



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Bacharelado

Juliana Rodrigues de Aguiar

Aspectos Matemáticos da Realidade Virtual

São Luís - MA
2022

Juliana Rodrigues de Aguiar

Aspectos Matemáticos da Realidade Virtual

Monografia apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharela em Matemática.

Curso de Matemática – Bacharelado

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Me. Cleber Araújo Cavalcanti

São Luís - MA

2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Aguiar, Juliana Rodrigues de.
Aspectos Matemáticos da Realidade Virtual / Juliana
Rodrigues de Aguiar. - 2022.
43 p.

Orientador(a): Cleber Araújo Cavalcanti.
Curso de Matemática, Universidade Federal do Maranhão,
São Luís, 2022.

1. Álgebra Linear Numérica. 2. Aplicações em ensino.
3. Computação Gráfica. 4. Realidade Virtual. I.
Cavalcanti, Cleber Araújo. II. Título.

Juliana Rodrigues de Aguiar

Aspectos Matemáticos da Realidade Virtual

Monografia apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharela em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 30/02/2022

Prof. Me. Cleber Araújo Cavalcanti
Orientador
DEMAT/UFMA

Prof. Dr. Luis Fernando Coelho Amaral
Primeiro Supervisor
DEMAT/UFMA

Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva
Segundo Supervisor
DEMAT/UFMA

*Aos meus pais, os dois maiores incentivadores das realizações dos meus sonhos.
Amo vocês!*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse.

Aos meus pais Lurdilene e Eliel pelo apoio e incentivo que serviram de alicerce para as minhas realizações, que sempre estiveram me apoiando ao longo de toda a minha trajetória.

A meu namorado Ivan pelo seu amor e apoio.

A todos os meus amigos do curso de graduação que compartilharam dos inúmeros desafios que enfrentamos, sempre com o espírito colaborativo.

Ao meu orientador Prof. Me. Cleber Araújo Cavalcanti que apesar da intensa rotina de sua vida acadêmica aceitou me orientar nesta monografia.

Também quero agradecer à Universidade Federal do Maranhão e ao seu corpo docente que demonstrou estar comprometido com a qualidade e excelência do ensino.

“Tão-somente esforça-te, e tem bom ânimo.”

Josué 1, 18

Resumo

O mundo está em uma constante evolução tecnológica e com essa evolução percebemos novas necessidades que se refletem até no ensino, pois novas sociedades trazem consigo novos comportamentos e pensamentos. Pensando nisso, este trabalho tem por objetivo apresentar mais uma possibilidade de ensino da Matemática utilizando o recurso da realidade virtual que a cada dia se torna mais viável e aberto a diversas possibilidades, que dependem apenas de criatividade e empenho. Mas diferente do que se possa imaginar, minha proposta não defende o uso estático como um simples usuário, pelo contrário, pretendo mostrar que é possível apresentar esse recurso de uma forma dinâmica, como um auxiliar na construção do conhecimento. Pois como veremos nos resultados do projeto usado para exemplificar a minha proposta, é possível se utilizar de um recurso clássico já muito explorado no ensino como o jogo Torre de Hanói e ampliar as suas opções como um recurso didático de uma forma inovadora.

Palavras-chave: Realidade Virtual, Computação Gráfica, Álgebra Linear Numérica, Aplicações em ensino.

Abstract

The world is in constant technological evolution and with this evolution, we notice new demands that are reflected even in teaching, as new societies bring with them new behaviors and thoughts. With that in mind, this work aims to goal another possibility of teaching Mathematics using the resource of virtual reality that every day becomes more viable and open to several possibilities, which depend only on creativity and commitment. But different from what you might imagine, my proposal does not defend the use of static as a simple final user, at contrary, I intend to show that it is possible to present this resource dynamically, as an aid in the construction of knowledge. As we will see in the results of the project used to exemplify my proposal, it is possible to use a classic resource already widely explored in teaching such as the Tower of Hanoi game, and expand its options as a didactic resource in an innovative way.

Keywords: Virtual Reality, Computer Graphics, Numerical Linear Algebra, Teaching Applications.

Sumário

	INTRODUÇÃO	11
1	REALIDADE VIRTUAL	12
1.1	Realidade Virtual Imersiva	13
1.2	Realidade Virtual não Imersiva	13
2	APLICAÇÕES DA REALIDADE VIRTUAL	15
2.1	Arquitetura	15
2.2	Área Militar	15
2.3	Marketing	17
2.4	Medicina	18
2.5	Educação	19
3	ASPECTOS MATEMÁTICOS	22
3.1	Sistemas de Coordenadas 3D	22
3.2	Bases Ortonormais	23
3.3	Malhas, Polígonos e Vértices	23
3.4	Gerando uma imagem	24
3.4.1	<i>Ray Casting</i>	24
3.4.1.1	Representação do raio	25
3.4.2	Rasterização	26
3.5	Interpolação Linear	26
3.6	Triângulos	27
3.6.1	Coordenadas Baricêntricas	27
3.7	Texturas	28
3.7.1	Atribuição de coordenadas de textura	28
3.8	Transformações	30
3.8.1	Transformação Linear 2D	31
3.8.2	Transformação Linear 3D	32
4	REALIDADE VIRTUAL NO ENSINO DA MATEMÁTICA	34
4.1	<i>Serious Games</i>	36
4.2	Torre de Hanói	37
4.3	Desenvolvimento do Jogo	38
4.3.1	Regra do Jogo	38
4.3.2	Conceitos Matemáticos	39

4.3.2.1	Algoritmo	39
4.3.3	Pesquisa	40
4.3.4	Resultados	40
	CONCLUSÃO	42
	REFERÊNCIAS	43

Introdução

A Matemática é uma área do conhecimento dinâmica, está presente em tudo e não é à toa que Galileu Galilei a considerou como sendo a linguagem que Deus escreveu o universo. Diante disso, não podemos tratá-la de forma passiva, pois para obter seu domínio é necessário muita prática que pode ir além da caneta e o papel, como por exemplo numa análise de uma tecnologia como a Realidade Virtual (RV).

