UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Bacharelado

Rafael Vieira Sousa

Teorema de Cauchy-Goursat e Aplicações

São Luís - MA
2023

Rafael Vieira Sousa

Teorema de Cauchy-Goursat e Aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Curso de Matemática – Bacharelado

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo

São Luís - MA

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Sousa, Rafael Vieira.
Teorema de Cauchy-Goursat e Aplicações / Rafael Vieira Sousa. - 2023.
46 p.

Orientador(a): Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo.
Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís-MA, 2023.

1. Integração no plano complexo. 2. Teorema de Cauchy. 3. Teorema de Cauchy-Goursat. I. Macedo, Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues. II. Título.

Rafael Vieira Sousa

Teorema de Cauchy-Goursat e Aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 21/12/2023

Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo
Orientador
DEMAT/UFMA

Prof. Dr. Ermerson Rocha Araujo
Primeiro Examinador
DEMAT/UFMA

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes
Segundo Examinador
DEMAT/UFMA

Agradecimentos

Na vida existem várias dificuldades para serem superadas, na vida acadêmica não foi diferente. Diante essas, dificuldades venho agradecer a todos que me ajudaram de algum modo no decorrer dessa jornada.

Em primeiro lugar agradeço a Deus, em segundo as pessoas que sempre estiveram ao meu lado, minha mãe Maria da Graça e meu pai Raimundo Nonato Sousa, que durante a pandemia vieste a falecer, agradeço também a minha esposa Evanildes Assunção juntos superamos muitas dificuldades, faço os meus agradecimentos a uma pessoa muito especial à minha madrinha, Sandra Maria a responsável por incentivar a entrar na vida acadêmica.

Ao longo dessa trajetória pude conhecer pessoas que foram essenciais e participaram da minha formação acadêmica, então gostaria de fazer meus agradecimentos ao meu orientador, Elivaldo Rodrigues Macedo, uma pessoa atenciosa que sempre esteve a disposição para tirar minhas dúvidas e tornou-se um grande amigo. Agradeço a todos os professores que durante essa jornada passaram os seu conhecimentos que foram crucial para concluir a graduação.

Por último, gostaria de fazer os meus mais sinceros agradecimentos a todos meus amigos que de alguma forma participaram dessa caminhada em especial (Carla Beatriz, Cláudio , Davi Komura, Irlan Maycon, Renata Franca, Rianderson, Ronaldo Pinheiro, Yangerfeson e Ygor Penha). Agradeço a todos pela oportunidade de conhecer-los e conviver-los com vocês durante esses anos na faculdade.

Resumo

Neste trabalho, mostramos que o estudo de Análise Complexa nos proporcionou uma aprendizagem para enunciar e demonstrar o Teorema de Cauchy-Goursat. Para isto, utilizamos alguns resultados importantes e fizemos o estudo do(s) Números Complexos, Integração no plano complexo, Teorema de Grenn, Teorema de Cauchy.

Palavras-chave: Integração no plano complexo, Teorema de Cauchy, Teorema de Cauchy-Goursat.

Abstract

In this work, we demonstrate that the study of Complex Analysis provided us with the knowledge to state and prove the Cauchy-Goursat Theorem. To do this, we employed some crucial results and conducted an exploration of Complex Numbers, Complex Plane Integration, Green's Theorem, and Cauchy's Theorem.

Keywords: Integration in the complex plane, Cauchy's Theorem , Cauchy-Goursat Theorem.

Sumário

	Lista de ilustrações	**7**
	INTRODUÇÃO	**8**
1	**PRELIMINARES**	**10**
1.1	**Números Complexos**	**10**
1.2	**Conjugado Complexo**	**12**
1.3	**Funções Complexas de Variável complexa**	**13**
1.4	**Limite Complexos**	**14**
1.4.1	Propriedades de Limites Complexos	16
1.5	**Continuidade Complexa**	**16**
1.6	**Derivação e Analiticidade**	**17**
1.7	**Equação de Cauchy-Riemann**	**18**
2	**INTEGRAÇÃO NO PLANO COMPLEXO**	**22**
2.1	**Definições**	**22**
2.1.1	Cálculo de integrais de contorno	22
2.2	**Propriedades da integral**	**23**
2.3	**Principais teoremas**	**26**
2.3.1	Teorema de Green	27
2.3.2	Teorema de Cauchy	29
3	**TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT E APLICAÇÕES**	**32**
3.1	**Domínio simplesmente conexo e multiplamente conexo**	**32**
3.2	**O Teorema de Cauchy-Goursat**	**33**
3.3	**Aplicações do Teorema de Cauchy-Goursat**	**38**
	Considerações finais	**45**
	REFERÊNCIAS	**46**

Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Reflexão de z em torno do eixo horizontal 13
Figura 1.2 – Para $\delta < 1$ 15
Figura 2.1 – O contorno C é suave por partes 24
Figura 2.2 – Curva tipo I 26
Figura 2.3 – Curva tipo II 27
Figura 2.4 – Circunferência onde $r = 1$ 30
Figura 3.1 – Domínio simplesmente conexo e multiplamente conexo 32
Figura 3.2 – Contornos triangulares Δ_1, Δ_2, Δ_3 e Δ_4 33
Figura 3.3 – Região poligonal 36
Figura 3.4 – Contorno simples passando por uma curva poligonal 37
Figura 3.5 – Circunferência de $r = 1$ 39
Figura 3.6 – Circunferência de $r = 1$ 39
Figura 3.7 – Circunferência de $r = 1$ 40
Figura 3.8 – Circunferência de $r = 1$ 42
Figura 3.9 – Circunferência de $r = 1$ no centro $2i$ 43
Figura 3.10–circunferência centrada na origem $C_1 = \sqrt{3}i$, $C_2 = -\sqrt{3}i$ e $r = 4$ 44

Introdução

A Análise Complexa é um ramo da Matemática que abordam assim como outros assuntos, estudo de funções de uma variável complexas. Vários conceitos podem ser estudados através desse ramo, podemos citar o Cálculo Diferencial e Integral para funções que tenha mais de uma variável complexa, exemplificando melhor, os números complexos. Além disso, a Análise Complexa tem grande importância em alguns conceitos e resultados da matemática: Série de Laurent, Teorema do resíduo, Funções Analítica, Teorema de Cauchy e etc...

Este trabalho tem como objetivo enunciar, demonstrar e fazer aplicações, por meio do Teorema de Cauchy-Goursat. Diante disso, apresentaremos resultados importantes da análise complexas: Teorema de Green, Teorema de Cauchy e o Teorema de Cauchy-Goursat. Esse teorema é um resultado fundamental no estudo da Análise Complexa. O Teorema de Cauchy-Goursat nos fornece uma condição no qual uma função pode ser analítica ou holomorfa, através desse teorema podemos calcular valores de integrais complexas ao longo de caminhos fechados.

O Capítulo 1, tratamos de fazer algumas abordagem, inicialmente apresento um estudo bem simples dos números complexos, Definição, Conjugado Complexo, Funções Complexas de Variável complexa, Limites Complexos e suas propriedades, Continuidade Complexa, Derivação e Continuidade e Equações de Cauchy-Riemann. Apresentado no capítulo um.

No Capítulo 2,abordamos um estudo de Integração no Plano Complexo, Definições de Integral Complexas numa curva fechada C com orientação negativa e positiva $\oint_C f(z)\ dz$ e $\oint_C f(z)\ dz$. Mas, neste estudo denotaremos somente a orientação positiva, devido a isso, passaremos a nos referir a integral complexa $\int_C f(z)\,dz$, pela a denominação mais comum integral de contorno. Apresentaremos também neste capítulo, Propriedades da integral, Principais Teoremas: Green e o de Cauchy, esses teoremas servirão de base para tratarmos com o objetivo crucial para finalizar o trabalho.

Por fim, apresentamos a demonstração e fazemos algumas aplicações do Teorema de Cauchy-Gousart. Primeiramente, apresentaremos, Domínio simplesmente conexo e multiplamente conexo, pois tendo esses conhecimentos em mente fazemos a prova do principal teorema do texto: Teorema de Cauchy-Goursat. Finalizamos o trabalho trataremos de apresentando algumas aplicações com a utilização do Teorema de Cauchy-Goursat.

1 Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os números complexos, definições, propriedades, funções complexa de variável complexa, exemplos, limite e continuidade, derivada e analiticidade e equação de Cauchy-Riemann no qual servirá de suporte nos assuntos subsequentes que serão abordados. Neste Capitulo 1 usamos as referências (CHURCILL, 1899), (SOARES, 2003), (ÁVILA, 1993) e (DENNIS; SHANAHAN, 1940).

