x_2^{(1)} - p_{22}x_2^{(1)}x_1^{(2)} \\ &= (p_{11} + p_{22})(x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_1^{(2)}x_2^{(1)}) \\ &= (p_{11} + p_{22})W, \end{aligned}$$

o que implica que o Wronskiano satisfaz o sistema (1.8). Então

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= (p_{11} + p_{22})W \\ dW \frac{1}{W} &= (p_{11} + p_{22})dt \\ \int \frac{1}{W}dW &= \int (p_{11} + p_{22})dt \\ \ln |W| &= \int (p_{11} + p_{22})dt \\ W &= ce^{\int (p_{11} + p_{22})dt} \end{aligned}$$

Como  $e^{\int (p_{11} + p_{22})dt} \neq 0$ , para todo  $t$ , concluímos que  $W = 0$  se, e somente se  $c = 0$ . Temos que  $W[x^{(1)}, x^{(2)}]$  é identicamente nulo ou nunca se anula no intervalo  $\alpha < t < \beta$ . ■

Podemos tirar algumas conclusões a respeito do Teorema 1.10, a primeira é que fica dispensado a necessidade de determinar o Wronskiano em todos os pontos do intervalo  $\alpha < t < \beta$ , ou seja, se em um determinado ponto do intervalo for linearmente independente ou linearmente dependente terá que ser em todos os pontos deste intervalo. Portanto, o próprio Wronskiano é suficiente para se determinar se uma solução é linearmente independente ou não e se forma ou não um conjunto fundamental de soluções. É importante destacar que a demonstração do Teorema 1.10 foi feito para o caso  $n = 2$ , para o caso geral a demonstração pode ser encontrada em (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

O próximo teorema vai provar que dado um conjunto solução do sistema (1.8) existe pelo menos um conjunto fundamental de soluções no intervalo  $\alpha < t < \beta$ , e esse conjunto fundamental pode ser encontrado.

Considere

$$e^{(1)} = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e^{(2)} = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e^{(n)} = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

**Teorema 1.11.** *Sejam  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$  soluções do sistema (1.8) satisfazendo as condições iniciais dadas*

$$x^{(1)}(t_0) = e^{(1)}, \dots, x^{(n)}(t_0) = e^{(n)},$$

*respetivamente, onde  $t_0$  é um ponto qualquer do intervalo  $\alpha < t < \beta$ . Então  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$  formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema (1.8).*

**Demonstração:** Observe que o Teorema 1.4 garante a existência e unicidade das soluções  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ . Agora calculamos o Wronskiano dessas soluções na condição  $t = t_0$ , temos

$$W[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}](t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Logo, como o  $W[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}](t_0) \neq 0$ , temos que  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  são linearmente independentes e pela definição 1.8 essa solução forma um conjunto fundamental de soluções. ■

## 1.2 Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Na seção 1.1 introduzimos a definição de sistemas lineares homogêneos, nesta vamos tratar o caso em que seus coeficientes não dependem da variável independente e fazer uma abordagem mais profunda da sua definição e também apresentar métodos de resolução desses sistemas a partir de ferramentas da Álgebra Linear como o estudo dos autovalores e autovetores de uma matriz onde seus coeficientes sempre serão constantes. Vale destacar que abordaremos apenas sistemas de dimensão dois.

**Definição 1.12.** *Portanto segundo (SOTOMAYOR, 1979) “Consideremos agora sistemas reais da forma*

$$\begin{cases} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

com  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  e  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ . Ou, equivalentemente equações lineares homogêneas do tipo

$$x' = Ax, \text{ com } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

e  $\det A \neq 0$ . Estas equações são associadas a campos vetoriais lineares  $A$  em  $\mathbb{R}^2$ .” Onde a matriz  $A_{2 \times 2}$  tem seus componentes reais e constantes.

Vamos considerar dois casos específico para os sistemas lineares homogêneos, no caso em que  $n = 1$  onde temos um sistema unidimensional e o caso em que  $n = 2$  onde temos um sistema bidimensional. Para o caso em que  $n = 1$  o sistema (1.13) se transforma em uma única equação diferencial de 1ª ordem da forma

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad (1.14)$$

onde  $a \in \mathbb{R}$  é uma constante. Para a equação diferencial de 1ª ordem sempre temos como solução  $x = ce^{at}$ , onde  $t, c \in \mathbb{R}$ , uma maneira de provar se essa solução sempre será a solução da equação é resolvendo a própria equação diferencial. Observe que temos uma equação diferencial de 1ª ordem de variáveis separáveis, fazendo uma pequena mudança nos membros da equação e integrando ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax \\ dx \frac{1}{x} &= a dt \\ \int \frac{1}{x} dx &= \int a dt \end{aligned}$$

$$\ln |x| = at + c_1$$

$$x = ce^{at} \quad t, c \in \mathbb{R}.$$

Concluimos assim que para  $n = 1$  o sistema homogêneo é reduzido a uma equação diferencial e sempre terá como solução  $x = ce^{at}$ . Observe que quando temos sistemas homogêneos, buscamos por soluções de equilíbrio, ou seja, soluções encontradas a partir da resolução do sistema  $Ax = 0$ . Neste caso por hipótese temos que o  $\det A \neq 0$  onde a única solução de equilíbrio será  $x = 0$ . No caso em que  $n = 1$ , onde temos uma equação diferencial de 1ª ordem (1.14) temos que  $x = 0$  é a única solução de equilíbrio quando

$a \neq 0$ . Para outras soluções elas vão tender para  $x = 0$  se  $a < 0$ , mas se  $a > 0$  essas soluções vão se distanciar, ou seja, vão crescer infinitamente. Para o caso  $n = 2$ , ou seja, para sistemas homogêneos  $2 \times 2$  que também são chamados de sistemas bidimensionais, que será a base de estudo desta seção pois são sistemas muito importante os mesmos nos permite construir as soluções no plano e assim estudar o comportamento, a trajetória e a estabilidade dessas soluções. Com base na formação das soluções do caso  $n = 1$  vamos construir as soluções para o sistema (1.13) de ordem  $n$ . Para o caso  $n \times n$ , temos como hipótese que as soluções sejam da forma

$$x = \xi e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.15)$$

onde

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

onde o expoente  $\lambda \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  e o vetor  $\xi_i \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$  devem ser encontrados. Vamos determinar agora como esse expoente e o vetor devem ser encontrados, primeiramente derivamos a solução (1.15) e substituímos no sistema (1.13), assim temos

$$\xi \lambda e^{\lambda t} = A \xi e^{\lambda t}.$$

Cancelamos o fator escalar  $e^{\lambda t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$  e temos em particular,  $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$  o operador identidade, logo

$$A \xi = \xi \lambda$$

$$A \xi - \xi \lambda = 0$$

observe que  $\xi \lambda = \lambda \mathbf{I} \xi$ , assim concluímos que

$$A \xi - \lambda \mathbf{I} \xi = 0$$

$$(A - \lambda \mathbf{I}) \xi = 0 \quad (1.16)$$

onde temos  $\mathbf{I}_{n \times n}$  a matriz identidade. Logo  $x = \xi e^{\lambda t}$  só será solução do sistema (1.13) se determinamos  $\lambda$  o autovalor e  $\xi$  seu autovetor que devem ser associados a matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$ , então para encontrar as soluções de um sistema linear homogêneo basta resolver o sistema algébrico (1.16), ou seja, determinar os autovalores e autovetores da matriz  $\mathbf{A}$ . A partir da construção e estudo dos autovalores e autovetores de uma matriz constante podemos determinar três possibilidades para os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  desde que ela seja por hipótese uma matriz real:

1. Temos todos os autovalores reais e distintos entre si;
2. Temos alguns autovalores complexos e conjugados;
3. E por fim temos alguns autovalores reais e repetidos.

### 1.2.1 Autovalores Reais e Distintos

Nas palavras de (BESSA, 2011) “Se os  $n$  autovalores de  $A$  são reais e distintos, então existe um autovetor real  $\xi^{(i)}$  associado a cada autovalor  $\lambda_i$  e os  $n$  autovetores  $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}$  são linearmente independentes. Assim, as  $n$  soluções do sistema homogêneo são:

$$x^{(1)} = \xi^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \dots, x^{(n)} = \xi^{(n)}e^{\lambda_n t}.”$$

Como vimos na seção 1.1 para verificar se as soluções de um sistema de equações diferenciais linear homogêneo é linearmente independente basta calcular seu Wronskiano. Logo temos que:

$$W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}] = \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} & \dots & \xi_1^{(n)}e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{(1)}e^{\lambda_1 t} & \dots & \xi_n^{(n)}e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{vmatrix}. \quad (1.17)$$

Primeiramente veja que a função exponencial nunca se anula. Observe que os autovetores  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$  são linearmente independente pois o determinante do último termo na equação (1.17) é diferente de zero. Logo o Wronskiano nunca vai se anular e assim podemos concluir que as soluções  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$  formam um conjunto fundamental de soluções. Podemos então construir a solução para a equação (1.13):

$$x = c_1 \xi^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi^{(2)}e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \xi^{(n)}e^{\lambda_n t}.$$

**Exemplo 1.13.** *Vamos determinar as soluções do seguinte sistema*

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x \quad (1.18)$$

*Vamos determinar seus autovalores e autovetores da matriz de coeficientes dada pelo sistema. Assim aplicando a matriz no sistema de equações algébricas (1.16) temos*

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

*Como estamos interessados em encontrar os autovalores, o sistema (1.16) fica da seguinte forma  $\det(A - \lambda \mathbf{I})$ . Assim temos*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 \\ &= 1 - \lambda - \lambda + \lambda^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Observe que a partir do determinante da matriz encontramos o polinômio característico (1.20), calculamos agora suas raízes que serão os autovalores da matriz de coeficientes do sistema (1.18) logo temos:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

temos as seguintes raízes

$$\lambda_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

e

$$\lambda_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

portanto os autovalores do sistema (1.18) são as raízes  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -1$ . Agora vamos determinar seus autovetores substituindo cada autovalor encontrado no sistema (1.19), para o autovalor  $\lambda_1 = 3$  temos:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Observe que temos um sistema simples de 1º grau com duas variáveis que podemos resolver de duas formas por escalonamento ou o método de substituição, fazendo um desses métodos este sistema se reduz a uma única equação. Assim temos:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}R_1 + R_2 \longrightarrow R_2 \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, o sistema (1.21) se reduz a equação  $4\xi_1 - 2\xi_2 = 0$  e assim encontramos  $\xi_2 = 2\xi_1$ , portanto o autovetor  $\xi^{(1)}$  associado ao autovalor  $\lambda_1 = 3$  é

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Para o autovalor  $\lambda_2 = -1$  procedemos de forma análoga ao primeiro autovalor, logo para este autovalor encontramos  $\xi_2 = -2\xi_1$ , portanto o autovetor  $\xi^{(2)}$  associado ao autovalor  $\lambda_2 = -1$  é

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Concluimos assim que as soluções do sistema (1.18) são

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} \quad e \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t},$$

observe que podemos verificar se essas soluções são linearmente independentes e consequentemente formam um conjunto fundamental de soluções, para isso basta calcular seu wronskiano. Portanto temos

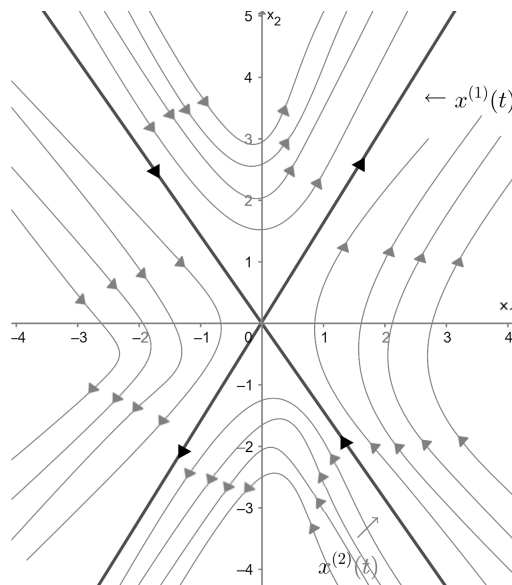
$$W[x^{(1)}, x^{(2)}] = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -4e^{2t},$$

que é diferente de zero, logo as soluções  $x^{(1)}(t)$  e  $x^{(2)}(t)$  formam um conjunto fundamental de soluções e assim podemos construir a solução geral do sistema (1.18) que é

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t},$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias. Para entender melhor essa solução geral vamos construir o gráfico e fazer uma análise do comportamento e da trajetória dessa solução para os diversos valores que as constantes  $c_1$  e  $c_2$  podem assumir. A solução  $x = c_1 x^{(1)}$  pode ser escrita na sua forma escalar,  $x_1 = c_1 e^{3t}$  e  $x_2 = 2c_1 e^{3t}$ . Nas duas equações podemos eliminar a variável  $t$  e verificar que essa solução está na reta  $x_2 = 2x_1$ ; como pode ser observado na Figura 1.1. Portanto, esta reta possui a direção do autovetor  $\xi^{(1)}$  e a origem. Vendo esta solução como uma trajetória, a análise a ser feita sobre ela é que se  $c_1 > 0$  a trajetória da solução está no primeiro quadrante e se  $c_1 < 0$  então a trajetória está no terceiro quadrante. Observe que em ambos os casos a trajetória da solução se afasta da origem conforme a variável  $t$  aumenta.