Nesse trabalho, iremos mostrar alguns aspectos matemáticos que encontramos numa parte dessa tecnologia, veremos superficialmente alguns conceitos que são aplicados na computação gráfica. Mas se houver curiosidade, quanto mais afundo você se aprofundar nesse assunto mais conceitos complexos da matemática você irá se deparar.

No entanto, este trabalho pretende permanecer na superfície, pois o objetivo é mostrar para os que não entendem a importância da matemática uma de suas aplicações e quem sabe plantar uma semente do interesse por essa área do conhecimento e além disso, compreendendo a dificuldade que assuntos abstratos como os da disciplina Álgebra Linear podem representar para um ingressante no curso, quero expor uma alternativa que pode favorecer o aprendizado desses assuntos.

Pensando nisso, minha proposta nesse trabalho é mostrar que é possível criar um projeto usando essa tecnologia sendo a matemática o centro de interesse do começo ao fim do projeto, analisando os aspectos envolvidos, pensando em uma aplicação e por fim desenvolvendo.

1 Realidade Virtual

Várias são as definições sobre a realidade virtual, mas em geral, refere-se a uma experiência imersiva e interativa baseada em imagens gráficas 3D geradas em tempo real por computador, ou seja, é uma simulação gerada, de um mundo real ou apenas imaginário. (BRAGA, 2001)

Basicamente a ideia surgiu em 1963, nos Estados Unidos, com uma aplicação desenvolvida por Ivan Sutherland, que permitia a manipulação de figuras tridimensionais no monitor de um computador, em tempo real.

Apesar de ser uma tecnologia antiga, o custo elevado de implantação foi um entrave durante mais de duas décadas. Agora devido à evolução dos *hardwares*, que estão cada vez menores, eficientes e mais acessíveis por terem custos menos elevados e também dos *softwares* que com a evolução dos *hardwares* lhes foi permitido possuir mais robustez, estamos cada vez mais aptos a expandir o uso dessa tecnologia.

Apesar de possuir definições distintas dependendo da literatura usada, Realidade Virtual (RV) tem algumas subdefinições devido às várias possibilidades de aplicação que a tecnologia pode oferecer, pois note que dependendo de como é aplicada ela pode ser considerada segundo (RIBEIRO; ZORZAL, 2011) **imersiva** ou **não imersiva**.

Além do que foi exposto, RV também pode ser caracterizado pela coexistência integrada de mais duas ideias que exigem nossa atenção, que são:

- Interação
- Envolvimento

Conforme (NETTO; MACHADO; OLIVEIRA, 2002) a **interação** está ligada à capacidade do computador detectar as entradas do usuário e modificar instantaneamente o mundo virtual em função das ações efetuadas sobre ele (capacidade reativa), pois é evidente que as pessoas são cativadas por uma boa simulação em que as cenas mudam em resposta aos seus comandos, que é característica mais marcante encontrada nos vídeo *games*. Outros artifícios para aumentar o realismo são empregados, por exemplo, a texturização dos objetos do ambiente e a inserção de sons tanto ambientais quanto sons associados a objetos específicos.

Já o **envolvimento**, por sua vez, está ligado ao grau de motivação para o engajamento de uma pessoa em determinada atividade que pode ser passivo, como ler um livro ou assistir televisão, ou ativo, ao participar de um jogo com algum parceiro.

Diante dessas possibilidades RV tem potencial para os dois tipos de envolvimento ao permitir a exploração de um ambiente virtual e propiciar a interação do usuário com o mundo virtual dinâmico.

Embora a percepção visual seja nosso sentido primário, pois 70% dos receptores do sentido humano encontram-se nos olhos, tornando-os os grandes “monopolistas dos sentidos”, outros sentidos também devem ser estimulados para proporcionar uma completa imersão; entre os quais o retorno auditivo, o tato e a força de reação.

1.1 Realidade Virtual Imersiva

A realidade virtual é considerada imersiva quando transporta o usuário totalmente para o domínio da aplicação, fazendo com que ele se sinta completamente imerso no mundo virtual, interagindo com seus objetos e sentindo suas reações, através dos dispositivos multissensoriais.(RIBEIRO; ZORZAL, 2011)

Por isso, quando a implementação é baseada em capacete (HMD), *VR headset* ou salas de multiprojeção e em outros dispositivos multissensoriais, considera-se imersiva.