1.1 Números Complexos

Definição 1.1. *Um número complexo z pode ser definido como um par ordenado (x, y) de números complexos reais x e y,*

$$z = (x, y), \tag{1.1}$$

sujeito às seguintes regras de operações a serem especificadas abaixo:
Então o par ordenado $(x, 0)$ é identificado com o número real x:

$$(x, 0) = x. \tag{1.2}$$

Como podemos observar esta regra nos permite configurar os números reais como um subconjunto do conjunto dos números em $\mathbb{C}$.
O par $(0, 1)$, no qual o par será chamado **unidade imaginária** é indicado por i:

$$(0, 1) = i. \tag{1.3}$$

Os números reais x e y são, respectivamente, a **parte real e a parte imaginária** de (x, y), sendo indicado por

$$Re(z) = x, Im(z) = y. \tag{1.4}$$

Se um par $(0, y)$ é um número **imaginário puro**.
Outra regra a ser imposta a tais pares é que dois números em $\mathbb{C}$ são iguais se, e somente se, as partes reais e imaginária de um são iguais, respectivamente, às do outro.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \tag{1.5}$$

se e somente se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.
Temos em particular, visto que $0 = (0, 0)$, tem se

$$z = (x, y) = 0$$

se, e somente se $x = 0$ e $y = 0$.
Dois números complexos quaisquer tal que $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ têm a soma e o produto por $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$, definido como $\mathbb{C}$ é dada pelas as fórmulas abaixo:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1.6}$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{1.7}$$

Em particular,tem-se $(x, 0) + (0, y) = (x, y)$ e $(0, y) = (y, 0)(0, 1)$. Cada números complexos que não é real, podemos escrever como a soma de um número real e um número imaginário puro, de modo que:

$$z = (x, y) = x + yi \tag{1.8}$$

O produto podemos escrever da seguinte maneira zz é o mesmo que z^2 de acordo com a definição (1.6) tem-se

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

então temos que $i^2 = -1$, da equação (1.8), a fórmula (1.7) podemos escrever da seguinte forma

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y i)i.$$

A expansão formal do produto no primeiro membro, foi feita como se os binômios fosse reais, e a substituição de i^2 por -1, dar o mesmo resultado. A definição (1.7)conclui o procedimento formal.
Os pares ordenados (1.1) de números reais que satisfazem às condições (1.2) a (1.7) são definidos como números $\mathbb{C}$.

Essa definição é devida ao matemático irlandês **William R. Hamilton** e apareceu em 1837, embora muito anteriormente vários matemáticos já houvessem trabalhado com números complexos como pontos e planos.

Sendo assim temos, a soma e produto têm as seguintes propriedades:

1. Comutatividade

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad e \quad z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

2. Associatividade

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad e \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

3. $(0,0)$ é elemento neutro aditivo:

$$z + (0,0) = z,$$

para todo complexo z.

4. $(1,0)$ é identidade multiplicativa veja a equação

$$z \cdot (1,0) = z,$$

para todo complexo z.

5. Todo $z = (x,y)$ tem um simétrico aditivo

$$-z = (-x,-y), \text{ ou seja, } (x,y) + (-x,y) = (0,0).$$

6. Todo $z = (x,y) \neq (0,0)$ tem um inverso multiplicativo, o número

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right),$$

ou seja,

$$(x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1,0).$$

7. Distributividade do produto em relação a soma

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Todas essas propriedades decorrem (1.6), (1.7) e do fato que elas são válidas para a soma e o produto de números reais. um conjunto munido de uma soma e de um produto para quais valem as propriedades da soma e o produto.

1.2 Conjugado Complexo

Definição 1.2. *Dado um número complexo $z = x + iy$ o conjugado de z é o número complexo de $\bar{z} = x - iy$.*

Então, note que $\bar{z}$ significa, geometricamente, a reflexão de z em torno do eixo horizontal (1.1).
A conjunção é importante porque, entre outras informações, nos diz que:

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Além disso é fácil verificar :

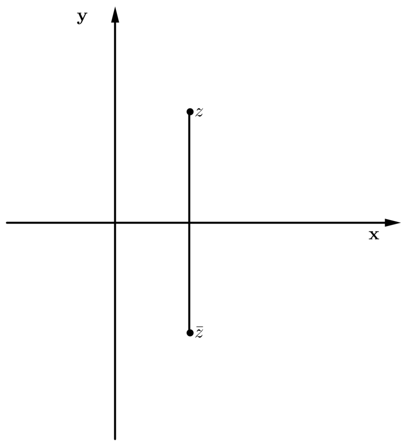


Figura 1.1 – Reflexão de z em torno do eixo horizontal

- $x = Re(z)\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$,
- $y = Im(z) = \dfrac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \dfrac{-i}{2}(z-\bar{z})$,
- z é real se e somente se $z = \bar{z}$,
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.
  Utilizando a última dessa dessas igualdades temos:

  $$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1}\ \overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$$

  ou melhor,

  $$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

  .

1.3 Funções Complexas de Variável complexa

Definição 1.3. *Uma função complexa é uma função f cujos o domínio e imagem são subconjuntos do conjunto de números complexo $\mathbb{C}$. Então w é uma função da variável complexa z no conjunto S.*

Cada função $w = f(z)$ é uma variável complexa $z = x + iy$ estão associadas duas funções reais das variáveis reais x e y, dadas por $u = u(x, y) = Ref(z)$ e $v = v(x, y) = Imf(z)$.

Exemplo 1.4. *Determine a parte real e imaginária da função:*

$$w = z^2 - 5z + 3.$$

Solução: *Como $z = x + iy$, então temos:*

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 - 5(x + iy) + 3 \\ f(z) &= (x^2 + 2xiy - y^2) - 5x - 5iy + 3 \\ f(z) &= (x^2 - y^2 - 5x + 3) + (2xy - 5y)i \end{aligned}$$

logo a parte real e imaginária é:
$Re(z) = u(x, y) = (x^2 - y^2 - 5x + 3)$ e $Im(z) = v(x, y) = (2xy - 5y)$. ■

1.4 Limite Complexos

Definição 1.5. *Dado um número $z_0 \in A$, dizemos que o número $L \in \mathbb{C}$ é o limite de f quando $z \in A$ tende a z_0 se, dado qualquer número $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon;$$

ou ainda, de maneira equivalente:

$$z \in D \cap V'_\delta(z_0) \Rightarrow f(z) \in V_\epsilon(L).$$

Podemos escrever:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

Sendo essa definição formalmente a mesma que damos para funções $\mathbb{R}$, ela se reduz a este caso quando todos números envolvidos são $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.6. *Mostre que $\lim\limits_{z \to 2i}(z^2 + 3z) = -4 + 6i$.*
Solução: *Utilizando a definição (1.5), então vamos mostrar que $\lim\limits_{z \to 2i}(z^2 + 3z) = -4 + 6i$. De fato, temos:*

$$\begin{aligned} |(z^2 + 3z) - (-4 + 6i)| &= |(z^2 + 4) + 3(z - 2i)| \\ &= |(z - 2i)(z + 2i) + 3(z - 2i)| \\ &= |z - 2i||z + 3 + 2i| \leq |z - 2i|(|z| + |3| + |2i|) \\ &= |z - 2i|(|z| + 5). \end{aligned}$$

Note que z ficará restrito a uma vizinhança de $2i$*, então temos: supondo* $|z| < 3$*, portanto* $|(z^2 + 3z) - (-4 + 6i)| \leq 8|z - 2i|$*. Então como podemos observar que a última expressão tem que ser < que* ϵ*, de modo que* $|z - 2i| < \frac{\epsilon}{8}$*, isto é para todo* $\epsilon > 0$*, logo vamos tomar* $\delta = \frac{\epsilon}{8}$*, se tomarmos* $\delta < 1$*, a condição será satisfeita como podemos observar na figura (1.2) então temos pela a desigualdade triangular segue:*

$$|z| = |(z - 2i) + 2i| \leq |(z - 2i)| + 2 \leq \delta + 2 < 1 + 2 = 3.$$

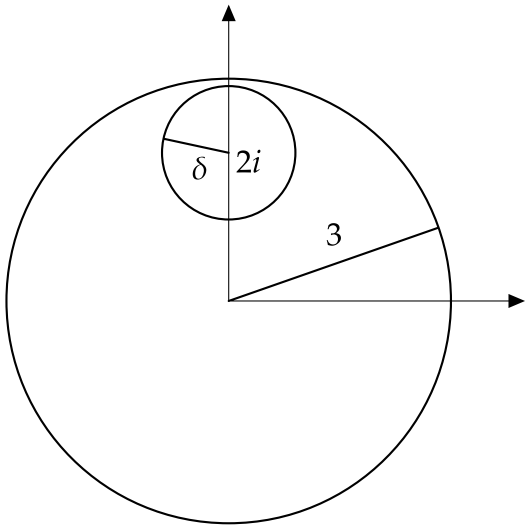


Figura 1.2 – Para $\delta < 1$
Fonte: Próprio autor

Logo podemos concluir que δ *deve ser o menor dos números* 1 *e* $\frac{\epsilon}{8}$*, então o exercício está mostrado.*

$$|z - 2i| < \delta \Rightarrow |(z^2 + 3z) - (-4 + 6i) < \epsilon|.$$

■

No caso de funções de variável real, pode-se adaptar de maneira muito simples pele a Definição (1.5) podemos adaptara ao caso em que z ou $f(z)$ tende a infinito, no qual resultará nas seguintes definições.

Definição 1.7. *Diz-se que uma função* $f(z)$ *com domínio D tem limite finito L com* $z \to \infty$ *se, dado qualquer* $\epsilon > 0$*, existe* $M > 0$ *tal que* $|f(z) - L| < \epsilon \; \forall \; z \in D, |z| > M$*.*

Diz-se que $f(z)$ *tende a infinito com z tendendo a* z_0 *se, dado qualquer* $K > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(z)| > K \; \forall \; z \in D \cap V'_\delta(z_0)$*.*

Diz-se que $f(z)$ *tende a infinito com z tendendo a infinito se, dado qualquer* $K > 0$*, existe* $M > 0$ *tal que* $|f(z)| > K \; \forall \; z \in D, |z| > M$*.*

Exemplo 1.8. *Mostre que* $f(z) = \dfrac{3iz+5}{2z-i} \to \dfrac{3i}{2}$ *com* $z \to \infty$.