Figura 1.1 – Gráfico das soluções do sistema 1.18



Fonte: Autor.

Para a solução  $x = c_2 x^{(2)}$  temos a seguinte forma escalar,  $x_1 = c_2 e^{-t}$  e  $x_2 = -2c_2 e^{-t}$ . Esta solução está na reta  $x_2 = -2x_1$ , a sua direção é determinada pelo autovetor  $\xi^{(2)}$ . Novamente analisando esta solução como uma trajetória temos que se  $c_2 > 0$  então a solução está no quarto quadrante e se  $c_2 < 0$  então a trajetória está no segundo quadrante. Neste caso a trajetória da solução se aproxima da origem conforme a variável  $t$  aumenta. Podemos então concluir que conforme a variável  $t$  aumenta o termo  $c_1 x^{(1)}(t)$  é dominante na solução já o termo  $c_2 x^{(2)}(t)$  é desprezível na solução do sistema. Neste caso que temos autovalores reais e distintos e com sinais opostos a origem é chamada de **ponto de sela**.



## 1.2.2 Autovalores Complexos e Conjugados

Segundo (ZILL; CULLEN, 2001) “Se  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  e  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ,  $i^2 = -1$ , são autovalores complexos da matriz  $\mathbf{A}$  de coeficientes, podemos sem dúvida esperar que seus autovetores correspondentes também tenham elementos complexos.” Por esta afirmação podemos concluir que os coeficientes da equação polinomial  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$  serão reais e seus autovalores complexos sempre aparecem em forma de pares conjugados.

Considerando novamente o sistema (1.13), por hipótese temos que  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  e  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  são os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  do sistema (1.13), onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\beta \in \mathbb{R}^*$  e  $\xi^{(1)}$ ,  $\xi^{(2)}$  são seus autovetores ambos complexos e conjugados. Para mostrar isso, temos que  $\lambda_1$  e  $\xi^{(1)}$  satisfazem

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\xi^{(1)} = 0$$

Calculando seu conjugado temos

$$(\mathbf{A} - \bar{\lambda}_1\mathbf{I})\bar{\xi}^{(1)} = 0$$

onde  $\mathbf{A}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^2$ . Observe que  $\bar{\lambda}_1$  e  $\bar{\xi}^{(1)}$  são os complexos conjugados de  $\lambda_1$  e de  $\xi^{(1)}$ , nesta ordem,  $\bar{\lambda}_1 = \lambda_2$  e  $\bar{\xi}^{(1)} = \xi^{(2)}$ . Portanto concluímos que  $\overline{x^{(1)}(t)} = x^{(2)}(t)$ , já que

$$\overline{x^{(1)}(t)} = \bar{\xi}^{(1)} e^{\bar{\lambda}_1 t} = \xi^{(2)} e^{\lambda_2 t} = x^{(2)}(t).$$

Logo, as soluções do sistema (1.13) são complexas conjugadas uma da outra. Portanto podemos concluir que a partir de uma solução complexa conjugada podemos extrair uma solução real do sistema (1.13) que serão correspondentes aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , onde essa solução real será determinada pelas partes real e imaginária das soluções complexas de  $x^{(1)}(t)$  ou de  $x^{(2)}(t)$ . Vamos mostrar agora como é feito para encontrar esta solução real, primeiro considere o autovetor  $\xi^{(1)} = a + ib$ , onde temos  $a$  e  $b$  números reais; então

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= (a + ib)e^{(\alpha + i\beta)t} \\ x^{(1)}(t) &= (a + ib)e^{\alpha t} e^{i\beta t} \end{aligned} \tag{1.22}$$

aplicando a fórmula de Euler dada por

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

em (1.22), temos

$$x^{(1)}(t) = (a + ib)e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)).$$

Separamos agora a parte real e imaginária, temos

$$x^{(1)}(t) = e^{\alpha t}(a \cos(\beta t) - b \sin(\beta t)) + ie^{\alpha t}(a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t)).$$

Se consideramos a solução  $x^{(1)}(t) = u(t) + iv(t)$ , temos que

$$u(t) = e^{\alpha t}(a \cos(\beta t) - b \sin(\beta t)),$$

$$v(t) = e^{\alpha t}(a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t))$$

que são as soluções reais do sistema (1.13). Observe que essas soluções reais são linearmente independentes e conseqüentemente formam um conjunto fundamental de soluções.

Agora considere um sistema formado por  $n$  equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

$$x' = Ax, \quad (1.23)$$

onde temos os coeficientes da matriz  $A$  real. Se por exemplo, temos a hipótese que a matriz  $A$  tem dois autovalores complexos  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  e  $\lambda_3, \dots, \lambda_n$  são reais e distintos. Temos  $\xi^{(1)} = a + ib$ ,  $\xi^{(2)} = a - ib$ ,  $\xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}$  seus autovetores associados. Logo, a solução geral do sistema (1.23) é da seguinte forma

$$x = c_1 u(t) + c_2 v(t) + c_3 \xi^{(3)} e^{\lambda_3 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{\lambda_n t}.$$

**Exemplo 1.14.** *Vamos determinar as soluções do seguinte sistema*

$$x' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x \quad (1.24)$$

Observe que a forma de encontrar os autovalores e autovetores do sistema (1.24) é análoga ao exemplo 1.13, então vamos apresentar somente os resultados para seus autovalores e autovetores e analisar a solução observando seu comportamento e trajetória. Para o sistema (1.24) temos o seguinte conjunto de equações lineares algébricas

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

determinando seu polinômio característico temos

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4} = 0, \quad (1.25)$$

calculando as raízes do polinômio característico (1.25) temos que  $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i$  e  $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i$  que são os autovalores. Procedendo de forma análoga ao exemplo 1.13 calculamos seus autovetores associados que são

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad e \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Temos que seus autovetores também são complexos conjugados. Assim podemos concluir que o conjunto fundamental de soluções do sistema (1.24) é dado por

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}+i)t} \quad e \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}-i)t}.$$

Agora vamos encontrar um conjunto de soluções reais para o sistema (1.24), para isso utilizamos umas das soluções encontradas  $x^{(1)}$  ou  $x^{(2)}$  e vamos buscar as partes real e imaginária dessa solução. Escolhendo a solução  $x^{(1)}$  temos

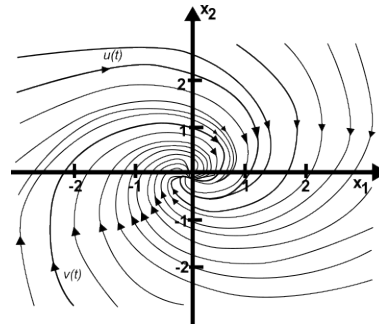
$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}(\cos(t) + i \sin(t)) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} \cos(t) \\ -e^{-\frac{t}{2}} \sin(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} \sin(t) \\ e^{-\frac{t}{2}} \cos(t) \end{pmatrix}$$

Concluimos então que

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \quad e \quad v(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

formam um conjunto de soluções reais do sistema (1.24). Vamos agora construir o gráfico das soluções e analisar o comportamento e a trajetória.

Figura 1.2 – Gráfico das soluções do sistema 1.24



Fonte: Autor.

Observando o gráfico podemos considerar dois pontos que estão contidos nas soluções  $u(t)$  e  $v(t)$  quando  $t = 0$  são os pontos  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , respectivamente. Temos ainda outras soluções que são combinações lineares das soluções  $u(t)$  e  $v(t)$ . A sua trajetória se aproxima da origem quando  $t \rightarrow \infty$ , como a solução é formada por um produto exponencial decrescente de termos em seno ou cosseno, suas trajetórias formam infinitos caminhos em volta da origem. A origem neste caso é chamada de **ponto espiral**. Uma observação a ser feita é que neste exemplo temos parte real de seus autovalores negativos, levando sua trajetória a se aproximar da origem quando  $t \rightarrow \infty$ . Caso a parte real dos autovalores fosse positiva sua trajetória teria sentido contrário, ou seja, se afastaria da origem e todas elas seriam ilimitadas.

### 1.2.3 Autovalores Reais e Repetidos

Para sistemas homogêneos em que seus autovalores reais são repetidos podemos ter duas possibilidades levando em conta a sua multiplicidade algébrica  $k \geq 2$ .

1. Podemos ter  $k$  autovetores linearmente independentes associados aos seus autovalores;

2. Podemos ter menos do que  $k$  autovetores linearmente independentes associados aos seus autovalores.

Vamos dar ênfase para o caso em que ocorre menos do que  $k$  autovetores, pois neste caso temos uma deficiência na solução do sistema, ou seja, para autovalores com multiplicidade  $k \geq 2$  a solução sempre será incompleta e conseqüentemente não formará um conjunto fundamental de soluções. Portanto precisamos recorrer a outros métodos para encontrar a solução geral, para isso vamos voltar ao estudo das equações diferenciais logo segundo (MATTIUZZO, 2016) “[...]vamos recorrer à própria teoria de equações diferenciais, no caso das equações lineares homogêneas, quando as raízes do polinômio característico eram repetidas. Então, temos uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

cujas raízes  $r$  do polinômio característico  $ar^2 + br + c = 0$  são de multiplicidade 2 com a solução geral da forma

$$y(t) = (c_0 + c_1t)e^{rt}.”$$

Considerando o resultado dos estudos das equações diferenciais lineares homogêneas de 2ª ordem e o caso em que temos sistemas com autovalores repetidos com apenas um autovetor onde sua solução é dada por  $\xi e^{\lambda t}$ , vamos considerar o seguinte termo da forma  $\eta e^{\lambda t}$ , onde o mesmo não será um múltiplo da solução

$$x^{(1)}(t) = \xi e^{\lambda t},$$

onde temos  $\xi$  satisfazendo

$$(A - \lambda \mathbf{I})\xi = 0.$$

Por hipótese vamos considerar a segunda solução da seguinte forma

$$x^{(2)}(t) = \xi t e^{\lambda t} + \eta e^{\lambda t} \tag{1.26}$$

onde,

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix},$$

substituímos a solução (1.26) no sistema (1.13) temos

$$\lambda \xi t e^{\lambda t} + (\xi + \lambda \eta) e^{\lambda t} = A(\xi t e^{\lambda t} + \eta e^{\lambda t}).$$

igualando os coeficientes de  $t e^{\lambda t}$  e  $e^{\lambda t}$ , obtemos

$$\lambda \xi = A\xi \quad \xi + \lambda \eta = A\eta$$

$$0 = A\xi - \lambda \xi \quad \xi = A\eta - \lambda \eta$$

temos as seguintes condições

$$\begin{aligned}(A - \lambda \mathbf{I})\xi &= 0 \\ (A - \lambda \mathbf{I})\eta &= \xi\end{aligned}\tag{1.27}$$

onde  $\eta$  satisfaz o sistema (1.27). Portanto para resolver sistemas com autovalores repetidos com menos do que  $k$  autovetores linearmente independentes, basta resolver a equação (1.27) para o vetor  $\eta$  onde o mesmo é conhecido como **autovetor generalizado**.

**Exemplo 1.15.** *Vamos determinar as soluções do seguinte sistema*

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x\tag{1.28}$$

*Novamente de forma análoga ao exemplo 1.13, calculamos os autovalores e autovetores do sistema (1.28). Assim temos que  $p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$  onde temos como autovalor  $\lambda = 2$  com multiplicidade 2 e tem como único autovetor linearmente independente  $\xi_2 = -\xi_1$ . Portanto temos como solução do sistema (1.28)*

$$x^{(1)}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t},$$

*observe que não existe uma segunda solução para este sistema da forma  $x = \xi e^{\lambda t}$ , então consideramos a solução (1.26) temos*

$$x^{(2)}(t) = \xi t e^{2t} + \eta e^{2t},\tag{1.29}$$

*para encontrar uma segunda solução e que forme um conjunto fundamental de soluções para o sistema (1.28). Considere a equação (1.27), aplicando o autovalor encontramos a seguinte matriz aumentada*

$$\left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

*Resolvendo esse sistema temos  $-\eta_1 - \eta_2 = 1$ , considerando  $\eta_1 = k$ , onde  $k$  é arbitrário, encontramos  $\eta_2 = -k - 1$ . Logo temos os seguintes valores para o vetor  $\eta$*

$$\eta = \begin{pmatrix} k \\ -1 - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

*fazendo a substituição de  $\xi$  e  $\eta$  em (1.29), encontramos*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

*Observe que o último termo da solução é um múltiplo da solução  $x^{(1)}(t)$  e podemos desconsiderar, portanto os dois primeiros termos forma uma nova solução:*

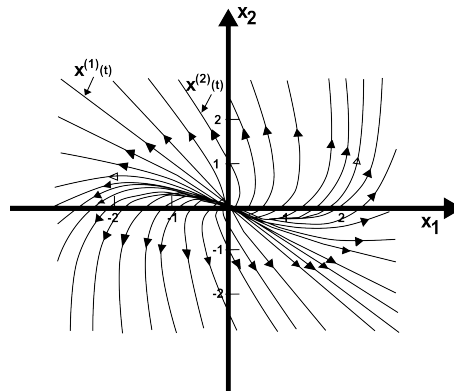
$$x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Calculando o wronskiano das soluções encontramos  $W[x^{(1)}, x^{(2)}] = -e^{4t}$ , concluímos que  $x^{(1)}$  e  $x^{(2)}$  formam um conjunto fundamental de soluções e podemos construir a solução geral para o sistema (1.28)

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right].$$

Novamente vamos construir o gráfico desta solução e fazer uma pequena análise do comportamento e trajetória.