1.2 Realidade Virtual não Imersiva

A realidade virtual é considerada não imersiva quando transporta o usuário parcialmente para o domínio da aplicação, preservando seu senso de presença no mundo real, enquanto atua no mundo virtual, sendo assim, a tecnologia é implementada no modo janela, ou seja, é modo de acesso ao ambiente virtual em que já estamos muito bem familiarizados, pois conforme (NETTO; MACHADO; OLIVEIRA, 2002) isso se deve ao fato de os monitores ainda apresentarem alguns pontos positivos, como o baixo custo e a facilidade de uso, evitando as limitações técnicas e problemas decorrentes do uso do capacete.

Porém, a tendência deve ser a utilização da RV imersiva na grande maioria das aplicações futuras ao invés do que é definido por multimídia pelo (RIBEIRO; ZORZAL, 2011):

A interação com a aplicação ocorre com o apoio de teclado ou mouse, permitindo que o usuário atue indiretamente em pontos ou espaço da tela do monitor ou de projeção. Recentemente, as interações tangíveis aplicadas diretamente na tela do monitor ou de projeção, através da técnica *touch screen*, vêm crescendo, em função de suas facilidades e funcionalidades. As interações com o computador, por meio de diálogo verbal, ainda estão em estágio inicial, mas são promissoras para facilitar o acionamento e controle das aplicações computacionais. Aplicações multimídia utilizam interfaces em ambientes 2D.

Atualmente, podemos notar claramente esta tendência de utilização da Realidade Virtual no ousado projeto **Metaverso** que vem sendo desenvolvido pela empresa Meta (anteriormente Facebook).

2 Aplicações da Realidade Virtual

Estamos a cada dia sendo levados para uma nova geração de interfaces computacionais baseadas em realidade virtual em que sua utilização será expandida para os mais diversos setores que vão desde o *marketing* até a medicina, conforme (NETTO; MACHADO; OLIVEIRA, 2002) já existem setores buscando novas formas de obter uma melhoria organizacional das empresas e propiciar a modernização do sistema produtivo. Alguns pesquisadores estão propondo a utilização de *software* baseado em RV para simulação de equipamentos, treinamento de funcionários, validação de planejamento de produção, visualização de *layouts* de fábricas e prototipação de produtos.

Diante disso, já existem uma grande quantidade de *softwares* disponíveis, com diferentes ferramentas de programação e voltados para diferentes plataformas. Por conta desse desenvolvimento, hoje é possível, com um computador pessoal, construir e explorar ambientes de RV.

2.1 Arquitetura

Imagine que você precise contratar um serviço de arquitetura para realizar uma reforma na sua casa ou construir um imóvel do zero, não importa o tamanho da obra, se for de construção ou reconstrução, é o tipo de trabalho que sempre deixa a desejar em algo e precisa de ajustes, no entanto essas correções podem significar um grande problema logístico e financeiro. A fim de eliminar essas pequenas dores de cabeça, tanto para quem presta o serviço quanto para quem irá receber a obra pronta, temos a realidade virtual como aliada trazendo alívio e otimização dos resultados para os dois lados.

Por exemplo, em uma entrevista a (REVISTASIM, 2020) o arquiteto George Casé explica como vem desenvolvendo novas possibilidades e conta a reação dos primeiros clientes a experimentarem os recursos da realidade virtual. Casé afirmou que:

A necessidade surgiu a partir do próprio 3D. Antes a gente trabalhava basicamente com planta baixa e perspectivas esquemáticas. Isso bem lá atrás. Só que o cliente não consegue compreender muito bem o projeto. Com o 3D, isso já deu uma outra cara. Os óculos trouxeram uma inovação. É uma tecnologia acessível, a gente já detém o conhecimento do software, então, por que não oferecer?

2.2 Área Militar

Na área militar, uma aplicação típica é a simulação de uma cabine de avião de combate, desenvolvida pela *British Aerospace Real* para treinamento dos cadetes britânicos.

Outro trabalho na área de simulação e treinamento em aviões de combate. A RV também é usada para treinar operadores de radares que rastreiam trajetórias de aeronaves, no treinamento de marinheiros para a prática de navegação em submarinos e na simulação de um tanque de guerra para treinamento (NETTO; MACHADO; OLIVEIRA, 2002).

No Brasil algumas disciplinas, como Tiro Policial e Técnicas de Polícia Ostensiva, evoluíram durante os anos, passando do simples repasse de conhecimento teórico para um conteúdo direcionado à prática policial diária. Assim, o Policial Militar estudante recebe um conhecimento de emprego prático, o qual será utilizado no cotidiano do exercício profissional, junto à população. Essa evolução foi marcada pelo surgimento e uso de tecnologias multimídias que, no caso da Polícia Militar de Santa Catarina, têm servido para aproximar o contexto da formação, no treinamento do Policial Militar, daquela realidade que será enfrentada nas ruas, durante o exercício profissional.

A Polícia Militar de Santa Catarina dispõe e utiliza recursos multimídia, como é o caso do simulador de atendimento de ocorrências policiais e de tiro policial, mídia que possibilita ao Policial Militar, em ambiente controlado, simular o atendimento de ocorrências onde poderá se deparar com variadas situações, diferentes formas de enfrentamento e respostas agressivas do cidadão abordado (ROSA; PAVANATI, 2014).

Segundo (ROSA; PAVANATI, 2014) após adotar a tecnologia no quadro de formação de Policiais Militares, houve uma redução evidente na quantidade de policiais mortos em combate, entre os anos de 1990 até 2000, apesar de o estado ter sofrido um aumento significativo na criminalidade junto ao poder bélicos dos mesmos.