Solução: *De fato temos,*

$$\begin{aligned} \left|f(z) - \frac{3i}{2}\right| &= \left|\frac{3iz+5}{2z-i} - \frac{3i}{2}\right| \\ &= \left|\frac{2(3iz+5) - 3i(2z-i)}{2(2z-i)}\right| \\ &= \left|\frac{6iz+10-6iz-3}{2(z-2i)}\right| \\ &= \frac{7}{2|2z-i|} \leq \frac{7}{2(2|z|-1|)}. \end{aligned}$$

Note que essa última desigualdade, só será satisfeita se $|z| > \dfrac{1}{2}$, *é o que vamos supor a partir de agora. É importante observar*

$$\left|f(z) - \frac{3i}{2}\right| \leq \frac{7}{2(2|z|-1|)} < \epsilon,$$

se $|z| > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7}{2\epsilon} + 1\right)$.

Logo temos; $M = max\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7}{2\epsilon}+1\right)\right\}$.

Então, temos o resultado:

$$|z| > M \Rightarrow \left|f(z) - \frac{3i}{2}\right| < \epsilon. \quad \blacksquare$$

1.4.1 Propriedades de Limites Complexos

Sejam f e g funções complexas. Se o $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$ e $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = M$, então

1. $\lim\limits_{z\to z_0} cf(z) = cL, c$ é uma constante complexa
2. $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z) \pm g(z)) = L \pm M$
3. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\cdot g(z) = L \cdot M$
4. $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$

1.5 Continuidade Complexa

Definição 1.9. *Continuidade de uma função complexa Uma função complexa* f *é continua em um ponto* z_0 *se*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Como no caso de funções reais, se uma função complexa f *for continua em um ponto as três condições a seguir devem ser atendidas.*

Critério para Continuidade em um Ponto

Uma função complexa f é continua em um ponto z_0 se cada uma das três condições abaixo forem atendidas.

1. $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe,
2. f é definida em z_0
3. $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Teorema 1.10. ***Propriedades de Funções Complexas***

Se f e g são contínuas no ponto z_0 as seguintes funções são contínuas no ponto z_0:

1. cf, c é uma constante complexa,
2. $f \pm g$,
3. $f \cdot g$
4. $\dfrac{f}{g}$, desde que $g \neq 0$.

1.6 Derivação e Analiticidade

Definição 1.11. ***Derivada de uma Função Complexa***

Seja a função complexa f é definida em uma vizinhança de um ponto z_0. A derivada de f em z_0, denotada por $f'(z_0)$, é

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \tag{1.9}$$

desde que este limite exista.

Se o limite em (1.9) existir, a função f é diferenciável em z_0. Dois outros símbolos que denotam a derivada de $w = f(z)$ são w' e $\dfrac{dw}{dz}$. Quando esta última notação é utilizada, o valor de uma derivada em um ponto específico z_0 é escrito como $\left.\dfrac{dz}{dw}\right|_{z=z_0}$

Regras de Diferenciação

As familiares regras de diferenciação no cálculo com variáveis reais se aplicam ao cálculo com variáveis complexas. Se f e g forem diferenciáveis em um ponto z e c for uma constante complexa,(1.9) pode ser usada para mostrar:

Regras de Diferenciação

1. Regras Envolvendo Constantes: $\dfrac{d}{dz}\,[cf(z)] = cf'(z)$
2. Regra para Soma: $\dfrac{d}{dz}[f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z)$
3. Regra para o Produto: $\dfrac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$
4. Regra do Quociente: $\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$
5. Regra da Cadeia: $\dfrac{d}{dz}f(g(z)) = f'(g(z))g'(z)$.
6. A regra de potência para a diferenciação de potência de z também é valida: $\dfrac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$, n inteiro.
7. A combinação de (6) e (5)resulta na regra de potências para funções: $\dfrac{d}{dz}\,[g(z)]^n = n\,[g(z)]^{n-1}\,g'(z)$, n inteiro.

Definição 1.12. ***Analiticidade em um ponto***

Uma função complexa $w = f(z)$ é analítica em um ponto z_0 se f for diferenciável em z_0 e em todo ponto em alguma vizinhança de z_0.

Observação 1.13. *Uma função f é analítica em um domínio D se for analítica em todo ponto em D. Então uma função f que é analítica em todo um domínio D é denominada **holomórfica** ou **regular**.*

1.7 Equação de Cauchy-Riemann

Veremos a seguir o teorema que mostra se uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for diferenciável em um ponto z, as funções u e v devem satisfazer um par de equações que relacionam suas derivadas parciais de primeira ordem.

Teorema 1.14. *Suponhamos que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ seja diferenciável em um ponto $z = x + iy$. Então, em z as derivadas parciais de primeira ordem de u e v devem satisfazer as Equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.10}$$

A demonstração pode ser vista em (DENNIS; SHANAHAN, 1940).

O próximo resultado mostra uma condição necessária e suficiente para existência em derivada complexa.

Teorema 1.15. *Sejam u e v funções reais e univalentes de x e y as quais, juntamente com derivadas parciais de primeiras, são contínuas num ponto (x_0, y_0). Se essas derivadas parciais satisfazem às condições de Cauchy-Riemann nesse ponto, então a derivada $f'(z_0)$ da função $f = u + iv$ existe, sendo $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$.*

Demonstração: A necessidade da condição é demonstrada pelas as equações de Cauchy-Riemann, então agora basta provar que a condição é suficiente.
Suponhamos a continuidade das derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; e \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Em $D_\epsilon(z_0)$, com $z_0 = x_0 + iy_0$, temos que $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, com $0 < |\Delta z| < \epsilon$, e $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$. Como u e suas derivadas parciais primeiras são contínuas em (x_0, y_0), todas elas estão definidas numa certa vizinhança desse ponto. Quando $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ é um ponto na vizinhança, então temos,

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) \\ &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0 + \Delta y) + u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Como $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ é contínua, pelo T.V.M, existe $x_1 \in]x_0, x_0 + \Delta x[$ tal que.

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y_0 + \Delta y)\,\Delta x.$$

Daí temos que

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y_0 + \Delta y)\,\Delta x + u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0).$$

Note que pela a continuidade das derivadas parciais, existe um número ϵ_1 tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \epsilon_1.$$

Observe quando $\Delta x \longrightarrow 0$ em $]x_0, x_0 + \Delta x[$ implica $x_1 \longrightarrow x_0$ e $\Delta y \longrightarrow 0 \Longrightarrow \epsilon_1 \longrightarrow 0$.
Então vamos reescrever a equação

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0 + \Delta y) = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \epsilon_1\right]\Delta x.$$

De maneira análoga podemos obter um número ϵ_2 de modo que

$$u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \epsilon_2\right]\Delta y, \text{onde } \epsilon_2 \longrightarrow 0, \text{quando } \Delta y \longrightarrow 0.$$

Logo podemos escrever o Δu na forma,

$$\Delta u = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \epsilon_1\right]\Delta x + \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \epsilon_2\right]\Delta y,$$

então

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

onde $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$, são valores das derivadas parciais no ponto (x_0, y_0),onde ϵ_1 e ϵ_2 se aproximam de zero quando Δx e Δy tendem ambos para zero.
De maneira análogo podemos escrever para Δv
Portanto;

$$\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \epsilon_3 \Delta x + \epsilon_4 \Delta y.$$

Segue

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \\
&= \Delta u + i\Delta v \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \epsilon_1 \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \epsilon_2 \Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \epsilon_3 \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \epsilon_4 \Delta y\right).
\end{aligned}$$

Agora vamos utilizar a hipótese de que as condições de Cauchy-Riemann devem está satisfeitas no ponto (x_0, y_0). Podemos substituir $\frac{\partial u}{\partial y}$ por $-\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ por $\frac{\partial u}{\partial x}$, então vamos escrever na seguinte forma

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + \epsilon_3 \Delta x + \epsilon_4 \Delta y\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \delta_1 \Delta x + \delta_2 \Delta y,
\end{aligned}$$

onde δ_1 e δ_2 tendem para zero quando Δz se aproxima de zero $(\Delta z = \Delta x + i\Delta y)$.
Logo

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \delta_1 \frac{\Delta x}{\Delta z} + \delta_2 \frac{\Delta y}{\Delta z}.$$

Como
$$|\Delta x| \leq |\Delta z| \text{ e } |\Delta y| \leq |\Delta z|, \text{vem} \frac{\Delta x}{\Delta z} \leq 1, \text{assim como } \frac{\Delta y}{\Delta z} \leq 1.$$

Daí temos os dois últimos termos no segundo membro em $\delta_1 \frac{\Delta x}{\Delta z} + \delta_2 \frac{\Delta y}{\Delta z}$ tendem para zero com Δz. Portanto, no ponto z_0, logo

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

isto é, a derivada existe, e o teorema está demonstrado. ■

De maneira análogo podemos encontrar

$$f'(z_0) = v_y(z_0) - i u_y(z_0).$$

2 Integração no Plano Complexo

Neste capítulo apresentaremos Integração no plano complexos, definições, propriedades, principais teoremas e alguns exemplos. No qual este capítulo servirá de base para demonstração do teorema de Cauchy-Goursat.Neste Capitulo 2 usamos as referências (ÁVILA, 1993), (DENNIS; SHANAHAN, 1940) e (STEWART, 2013)

2.1 Definições

Definição 2.1. ***Integral Complexa***
A integral complexa de f em C é

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{||p||\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k. \tag{2.1}$$

Se o limite em (2.1) existir, dizemos que f é **integrável** em C. O limite existe sempre que f for contínua em todos os pontos de C e C for uma curva suave ou suave por partes. Além disso, usaremos a seguinte notação$\oint_c f(z)\,dz$ para representar uma integral complexa ao longo de uma curva fechada C **orientação positiva**. Quando for importante salientar a direção de integração ao longo de uma curva fechada, empregaremos as seguintes notações

$$\oint_C f(z)\,dz \quad e \quad \oint_C f(z)\,dz$$

para representar integrações nos sentidos positivos e negativo, respectivamente.