Figura 1.3 – Gráfico das soluções do sistema 1.28



Fonte: Autor.

Observando o gráfico podemos concluir que o comportamento das soluções do sistema (1.28) são ilimitadas, ou seja,  $x$  é ilimitado quando  $t \rightarrow \infty$  e  $x \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Podemos verificar ainda que todas as soluções tendem a origem quando  $t \rightarrow -\infty$  e são tangentes à reta  $x_2 = -x_1$  pelo seu autovetor. De forma análoga quando  $t \rightarrow \infty$  as soluções estão tendendo a uma reta com coeficiente angular  $-1$ . Neste exemplo em que temos autovalores repetidos a origem é chamada de **nó impróprio**.

### 1.3 Matrizes Fundamentais

Construímos na seção 1.2 as soluções para sistemas de equações diferenciais lineares homogêneas e verificamos que formam um conjunto fundamental de soluções. Nesta vamos introduzir a definição de matrizes fundamentais a partir das soluções e da formação de um conjunto fundamental, vamos construir a relação entre essas matrizes fundamentais e o P.V.I considerando as condições iniciais da forma (1.4).

**Definição 1.16.** Conforme (BESSA, 2011) “Sejam  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$  um conjunto fundamental de soluções para

$$x' = P(t)x. \quad (1.30)$$

A matriz

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

é chamada de **Matriz Fundamental de Soluções** para (1.30). Observe que a matriz  $\Psi(t)$  é inversível.”

**Exemplo 1.17.** Vamos determinar a matriz fundamental do seguinte sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x \quad (1.31)$$

Observe que este exemplo foi resolvido na subseção 1.2.1 logo vamos considerar somente suas soluções. Portanto temos

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} \quad e \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Vimos que essas soluções são linearmente independente do sistema (1.31). Concluimos então que a matriz fundamental desse sistema (1.31) é

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Agora vamos estender o conceito de matriz fundamental para resolver o P.V.I de sistemas homogêneos para isso vamos considerar a solução geral desses sistemas. Assim temos

$$x = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t)$$

considerando o sistema (1.30), escrevemos em termos de  $\Psi(t)$ ,

$$x = \Psi(t)C, \quad (1.32)$$

onde  $C$  é um vetor constante com componentes arbitrários,  $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$ . Para um problema de valor inicial do sistema (1.30) temos

$$\begin{cases} x' & = P(t)x \\ x(t_0) & = x^0, \end{cases} \quad (1.33)$$

considerando a condição dada temos que o ponto dado  $t_0$  está em  $\alpha < t < \beta$  e  $x^0$  é um vetor constante dado, portanto precisamos escolher o vetor  $C$  de modo que ele satisfaça as condições iniciais dadas. Como a matriz  $\Psi(t_0)$  é invertível podemos concluir que

$$x(t_0) = \Psi(t_0)C \Rightarrow x^0 = \Psi(t_0)C \Rightarrow C = \Psi^{-1}(t_0)x^0 \quad (1.34)$$

Substituindo o valor de  $C$  da expressão (1.34) em (1.32), temos

$$x = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)x^0. \quad (1.35)$$

Portanto esta última equação é a solução para o P.V.I (1.33). É importante destacar que para resolver um problema de valor inicial utilizamos muitas vezes a equação  $x^0 = \Psi(t_0)C$  e depois aplicamos na equação (1.32), em vez de utilizar a equação (1.35). Outro dado importante é que a matriz fundamental sempre é formada pelas soluções do sistema (1.30), ou seja, a matriz fundamental sempre satisfaz o sistema (1.30) e assim temos a seguinte equação diferencial matricial

$$\Psi'(t) = P(t)\Psi(t). \quad (1.36)$$

Agora abordaremos um caso particular para matrizes fundamentais chamada de **matriz especial ou principal**, onde suas colunas são vetores  $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$  que são fornecidos pelo Teorema 1.11 e vamos denotar a matriz especial por  $\Phi(t)$  que também satisfaz o sistema (1.30) e as condições iniciais

$$x^{(j)}(t_0) = \mathbf{e}^{(j)}$$

onde temos  $\mathbf{e}^{(j)}$  um vetor unitário definido pelo Teorema 1.11 e um na  $j$ -ésima posição e suas componentes nulas. Portanto,  $\Phi(t)$  tem como propriedade

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}. \quad (1.37)$$

Fazendo uma análise de (1.37) observamos que  $\Phi^{-1}(t_0) = \mathbf{I}$  é trivial. Então, pela equação (1.35) temos que

$$x = \Phi(t)x^0. \quad (1.38)$$

A matriz especial ou principal é muito útil quando temos várias condições iniciais diferentes para um sistema de equações diferenciais que é resolvido várias vezes sujeito a essas condições iniciais. Portanto se sua matriz fundamental estiver determinada, podemos obter a solução para cada condição inicial diferente fazendo apenas uma multiplicação de matrizes pela equação (1.38). Esse tipo de situação é muito comum de se ver em sistemas físicos que estão sujeitos a estados iniciais diferentes. Portanto fazendo um comparativo entre as equações (1.38) e (1.35) concluímos que  $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t)$ .

**Exemplo 1.18.** *Vamos encontrar a matriz fundamental principal que satisfaça a condição  $\Phi(0) = \mathbf{I}$  para o sistema*

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x$$



Pelo exemplo 1.17 temos que sua matriz fundamental é dada por

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Calculamos os valores de  $C$ , aplicando a equação  $x^0 = \Psi(t_0)C$  temos

$$\Psi(0)C = I.$$

Temos as seguintes condições,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4} \quad e \quad c_2 = -\frac{1}{4}$$

Temos por (1.32) que

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

Portanto, concluímos que a matriz fundamental principal é

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

Com a matriz fundamental principal determinada fica fácil calcular a solução para qualquer tipo de condição inicial dada.

**Exemplo 1.19.** Vamos determinar a solução para o seguinte P.V.I

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Como temos o mesmo sistema do exemplo 1.17, já sabemos qual é a sua matriz fundamental.

Então aplicando a equação  $x^0 = \Psi(t_0)C$ , temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 - 2c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{3}{4} \quad e \quad c_2 = \frac{5}{4}$$

Logo a solução para o P.V.I é

$$x = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{ou} \quad x = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{5}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{5}{2}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Bem, agora que já sabemos os processos de resolução de sistemas de equações diferenciais homogêneos para encontrar suas soluções utilizando as ferramentas da álgebra linear como os autovalores e autovetores, podemos construir a forma generalizada dessas soluções juntamente com o P.V.I a partir também do conceito de matrizes fundamentais, é o que vamos definir como **Exponencial de uma Matriz**.

Como vimos na seção 1.2 quando temos um sistema homogêneo com uma matriz  $A_{n \times n}$  onde  $n = 1$ , sempre recaímos em uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem com variáveis separáveis da seguinte forma

$$\begin{cases} x' &= ax \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (1.39)$$

onde temos  $a$  constante e sua solução sempre será da forma

$$x = x_0 e^{at}. \quad (1.40)$$

Para um sistema homogêneo de ordem  $n \times n$  temos o seguinte P.V.I

$$\begin{cases} x' &= Ax \\ x(0) &= x^0 \end{cases} \quad (1.41)$$

onde  $A$  é uma matriz constante. Levando-se em consideração os resultados obtidos nesta seção uma solução para o problema (1.41), pode ser construído da seguinte forma  $x = \Phi(t)x^0$ , onde  $\Phi(0) = \mathbf{I}$ . Observe que o problema (1.39) é análogo ao problema (1.41), então podemos considerar o formato da solução (1.40) como uma solução para o sistema (1.41), ou seja, a matriz  $\Phi(t)$  pode ter uma formação exponencial.

Vamos analisar se essa possibilidade realmente existe, para isso consideramos a função exponencial escalar  $e^{at}$  em forma de séries de potência

$$e^{at} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!},$$

onde a série converge  $\forall t$ . Fazendo a substituição do escalar  $a$  pela matriz  $A_{n \times n}$  na série, temos que

$$\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \mathbf{I} + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots \quad (1.42)$$

Observe que, cada termo da série (1.42) é uma matriz de ordem  $n \times n$  e  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade. Note ainda que cada elemento dessa série que é uma soma de matrizes que converge  $\forall t$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, pela soma da série (1.42) podemos definir uma nova matriz  $n \times n$  da forma

$$e^{At} = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}. \quad (1.43)$$

Pegando cada termo da série (1.43) e tirando sua derivada temos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}[e^{At}] &= \mathbf{I}' + (At)' + \left(\frac{A^2t^2}{2!}\right)' + \left(\frac{A^3t^3}{3!}\right)' + \dots + \left(\frac{A^nt^n}{n!}\right)' + \dots \\
 &= 0 + (A) + \left(\frac{2A^2t}{1.2}\right) + \left(\frac{3A^3t^2}{1.2.3}\right) + \dots + \left(\frac{nA^nt^{n-1}}{1.2\dots(n-1).n}\right) + \dots \\
 &= A \left[ \mathbf{I} + (At) + \left(\frac{A^2t^2}{2!}\right) + \left(\frac{A^3t^3}{3!}\right) + \dots + \left(\frac{A^nt^n}{n!}\right) + \dots \right] \\
 &= A \left[ \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^nt^n}{n!} \right] \\
 &= Ae^{At}.
 \end{aligned}$$

Concluimos que  $e^{At}$  satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}[e^{At}] = Ae^{At}.$$

Observe também que quando  $t = 0$ , a  $e^{At}$  satisfaz

$$e^{At} \Big|_{t=0} = \mathbf{I}.$$

Temos também que a matriz fundamental principal  $\Phi$  satisfaz o P.V.I da  $e^{At}$  logo temos que

$$\begin{cases} \Phi' &= A\Phi \\ \Phi(0) &= \mathbf{I} \end{cases}$$

Pela parte do Teorema 1.4 (unicidade) das soluções de equações diferenciais matriciais podemos concluir que a matriz fundamental  $\Phi(t)$  e a  $e^{At}$  são iguais  $\Phi(t) = e^{At}$ . Concluimos então que a solução do P.V.I (1.41) é da forma

$$x = e^{At}x^0 \quad \text{ou} \quad x = e^{At}C$$

(para soluções gerais) que é análoga a solução (1.40) do problema de valor inicial (1.39). Portanto a formação das soluções de um P.V.I de um sistema em  $\mathbb{R}^n$  é análoga a formação das soluções das equações diferenciais ordinárias em  $\mathbb{R}$ , ou seja, a dimensão finita de um P.V.I não interfere na sua resolução geral ao usar a exponencial da matriz  $A_{n \times n}$ .

**Exemplo 1.20.** *Vamos determinar a solução do sistema usando matriz exponencial*

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Calculando  $At$  temos

$$At = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

calculando agora  $e^{At}$  por (1.43) temos

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathbf{I} + (At) + \left(\frac{A^2 t^2}{2!}\right) + \left(\frac{A^3 t^3}{3!}\right) + \dots + \left(\frac{A^n t^n}{n!}\right) + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & t^3 \\ t^3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!} \begin{pmatrix} t^4 & 0 \\ 0 & t^4 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots & t + \frac{t^3}{3!} + \dots \\ t + \frac{t^3}{3!} + \dots & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

observe que as componentes da última matriz são as séries de Taylor das funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico portanto temos:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

Logo a solução geral do sistema é

$$x = e^{At} C = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ ou } x = c_1 \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

## 2 Sistemas Lineares Não-Homogêneos

Vimos no capítulo 1 as definições, teoremas e os métodos para encontrar as soluções de sistemas de equações diferenciais homogêneos. Neste vamos reintroduzir a definição para sistemas de equações diferenciais não-homogêneos e apresentar os principais métodos para encontrar as soluções desses sistemas. Os principais métodos são Coeficientes indeterminados, Variação dos Parâmetros e Transformada de Laplace vale destacar que esses não são os únicos métodos para encontrar as soluções de sistemas lineares não homogêneos mas são os principais e os mais importantes para a obtenção dessas soluções, onde abordaremos sistemas de dimensão dois.

**Definição 2.1.** Segundo (GOMES, 2013) “Seja o sistema não homogêneo

$$x' = P(t)x + g(t), \quad (2.1)$$

onde  $P(t)$  é uma matriz e  $g(t)$  um vetor. A solução geral é dada por

$$x = c_1x^{(1)}(t) + \dots + c_nx^{(n)}(t) + v(t), \quad (2.2)$$

onde  $c_1x^{(1)}(t) + \dots + c_nx^{(n)}(t)$  é a solução geral da equação homogênea e o vetor  $v(t)$  uma solução particular do sistema não homogêneo.” Onde a matriz  $P_{n \times n}$  e o vetor  $n \times 1$   $g(t)$  do sistema (2.1) são contínuos no intervalo  $\alpha < t < \beta$ .