Já na Espanha, uma empresa desenvolveu uma solução para uso militar, a Indra, fornecedora de tecnologia e consultoria, lançou uma nova versão do simulador Víctrix, que coloca soldados em um ambiente urbano virtual no qual eles podem preparar suas missões com maior grau de detalhamento e precisão, até que uma execução perfeita seja alcançada (MONTEIRO, 2021).

Usando um óculos de realidade virtual na sala de simulação, os soldados se sentem em uma situação de combate real em um cenário tático urbano, como preparação para uma missão, não necessariamente a simulação precisa ser no mesmo batalhão, já que a aplicação trabalha conectada a internet.

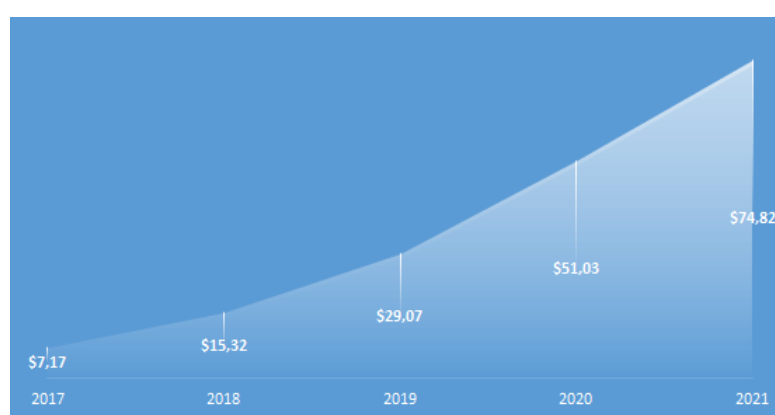
A tecnologia usa renderização 3D e tecnologias de posicionamento óptico que permitem localizar e rastrear objetos com precisão milimétrica e baixa latência. Cada soldado usa sensores no corpo para que o simulador detecte sua posição e reproduza praticamente todos os seus movimentos.

2.3 Marketing

Dentro do Marketing a realidade virtual pode ser usada para diversos fins, tais como: treinamento, demonstração, apresentação de produtos, comunicação de informações corporativas e entre outros (RIBEIRO; ZORZAL, 2011).

Diante de tantas possibilidades não é de se ficar surpreso em como o mercado tem crescido, podemos observar no gráfico abaixo na Figura 2.1 que as receitas globais de realidade virtual atingiram a marca de US\$ 7 bilhões de dólares em 2017, com previsão de atingir US\$ 74 bilhões no ano de 2021.

Figura 2.1 – Global VR Industry Revenue, 2017 - 2021 em bilhões de dólares



Fonte: Autora.

Ela tem um grande valor para muitas organizações, principalmente relacionada a capacidade de interação oferecida de dar ao usuário a verdadeira experiência de propriedade do produto, sem a necessidade de envio de amostras do mesmo, isso acontece quando, por exemplo, o usuário pode interagir com a modelagem de um produto, observando detalhes externos e de funcionamento, o que permite ao cliente conhecer melhor as características de um produto antes de comprá-lo, o que representa para a Empresa, a expectativa é a diminuição de custos com a produção e envio de protótipos ou amostras (RIBEIRO; ZORZAL, 2011).

A imersão que a realidade virtual proporciona é muito maior que a de qualquer outro meio que existe hoje, e tem grande efeito sobre o comportamento dos consumidores. As experiências com realidade virtual afetam áreas do nosso cérebro responsáveis por nos fazer tomar decisões de compra (MORAES, 2021).

Além disso, explicar como equipamentos industriais ou produtos complexos operam pode ser complicado, logo a RV é uma excelente ferramenta para demonstrar as operações e as capacidades de um produto ou máquina.

E mais, existe um grande aumento no potencial de mercado uma vez que a sua experiência com o produto pode ser compartilhado por qualquer pessoa no mundo que

tem o *hardware/software* necessário, nesse contexto a *internet* tem papel fundamental. Por fim, apresenta a possibilidade de se usar todos os quatro elementos do paradigma de novas comunicações (entreter, informar, persuadir e interagir), proporcionando uma riqueza de opções a serem exploradas (RIBEIRO; ZORZAL, 2011).

Diante disso, podemos afirmar que é o próximo passo no consumo de conteúdo, pois basta pensar em como temos consumido conteúdo na internet:

- Texto
- Imagens
- Vídeos

Cada item acima citado, adiciona um novo aspecto visual ao conteúdo, tornando-o mais atrativo, relevante e interativo. O que por consequência, torna a experiência com RV o próximo passo, colocando o usuário mais próximo do conteúdo, quase como parte dele. Conforme (MORAES, 2021) em um cenário de muita competitividade, pode ser interessante já sair à frente da concorrência.

2.4 Medicina

A área de saúde tem sido uma das grandes beneficiadas e, ao mesmo tempo, uma das grandes inspiradoras para o desenvolvimento de aplicações usando esta tecnologia, pois a realidade virtual pode oferecer recursos e respostas às necessidades computacionais relacionadas a simulações, treinamentos e terapias para as diversas especialidades da saúde (RIBEIRO; ZORZAL, 2011).