Percebendo que a Definição (2.1) é formalmente igual à definição de integrais reais pode ser vista em (DENNIS; SHANAHAN, 1940), passaremos a nos referir à integral complexa $\int_C f(z)\,dz$ pela a denominação mais comum de **integral de contorno**.

2.1.1 Cálculo de integrais de contorno

Uma boa maneira de entender , é saber calcular uma integral de contorno , então $\int_C f(z)\,dz$, então vamos escrever, (2.1) de maneira simples.

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt. \tag{2.2}$$

Como pode ser vista em (DENNIS; SHANAHAN, 1940). Para melhor entendimento veja o exemplo abaixo.

Exemplo 2.2. *Calcule a integral* $\int_C \overline{z}\, dz$, *onde* C *é parametrizada por* $z(t) = 2t + it^3$, $1 \leq t \leq 3$.
Solução: *Dado* $f(z) = \overline{z}$, *daí temos* $f(z(t)) = \overline{2t + it^3} = 2t - it^3$, *e calculando a derivada de* $z(t) = 2t + it^3$
temos:

$$z'(t) = 2 + 3it^2$$

assim , $\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$, *a integral fica escrita como,*

$$\begin{aligned}
\int_C \overline{z}\, dz &= \int_1^3 (2t - it^3)(2 + 3it^2)dt \\
&= \int_1^3 (4t + 6it^3 - 2it^3 + 3t^5)dt \\
&= \int_1^3 (3t^5 + 4t + 4it^3)dt.
\end{aligned}$$

Tomando

$$\int_a^b f((t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i\int_a^b f_2(t)dt,$$

logo temos que

$$\begin{aligned}
\int_C \overline{z}\, dz &= \int_1^3 (3t^5 + 4t)\, dt + i\int_1^3 4t^3\, dt \\
&= \left[\frac{3t^6}{6} + \frac{4t^2}{2}\right]\Bigg|_1^3 + i\frac{4t^4}{4}\Bigg|_1^3 \\
&= 380 + 80i.
\end{aligned}$$

■

2.2 Propriedades da integral

1. $\int_C cf(z)\, dz = c\int_C f(z)\, dz$, sendo c uma constante complexa.

2. $\int_C f_1(z)\, dz + f_2(z)\, dz = \int_C f_1(z)\, dz + \int_C f_2(z)\, dz.$

3. $\displaystyle\int_{C_1 \cup ... \cup C_r} f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + ... + \int_{C_r} f(z)\, dz.$

4. $\displaystyle\int_{-C} f(z)\, dz = -\int_{C} f(z)\, dz$, onde $-C$ denota a curva com orientação oposta à de C.

5. $\displaystyle\left|\int_{C} f(z)\, dz\right| \leq \int_{C} \left|f(z)\right| |dz|.$

Observação 2.3. *As propriedades, (1) e (2) é de fácil verificação, as propriedades, (3), (4) e (5) podem ser vista em (ÁVILA, 1993).*

Exemplo 2.4. *Calcule* $\displaystyle\int_{C} \left(x^3 + iy^2\right)\, dz$*, onde C é o contorno mostrado na figura abaixo.*

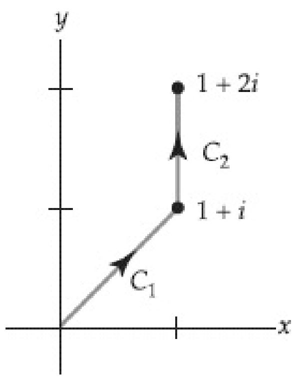


Figura 2.1 – O contorno C é suave por partes
Fonte: (DENNIS; SHANAHAN, 1940).

Solução: *Utilizando a propriedade (3) então temos,*

$$\int_{C} (x^3 + iy^2)\, dz = \int_{C_1} (x^3 + iy^2)\, dz + \int_{C_2} (x^3 + iy^2)\, dz,$$

como podemos observar que C_1 *definida por* $y = x = 1$*, e seus intervalos em,* $0 \leq x \leq 1$*, e escrevendo* x *como parâmetro.*
Logo temos uma parametrização

$$z(x) = x + ix,$$

daí $z'(x) = 1 + i$*, temos* $f(z) = (x^3 + iy^2)$ *então podemos escrever,* $f(z(x)) = x^3 + ix^2$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} (x^3 + iy^2)\, dz &= \int_0^1 (x^3 + iy^2)(1 + i)\, dx \\
&= \int_0^1 (x^3 + ix^3 + ix^2 - x^2)\, dx \\
&= \frac{x^4}{4} + i\frac{x^4}{4} + i\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{i}{4} + \frac{i}{3} - \frac{1}{3} - 0 \\
&= \frac{3}{12} + \frac{3i}{12} + \frac{4i}{3} - \frac{4}{12} \\
&= -\frac{1}{12} + \frac{7i}{12}. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

A curva C_2 é definida por $x = 1$, seus intervalos em, $1 \leq y \leq 2$ e escrevendo y como parâmetro. Logo obtemos,

$$z(y) = 1 + iy$$

, daí $z'(y) = i$, temos $f(z) = (x^3 + iy^2)$, então podemos escrever, $f(z(y)) = 1 + iy^2$.
Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} (x^3 + iy^2)\, dz &= \int_1^2 (1 + iy^2) i\, dy \\
&= \int_1^2 (i - y^2)\, dy \\
&= iy - \frac{y^3}{3}\Big|_1^2 \\
&= 2i - \frac{2^3}{3} - \left(i - \frac{1^3}{3}\right) \\
&= -\frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 2i - i \\
&= -\frac{7}{3} + i. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Somando (2.3) com (2.4) temos,

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} (x^3 + iy^2)\, dz &= -\frac{1}{12} + \frac{7i}{12} + \left(-\frac{7}{3} + i\right) \\
&= -\frac{1}{12} - \frac{7}{3} + \frac{7i}{12} + i \\
&= -\frac{29}{12} + \frac{19}{12} i.
\end{aligned}
$$

■

2.3 Principais teoremas

O próximo teorema a sua demonstração não é simples, então vamos mostrar um caso geral para,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy,$$

para isso mostraremos para o caso especial onde a região é tanto do tipo **I** como de tipo **II**.

Região do tipo I

Se f é contínua em uma região D do tipo **I** tal que

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y)|\, a \le x \le b\,, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}\,\text{então,} \\ \iint_D f(x,y)\,dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx. \end{aligned} \tag{2.5}$$

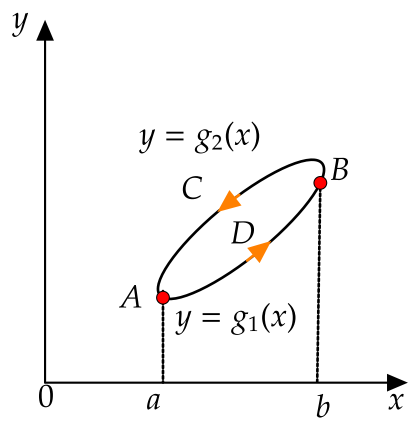


Figura 2.2 – Curva tipo I
Fonte: Próprio autor

Região do tipo II

Considerando região plana do tipo II,

$$D = \{(x,y)|\, c \le y \le d\,, h_1(y) \le x \le h_2(x)\}\ \text{onde,}\ h_1\,\text{e}\,h_2\ \text{são continuas .}$$

Então,

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{2.6}$$

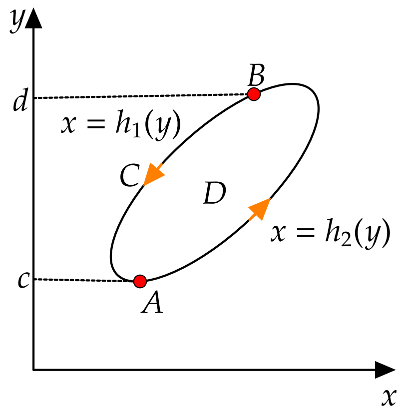


Figura 2.3 – Curva tipo *II*
Fonte: Próprio autor

Como já sabemos, o que é uma região do tipo ($I\,e\,II$), então vamos mostrar o próximo teorema.

2.3.1 Teorema de Green

Teorema 2.5. *Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por trechos, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C. Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então*

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \tag{2.7}$$

Demonstração. Considere nos casos onde D é uma região simples, então o **Teorema de Grenn** estará demonstrada se mostrarmos

$$\int_C P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA. \tag{2.8}$$

$$\int_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA. \tag{2.9}$$

Vamos demonstrar (2.8) exprimindo D como uma região do tipo I:

$$D = ((x,y)|\,a \le x \le b\,,g_1(x) \le y \le g_2(x))\,,$$

onde $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são funções contínuas.
Para provar a equação (2.8), vamos referir a figura (2.2), note que C consiste em duas curvas C_1 e C_2 que possuem as equações $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, respectivamente.
Daí:

$$\begin{aligned}
\int_C P\,dx &= \int_{C_1} P(x,y)\,dx + \int_{C_2} P(x,y)\,dx \\
&= \int_a^b P(x,g_1(x))\,dx + \int_a^b P(x,g_2(x))\,dx \\
&= \int_a^b P(x,g_1(x))\,dx - \int_a^b P(x,g_2(x))\,dx.
\end{aligned}$$

Aplicando a figura (2.2) à integral dupla $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dA$ nos dá,

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\, dx \\ &= \int_a^b P(x,y)\Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx. \\ &= \int_a^b [P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))]\, dx.\end{aligned}$$

Comparando essa expressão com a da equação (2.8), vemos que

$$\int_C P(x,y)\, dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dA.$$

Também temos de maneira análoga, vamos demonstrar (2.9) exprimindo D como uma região do tipo II:

$$D = \{(x,y) | \, c \leq y \leq d\,, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}\,,$$

onde $h_1(y)$ e $h_2(y)$ são funções contínuas.