Observe que a partir do sistema (2.1) e da sua solução (2.2) e também do sistema linear homogêneo (1.30) podemos construir o seguinte teorema

**Teorema 2.2.** Seja  $X_p(t)$  uma solução para o sistema linear não homogêneo (2.1) em um intervalo  $\alpha < t < \beta$ , e considere

$$X_c(t) = c_1x^{(1)}(t) + \dots + c_nx^{(n)}(t)$$

a solução geral no mesmo intervalo para o sistema linear homogêneo associado (1.30). Portanto, a solução geral para o sistema linear não homogêneo no intervalo é

$$X(t) = X_c(t) + X_p(t).$$

**Demonstração:** Considere  $X_1$  e  $X_2$  duas soluções para o sistema não homogêneo (2.1) e considere que

$$H(x) = x'(t) - P(t)x(t) = g(t),$$

vamos obter

$$H(X_1) = X_1'(t) - P(t)X_1(t) = g(t) \Rightarrow H(X_1) = g(t)$$

e

$$H(X_2) = X_2'(t) - P(t)X_2(t) = g(t) \Rightarrow H(X_2) = g(t)$$

Fazendo a subtração da segunda pela primeira, temos

$$H(X_1)(t) - H(X_2)(t) = g(t) - g(t) = 0. \quad (2.3)$$

Mas por outro lado, temos

$$H(X_1)(t) - H(X_2)(t) = H(X_1 - X_2)(t) \quad (2.4)$$

Segue de (2.3) e (2.4) que

$$H(X_1 - X_2)(t) = 0.$$

Concluimos assim que  $X_1 - X_2$  é uma solução do sistema (1.30) e pode ser expresso como uma combinação linear, e também forma um conjunto fundamental de soluções e pelo Teorema 1.7 todas as soluções podem ser expressas dessa maneira. Portanto temos

$$X_1 - X_2 = c_1x^{(1)}(t) + \dots + c_nx^{(n)}(t) \quad (2.5)$$

Fazendo  $X_1 = X(t)$  como a solução geral do sistema (2.1) e  $X_2 = X_p(t)$  a solução particular do mesmo sistema, temos de (2.5)

$$\begin{aligned} X(t) - X_p(t) &= c_1x^{(1)}(t) + \dots + c_nx^{(n)}(t) \\ X(t) &= c_1x^{(1)}(t) + \dots + c_nx^{(n)}(t) + X_p(t) \end{aligned}$$

Como  $X_c(t) = c_1x^{(1)}(t) + \dots + c_nx^{(n)}(t)$  é a solução geral do sistema (1.30), concluimos que

$$X(t) = X_c(t) + X_p(t).$$

como se queria demonstrar ■

É importante destacar que a solução geral  $X_c(t)$  do sistema linear homogêneo (1.30) é chamada de função complementar do sistema linear não homogêneo (2.1). Pelo Teorema 2.2 vimos que as soluções para sistemas lineares não homogêneos consiste basicamente em encontrar a solução particular  $X_p(t)$  e para isso temos vários métodos, a seguir apresentaremos o primeiro deles.

## 2.1 Coeficientes Indeterminados

O primeiro método que vamos apresentar para encontrar a solução particular  $X_p(t)$  é dos **coeficientes indeterminados** que consiste por hipótese que a solução deve ter uma determinada forma com todos ou alguns coeficientes indeterminados e assim calcular esses coeficientes de forma a satisfazer as equações diferenciais.

Para sistemas não-homogêneos esse método só é válido se a matriz  $\mathbf{P}$  tiver seus coeficientes constantes e se os componentes do vetor  $\mathbf{g}$  são funções polinomiais, exponenciais, constantes, senos e cossenos, ou somas e produtos finitos dessas funções. Portanto a forma de encontrar a solução particular usando o método dos coeficientes indeterminados é bem simples e prático.

**Exemplo 2.3.** *Resolva o sistema*

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ em } (-\infty, \infty).$$

*Resolvendo primeiramente o sistema homogêneo, de forma análoga aos exemplos apresentados na seção 1.2 do capítulo 1 temos o polinômio característico*

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

*onde encontramos os seguintes autovalores complexos  $\lambda_1 = i$  e  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -i$ . Novamente de forma análoga aos exemplos da seção 1.2 do capítulo 1 encontramos os seus autovetores e obtemos a seguinte solução*

$$x = c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

*Como o vetor  $g(t)$  é constante, por hipótese temos que ter um vetor solução particular constante da seguinte forma*

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

*Levando esta hipótese ao nosso sistema original temos*

$$\begin{cases} -a_1 + 2b_1 - 8 = 0 \\ -a_1 + b_1 + 3 = 0 \end{cases}$$

*Note que temos um sistema de equações algébricas simples do 1º grau, então resolvendo esse sistema temos  $a_1 = 14$  e  $b_1 = 11$ . Substituindo esses valores no vetor solução particular temos*

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

*Portanto, a solução geral do sistema será*

$$x = c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 2.4.** *Resolva o sistema*

$$x' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ em } (-\infty, \infty).$$

Resolvendo primeiramente o sistema homogêneo, de forma análoga aos exemplos apresentados na seção 1.2 do capítulo 1 temos o polinômio característico

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 1 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

onde encontramos os seguintes autovalores reais  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 7$ . Novamente de forma análoga aos exemplos da seção 1.2 do capítulo 1 encontramos os seus autovetores

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad e \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e obtemos a seguinte solução

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$$

Como  $g(t)$  é da forma

$$g(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Então por hipótese devemos ter uma solução particular da seguinte forma

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

Levando esta hipótese ao sistema original temos

$$X_p'(t) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X_p + \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Encontramos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} (6a_2 + b_2 + 6)t + 6a_1 + b_1 - a_2 & = 0 \\ (4a_2 + 3b_2 - 10)t + 4a_1 + 3b_1 - b_2 + 4 & = 0 \end{cases}$$

Deste sistema podemos obter outros dois sistemas

$$\begin{cases} 6a_2 + b_2 + 6 & = 0 \\ 4a_2 + 3b_2 - 10 & = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 6a_1 + b_1 - a_2 & = 0 \\ 4a_1 + 3b_1 - b_2 + 4 & = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o primeiro sistema composta por equações simples do 1º grau temos  $a_2 = -2$  e  $b_2 = 6$ . Considerando os valores encontrados e levando ambos ao segundo sistema temos  $a_1 = -\frac{4}{7}$  e  $b_1 = \frac{10}{7}$ . Portanto temos o seguinte vetor solução particular

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}$$



Logo, a solução geral do sistema é

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}$$

**Observação 2.5.** Observe que para alguns exemplos como os apresentados o método dos coeficientes indeterminados é bem simples e sistemático, mas nem sempre isso ocorre já que o método não pode ser aplicado para qualquer sistema. Outra dificuldade é que a hipótese da solução particular está sujeita a um conhecimento prévio da sua função complementar. Desta forma apresentaremos a seguir o método de variação dos parâmetros considerado o mais poderoso na resolução de sistemas de equações diferenciais.

## 2.2 Variação dos Parâmetros

Nesta seção abordaremos sistemas não homogêneo mais gerais onde a matriz de coeficientes não é constante. Portanto considerando novamente a sua forma mais geral

$$x' = P(t)x + g(t) \quad (2.6)$$

onde  $P(t)$  e  $g(t)$  são contínuas em  $\alpha < t < \beta$ . Novamente considerando a forma para sistemas homogêneos temos

$$x' = P(t)x \quad (2.7)$$

Pela seção 1.3 do capítulo 1 temos que  $\Psi(t)$  uma matriz fundamental do sistema associado (2.7), por hipótese vamos considerar que a matriz fundamental já foi encontrada e a partir do método da variação dos parâmetros construímos uma solução particular  $X_p(t)$ , e posteriormente, a solução geral do sistema (2.6). Como foi visto na seção 1.3 a solução geral do sistema homogêneo (2.7) é da forma  $\Psi(t)c$ , a partir desta solução construímos uma solução para o sistema não homogêneo (2.6) substituindo o vetor  $c$  por uma função vetorial  $\mathbf{u}(t)$ . Portanto por hipótese temos que a solução será da forma

$$x(t) = \Psi(t)\mathbf{u}(t), \quad (2.8)$$

onde queremos determinar o valor do vetor  $\mathbf{u}(t)$ . Fazendo a substituição de (2.8) em (2.6) temos

$$\Psi'(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)\mathbf{u}'(t) = P(t)\Psi(t)\mathbf{u}(t) + g(t). \quad (2.9)$$

Aplicando (1.36) visto que  $\Psi(t)$  é uma matriz fundamental, então a equação (2.9) se reduz a

$$\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = g(t).$$

Observe que  $\Psi(t)$  também é invertível em qualquer intervalo pois  $\mathbf{P}$  é contínua, logo existe  $\Psi^{-1}(t)$ . Portanto temos

$$\begin{aligned}\Psi(t)\mathbf{u}'(t) &= g(t) \\ \Psi^{-1}(t)\Psi(t)\mathbf{u}'(t) &= \Psi^{-1}(t)g(t) \\ \mathbf{u}'(t) &= \Psi^{-1}(t)g(t)\end{aligned}\tag{2.10}$$

Concluimos que  $\mathbf{u}(t)$  é qualquer vetor que satisfaz a equação (2.10), e estão determinados a menos de um vetor constante  $\mathbf{c}$ , portanto temos que

$$\mathbf{u}(t) = \int \Psi^{-1}(t)g(t)dt + \mathbf{c}\tag{2.11}$$

onde  $\mathbf{c}$  é um vetor constante arbitrário. Fazendo a substituição de (2.11) em (2.8) construímos a solução geral para o sistema (2.6) que é da forma

$$x = \Psi(t)C + \Psi(t) \int \Psi^{-1}(t)g(t)dt.\tag{2.12}$$

**Exemplo 2.6.** *Resolva o sistema*

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$

Pela equação (2.12) podemos considerar a solução geral da seguinte forma  $x(t) = X_c + X_p$  onde

$$X_c = \Psi(t)\mathbf{c} \text{ e } X_p = \Psi(t) \int \Psi^{-1}(t)g(t)dt$$

vamos calcular de forma separada cada uma das equações acima para o sistema dado. Para o primeiro sistema que é homogêneo segue de forma análoga aos exemplos da seção 1.2 do capítulo 1 logo temos

$$\det(A - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 3 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

onde seus autovalores são  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$ , e seus autovetores são

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Portanto temos a seguinte solução geral para o sistema homogêneo

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Desta solução obtemos a seguinte matriz fundamental

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

Calculamos agora a segunda equação, para isso precisando encontrar a matriz invertível da matriz fundamental assim considerando a matriz temos

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \text{ e obtemos } \Psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{3e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ -\frac{e^t}{2} & \frac{e^t}{2} \end{pmatrix}$$

Aplicamos agora os valores encontramos na equação  $X_p$ , temos

$$\begin{aligned} X_p &= \Psi(t) \int \Psi^{-1}(t)g(t)dt \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{3e^{-t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ -\frac{e^t}{2} & \frac{e^t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{te^{-t}}{2} \\ -\frac{e^{2t}}{2} + \frac{te^t}{2} \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t + \frac{te^{-t}+e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t t - e^t}{2} - \frac{e^{2t}}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6te^t + 4t - e^t}{4} \\ \frac{6te^t + 8t - 3e^t - 4}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Simplificando o resultado acima, temos

$$X_p = \begin{pmatrix} \frac{3te^t}{2} + t - \frac{1}{4}e^t \\ \frac{3te^t}{2} + 2t - \frac{3}{4}e^t - 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, a solução geral deste sistema é

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A solução geral para o sistema não homogêneo (2.6) também pode ser expandida para um problema de valor inicial o P.V.I, para isso considere a seguinte condição inicial

$$x(t_0) = x^0. \quad (2.13)$$

Considerando a equação (2.12) e escolhendo de maneira conveniente o limite inferior de integração como o ponto inicial  $t_0$ , construímos a solução do P.V.I considerando o sistema (2.6) e a condição inicial (2.13). Portanto a solução geral é da forma

$$x(t) = \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)g(s)ds + \Psi(t)\mathbf{c}, \quad (2.14)$$

Observe que,  $t = t_0$  logo a integral na equação (2.14) será zero, portanto a condição inicial (2.13) também pode ser satisfeita se a constante  $\mathbf{c}$  for igual a

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)x^0.$$

Logo,

$$x(t) = \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)g(s)ds + \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)x^0,$$

é a solução para o problema de valor inicial o P.V.I  $\forall t \in I$ .

## 2.3 Transformadas de Laplace

As duas seções anteriores apresentamos dois métodos para encontrar a solução particular de um sistema não homogêneo cada um com suas particularidades, nesta seção vamos apresentar o último método chamado de Transformada de Laplace que é um método muito utilizado não só nas equações diferenciais mas também em outros campos de estudo. Para isso recordamos um pouco sobre sua definição.

**Definição 2.7.** Segundo (ZILL; CULLEN, 2001) “Seja  $f$  uma função definida por  $t \geq 0$ , Então a integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

é chamada de **transformada de Laplace** de  $f$ , desde que a integral convirja.”

Para demonstrar o método da transformada de Laplace recorreremos a um exemplo bem simples e prático. Assim temos

**Exemplo 2.8.** Calcule  $\mathcal{L}\{1\}$ .

Aplicando a transformada de Laplace temos

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}(1)dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-e^{-sb} + 1}{s} = \frac{1}{s}$$

onde  $s > 0$ .

Dada esta definição que pode ser aplicada a equações diferenciais lineares de qualquer ordem. Ela pode ser usada de forma semelhante na resolução de sistemas de equações diferenciais não homogêneo. Para usar este método deve-se observar que a transformada de Laplace é uma integral, portanto como trabalhamos com vetores na resolução de um sistema, temos que transformar o vetor e para isso calculamos componente a componente do sistema. Portanto considere que  $\mathcal{L}\{x(t)\}$  o vetor onde suas componentes são transformadas das componentes de  $x(t)$  e de forma análoga de  $\mathcal{L}\{x'(t)\}$ . E por fim temos  $\mathcal{L}\{x(t)\}$  por  $X(s)$ . Agora considere o seguinte teorema.