Conforme (KIRNER; SISCOOTTO, 2007) em aplicações médicas, objetos tridimensionais (3D) são usados para representar pacientes, equipamentos, ambientes (consultórios, salas de cirurgia) e órgãos humanos. Em geral, modelos matemáticos e físicos são empregados para simular trajetórias, interações, efeitos e outras características desses processos. Exemplos de simulações são o efeito de um medicamento no corpo humano ou as consequências da radiação proveniente de um exame de raios-X.

Os treinamentos certamente constituem a categoria mais explorada quando se trata de aplicações de RV. Usando objetos 3D, técnicas de interação, dispositivos tangíveis e dispositivos que favorecem a visualização estereoscópica, é possível construir ferramentas por meio das quais estudantes e profissionais podem aprender e treinar um determinado procedimento antes de executá-lo em pacientes reais.

A aplicação de uma anestesia e a simulação de procedimentos cirúrgicos são exemplos de ferramentas que podem se beneficiar dessas tecnologias, além das terapias

que auxiliam no tratamento e recuperação de pacientes em diversas áreas, por exemplo pode-se aplicar no tratamento de fobias e no tratamento de reabilitação física e mental (RIBEIRO; ZORZAL, 2011).

2.5 Educação

Segundo (BRAGA, 2001) esta aplicação ainda é foco de estudos, mas iremos analisar pesquisas que estão em andamento e as propostas de utilização no ensino. Pois, já vimos que empresas tem adotado esse recurso como uma forma eficaz de venda, validação de protótipos e treinamento de seus funcionários.

Em (BRAGA, 2001) a realidade virtual dará um grande salto em inúmeras áreas dos conhecimentos existentes, mas principalmente na educação, por permitir experiências com o conhecimento de forma imersiva e interativa; ou seja, permitirá que ocorra aprendizagem sobre um determinado tema inserido no contexto, e com isso a cada ação que fizer, receber um *feedback*, já que cada pessoa possui uma particularidade, logo cada um tem o seu estilo de aprendizagem, uns visuais, outros verbais, uns gostam de explorar e outros preferem deduzir.

Diante disso, estando o usuário, envolvido e totalmente imerso no ambiente virtual, ele poderá desenvolver um comportamento natural e intuitivo, buscando agir como agiria no mundo real e através da interação receber a resposta ideal para suas ações, assim a educação passa a ser vista como um processo de descoberta, exploração e de observação, além de uma eterna construção do conhecimento. Diante disso, as características específicas da Realidade Virtual podem transformá-la num poderoso instrumento a serviço de todos que buscam a evolução da educação (BRAGA, 2001).

Em (BRAGA, 2001) afirma-se que a RV não pode ser tratada apenas como “mais uma ferramenta” para melhorar a aprendizagem e sim, como um poderoso instrumento de aprendizagem cujos métodos tradicionais estão falhando. Falha-se exatamente por não permitir a descoberta e a exploração do conhecimento, construindo seu próprio saber de forma mais duradoura por não ser alicerçado numa experiência pessoal.

Vários autores concordam ao relatar que existem diversas razões para se usar a Realidade Virtual na educação. Dentre elas destacamos:

- Maior motivação dos estudantes (usuários);
- O poder de ilustração da realidade virtual para alguns processos e objetos é muito maior do que outras mídias;
- Permite uma análise de muito perto;
- Permite uma análise de muito longe;

- Permite que as pessoas deficientes realizem tarefas que de outra forma não são possíveis;
- Dá oportunidades para experiências;
- Permite que o aprendiz desenvolva o trabalho no seu próprio ritmo;
- Não restringe o prosseguimento de experiências ao período da aula regular;
- Permite que haja interação, e desta forma estimula a participação ativa do estudante.

Mas (BRAGA, 2001) ressalta que infelizmente, a utilização da Realidade Virtual nas escolas está longe de ser um sistema barato. Contudo, sua utilidade é superior aos custos devendo ser um fator determinante para sua implementação no setor da educação. Em primeiro instante esta tecnologia se instalará no **ensino superior**, no qual a Realidade Virtual está sendo utilizada como trabalho de investigação e pesquisa e acrescenta que para a propagação desses ambientes virtuais deverão ser vencidas algumas barreiras, como o alto custo de implantação, a falta de métodos, de técnicas e de ferramentas de desenvolvimento, aliados à necessidade de envolvimento de equipes multidisciplinares. Além disso (BRAGA, 2001) cita que:

A sala de aula interativa seria o ambiente em que professor interrompe a tradição do falar/ditar, deixando de identificar-se com o contador de histórias, e adota uma postura semelhante a dos *designers* de *software* interativo. Ele constrói um conjunto de territórios a serem explorados pelos alunos e disponibiliza co-autoria e múltiplas conexões, permitindo que o aluno também faça por si mesmo. Isto significa muito mais do que ser um conselheiro, uma ponte entre a informação e o entendimento, um estimulador de curiosidade e fonte de dicas para que o aluno viaje sozinho no conhecimento obtido nos livros e nas redes de computador. E a educação pode deixar de ser um produto para se tornar um processo de troca de ações que cria conhecimento e não apenas o reproduz.