Para provar a equação (2.9), vamos referir a figura (2.3), note que C consiste em duas curvas C_1 *e* C_2 que possuem as equações $x = h_1(y)$ *e* $x = h_2(y)$, respectivamente.

$$\begin{aligned}\int_C Q\, dy &= \int_{C_1} Q(x,y)\, dy + \int_{C_2} Q(x,y)\, dy \\ &= \int_c^d Q(h_1(y),y)\, dy + \int_c^d Q(h_2(y),y)\, dy \\ &= \int_c^d Q(h_2(y),y)\, dy - \int_c^d Q(h_1(y),y)\, dy.\end{aligned}$$

Aplicando a figura (2.3) à integral dupla $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dA$ nos dá,

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy \\ &= \int_c^d Q(x,y)\Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} dy. \\ &= \int_c^d [Q(y,h_2(y)) - Q(y,h_1(y))]\, dy.\end{aligned}$$

Comparando essa expressão com a da equação (2.9), vemos que

$$\int_C Q(x,y)\, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dA.$$

Portanto temos que:

$$\int_C P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA,$$

logo o **Teorema de Grenn** está demonstrado. ■

Conforme podemos ver (2.5), o próximo resultado caracteriza uma propriedade importante das **funções analíticas** definidas em domínios **Simplesmente Conexos** , que veremos no capítulo (3´).

2.3.2 Teorema de Cauchy

Teorema 2.6. *Seja f uma função analítica em um domínio simplesmente conexo D, e seja f' contínua em D. Então, para todo contorno fechado simples C em D,*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Prova dada por Cauchy. A prova deste teorema e imediata a consequência do teorema de Grenn no plano e das equações de Cauchy-Riemann. Recordando (2.5), assumindo que f' é contínua em todo domínio D. Em consequência, as partes real e imaginária de $f(z) = u + iv$ e suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas em todo domínio D. Utilizando $\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$, podemos escrever $\int_C f(z)\,dz$ em termos de integrais de linhas reais; aplicando o teorema de Grenn (2.7) a cada integral de linha, temos:

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_C v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy \\ &= \iint_D\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dA + i\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dA, \end{aligned} \tag{2.10}$$

mostramos que como f' é analítica em D, as funções reais u e v satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, (1.10), em cada ponto em D. Vamos utilizar as equações de Cauchy-Riemann para substituir $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial x}$ em (2.10), daí.

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \iint_D\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dA + i\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dA \\ &= \iint_D\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)dA + i\iint_D\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dA \\ &= \iint_D\left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dA + i\iint_D (0)\,dA \\ &= \iint_D (0)\,dA + i\iint_D (0)\,dA \\ &= 0\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Com isso conclui o Teorema de Cauchy. ■

Agora vamos mostrar alguns exemplos com os resultados dos teoremas acima:

Exemplo 2.7. *Mostre que* $\oint_C f(z)\,dz = 0$, *onde* f *é a função dada e* C, *a circunferência unitária* $|z| = 1$.

a) $f(z) = z^3 - 1 + 3i$

Solução: *Temos que* $z = x + iy$ *e o raio* $r = 1$ *na figura (2.4), então,*

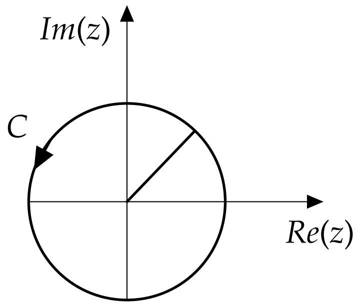


Figura 2.4 – Circunferência onde $r = 1$
Fonte: Próprio autor

$$
\begin{aligned}
f(z) &= (x+iy)^3 - 1 + 3i \\
&= x^3 - 3xy^2 - 1 + 3ix^2y - iy^3 + 3i \\
&= x^3 - 3xy^2 - 1 + i(3x^2y - y^3 + 3).
\end{aligned}
$$

Segue que, $Re(z) = u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 1$ *e* $Im(z) = 3x^2y - y^3 + 3$.
Pelas as condições de Cauchy-Riemann (1.10):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= 3x^2 - 3y^2 \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy,
\end{aligned}
$$

temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy &= \frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

Logo as condições de Cauchy-Riemann está satisfeita, então $f(z)$ *é analítica em todos pontos, e pelo Teorema de Cauchy.*

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

■

b) $f(z) = z^2 + z$

Solução: *Temos que* $z = x + iy$ *e o raio* $r = 1$ *na figura (2.4), então,*

$$\begin{aligned} f(z) &= (x+iy)^2 + x + iy \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy \\ &= x^2 + x - y^2 + i(2xy + y). \end{aligned}$$

Segue que $Re(z) = u(x,y) = x^2 + x - y^2$ *e* $Im(z) = 2xy + y$.

Pelas as condições de Cauchy-Riemann (1.10):

$$\begin{aligned} u_x = & \ 2x+1 \quad e \quad v_x = \ 2y \\ u_y = & \ -2y \quad e \quad v_y = \ 2x+1. \end{aligned}$$

Como

$$u_x = 2x + 1 = v_y \ \ e \ \ u_y = -2y = v_x$$

Logo as condições de Cauchy-Riemann está satisfeita, então $f(z)$ *é analítica em todos pontos, e pelo Teorema de Cauchy.*

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

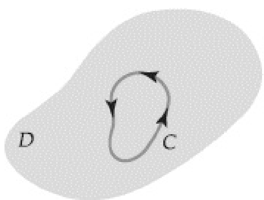
■

3 Teorema de Cauchy-Goursat e Aplicações

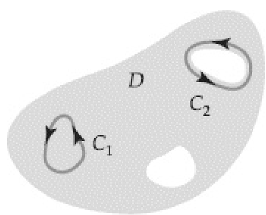
Neste capítulo apresentaremos domínios simplesmente conexo e multiplamente conexo, exemplos, bem como, o caso geral do Teorema de Cauchy-Goursat e algumas aplicações. Neste Capitulo usamos as referências (DENNIS; SHANAHAN, 1940), (SOARES, 2003) e (LIMA, 1983).

3.1 Domínio simplesmente conexo e multiplamente conexo

Podemos dizer que um domínio D é simplesmente conexo se toda curva fechada simples C posicionado inteiramente em D. Intuitivamente, diz-se que uma região D é simplesmente conexa se qualquer curva fechada simples contida em D pode ser deformada continuadamente até reduzir-se a um ponto, sem sair de D. Na figura temos (3.1) A e B , no qual A é simplesmente conexa e B não. Daí chamaremos de multiplamente conexa toda região conexa que não for simplesmente conexa. Para o melhor entendimento um domínio simplesmente conexo quando não possui "buraco"e multiplamente conexo quando possui "buraco".



A) **Domínio simplesmente conexo em** D



B) **Domínio multiplamente conexo em** D

Figura 3.1 – Domínio simplesmente conexo e multiplamente conexo
Fonte: (DENNIS; SHANAHAN, 1940)

No capitulo anterior provamos o Teorema de Cauchy usando o Teorema de Green. Podemos observar, que foi demonstrando de maneira simples pela hipótese da continuidade de f' em todos os pontos de um domínio simplesmente conexo D.
O matemático francês **Edouard Goursat (1858-1936)** publicou uma prova do Teorema de Cauchy em 1900 sem esta hipótese de continuidade. A consequência, seu nome foi adicionado ao de Cauchy enunciado de um dos mais fundamentais Teoremas na análise complexa.

3.2 O Teorema de Cauchy-Goursat

Como o interior de um contorno fechado simples é um domínio simplesmente conexo, o Teorema Cauchy-Goursat (2.6) pode ser enunciado de uma forma mais prática:

Teorema 3.1. *Ja f uma função analítica. Num domínio simplesmente conexo D. Se C é um em contorno fechado simples contido em D, então*

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Demonstração: Suponha $\Delta \subset D$ é um triângulo que limita uma região inteiramente contida em D. Então

$$\oint_\Delta f(z)\,dz = 0 \tag{3.1}$$

Inicialmente munimos o triângulo Δ da orientação compatível com a região por ele

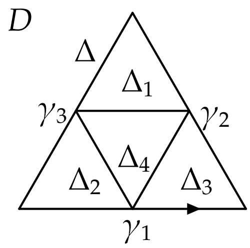


Figura 3.2 – Contornos triangulares Δ_1, Δ_2, Δ_3 e Δ_4
Fonte: Próprio autor

limitada, adotando o sentido anti-horário para o percurso. Unindo os pontos médios do lado (Δ) temos γ_1, γ_2 e γ_3, por meio de segmentos de retas e formamos quatro triângulos menores Δ_1, Δ_2, Δ_3 e Δ_4 mostrado na figura (3.2), a propriedade (3) nos permite escrever da seguinte forma:

$$\oint_\Delta f(z)\,dz = \oint_{\Delta_1} f(z)\,dz + \oint_{\Delta_2} f(z)\,dz + \oint_{\Delta_3} f(z)\,dz + \oint_{\Delta_4} f(z)\,dz. \tag{3.2}$$

As quatro integrais acima nos fornecem quatro números complexos. Escolhendo dentre eles o que tem o maior módulo e chamando de $\Delta^{(1)}$ no triângulo correspondente. Então temos

$$\left|\oint_{\Delta_i} f(z)\,dz\right| \leq \left|\oint_{\Delta^{(1)}} f(z)\,dz\right| \tag{3.3}$$

para $i = 1, 2, 3, 4$ e portanto

$$\left|\oint_{\Delta} f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\oint_{\Delta^{(1)}} f(z)\,dz\right|. \tag{3.4}$$