**Teorema 2.9.** Por hipótese temos que  $f$  é contínua e que  $f'$  é seccionalmente contínua em qualquer intervalo  $0 \leq t \leq A$ . Suponha, além disso, que existem constantes  $K, a$  e  $M$  tais que  $|f(t)| \leq Ke^{at}$  para  $t \geq M$ . Então  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  existe para  $s > a$  e, além disso,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

**Demonstração:** A demonstração deste teorema pode ser encontrado em (BOYCE; DI-PRIMA, 2010). ■

Usando uma extensão do Teorema 2.9 para vetores, obtemos

$$\begin{aligned}x' &= Ax + g(t) \\ \mathcal{L}\{x'(t)\} &= \mathcal{L}\{Ax + g(t)\} \\ \mathcal{L}\{x'(t)\} &= A\mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{g(t)\} \\ \mathcal{L}\{x'(t)\} &= AX(s) + G(s)\end{aligned}$$

sendo  $\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0)$  pelo Teorema 2.9, substituímos na expressão anterior, temos

$$\begin{aligned}sX(s) - x(0) &= AX(s) + G(s) \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})X(s) &= x(0) + G(s)\end{aligned}\tag{2.15}$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade  $n \times n$ . Esta última equação é um sistema de  $n$  equações simultâneas e pode ser resolvida para cada  $X_i(s)$ , onde podemos encontrar  $x_i(t)$  pegando a inversa da transformada de Laplace para cada  $i$ . Observe que por hipótese  $x(t)$  satisfaz a seguinte condição inicial  $x(0) = 0$ . Logo a equação (2.15) fica da seguinte forma

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})X(s) = G(s)$$

Portanto,  $X(s)$  é dado por

$$X(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}G(s)\tag{2.16}$$

Observe que a matriz  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  é multiplicada pela transformada do vetor  $g(t)$  e assim encontramos a transformada do vetor  $x(t)$  essa matriz é classificada como uma **matriz de transferência**.

**Exemplo 2.10.** *Resolva o sistema*

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$$

com  $x(0) = 0$ .

*De forma análoga aos exemplos da seção 1.2 do capítulo 1, determinamos a solução do sistema homogêneo dado, portanto temos*

$$\det(A - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

onde seus autovalores são  $\lambda_1 = -3$  e  $\lambda_2 = -1$ , e seus autovetores são

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Portanto temos a seguinte solução geral (função complementar) para o sistema homogêneo

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Determinando a transformada de cada componente do sistema, temos

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + G(s)$$

observe que  $G(s)$  é a transformada de  $g(t)$ . Então temos que a transformada  $G(s)$  é definida como

$$\mathcal{L}\{2e^{-t}\} = \int_0^\infty e^{-st}(2e^{-t})dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 2e^{-st-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-st-t} \frac{2}{-s-1} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb-b} \frac{2}{-s-1} = \frac{2}{s+1}$$

e

$$\mathcal{L}\{3t\} = \int_0^\infty e^{-st}(3t)dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 3te^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{3}{s^2} (-se^{-st}t - e^{-st}) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{3}{s^2} (-se^{-sb}b - e^{-sb}) = \frac{3}{s^2}.$$

Logo, a transformada  $G(s)$  é

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{s+1} \\ \frac{3}{s^2} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Considerando a equação (2.16), determinamos primeiro  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ , assim temos

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}$$

agora vamos obter a sua inversa, por um cálculo direto temos

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Portanto, substituindo os resultados de (2.17) e (2.18) em (2.16) e efetuando o produto entre as matrizes temos

$$X(s) = \begin{pmatrix} \frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} + \frac{3}{s^2(s+1)(s+3)} \\ \frac{2}{(s+1)^2(s+3)} + \frac{3(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Agora como último passo obtemos a solução de  $x(t)$  através da sua transformada  $X(s)$ . Para isso expandimos as expressões de (2.19) em frações parciais, usando também a tabela das transformadas inversa de Laplace e simplificando o resultado. Assim temos

$\mathcal{L}^{-1} = \left\{ \frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} + \frac{3}{s^2(s+1)(s+3)} \right\}$ , por um cálculo direto de frações parciais temos que

$$(I) \quad \frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)}$$

$$(II) \quad \frac{3}{s^2(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+3} = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{3s} + \frac{3}{2(s+1)} - \frac{1}{6(s+3)}$$

Usando agora a tabela das transformadas da inversa de Laplace temos

$$\mathcal{L}^{-1} = \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} \right\} = e^{-t}t + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

$$\mathcal{L}^{-1} = \left\{ \frac{1}{s^2} - \frac{4}{3s} + \frac{3}{2(s+1)} - \frac{1}{6(s+3)} \right\} = t - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$

somando os resultados obtidos e simplificando temos

$$= 2e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-3t} + e^{-t}t + t - \frac{4}{3}$$

$\mathcal{L}^{-1} = \left\{ \frac{2}{(s+1)^2(s+3)} + \frac{3(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} \right\}$ , por um cálculo direto de frações parciais temos que

$$(III) \quad \frac{2}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s+3)}$$

$$(IV) \quad \frac{3(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+3} = \frac{2}{s^2} - \frac{5}{3s} + \frac{3}{2(s+1)} + \frac{1}{6(s+3)}$$

Usando agora a tabela das transformadas da inversa de Laplace temos

$$\mathcal{L}^{-1} = \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s+3)} \right\} = e^{-t}t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

$$\mathcal{L}^{-1} = \left\{ \frac{2}{s^2} - \frac{5}{3s} + \frac{3}{2(s+1)} + \frac{1}{6(s+3)} \right\} = 2t - \frac{5}{3} + \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}$$

somando os resultados obtidos e simplificando temos

$$= e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-3t} + e^{-t}t + 2t - \frac{5}{3}.$$

Portanto, a solução particular do sistema é

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-3t} + e^{-t}t + t - \frac{4}{3} \\ e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-3t} + e^{-t}t + 2t - \frac{5}{3} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

A solução (2.20) é uma solução particular para o sistema não homogêneo dado que satisfaz a condição inicial dada  $x(0) = 0$ . Para encontrar a solução geral basta soma a solução particular com a solução geral (função complementar) do sistema homogêneo. Portanto para a solução geral do sistema temos

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Esses são os principais métodos na resolução de sistema de equações diferenciais não homogêneos, onde cada um tem suas vantagens e desvantagens. O método dos coeficientes indeterminados é simples e sistemático e não faz uso da integração como nos dois últimos apresentados porém não pode ser usado para todo tipo de sistema pois o mesmo tem suas limitações.

O método de variação dos parâmetros como falado é o mais poderoso e mais geral na sua resolução, mas envolve um conjunto de equações algébricas, além da integração e multiplicação de matrizes o que em certos casos pode ser bem complicado. E por fim a transformada de Laplace que envolve a transformada inversa, onde precisamos encontrar a inversa de uma matriz e assim posteriormente a matriz de transferência onde temos também uma multiplicação.

De modo geral todos esses métodos são úteis na hora de resolver um sistema não homogêneo, desde que o mesmo seja simples e com coeficientes constantes como os apresentados neste capítulo por esta razão o método de escolha não faz diferença na hora de resolver o sistema.



### 3 Estabilidade de Sistemas Lineares

Vimos na seção 1.2 do capítulo 1 a resolução de sistemas homogêneos a partir da álgebra linear usando os autovalores e autovetores da matriz constante, onde podemos analisar a solução de um sistema, verificando seu comportamento e sua trajetória. Neste capítulo voltaremos novamente a este estudo dando ênfase as trajetórias de suas curvas e de sua vizinhança abordando assim a ideia de estabilidade dessas soluções, tendo como base (ZILL; CULLEN, 2001) e (BOYCE; DIPRIMA, 2010). Veremos a ideia de estabilidade do ponto de vista mais geométrico em vez de usar uma abordagem mais quantitativa dos sistemas.

**Definição 3.1.** *Considere o seguinte sistema linear  $2 \times 2$  com equações diferenciais da forma*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = G(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde por hipótese temos que as funções  $F$  e  $G$  são contínuas e possui derivadas parciais contínuas em algum domínio  $D$  do plano  $x_1x_2$ . Caso  $(x_1^0, x_2^0)$  for um ponto desse domínio, então, pelo Teorema 1.4 existe uma única solução  $x_1 = \phi(t)$  e  $x_2 = \psi(t)$  do sistema (3.1) que satisfaz as condições iniciais

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0. \quad (3.2)$$

O estudo qualitativo será feito a partir de sistema **autônomo** (3.1), que são sistemas onde as funções  $F$  e  $G$  não dependem da variável independente  $t$ , mas apenas das variáveis dependentes  $x_1$  e  $x_2$ . Caso contrário o sistema é dito como **não autônomo**.

Considere agora o sistema da forma

$$x' = Ax \quad (3.3)$$

onde  $A_{2 \times 2}$  é uma matriz constante, este sistema é um exemplo de sistema autônomo bidimensional. Como já visto o sistema (3.3) tem como solução uma função vetorial, onde pode ser representada por uma curva no plano  $x_1x_2$ . Para um estudo qualitativo o plano  $x_1x_2$  é chamado de **plano de fase** onde temos uma ideia geral das soluções desses sistemas, essa curva pode ser vista como uma trajetória e o conjunto dessas trajetória é chamado de **retrato de fase**.

O campo de direções associado do sistema autônomo (3.1) é independente do tempo, ou seja, existe apenas uma trajetória passando pelo ponto  $(x_1^0, x_2^0)$  no plano de fase. Logo,

todas as suas soluções satisfazem as condições iniciais da forma (3.2) onde tem a mesma trajetória, independente do instante  $t_0$  onde estão em  $(x_1^0, x_2^0)$ .

Reescrevendo o sistema autônomo (3.1) da forma

$$x' = f(x) \quad (3.4)$$

Os pontos no sistema (3.4) a direita da igualdade, ou seja, se existir temos  $f(x) = 0$  são chamados **pontos críticos**, ou seja,  $x' = 0$ . De forma análoga, para o sistema (3.3) os pontos onde  $Ax = 0$  são soluções constantes e são chamados de **soluções de equilíbrio**. A partir desses pontos críticos definimos o conceito de estabilidade, assim considere a seguinte definição.

**Definição 3.2.** *O ponto crítico  $x^0$  do sistema (3.4) é chamado **estável** se, dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$ , tal que para toda solução  $x = \phi(t)$  do sistema (3.1), que satisfaz, em  $t = 0$ ,*

$$\|\phi(0) - x^0\| < \delta,$$

*existe  $\forall t$  positivo e satisfaz*

$$\|\phi(t) - x^0\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Um ponto crítico que não é estável é chamado de **instável**, ou seja, a estabilidade do ponto crítico ocorre quando todas as soluções que começam suficientemente próximas (menor do que  $\delta$ ) de  $x^0$  se mantêm uniformemente próximas (menor do que  $\epsilon$ ) de  $x^0$ ,  $\forall t \geq 0$ .

**Definição 3.3.** *O ponto crítico  $x^0$  é chamado **assintoticamente estável** se for estável e se existe um  $\delta_0$  com  $0 < \delta_0 < \delta$ , tal que, se uma solução  $x = \phi(t)$  satisfaz*

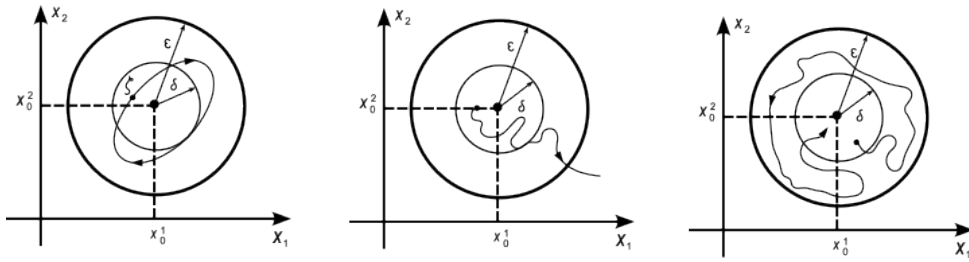
$$\|\phi(0) - x^0\| < \delta_0,$$

*então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = x^0.$$

Em outras palavras, um ponto crítico é assintoticamente estável quando suas trajetórias que começam suficientemente próximas de  $x^0$ , permanecem próximas e tendem a  $x^0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . A estabilidade assintótica é mais forte do que a própria estabilidade visto que para um ponto crítico ser assintoticamente estável ele tem que ser estável. Veja na Figura 3.1 a representação de cada tipo de estabilidade.

Figura 3.1 – Ponto crítico estável, instável e assintoticamente estável



Fonte: Autor.

Para fazer uma análise qualitativa das soluções do sistema (3.3). Temos por hipótese que  $\mathbf{A}$  é invertível, ou seja, o  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , logo temos que  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  o único ponto crítico do sistema. Portanto vamos analisar o sistema de acordo com seu caráter geométrico, a partir das suas trajetórias formadas pelas suas soluções, observando os diversos casos apresentados pela natureza dos autovalores da matriz  $\mathbf{A}$ .