Outro ponto positivo não mencionado acima é que a RV permite levar ao usuário temas de difícil aprendizagem e às vezes com impossibilidade de demonstração, pois (MARÇAL; ANDRADE; RIOS, 2005) considera que o ambiente de realidade virtual seja tomado como um apoio à aprendizagem, os mundos tridimensionais virtuais, onde o sujeito possa se movimentar, ouvir, ver e manipular objetos, como no mundo real, representam interessantes oportunidades à disposição dos educadores. A introdução dos chamados Sistemas de Realidade Virtual (SRV) na educação pode modificar significativamente o papel destes educadores e aponta o m-Learning como uma importante alternativa de ensino e treinamento à distância, que possui um grande potencial na utilização da tecnologia móvel como parte de um modelo de aprendizado integrado, caracterizado pelo uso de dispositivos de comunicação sem fio, de forma transparente e com alto grau de mobilidade.

Já (MOLINA, 2018) afirma que a RV torna o ensino mais agradável e memorável, pois permite que o conteúdo da aula seja memorável por anos e que esse tipo de recurso proporciona ao aluno a possibilidade de se expressar de forma diferenciada, utilizando um novo estilo de letramento digital, e exemplifica que quando um professor de Matemática planeja uma sessão de problemas com contexto, os alunos normalmente expressam alguma rejeição, mas as habilidades de resolução de problemas com contexto são muito importantes para o desenvolvimento de competência matemática e precisamos procurar situações em que a resolução de um problema de contexto tornar-se uma atividade motivacional.

Uma forma de torna isso motivante é usar a RV, que por exemplo, em uma atividade, os alunos trabalham em pares para criar uma realidade virtual apresentando um problema de contexto sobre formas geométricas tridimensionais. Cada problema é compartilhado com a sala de aula com um código QR, e os alunos têm que escanear quantos códigos puderem em uma hora e resolver os problemas expostos. Com esta atividade estão trabalhando diferentes habilidades para resolver problemas como normalmente fazem em uma sala de aula tradicional, mas com um fator altamente motivador: usar novas tecnologias para criar sua própria realidade virtual para retratar um problema de contextualização (MOLINA, 2018).

3 Aspectos Matemáticos

A programação 3D requer novas habilidades e conhecimentos que vão além do típico ato de desenvolver uma aplicação (PARISI, 2015).

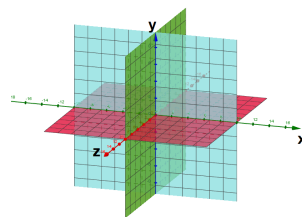
Grande parte dos gráficos é apenas tradução matemática diretamente em código. Quanto mais limpa a matemática, mais limpo, o código resultante (MARSCHNER et al., 2016); Pensando nisso, vamos mostrar alguns tópicos de Matemática encontrados nessa tecnologia no que se refere a visualização gráfica.

3.1 Sistemas de Coordenadas 3D

Usuários dos sistemas atuais estão familiarizados com sistemas de coordenadas cartesianas 2D, como as coordenadas de janela usadas em um aplicativo de área de trabalho do Windows ou um aplicativo móvel iOS, então poderiam imaginar que existem valores x e y que representam as coordenadas em cada eixo. Estas coordenadas 2D definem onde as subjanelas e controles de IU estão localizados dentro de uma janela, ou onde a “caneta” ou “pincel” virtual desenha *pixels* em uma janela ao se usar uma API de desenho gráfico. Da mesma forma, o desenho 3D ocorre (não surpreendentemente) em um sistema de coordenadas 3D, onde a coordenada adicional, z , descreve a profundidade, ou seja, quão longe dentro ou fora da tela um objeto é desenhado. A transição de usuários acostumados com o conceito do sistema de coordenadas 2D para um sistema de coordenadas 3D deve ser imediato (PARISI, 2015).

Geralmente, o sistema de coordenadas tendem a ser organizados como ilustrado na Figura 3.1, com o eixo x sendo representado horizontalmente onde os valores negativos se encontram à esquerda e os positivos à direita, y é representado verticalmente em que os valores positivos estão acima e os negativos abaixo e por fim o eixo z é representado de fora para dentro de tela.

Figura 3.1 – Sistema de Coordenadas 3D



Fonte: Autora.

3.2 Bases Ortonormais

Gerenciar sistemas de coordenadas é uma das principais tarefas de quase todos os programas gráficos; a chave para isso é gerenciar as bases ortonormais. Qualquer conjunto de dois vetores 2D u e v formam uma base ortonormal, desde que sejam ortogonais (em ângulos retos) e cada um tem comprimento unitário (MARSCHNER et al., 2016).

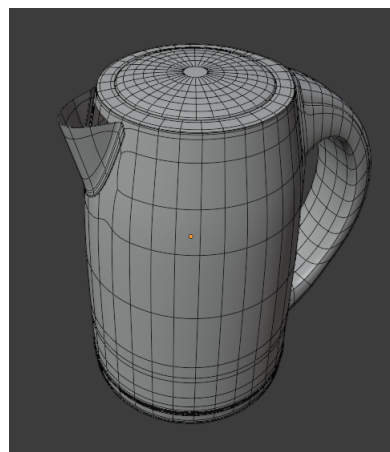
$$\|u\| = \|v\| = 1$$

3.3 Malhas, Polígonos e Vértices

Existem várias formas de desenhar gráficos 3D, mas a mais comum é usando malha. A malha é um objeto composto por um ou mais formas poligonais, construídos usando vértices ternos ordenados (x, y, z) definindo as coordenadas de posição no espaço 3D. Os polígonos tipicamente utilizados em malhas são os triângulos (grupo de 3 vértices) e *quads* (grupo de quatro vértices). Malha 3D geralmente refere-se ao modelo 3D final (PARISI, 2015).