Sabendo que o perímetro de cada um dos triângulos Δ_i o comprimento $\ell(\Delta_i)$, está relacionado com perímetro $\ell(\Delta)$ de Δ por

$$\ell(\Delta_i) = \frac{1}{2}\ell(\Delta) \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \tag{3.5}$$

pois, marcamos os pontos médios dos lados do triângulo Δ. Em particular

$$\ell(\Delta^{(1)}) = \frac{1}{2}\ell(\Delta). \tag{3.6}$$

Chamando de δ_i o lado de Δ_i o maior comprimento e de δ o lado de Δ de maior comprimento, obtemos as seguintes igualdades

$$\delta_i = \frac{1}{2}\delta \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, \tag{3.7}$$

então agora nos fornece

$$\delta^{(1)} = \frac{1}{2}\delta. \tag{3.8}$$

Sabendo disso, basta repetir todo procedimento acima para o triângulo $\Delta^{(1)}$, vamos dividir em quatro novos triângulos, formados a partir dos pontos médios em cada lado do triângulo, escolhendo o sentido do percurso anti-horário para cada um deles e calcular as quatro integrais correspondentes. Escolhendo dentre eles o que tem o maior módulo e chamando de $\Delta^{(2)}$ no triângulo correspondente. Então temos:

$$\text{região limitada por } \Delta^{(2)} \subset \text{região limitada por } \Delta^{(1)}$$

$$\begin{aligned}
\left|\oint_{\Delta^{(1)}} f(z)\,dz\right| &\leq 4\left|\oint_{\Delta^{(2)}} f(z)\,dz\right| && (3.9)\\
\ell(\Delta^{(2)}) &= \frac{1}{2}\ell(\Delta^{(1)}) && (3.10)\\
\delta^{(2)} &= \frac{1}{2}\delta^{(1)}. && (3.11)
\end{aligned}$$

Se repetimos o processo acima para o triangulo $\Delta^{(2)}$ e assim sucessivamente, após n etapas obtemos

$$\text{região limitada por } \Delta^{(n)} \subset \ldots \subset \text{região limitada por } \Delta^{(1)}$$

$$\begin{aligned}
\left|\oint_{\Delta} f(z)\,dz\right| &\leq 4^n\left|\oint_{\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\right| && (3.12)\\
\ell(\Delta^{(n)}) &= \frac{1}{2}\ell(\Delta^{(n)}) && (3.13)\\
\delta^{(n)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{(n)}\delta. && (3.14)
\end{aligned}$$

Agora vamos recorrer um Teorema, devido a Georg Cantor que pode ser visto em ((LIMA, 1983)), existe um ponto z_0 comum a todas regiões limitadas pelos triângulos $\Delta^{(i)}$, $i \geq 1$. Como f é analítica em z_0, dado $\epsilon > 0$ podemos obter $\tau > 0$ tal que:

1. O disco $\beta(z_0\,,\tau)$ está inteiramente contido em D e
2. $0 < |z - z_0| < \tau \Longrightarrow \left|\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \epsilon.$

A ultima desigualdade equivale a

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0}\right| &< \frac{\epsilon|(z - z_0)|}{|z - z_0|}\\ \left|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right| &< \epsilon\,|(z - z_0)|\,,\end{aligned}$$

de modo que $0 < |z - z_0| < \tau$. Escolhendo um n suficientemente grande de tal modo que

$$\begin{aligned}\delta^{(n)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{(n)} \delta < \tau,\\ \Delta^{(n)} &\subset \beta(z_0\,,\tau),\end{aligned}$$

para todo $z_0 \in \delta^{(n)}$. Por outro lado, temos:

$$\oint_{\Delta^{(n)}} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]\; dz = \oint_{\Delta^{(n)}} [f(z) - f(z_0) + f'(z_0)z_0 - f'(z_0)z]\; dz.$$

Daí, obtemos:

$$\oint_{\Delta^{(n)}} f(z)\,dz + [f'(z_0)z_0 - f(z_0)] \oint_{\Delta^{(n)}} dz - f'(z_0) \oint_{\Delta^{(n)}} z\,dz.$$

Para obtermos o resultado das duas últimas integrais temos o seguinte Teorema:

Teorema 3.2. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um domínio, $f : D \to \mathbb{C}$ uma função contínua, F uma primitiva de f em D e C um caminho suave por partes em D unindo o ponto z_0 ao ponto z_1. Então*

$$\int_C f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Em particular, se o caminho é fechado então

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Demonstração: ver (SOARES, 2003). Segue-se daí que:

$$\oint_{\Delta^{(n)}} dz = 0 \quad \text{e} \quad \oint_{\Delta^{(n)}} z\,dz = 0.$$

Assim

$$\oint_{\Delta^{(n)}} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]\; dz = \oint_{\Delta^{(n)}} f(z)\,dz.$$

Antes de chegar a parte final do teorema vamos apresentar um **Lema Técnico** que podemos ver (SOARES, 2003).

Lema 3.3. *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um domínio, $f : D \to \mathbb{C}$ uma função contínua e $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, um caminho suave por partes em D, de comprimento $\ell(\gamma)$. Seja $K \geq 0$ um número real tal que $\left|f(\gamma(t))\right| \leq K$ para todo $a \leq t \leq b$. Então*

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| \leq K\ell(\gamma).$$

Para, $a \leq t \leq b$. temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_{\Delta^{(n)}} \left[f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right]\,dz\right| \\
&\leq \int_{\Delta^{(n)}} \left|\left[f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right]\right| |\,dz| \\
&< \epsilon \int_{\Delta^{(n)}} |z - z_0|\,|dz| \leq \epsilon\delta^{(n)}\ell(\Delta^{(n)}) \\
&= \epsilon\left(\frac{1}{2}\right)^{(n)} \delta \, \left(\frac{1}{2}\right)^{(n)} \; \ell(\Delta) \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{(n)} \epsilon\delta\,\ell(\Delta).
\end{aligned}$$

Sabendo disso, podemos escrever

$$\left|\int_{\Delta} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \left(\frac{1}{4}\right)^{(n)} \epsilon\delta\,\ell(\Delta) = \epsilon\delta\,\ell(\Delta).$$

Como $\epsilon > 0$ pode ser feito arbitrariamente pequeno, então temos $\left|\int_{\Delta} f(z)\,dz\right| = 0$, de maneira que $\int_{\Delta} f(z)\,dz = 0$.
Logo o teorema está demonstrado. ■

Agora faremos o caso em que C é uma região poligonal $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ e δ_n

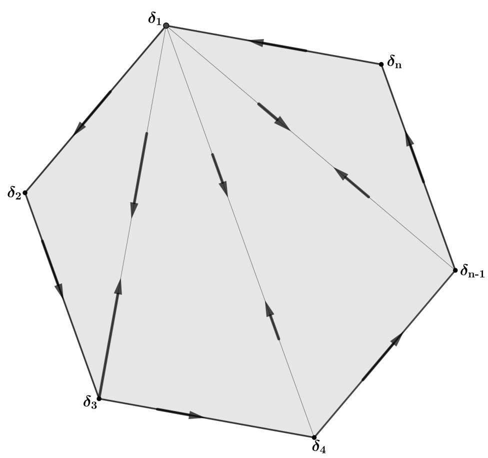


Figura 3.3 – Região poligonal
Fonte: Próprio autor

Demonstração: Seja o polígono de lados δ_1 , δ_2 , δ_3 , δ_4 , δ_{n-1} *e* δ_n, como podemos ver na figura (3.3). Quando ligamos os vértices a partir de δ_1 os lados não adjacentes no sentido anti-horário, logo construímos quatro triângulos e o lado comum de cada triângulo se anulam. Como já foi visto no caso anterior temos que a integral de cada contorno C é igual a zero.
portanto:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{\delta_1} f(z)\,dz + \int_{\delta_2} f(z)\,dz + \int_{\delta_3} f(z)\,dz + ... + \int_{\delta_{n-2}} f(z)\,dz = 0$$

■

Falta o caso que C é uma região poligonal, o caso em que C é uma curva fechada simples qualquer.

Teorema 3.4. *Seja C um contorno fechado simples totalmente posicionado em D; então*

$$\oint_C f(z)\,dz = 0. \tag{3.15}$$

Demonstração: A figura (3.4) mostra um contorno fechado simples C e n pontos $z_1, z_2, ..., z_n$ em C, pelos os quais passa uma curva poligonal P.