### Caso I Autovalores Reais e Distintos

Considerando o sistema (3.3), temos como solução geral

$$x = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \quad (3.5)$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são seus autovalores e são diferentes de zero e podem ser ambos negativos ou ambos positivos e  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  são seus autovetores correspondentes e por hipótese são como mostrados na Figura 3.2. Podemos ainda escrever a solução (3.5) da seguinte forma

$$x = e^{\lambda_2 t} [c_1 \xi^{(1)} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 \xi^{(2)}]. \quad (3.6)$$

1. **Ambos os autovalores são negativos** ( $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ). Neste caso o ponto crítico é classificado como **nó atrator** ou **nó estável** pois seus autovalores são negativos, ou seja, quando  $t \rightarrow \infty$  temos que  $x \rightarrow 0$ , independente das suas constantes arbitrárias  $c_1$  e  $c_2$ . Podemos dizer que todas as soluções se aproximam da origem quando  $t \rightarrow \infty$ . No caso em que  $t \rightarrow -\infty$  temos que  $x \rightarrow \infty$ , observe que se  $c_1 \neq 0$  temos que o termo dominante na solução (3.5) é  $e^{\lambda_1 t}$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Portanto, para grandes valores negativos de  $t$ , as trajetórias do autovetor  $\xi^{(1)}$  são quase paralelas. Assim temos as seguintes conclusões

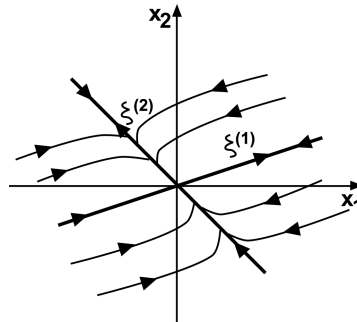
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{\lambda_2 t} = (0, 0) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{\lambda_2 t} = \infty$$

ou seja, as trajetórias das soluções vem do infinito até sua origem. Note pela solução (3.6) que  $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$ . Logo, temos que  $c_2 \neq 0$  e neste caso o termo  $c_1 \xi^{(1)} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$  é desprezível em relação a  $c_2 \xi^{(2)}$  para valores de  $t$  que são suficientemente grande. Portanto suas trajetórias se aproximam da origem e ao mesmo tempo tendem também a origem quando  $t \rightarrow \infty$  e assim as soluções tendem ao ponto crítico, que

são tangentes à reta na direção do autovetor  $\xi^{(2)}$ , com exceção das que estão na reta na direção do autovetor  $\xi^{(1)}$ .

2. **Ambos os autovalores são positivos** ( $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ ). Neste caso o ponto crítico é classificado como **nó instável** ou **fonte** a análise da solução é análoga ao caso anterior, exceto que temos autovalores positivos, ou seja, o movimento de suas trajetórias é se distanciando do ponto crítico na origem e neste caso os valores de  $x$  crescem de forma exponencial como funções da variável  $t$ . Quanto a sua estabilidade o nó atrator para autovalores negativos é classificado como assintoticamente estável e o nó repulsor ou fonte para autovalores positivos é classificado como instável.

Figura 3.2 – Nó estável

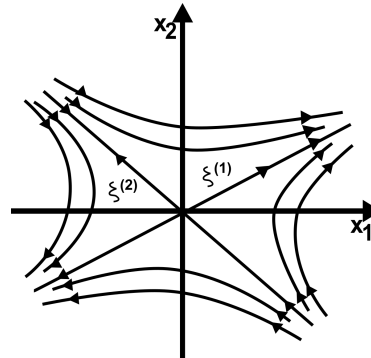


Fonte: Autor.

## Caso II Autovalores Reais Distintos e com Sinais Opostos

A solução geral para o sistema (3.3), onde temos a matriz  $\mathbf{A}_{2 \times 2}$  é da forma (3.5) onde seus autovalores são  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$  e seus autovetores  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  são por hipótese como mostrados na Figura 3.3. Observe que neste caso a solução está começando no ponto inicial da reta que contém a origem na direção do autovetor  $\xi^{(1)}$ , portanto  $c_2 = 0$ . Em decorrência, a solução tende a ficar na reta para todo  $t$ , pois  $\lambda_1 > 0$ , logo  $x \rightarrow \pm\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . No caso em que a solução está começando no ponto inicial da reta na direção do autovetor  $\xi^{(2)}$ , a consequência é análoga, contudo  $x \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , já que  $\lambda_2 < 0$ . Podemos concluir que todas as outras soluções que começam em outros pontos iniciais terão seu comportamento, ou seja, suas trajetórias análogas as que estão na Figura 3.3. Neste caso a exponencial positiva é dominante na solução quando  $t \rightarrow \infty$  pois todas as suas soluções tendem a infinito, pois são determinadas pelo autovetor  $\xi^{(1)}$  que é correspondente ao autovalor  $\lambda_1$ . As únicas soluções que tendem ao ponto crítico na origem são aquelas determinadas pelo autovetor  $\xi^{(2)}$ . Para este caso em que temos autovalores distintos e com sinais opostos a origem é classificada como **ponto de sela**, sua solução lembra muito uma hipérbole e a sua estabilidade é classificada como instável.

Figura 3.3 – Ponto de sela



Fonte: Autor.

### Caso III Autovalores Iguais

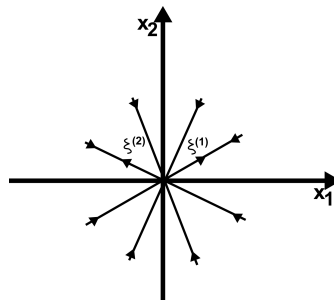
Neste caso temos por hipótese que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , onde temos autovalores iguais e ambos podem ser positivos ou negativos, vamos analisar para o caso em que ambos são negativos pois para positivos será análoga com a exceção que o movimento de suas trajetórias terão sentido contrário. Vamos considerar dois subcasos para os autovalores iguais, pois dependendo do autovalor ele pode ter dois autovetores independentes ou somente um.

1. **Dois autovetores linearmente independentes.** A solução continua sendo da forma

$$x = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda t} + c_2 \xi^{(2)} e^{\lambda t},$$

onde seus autovetores são independentes. Observe que a razão das soluções  $\frac{x_1}{x_2}$  é independente de  $t$ , mas continua dependendo dos seus autovetores  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  e de suas constantes arbitrárias. Portanto todas as trajetórias estão contidas em retas que contém a origem. Como os autovalores são negativos as soluções tendem a zero. Neste caso o ponto crítico é classificado como **nó próprio ou ponto estrela** e sua estabilidade é classificada como assintoticamente estável. Se ambos os autovalores iguais são positivos então a sua estabilidade é classificada como instável.

Figura 3.4 – Nó próprio ou ponto estrela



Fonte: Autor.

2. **Um autovetor linearmente independente.** Para este caso a solução do sistema (3.3) é da seguinte forma

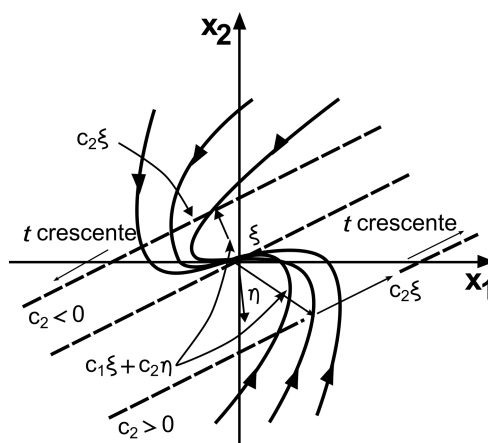
$$x = c_1 \xi e^{\lambda t} + c_2 (\xi t e^{\lambda t} + \eta e^{\lambda t}), \quad (3.7)$$

onde  $\xi$  é o autovetor e  $\eta$  é o autovetor associado ao autovalor repetido. Observe que para  $t \rightarrow \infty$  temos que a parcela  $c_2 \xi e^{\lambda t}$  é dominante na solução (3.7). Logo, quando  $t \rightarrow \infty$  todas as trajetórias são tangentes à reta na direção do autovetor e tendem a origem. Isto acontece mesmo quando  $c_2 = 0$  pois neste caso a solução seria  $x(t) = c_1 \xi e^{\lambda t}$  e a mesma pertence a reta. De forma análoga para  $t \rightarrow -\infty$  temos novamente que a parcela  $c_2 \xi e^{\lambda t}$  é dominante, pois cada trajetória é assintótica a uma reta paralela a  $\xi$ . A orientação das trajetórias é definida pelas posições relativas de  $\xi$  e  $\eta$ , para uma melhor localização dessa orientação reescrevemos a solução (3.7) da seguinte forma

$$x = [(c_1 \xi + c_2 \eta) + c_2 \xi t] e^{\lambda t} = \mathbf{y} e^{\lambda t},$$

isolando  $\mathbf{y}$  temos  $\mathbf{y} = (c_1 \xi + c_2 \eta) + c_2 \xi t$ . Observe que a quantidade escalar  $e^{\lambda t}$  atinge somente o tamanho de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  determina a direção e o sentido de  $\mathbf{x}$ . A orientação das trajetórias é esboçada observando o sentido do movimento quando a variável  $t$  cresce na reta, como temos autovalores negativos a solução, ou seja, o movimento de suas trajetórias tendem a origem. O ponto crítico neste caso é classificado como **nó impróprio** ou **degenerado** e sua estabilidade é classificada como assintoticamente estável e para autovalores positivos como instável, o que pode ser observado na Figura 3.5.

Figura 3.5 – Nó impróprio ou degenerado



Fonte: Autor.

### Caso IV Autovalores Complexos

Vimos na seção 1.2 do capítulo 1 que os autovalores do sistema (3.3) podem ser complexos e neste caso temos por hipótese que eles são da seguinte forma  $\lambda = \alpha + i\beta$  e  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ , onde  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta > 0$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . A solução geral pode ser escrita em termos dos seus autovalores e autovetores como foi visto na seção 1.2. Mas para a análise do ponto crítico, trajetória e da sua estabilidade vamos proceder de forma diferente. Os sistemas que tem autovalores  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  são da seguinte forma

$$x' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} x \quad (3.8)$$

colocando na sua forma escalar temos

$$x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad x_2' = -\beta x_1 + \alpha x_2. \quad (3.9)$$

Usando coordenadas polares temos

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \tan\theta = \frac{x_2}{x_1}.$$

Tirando a derivada dos termos acima temos

$$rr' = x_1x_1' + x_2x_2', \quad (\sec^2\theta)\theta' = \frac{(x_1x_2' - x_2x_1')}{x_1^2}. \quad (3.10)$$

Substituindo as equações (3.9) na primeira das equações (3.10) obtemos

$$r' = \alpha r$$

e, concluímos que

$$r = ce^{\alpha t}, \quad (3.11)$$

onde  $c$  é uma constante. De forma análoga fazemos a substituição das equações (3.9) na segunda das equações (3.10) e considerando o fato que  $\sec^2\theta = \frac{r^2}{x_1^2}$ , e assim obtemos

$$\theta' = -\beta$$

Portanto,

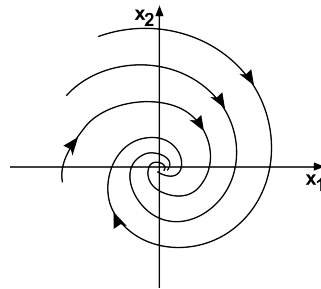
$$\theta = -\beta t + \theta_0, \quad (3.12)$$

onde  $\theta_0$  é o valor de  $\theta$  quando  $t = 0$ . Observe que as equações (3.11) e (3.12) são paramétricas em coordenadas polares das trajetórias do sistema (3.8). Observe que como  $\beta > 0$  temos pela equação (3.12) que  $\theta$  diminui quando  $t$  cresce, logo o movimento da sua trajetória é no sentido horário. Já pela equação (3.11) quando  $t \rightarrow \infty$ , temos  $r \rightarrow 0$  se  $\alpha < 0$  e  $r \rightarrow \infty$  se  $\alpha > 0$ .

Portanto as trajetórias serão classificadas como **pontos espirais**, que podem se aproximar ou se afastar do ponto crítico na origem dependendo do valor de  $\alpha$  e neste caso

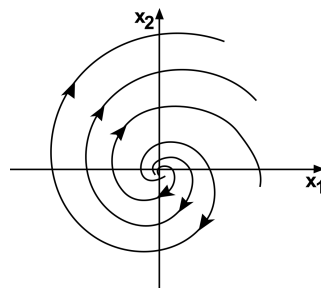
recebem a seguinte classificação **sorvedouro espiral** quando se aproximam do ponto crítico e **fonte espiral** quando se afastam do ponto crítico. É importante destacar que qualquer sistema com autovalores complexos, onde  $\alpha \neq 0$ , suas trajetórias sempre serão espirais. Podemos visualizar o movimento dessas trajetórias tanto se afastando como se aproximando da origem nas Figuras 3.6 e 3.7 representando cada espiral de acordo com o sinal de  $\alpha$ . A sua estabilidade é classificada como instável quando  $\alpha > 0$  e assintoticamente estável quando  $\alpha < 0$ .

Figura 3.6 – Sorvedouro espiral



Fonte: Autor.

Figura 3.7 – Fonte espiral



Fonte: Autor.