Abaixo, temos a Figura 3.2 que ilustra uma malha 3D. As linhas quadradas na malha, definem a forma da garrafa. Note que os eixos definem apenas a forma; as propriedades da superfície da malha, como cor e sombreamento, que podem proporcionar um realismo aos nossos olhos são definidos usando atributos adicionais, que discute-se a seguir.

Figura 3.2 – Malha Poligonal 3D

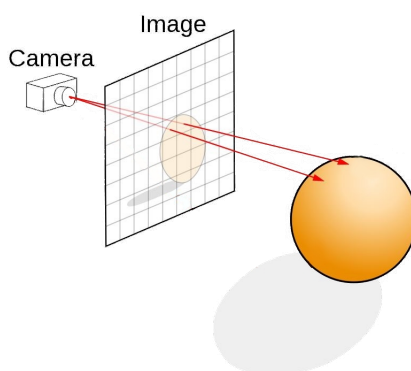


Fonte: Autora.

3.4 Gerando uma imagem

Uma das coisas mais importantes dentro desse processo da criação de um ambiente virtual é geração de uma imagem na tela do computador, esse ato denomina-se *renderização*, o qual, dada uma representação 3D, produz valores de cores para os *pixels*. Dentro desse processo, cada *pixel* corresponde a um raio como mostrado na Figura 3.3, mas observe que precisa-se entender qual ponto visível na cena corresponde a cada raio, e por fim, computar uma cor.

Figura 3.3 – Renderização



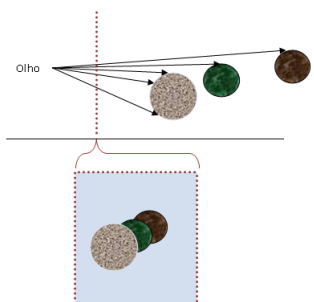
Fonte: Adaptado [NVIDIA](#)

Para lidar com isso, existem dois algoritmos principais usados em renderização, que são: *Ray casting* e Rasterização.

3.4.1 Ray Casting

O algoritmo de *Ray casting* recorre ao lançamento de raios a partir do observador de forma a perceber qual a distância que estão os objetos que compõem a cena, como mostrado na Figura 3.4,

Figura 3.4 – Raycasting



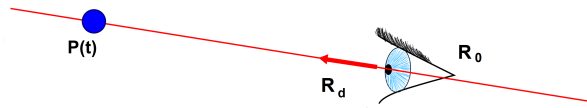
Fonte: ([WIKIPEDIA](#), 2019).

ou seja no sentido inverso do que acontece na natureza, a fim de poupar recursos computacionais. Se assim não fosse, o processamento seria incomportável e haveria grande desperdício de recursos, já que a maior parte dos raios de luz que partem da fonte de luz, não chegam ao observador ([WIKIPEDIA, 2019](#)).

3.4.1.1 Representação do raio

Uma grande questão é: Olhando para a Figura 3.5 como representar o raio de forma matemática?

Figura 3.5 – Raio



Fonte: Autora.

A forma mais simples se dá usando uma reta parametrizada.

$$P(t) = \vec{R}_0 + t \vec{R}_d$$

na qual $t > 0$, pois não há interesse nos valores negativos, \vec{R}_0 representa a origem, e \vec{R}_d o vetor diretor.

Uma vez construído o raio usando uma reta parametrizada, é preciso saber quanto à interseção do raio com o objeto na cena. Para isso, primeiro precisa-se pensar em como descrever um plano. Uma das formas mais tradicionais se dá da posse de um ponto pertencente ao plano e do vetor normal desse mesmo plano

$$\left. \begin{array}{l} P_0 = (x_0, y_0, z_0) \\ \vec{n} = [A \ B \ C]^T \end{array} \right\} \implies 0 = \vec{n} \cdot (p - p_0) = \vec{n}p - \vec{n}p_0$$

Em que pode-se escrever a equação dos pontos do plano de forma implícita

$$H(P) = \vec{n} \cdot P + D = 0 \quad (D = -\vec{n} \cdot P)$$

Mas sabe-se que o raio é definido por $P(t) = \vec{R}_0 + t \vec{R}_d$, então o raio intersecta o plano em $H(P(t))$, assim

$$\begin{aligned} 0 &= H(P(t)) = \vec{n} \cdot (\vec{R}_0 + t \vec{R}_d) + D \\ &= (\vec{n} \vec{R}_d) t + (\vec{n} \vec{R}_0 + D) \\ \implies t &= -\frac{\vec{n} \vec{R}_0 + D}{\vec{n} \vec{R}_d} \end{aligned}$$

Conhecendo t , pode-se calcular o ponto de interseção.

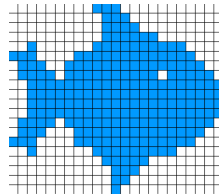
Existe também a representação de interseção do raio com uma esfera, mas foge dos objetivos por enquanto.