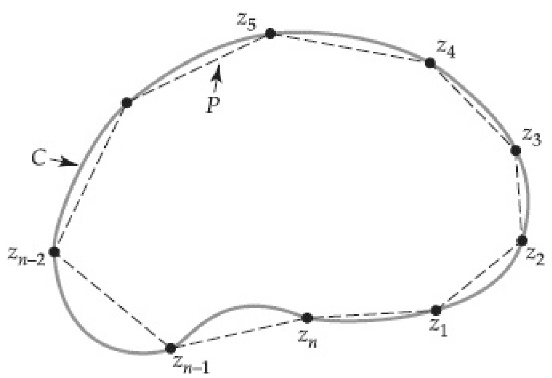


Figura 3.4 – Contorno simples passando por uma curva poligonal
(DENNIS; SHANAHAN, 1940)

Então vamos aplicar a ideia da Soma de Riemann;

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta_k, \quad \Delta_k = z_k - z_{k-1}.$$

Por definição,

$$\oint_C f(z)\ dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k.$$

Pelo caso anterior temos:
$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz + ... + \int_{z_{n-1}}^{z_n} f(z)\,dz = 0.$

$$\int_{z_0}^{z_1}[f(z)-f(z_1)+f(z_1)]\,dz+\ldots+\int_{z_{n-1}}^{z_n}[f(z)-f(z_n)+f(z_n)]\,dz=0$$

$$\int_{z_0}^{z_1}[f(z)-f(z_1)]\,dz+\ldots+\int_{z_{n-1}}^{z_n}[f(z)-f(z_n)]\,dz+\underbrace{\int_{z_0}^{z_1}f(z_1)\,dz+\ldots+\int_{z_{n-1}}^{z_n}f(z_n)\,dz}_{=S_n}=0.$$

Daí

$$S_n=\int_{z_0}^{z_1}[f(z_1)-f(z)]\,dz+\ldots+\int_{z_{n-1}}^{z_n}[f(z_n)-f(z)]\,dz,$$

tomando n suficientemente grande de modo que:

$$\left|f(z_1)-f(z)\right|<\frac{\epsilon}{2\ell}$$
$$\left|f(z_n)-f(z)\right|<\frac{\epsilon}{2\ell}.$$

Daí temos

$$\begin{aligned}
|S_n| &\leq \left|\int_{z_0}^{z_1}[f(z_1)-f(z)]\,dz\right|+\ldots+\left|\int_{z_{n-1}}^{z_n}[f(z_n)-f(z)]\,dz\right|\\
|S_n| &< \frac{\epsilon}{2\ell}\left[\left|\int_{z_0}^{z_1}dz\right|+\ldots+\left|\int_{z_{n-1}}^{z_n}dz\right|\right]\\
|S_n| &< \frac{\epsilon}{2\ell}\left[\underbrace{|z_1-z_0|+\ldots+|z_n-z_{n-1}|}_{\ell}\right]\\
&= \frac{\epsilon}{2\cancel{\ell}}\cdot\cancel{\ell}\\
&= \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Além disso.

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_C f(z)\,dz-S_n+S_n\\
\left|\int_C f(z)\,dz\right| &\leq \left|\int_C f(z)\,dz-S_n\right|+S_n\\
&< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon
\end{aligned}$$

já que ϵ é arbitrário,

$$\int_C f(z)\,dz=0$$

■

3.3 Aplicações do Teorema de Cauchy-Goursat

Aplicação 1. *Mostre que* $\oint_C f(z)\,dz=0$ *onde* f *é a função dada e* C*, a circunferência unitária* $|z|=1$.

(a) $f(z) = z^3 - 1 + 3i$

Solução: *Temos* $f(z) = z^3 - 1 + 3i$ *e C a circunferência unitária* $|z| = 1$, *além disso* $f(z)$ *é*

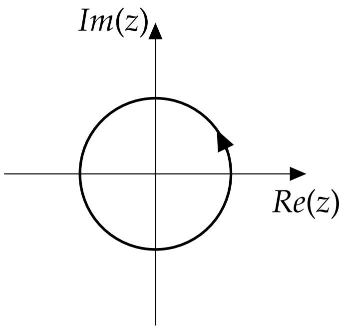


Figura 3.5 – Circunferência de $r = 1$
Fonte: Próprio autor

uma função polinomial e consequentemente é inteira, como podemos observar na figura (3.5), a função é analítica em todos os pontos dentro e sobre o contorno fechado simples. Utilizando o Teorema de Cauchy-Goursat, então temos que:

$$\oint_{|z|=1} \left(z^3 - 1 + 3i\right) dz = 0.$$

■

(b) $f(z) = z^2 + \dfrac{1}{z-4}$

Solução: *Temos* $f(z) = z^2 + \dfrac{1}{z-4}$ *e C a circunferência unitária, note que* $\dfrac{1}{z-4}$ *é analítica*

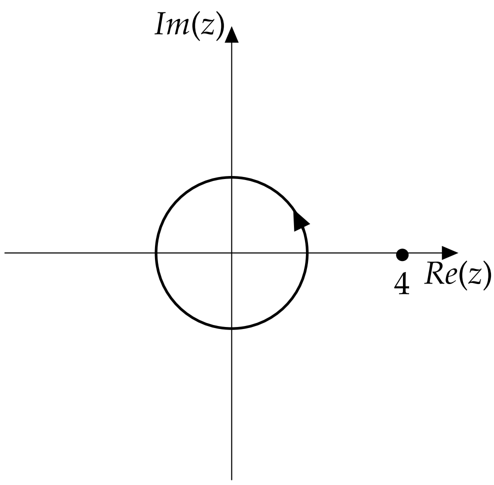


Figura 3.6 – Circunferência de $r = 1$
Fonte: Próprio autor

exceto no ponto $z = 4$, *por outro lado temos* $f(z) = z^2$ *é uma função inteira, logo é analítica. Portanto* $f(z) = z^2 + \dfrac{1}{z-4}$ *é analítica exceto no ponto* $z = 4$, *daí podemos concluir que* $z = 4$ *não é um ponto no interior do contorno da circunferência fechada simples e pelo o*

Teorema de Cauchy-Goursat temos:

$$\oint_{|z|=1} \left(z^2 + \frac{1}{z-4}\right) dz = 0.$$

■

(c) $f(z) = \dfrac{z}{2z+3}$

Solução: *Note que* $f(z) = \dfrac{z}{2z+3}$, *não é analítica no ponto* $z = \dfrac{3}{2}$, *como este ponto não*

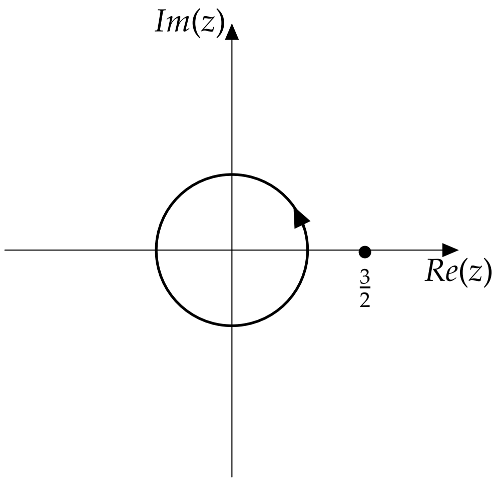


Figura 3.7 – Circunferência de $r = 1$
Fonte: Próprio autor

está dentro do contorno da circunferência fechada simples, veja a figura (3.7) e pelo o Teorema de Cauchy-Goursat temos:

$$\oint_{|z|=1} \frac{z}{2z+3}\, dz = 0.$$

■

Aplicação 2. *Calcule a integral dada ao longo do(s) contorno(s) fechado(s)indicado(s)* $\oint_C \dfrac{2z}{z^2+3}\, dz.$

Solução: *Neste caso temos* $f(z) = \dfrac{2z}{z^2+3}$, *e o denominador pode ser fatorado* $z^2 + 3 = (z - \sqrt{3}i) - (z - \sqrt{3}i)$, *onde* $a = 1$, $b = 0$ *e* $c = 3$.

Substituindo na fórmula quadrática, temos;

$$\begin{aligned} z &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(3)}}{2 \cdot 1} \\ &= \pm \frac{\sqrt{-12}}{2} \\ &= \pm \frac{\sqrt{4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2} \end{aligned}$$

lembrando que $i^2 = -1$, *logo*

$$\begin{aligned} z &= \pm 2\frac{\sqrt{3 \cdot i^2}}{2} \\ &= \pm\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Portanto, o integrando $\frac{2z}{z^2+3}$, *não é analítico nos pontos* $z = \sqrt{3}i$ *e* $z = -\sqrt{3}i$. *Rescrevendo* $f(z)$

$$\frac{2z}{z^2+3} = \frac{2z}{\left(z - \sqrt{3}i\right)\left(z + \sqrt{3}i\right)}. \tag{3.16}$$

Vamos usar frações parciais em (3.16):

$$\frac{A}{z - \sqrt{3}i} + \frac{B}{z + \sqrt{3}i} = \frac{2z}{\left(z - \sqrt{3}i\right)\left(z + \sqrt{3}i\right)}$$

$$\frac{\cancel{\left(z - \sqrt{3}i\right)}\left(z + \sqrt{3}i\right)}{\cancel{\left(z - \sqrt{3}i\right)}}A + \frac{\left(z - \sqrt{3}i\right)\cancel{\left(z + \sqrt{3}i\right)}}{\cancel{\left(z + \sqrt{3}i\right)}}B = \frac{2z\cancel{\left(z - \sqrt{3}i\right)\left(z + \sqrt{3}i\right)}}{\cancel{\left(z - \sqrt{3}i\right)\left(z + \sqrt{3}i\right)}}$$

$$\left(z + \sqrt{3}i\right)A + \left(z - \sqrt{3}i\right)B = 2z$$

$$Az + A\sqrt{3}i + Bz - B\sqrt{3}i = 2z$$

Daí temos:

$$\left.\begin{array}{r} Az + Bz = 2z \\ A\sqrt{3}i - B\sqrt{3}i = 0 \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{cc} A + B = 2 & (1) \\ A\sqrt{3}i - B\sqrt{3}i = 0 & (2) \end{array}\right\}.$$

Em (1) *temos* $A = 2 - B$, *substituindo* (1) *em* (2) *temos;*

$$\begin{aligned} (2 - B)\sqrt{3}i - B\sqrt{3}i &= 0 \\ 2\sqrt{3}i - 2B\sqrt{3}i &= 0 \\ 2\sqrt{3}i &= 2B\sqrt{3}i \\ B &= \frac{\cancel{2\sqrt{3}i}}{\cancel{2\sqrt{3}i}} \\ B &= 1 \end{aligned}$$