### Caso V Autovalores Imaginários Puros

No caso em que os autovalores do sistema (3.3) são imaginários puros, ou seja,  $\alpha = 0$  seus autovalores são da seguinte forma  $\lambda = \pm i\beta$ . Neste caso o sistema se reduz a seguinte forma

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} x$$

De forma análoga ao caso anterior, encontramos

$$r' = 0, \quad \theta' = -\beta,$$

e, concluímos,

$$r = c, \quad \theta = -\beta t + \theta_0,$$

onde  $c$  e  $\theta_0$  são constantes. Neste caso todas as soluções são periódicas, ou seja,  $\frac{2\pi}{\beta}$ , pois suas soluções são círculos completos em torno da origem cujo seu intervalo de tempo tem



comprimento igual a  $\frac{2\pi}{\beta}$ . O sentido de suas trajetórias são horário se  $\beta > 0$  e trigonométrico se  $\beta < 0$ . O ponto crítico neste caso é classificado como **centro** e suas trajetórias são elipses com centro na origem. Considere o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

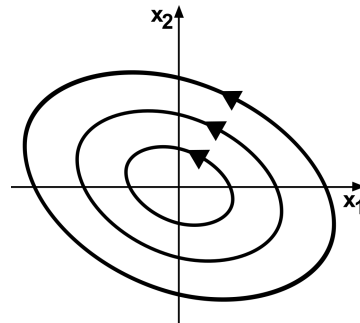
**Proposição 3.4.** *Os autovalores da matriz de coeficientes são imaginários puros se, e somente se,*

$$a_{11} + a_{22} = 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

**Demonstração:** A demonstração desta proposição pode ser encontrada em (FAGUNDES, 2015).

Podemos visualizar na Figura 3.8 o movimento dessas trajetórias e o seu sentido, representando círculos fechados onde as suas soluções não se aproximam e nem se afastam do ponto crítico na origem. A sua estabilidade é classificada como estável.

Figura 3.8 – Centro



Fonte: Autor.

Após a apresentação de todos os casos e feita uma análise de cada um, podemos fazer as seguintes observações tendo um olhar mais reflexivo quanto a natureza dessas soluções para sistemas do tipo (3.3). Uma trajetória tem apenas um comportamento a seguir depois de um longo período de tempo, cada trajetória se aproxima do ponto crítico  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  quando  $t \rightarrow \infty$  ou percorre de forma repetida uma curva fechada neste caso temos a solução periódica em torno da origem, ou então essa trajetória é ilimitada.

Uma outra observação a ser feita é quanto ao padrão de cada trajetória que é relativamente simples, ou seja, nenhuma trajetória cruza a outra, pelos gráficos apresentados a impressão que dar é que algumas trajetórias cruzam a origem o que não é verdade por isso se deve ter um cuidado ao interpretar cada gráfico pois a única solução que realmente cruza a origem é a solução de equilíbrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , as outras soluções ou trajetórias apenas se aproximam do ponto crítico quando  $t \rightarrow \infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$  por isso ao analisar um determinado problema envolvendo um dos casos citados tenha muito cuidado na interpretação dos gráficos.

O conjunto de todas as trajetórias ocorre em três situações, a primeira todas se aproximam de  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Esta situação foi vista nos casos que temos um nó atrator ou um sorvedouro espiral. A segunda situação todas as trajetórias são limitadas, mas não se aproximam da origem quando  $t \rightarrow \infty$ , situação vista no caso que temos autovalores imaginários puros que representam um centro. E por fim temos todas as trajetórias tendendo ao infinito quando  $t \rightarrow \infty$ , exceto a  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , foi que vimos nos casos em que temos um nó fonte, ou fonte espiral ou ainda um ponto de sela.

Observe que essas três situações evidência os conceitos de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade para soluções de equilíbrio do sistema (3.3) vistas no início deste capítulo. A seguir apresentamos uma tabela com o resumo de todos os casos e suas propriedades.

Tabela 3.1 – Propriedades de Estabilidade de Sistemas Lineares  $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$

<b>Autovalores</b>	<b>Tipo de Ponto Crítico</b>	<b>Estabilidade</b>
Autovalores reais e distintos		
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nó ou fonte	Instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nó atrator ou sorvedouro	Assintoticamente estável
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Ponto de sela	Instável
Autovalores reais e iguais		
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nó próprio ou impróprio	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nó próprio ou impróprio	Assintoticamente estável
Autovalores Complexos		
$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$ $\alpha > 0$ $\alpha < 0$	Ponto espiral	Instável Assintoticamente estável
$\lambda_1 = i\beta, \lambda_2 = -i\beta$	Centro	Estável

É importante destacar que a análise dos casos apresentados são para sistemas de dimensão dois  $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ , onde podemos apresentar suas soluções de forma geométrica em curvas e em um plano de fases. Para sistema de dimensão  $n$ , onde temos uma matriz de coeficientes  $\mathbf{A}_{n \times n}$  e suas soluções são no espaço de fases de dimensão  $n$  e também em curvas, podemos fazer uma análise semelhante porém mais complicada de se realizar.

Para sistemas com dimensão maior que dois a análise é feita com uma combinação do que foi visto em duas dimensões. Um exemplo prático disso seria um sistema de dimensão três onde suas soluções representariam espirais se aproximando da origem e outras tendendo ao infinito neste caso teríamos uma matriz com dois autovalores complexos com parte real negativo e outro autovalor real positivo. Portanto a análise das soluções é muito mais complexa para sistemas de dimensão maior que dois ou de dimensão  $n$ .

### 3.1 Aproximações Lineares de Sistemas Não Lineares

Nesta seção abordaremos como podemos aproximar um sistema linear de um sistema autônomo não linear e mostrar a importância que os pontos críticos desempenham na hora de determinar essa aproximação e na classificação da sua estabilidade.

Considere um sistema autônomo bidimensional não linear

$$x' = f(x). \quad (3.13)$$

Temos como principal objetivo analisar o comportamento das trajetórias deste sistema (3.13) próximo de um ponto crítico  $x^0$ . Para esta análise precisamos verificar se em cada ponto crítico de um sistema não linear, a posição das trajetórias é semelhante as trajetórias de um sistema linear fixado, ou seja, podemos associar o sistema não linear (3.13) por um sistema linear conveniente, onde suas trajetórias são simples de detalhar.

O primeiro passo é escolher um sistema cujo seu ponto crítico seja a origem, pois não tem perda de generalidade, visto que  $x^0 \neq 0$ . Portanto, sempre é viável substituir  $u = x - x^0$  na equação (3.13). Logo  $u$  corresponde a um sistema autônomo cujo o ponto crítico está na origem.

Considere agora o que consiste em um sistema não linear (3.13) ser semelhante ou próximo de um sistema linear (3.3). Por hipótese temos que

$$x' = Ax + g(x) \quad (3.14)$$

e  $x = 0$  é um ponto crítico **isolado** do sistema (3.14). Portanto, existe um disco em volta da origem onde na parte interna não tenham outros pontos críticos. Considere ainda por hipótese que  $\det A \neq 0$ , de forma que  $x = 0$  seja um ponto crítico isolado do sistema linear  $x' = Ax$ .

Considere agora mostrar como um sistema não linear (3.14) está próximo do sistema linear  $x' = Ax$ , para isso temos por hipótese que  $g(x)$  seja pequeno. Em outras palavras, temos por hipótese que os elementos de  $g$  têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e  $g$  corresponde a seguinte condição

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow 0; \quad (3.15)$$

isso significa que  $\|g\|$  é pequeno em relação ao próprio  $\|x\|$  próximo da origem. Esse tipo de sistema é chamado de **sistema localmente linear** na imediação do ponto crítico  $x = 0$ .

A condição (3.15) pode ser reescrita na sua forma escalar. Portanto, se  $x^T = (x, y)$ , temos  $\|x\| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = r$ . De forma análoga, caso  $g^T(x) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$ , logo  $\|g(x)\| = [g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y)]^{\frac{1}{2}}$ . Portanto, a condição (3.15) é satisfeita se, e somente se,

$$\frac{g_1(x, y)}{r} \rightarrow 0, \quad \frac{g_2(x, y)}{r} \rightarrow 0 \text{ quando } r \rightarrow 0. \quad (3.16)$$

**Exemplo 3.5.** *Determine se o sistema*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^2 - xy \\ -0,75xy - 0,25y^2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

*é localmente linear em uma vizinhança da origem.*

*Primeiramente veja que o sistema 3.17 é da forma (3.14), logo podemos concluir que  $(0,0)$  é um ponto crítico, e o  $\det A \neq 0$ . Observando o sistema (3.17) podemos facilmente ver que seus outros pontos críticos são  $(0,2)$ ,  $(1,0)$  e  $(0,5;0,5)$ ; logo em decorrência temos que a origem é um ponto crítico isolado. Para verificar se o sistema (3.17) corresponde as condições (3.16), é necessário fazer uso de coordenadas polares, onde temos  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ . Logo,*

$$\begin{aligned} \frac{g_1(x,y)}{r} &= \frac{-x^2 - xy}{r} = \frac{-(r \cos \theta)^2 - (r \cos \theta r \sin \theta)}{r} \\ &= \frac{-r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin \theta \cos \theta}{r} \\ &= -r \cos^2 \theta - r \sin \theta \cos \theta \\ &= -r(\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) \rightarrow 0 \quad \text{quando } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

*Novamente por coordenadas polares, temos*

$$\begin{aligned} \frac{g_2(x,y)}{r} &= \frac{-0,75xy - 0,25y^2}{r} = \frac{-0,75r \cos \theta r \sin \theta - 0,25(r \sin \theta)^2}{r} \\ &= \frac{-0,75r^2 \cos \theta \sin \theta - 0,25r^2 \sin^2 \theta}{r} \\ &= -0,75r \cos \theta \sin \theta - 0,25r \sin^2 \theta \\ &= -r(0,25 \sin^2 \theta + 0,75 \cos \theta \sin \theta) \rightarrow 0 \quad \text{quando } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

*Portanto, podemos concluir que o sistema 3.17 é localmente linear perto da origem.*

**Observação 3.6.** *Temos no exemplo 3.5 que o sistema linear correspondente ao sistema 3.17 é*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

*por ele podemos calcular seus autovalores e assim determinar a estabilidade dos seus pontos críticos e conseqüentemente essa será a estabilidade do sistema localmente linear 3.17. Portanto, podemos concluir que, a classificação da estabilidade dos pontos críticos de sistemas não lineares autônomos pode ser feita através de sistemas lineares fazendo apenas aproximações lineares.*

## 4 Aplicações

Vimos nos capítulos anteriores os conceitos, teoremas, os métodos de resolução e o estudo do comportamento das soluções de sistemas lineares envolvendo equações diferenciais, neste capítulo vamos abordar esses sistemas como modelos matemáticos. Como sabemos várias situações ou problemas do nosso cotidiano podem ser vistos como problemas matemáticos e a capacidade de transformar essas situações em modelos matemáticos é muito importante. Este capítulo terá como base o estudo (BASSANEZI; JUNIOR, 1988) e (BOYCE; DIPRIMA, 2010), aplicando os sistemas aqui estudados aos diversos modelos matemáticos que estão relacionados as diversas situações da vida real.

### 4.1 O Pêndulo Oscilatório

O pêndulo oscilatório é constituído de um corpo rígido preso a um fio flexível e inextensível por uma de suas extremidades, enquanto a outra é presa em um determinado ponto. Seu movimento é oscilatório pois executa movimentos de ida e volta em torno da sua posição de equilíbrio, este movimento também pode ser definido como periódico pois ele depende de um certo período, ou seja, um tempo necessário para completar uma oscilação.

O estudo do pêndulo oscilatório é muito importante pois seu movimento periódico depende apenas do intervalo do ponto de suspensão a seu centro de massa, da velocidade da gravidade no local e da disposição da massa ao redor do seu centro de massa, considerando neste caso as pequenas extensões de deslocamento que este pêndulo sofre. Por esta razão até 1930 o pêndulo era considerado um ótimo marcador de tempo, onde os melhores relógios da época eram justamente os de pêndulo.

Como seu movimento periódico depende apenas da velocidade da gravidade, podemos utilizar o pêndulo oscilatório para determinar a velocidade da gravidade em um determinado local. Neste trabalho além da aplicação de sistemas de equações diferenciais lineares estendemos também para os conceitos de estabilidade e vamos verificar como é a classificação dos pontos críticos a partir das equações do pêndulo oscilatório.

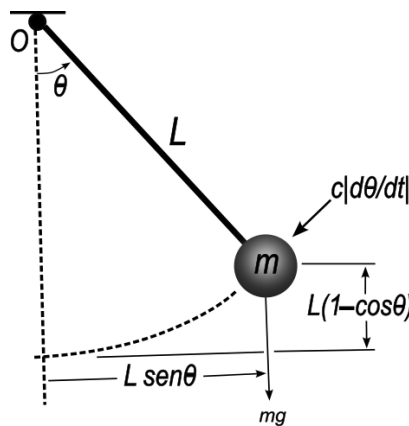
Primeiramente considere a Figura 4.1 e a seguinte disposição: uma massa  $m$  presa na extremidade de uma barra rígida, sem peso e de comprimento  $L$ . Na ponta da outra extremidade da barra temos uma origem  $O$  ao qual está erguida, a barra por sua vez está livre para oscilar no plano. A posição do pêndulo é feita pelo ângulo  $\theta$  que é a relação entre a barra e a direção vertical com sua orientação para baixo e seu sentido trigonométrico positivo. A força gravitacional  $mg$  comportar-se para baixo e a força de amortecimento

$c \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$ , onde  $c$  é positivo, tem sentido contrário ao do movimento. A dedução da equação de movimento é feita pelo princípio angular de movimento, que define a taxa de variação no tempo do movimento angular em volta de qualquer ponto como sendo igual ao movimento da força decorrente no ponto. Portanto o movimento angular é  $mL^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)$ , logo podemos definir esta equação como

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -cL \frac{d\theta}{dt} - mgL \sin \theta. \quad (4.1)$$

Observando a equação (4.1) representamos os movimentos relativos à força de atrito e da força gravitacional como sendo as componentes  $L$  e  $L \sin \theta$ , nesta ordem, como as forças tendem a fazer o pêndulo se movimentar no sentido horário, ou seja, negativamente temos que o sinal na equação é negativo. Observe que este resultado é análoga para as outras três prováveis combinações dos sinais de  $\theta$  e  $\frac{d\theta}{dt}$ .