Substituindo $B = 1$ *em* (1),

$A = 2 - B$

$A = 2 - 1 = 1$; *Daí temos que* $A = B = 1$ *em*

$$\frac{A}{z - \sqrt{3}i} + \frac{B}{z + \sqrt{3}i}.$$

Então obtemos novas integrais

$$\oint\left(\frac{1}{z - \sqrt{3}i} + \frac{1}{z + \sqrt{3}i}\right)dz = \oint\frac{1}{z - \sqrt{3}i}dz + \oint\frac{1}{z + \sqrt{3}i}dz.$$

Esta função não é analítica neste dois pontos $z = \sqrt{3}i$ *e* $z = -\sqrt{3}i$. ■

(a) $|z| = 1$

Solução: *Como os pontos* $z_1 = \sqrt{3}i$ *e* $z_2 = -\sqrt{3}i$*, não é um ponto no interior ou*

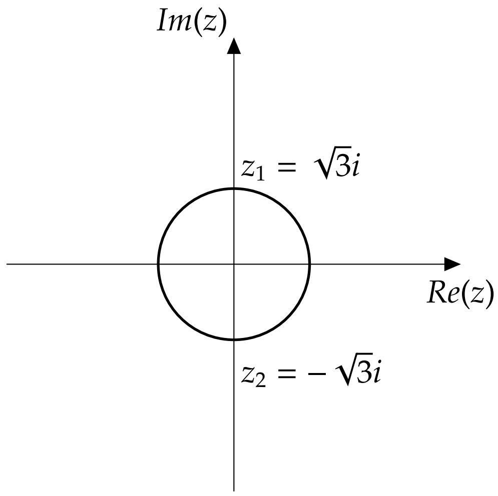


Figura 3.8 – Circunferência de $r = 1$
Fonte: Próprio autor

contorno da circunferência unitária fechada, observe a figura (3.8), aplicando o Teorema de Cauchy-Goursat temos;

$$\oint \frac{1}{z-\sqrt{3}i}\,dz + \oint \frac{1}{z+\sqrt{3}i}\,dz = 0 + 0 = 0.$$

Portanto podemos concluir que

$$\oint_{|z|=1} \frac{2z}{z^2+3} = 0$$

■

(b) $|z - 2i| = 1$

Solução: *Daí temos*

$$\oint \frac{1}{z-\sqrt{3}i}\,dz + \oint \frac{1}{z+\sqrt{3}i}\,dz.$$

Como z_2*, não é um ponto no interior da circunferência, então vamos aplicar o Teorema de Cauchy Goursat na primeira integral.*

$$0 + \oint \frac{1}{z+\sqrt{3}i}\,dz = \oint \frac{1}{z+\sqrt{3}i}\,dz.$$

Podemos mostrar que se z_0 *for um número complexo constante qualquer interior a qualquer contorno fechado simples C, para um inteiro n. Logo temos*

$$\oint \frac{z}{(z-z_0)^n}\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

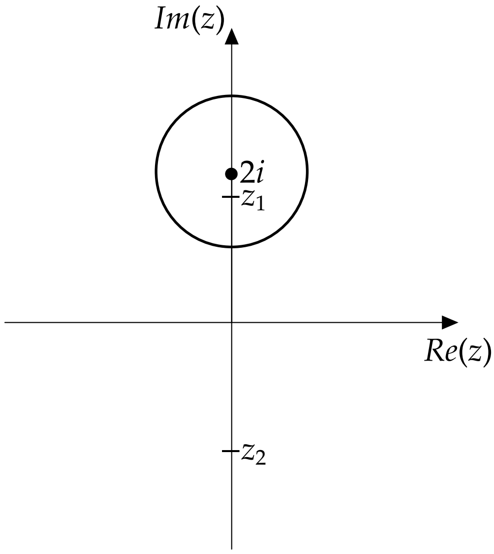


Figura 3.9 – Circunferência de $r = 1$ no centro $2i$
Fonte: Próprio autor

Portanto, podemos concluir que $n = 1$.

$$\oint \frac{1}{z+\sqrt{3}i}\,dz = 2\pi i.$$

Logo

$$\oint \frac{1}{z-\sqrt{3}i}\,dz + \oint \frac{1}{z+\sqrt{3}i}\,dz = 2\pi i.$$

■

(c) $|z| = 4$

Solução:

Nesta resolução vamos utilizar outra técnica, por meio da parametrização.

$$\oint \frac{1}{z-\sqrt{3}i}\,dz + \oint \frac{1}{z+\sqrt{3}i}\,dz.$$

Considere;

$$\begin{cases} C_1 : z(t) = \sqrt{3}i + e^{it}, 0 \le t \le 2\pi \\ C_2 : z(t) = -\sqrt{3}i + e^{it}, 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

São curvas parametrizadas na circunferência unitária em $|z| = 1$. *Como* $|z \pm \sqrt{3}i| = \pm e^{it}$ *e* $dz = ie^{it}dt$, *temos:*

$$\left[\oint_C \frac{dz}{z-\sqrt{3}i} + \frac{dz}{z+\sqrt{3}i}\right] = \oint_{C_1} \frac{dz}{z-\sqrt{3}i} + \oint_{C_1} \frac{dz}{z+\sqrt{3}i} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z-\sqrt{3}i} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z+\sqrt{3}i}.$$

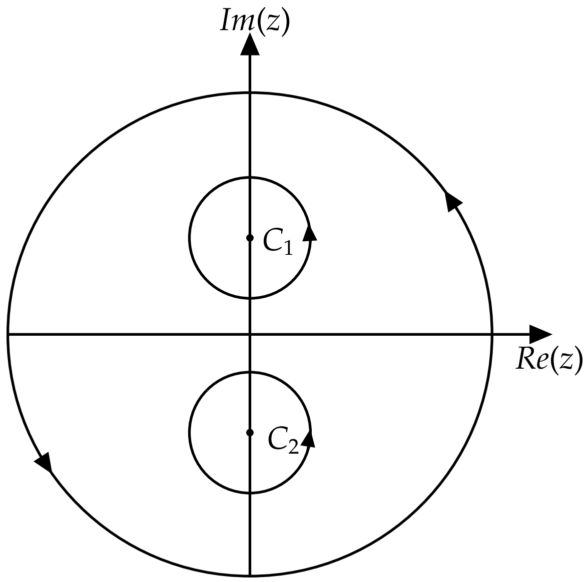


Figura 3.10 – circunferência centrada na origem $C_1 = \sqrt{3}i$, $C_2 = -\sqrt{3}i$ e $r = 4$
Fonte: Próprio autor

Aplicando o Teorema de Cauchy-Goursat em

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z + \sqrt{3}i} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z - \sqrt{3}i} = 0.$$

Agora vamos resolver as outras duas integrais, utilizando as parametrizações;

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1} \frac{dz}{z - \sqrt{3}i} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z + \sqrt{3}i} &= \oint_{C_1} \frac{i\cancel{e^{it}}}{\cancel{e^{it}}} + \oint_{C_2} \frac{i\cancel{e^{it}}}{\cancel{e^{it}}} \\
&= i \oint_0^{2\pi} dt + i \oint_0^{2\pi} dt \\
&= 2ti \Big|_0^{2\pi} \\
&= 2i\,(2\pi - 0) \\
&= 4\pi i
\end{aligned}$$

■

Considerações finais

Ao realizar este trabalho, tivemos a oportunidade de aprofundar os conhecimentos e podemos perceber a importância de Análise Complexa para Matemática. Através desse conhecimento, formalizamos o estudo para mostrar um dos principais teorema da Análise complexa.

Através desse estudo mostramos, por meio, dos números complexos que tem grande relevância na Matemática e outras áreas de estudos, por exemplo, vários campos da Ciência e Engenharia. Além disso, os Números Complexos ($\mathbb{C}$) é representado na forma $x + yi$, assim x é a parte real e y é a parte imaginária. O $\mathbb{C}$ é importante para soluções de problemas em algumas áreas de estudos, entre eles podemos citar: Equações Diferenciais, Análise de Funções Complexas, Mecânica Quântica, Geometria e Planos Complexos, entre outros.

A integral de plano complexo, serve para calcular a integral de uma função complexo ao longo de uma curva. Além disso, foi apresentado ao longo do trabalho, onde representamos a integral de linha complexa ao longo de uma curva C, representada pela seguinte notação $\int_C f(z)\,dz$, ou seja, Integral de Contorno.

Uma ferramenta importante para estudar essas integrais, é o Teorema de Cauchy . Esse teorema é um dos resultados mais importante da Análise Complexa. De fato, $f(z)$ é uma função analítica em uma região num domínio simplesmente conexo, então a integral para todo contorno fechado simples dentro dessa região sempre será zero, ou seja, $\int_C f(z)\,dz = 0$.

Referências

ÁVILA, G. *Variáveis complexas e aplicações*. [S.l.]: Rio de Janeiro : LTC, 2011., 1993. Citado 3 vezes nas páginas 10, 22 e 24.

CHURCILL, R. V. *Variáveis Complexas e suas aplicações*. [S.l.]: São Paulo, Mc Graw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo 1975., 1899. Citado na página 10.

DENNIS, G. Z.; SHANAHAN, P. D. *Variáveis Complexas e suas aplicações*. [S.l.]: Rio de Janeiro : LTC, 2011., 1940. Citado 7 vezes nas páginas 10, 19, 22, 23, 24, 32 e 37.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos, Projeto Euclides, IMPA*. [S.l.]: Rio de Janeiro., 1983. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.

SOARES, M. G. *Cálculo em uma variável complexa. 3ª edição*. [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 10, 32 e 35.

STEWART, J. *Cálculo volume 2*. [S.l.]: São Paulo: Cengage Learning, 2013. Citado na página 22.