Figura 4.1 – O pêndulo oscilatório



Fonte: Autor.

Efetuando as operações algébricas diretas, ou seja, dividindo toda equação (4.1) por  $mL^2$  e passando tudo para o primeiro membro podemos escrever a equação (4.1) na sua forma canônica. Portanto temos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{mL} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0,$$

fazendo  $\gamma = \frac{c}{mL}$  e  $\omega^2 = \frac{g}{L}$ , temos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \sin \theta = 0. \quad (4.2)$$

Novamente fazendo  $x = \theta$  e  $y = \frac{d\theta}{dt}$ , podemos transformar a equação (4.2) em um sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem, portanto temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x - \gamma y. \end{cases} \quad (4.3)$$

Observe pelo sistema (4.3) que  $\gamma$  e  $\omega^2$  são constantes, portanto temos um sistema autônomo não linear. Neste caso temos que aplicar o método usado na seção 3.1 do capítulo 3, fazendo aproximações lineares para o sistema (4.3) e verificando se ele é localmente linear próximo à origem. Primeiramente igualando as equações do sistema (4.3) a zero, temos que os pontos críticos são  $(0, 0)$ ,  $(\pm\pi, 0)$ ,  $(\pm 2\pi, 0)$ ,  $\dots$ , de forma que a origem é o ponto crítico isolado desse sistema.

Agora reescrevemos as equações do sistema (4.3) de forma a identificar os termos lineares e não lineares. Observe que na segunda equação temos o termo  $\sin x$  que pode ser reescrito como  $\sin x = x + (\sin x - x)$  e assim fazendo a substituição na segunda equação do sistema (4.3) temos o sistema correspondente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x - x \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Observe que o sistema (4.4) está na forma (3.14) e em comparação temos que

$$g_1(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad g_2(x, y) = -\omega^2(\sin x - x).$$

Pela série de Taylor para a função seno, o termo  $\sin x - x$  tem um comportamento da seguinte forma

$$\frac{-x^3}{3!} = \frac{-(r^3 \cos^3 \theta)}{3!} \quad \text{quando } x \text{ é pequeno.}$$

Como resultado, temos

$$\frac{g_2(x, y)}{r} = \frac{\sin x - x}{r} \rightarrow 0 \quad \text{quando } r \rightarrow 0.$$

Logo, podemos concluir que o sistema (4.4) é localmente linear perto da origem e consequentemente o sistema (4.3) também é localmente linear perto da origem. Aplicado o método das aproximações lineares no sistema autônomo não linear (4.3) podemos agora determinar seu sistema linear e assim a partir dele determinar seus autovalores e classificar a estabilidade do ponto crítico. Portanto, considerando o sistema (4.4), temos que o sistema linear correspondente ao sistema (4.3) na origem é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Determinando agora seus autovalores temos

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\gamma - \lambda) + \omega^2 \\ &= \lambda\gamma + \lambda^2 + \omega^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda\gamma + \omega^2.\end{aligned}$$

Calculando as raízes do polinômio característico temos os seguintes autovalores

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2}$$

Portanto, podemos concluir que a estrutura das soluções dos sistemas (4.3) e (4.5) resulta do sinal de  $\gamma^2 - 4\omega^2$  e pode ser interpretado da seguinte maneira:

1. Caso  $\gamma^2 - 4\omega^2 > 0$ , seus autovalores são reais, distintos e negativos. Logo o ponto crítico  $(0, 0)$  é classificado como um nó assintoticamente estável do sistema linear (4.5) e do sistema localmente linear (4.3).
2. Caso  $\gamma^2 - 4\omega^2 = 0$ , seus autovalores são reais, iguais e negativos. Logo o ponto crítico  $(0, 0)$  é classificado como um nó próprio ou impróprio assintoticamente estável do sistema linear (4.5). O ponto crítico pode ser ainda classificado como um nó assintoticamente estável ou um ponto espiral do sistema localmente linear (4.3).
3. Caso  $\gamma^2 - 4\omega^2 < 0$ , seus autovalores são complexos com parte real negativa. Logo o ponto crítico  $(0, 0)$  é classificado como um ponto espiral assintoticamente estável do sistema linear (4.5) e do sistema localmente linear (4.3).

Portanto, podemos concluir que em um pêndulo oscilatório seu amortecimento pode ser pequeno neste caso o ponto crítico  $(0, 0)$  é classificado como um ponto espiral do sistema (4.3). No caso em que o amortecimento pode ser suficientemente grande, então neste caso o ponto crítico é classificado como um nó. Em ambos os casos, a origem é classificada como assintoticamente estável.

Fazendo uma análise mais detalhada para o caso  $\gamma^2 - 4\omega^2 < 0$ , onde o amortecimento do pêndulo é pequeno. Temos que o sentido das espirais próximas de  $(0, 0)$  pode ser encontrado de forma direta pelo sistema (4.3). Para isso temos o ponto em que a espiral encontra o semieixo positivo dos  $y(x = 0, y > 0)$ . Portanto, em tal ponto temos do sistema (4.3) que  $\frac{dx}{dt} > 0$ . Então, temos que o ponto  $(x, y)$  na trajetória está se deslocando para a direita de forma que o sentido desse deslocamento nas espirais é horário.

Uma análise pode ser feita para o ponto crítico  $(\pm n\pi, 0)$ , onde  $n$  é um inteiro e pode ser par ou ímpar. Para fazer esta análise é necessário utilizar o sistema localmente



linear (4.3). A partir dele tiramos suas derivadas parciais e calculamos as derivadas parciais no ponto crítico. Calculando as derivadas parciais do sistema (4.3) temos

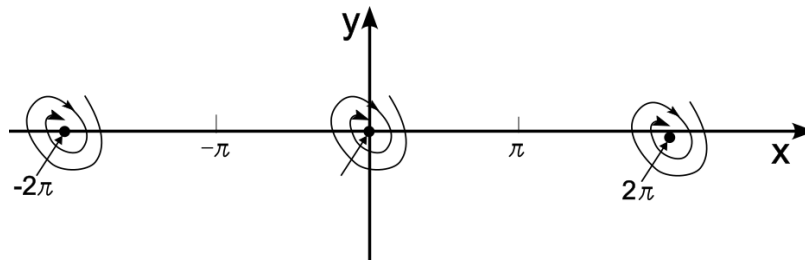
$$F_x = 0, \quad F_y = 1, \quad G_x = -\omega^2 \cos x, \quad G_y = -\gamma.$$

Agora calculando as derivadas parciais no ponto crítico  $(2\pi, 0)$ , obtemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

onde  $u = x - 2\pi, v = y$ . Observe que obtemos o mesmo sistema linear para o ponto crítico na origem. Portanto, o comportamento do pêndulo no ponto crítico  $(2\pi, 0)$  é o mesmo perto da origem e essa situação se repete em outros pontos críticos da forma  $(\pm n\pi, 0)$ , onde  $n$  é um inteiro par, visto que esses pontos críticos representam no pêndulo à posição de equilíbrio mais baixa. Logo, o sentido do movimento desses pontos críticos são espirais no sentido horário. Como pode ser observado na Figura 4.2.

Figura 4.2 – Pontos espirais assintoticamente estáveis para o pêndulo



Fonte: Autor.

A análise para o ponto crítico  $(\pi, 0)$  é feita de forma análoga ao caso anterior. Logo, calculando as derivadas parciais no ponto crítico obtemos o seguinte sistema linear

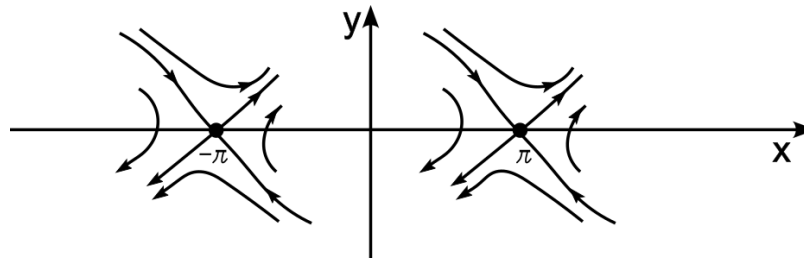
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

onde  $u = x - \pi, v = y$ . Agora calculamos os autovalores do sistema (4.6) temos

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\omega^2}}{2}.$$

Neste caso temos um autovalor positivo e outro negativo. Portanto, podemos concluir que o ponto crítico  $(\pi, 0)$  é um ponto de sela instável para o sistema linear (4.6) e para o sistema localmente linear (4.3). E novamente esta situação se repete em todos os pontos críticos da forma  $(\pm n\pi, 0)$ , onde  $n$  é um inteiro ímpar, visto que esses pontos críticos representam no pêndulo à posição de equilíbrio mais alta. Portanto, o sentido do movimento desses pontos críticos são pontos de sela instáveis. E pode ser observado na Figura 4.3. Como foi visto a classificação da estabilidade de um sistema localmente linear pode mudar de acordo com o ponto crítico escolhido.

Figura 4.3 – Pontos de sela instáveis para o pêndulo



Fonte: Autor.

A aplicação de sistemas de equações diferenciais lineares é muito útil para modelos matemáticos que envolve diversas variáveis dependentes, onde cada uma é função da mesma variável independente e esta é única. Podemos ver essa aplicação em vários modelos como um sistema massa-molar, um sistema molecular e um sistema formado por vários pêndulos.

Como vimos a aplicação de sistemas em modelos matemáticos é fundamental pois ajuda na resolução e na análise do comportamento das soluções e assim podemos tirar uma conclusão a respeito de cada modelo que é estudado. É importante destacar que essa aplicação é bem vasta podendo ser aplicada em várias ciências como a física, química, a biologia entre outras e ajudar a entender as diversas situações que acontece no nosso mundo além de ajudar no progresso da ciência e no desenvolvimento científico e tecnológico.

# Conclusão

Através deste trabalho foi feito um estudo sobre sistemas de EDO e sua estabilidade, apresentando conceitos, teoremas e definições que constituem as soluções de sistemas lineares. Em seguida apresentamos os principais métodos de resolução de sistemas homogêneos com coeficientes constantes, utilizando as ferramentas da Álgebra Linear como os autovalores e autovetores para obter as soluções desses sistemas. E para concluir exibimos como obter a solução de um sistema não homogêneo.

Examinou-se a estabilidade de sistemas lineares bidimensionais apresentando as definições de ponto crítico estável, assintoticamente estável ou instável e fazendo uma análise mais geométrica das soluções e classificando cada solução quanto a natureza de seus autovalores e autovetores levando em consideração a trajetória e o sentido.

Este trabalho proporcionou ampliar os conhecimentos em EDO, mostrando como podemos transformar uma EDO de ordem superior em sistemas de EDO de primeira ordem e assim usar técnicas de resolução que são semelhantes as técnicas utilizadas para se resolver uma EDO. Por fim apresentamos aplicações como o pêndulo oscilatório, mostrando como a partir de um sistema não linear podemos fazer aproximações lineares com o objetivo de classificar os pontos críticos de acordo com a estabilidade ajudando na obtenção dos resultados.

Concluimos que os sistemas são muito importante em problemas reais, esta ferramenta estudada neste trabalho tem grande relevância nas áreas de física, química, biologia, engenharia entre outras. Buscando sempre conhecer o comportamento dos vários fenômenos existentes a fim de construir modelos e contribuir de forma significativa para o conhecimento científico.

# Referências

- BASSANEZI, R. C.; JUNIOR, W. C. F. *Equações Diferenciais com Aplicações*. [S.l.]: HARBRA, 1988. Citado na página 59.
- BESSA, G. R. *Teoria de Estabilidade de Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações:: modelos presa-predador e competição entre espécies*. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro – SP, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 28.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problema de Valores de Contorno*. [S.l.]: LTC, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 12, 17, 42, 47 e 59.
- CODDINGTON, E. A.; CARLSON, R. *Linear Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: SIAM, 1997. Citado na página 13.
- FAGUNDES, I. C. *Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem*. Monografia (Curso de Matemática – Licenciatura) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio – PR, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 55.
- GOMES, M. *Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias*. Monografia (Curso de Matemática – Licenciatura) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis – SC, 2013. Citado na página 35.
- MATTIUZZO, L. B. *Estabilidade local dos pontos de equilíbrio em sistemas planares e hiperbólicos de EDO's de primeira ordem*. Monografia (Curso de Matemática – Licenciatura) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo – SP, 2016. Citado na página 26.
- SOTOMAYOR, J. M. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. [S.l.]: IMPA, 1979. Citado na página 18.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. [S.l.]: PEARSON, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 23, 42 e 47.