3.4.2 Rasterização

A maioria das imagens de computação gráfica é apresentada ao usuário em algum tipo de tela *rasterizadas*, como pode-se ver na Figura 3.6. Exibições rasterizadas mostram imagens como matrizes retangulares de *pixels*. Um exemplo comum é um monitor ou televisão de tela plana de computador, que possui uma matriz retangular de pequenos *pixels* emissores de luz que podem ser ajustados individualmente para cores diferentes para criar qualquer imagem desejada.

Cores diferentes são obtidas por meio da mistura intensidades de luz vermelha, verde e azul. A maioria das impressoras, como impressoras a laser e impressoras a jato de tinta, também são dispositivos de rasterização. Estes baseiam-se na digitalização: não há grade física de *pixels*, mas a imagem é organizada sequencialmente, depositando tinta em pontos selecionados de uma grade (MARSCHNER et al., 2016).

Figura 3.6 – Imagem gráfica rasterizada.



Fonte: (WIKIPEDIA, 2022).

3.5 Interpolação Linear

Para (MARSCHNER et al., 2016) a operação matemática mais comum em gráficos é a interpolação linear. Por exemplo, a interpolação linear de posição para formar segmentos de reta em 2D e 3D, em que dois pontos a e b associados a um parâmetro t formam a reta $p = (1 - t)a + tb$. Trata-se de interpolação porque p passa por a e b exatamente em $t = 0$ e $t = 1$. É uma interpolação linear porque os termos de ponderação t e $1 - t$ são funções polinomiais de primeiro grau em t .

Dado um conjunto crescente de abscissas x_0, x_1, \dots, x_n , e para cada x_i associa-se uma ordenada y_i . Outro exemplo de interpolação linear está em criar uma função contínua $y = f(x)$ que interpole essas posições, ou seja, f passa por todos os pontos dados), ou ainda, $y_i = f(x_i)$. Por interpolação linear, os pontos (x_i, y_i) são conectados por segmentos de reta. É natural usar equações paramétricas de reta para esses segmentos.

3.6 Triângulos

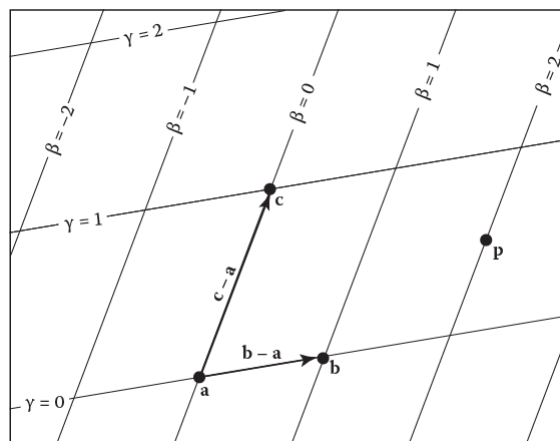
Conforme (MARSCHNER et al., 2016) os triângulos são a base da modelagem primitiva em muitos programas gráficos, seja em 2D ou 3D, para figuras planas, triângulos no mesmo plano; já para figuras além do plano, triângulos em vários planos. Frequentemente, informações como a cor são marcadas nos vértices do triângulo e essas informações são interpoladas no triângulo. O sistema de coordenadas que torna essa interpolação direta é chamada de coordenadas baricêntricas (MARSCHNER et al., 2016);

3.6.1 Coordenadas Baricêntricas

Frequentemente segundo (MARSCHNER et al., 2016), em gráficos, deseja-se atribuir uma propriedade, *e.g.* cor, a cada vértice do triângulo e interpolar suavemente o valor dessa propriedade no triângulo.

Existem várias maneiras de fazer isso, mas a mais simples é usar as coordenadas baricêntricas. Uma maneira de pensar em coordenadas baricêntricas é como um sistema de coordenadas não ortogonal. Tal sistema de coordenadas é mostrado na Figura 3.7:

Figura 3.7 – Um triângulo 2D com vértices a , b , c pode ser usado para configurar um sistema de coordenadas não ortogonal com origem a e vetores de base $(b - a)$ e $(c - a)$. Um ponto é representado por um par ordenado (β, γ) . Por exemplo, o ponto $p = (2.0, 0.5)$, ou seja, $p = a + 2,0(b - a) + 0,5(c - a)$.



Fonte: (MARSCHNER et al., 2016).

na qual a origem das coordenadas é o ponto a e os vetores de a até b e de a até c são os vetores de base. Com essa origem e esses vetores de base, qualquer ponto p pode ser escrito como

$$p = a + \beta(b - a) + \gamma(c - a)$$

que produz a equação

$$p(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$

com a restrição de que

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

Em princípio, coordenadas baricêntricas são uma construção abstrata e não intuitiva, mas acaba-se revelando poderosa e conveniente. As coordenadas baricêntricas são definidas para todos os pontos do plano. Uma característica particularmente interessante das coordenadas baricêntricas é que um ponto p está dentro do triângulo formado por a , b e c se e somente se

$$0 < \alpha < 1,$$

$$0 < \beta < 1,$$

$$0 < \gamma < 1.$$

3.7 Texturas

Para cada ponto em um objeto pode-se associar alguma propriedade (cor na superfície é uma delas), e esta propriedade é então usada na renderização do objeto. Em alto nível, ao determinar a cor do objeto por *pixel* na renderização, e tipicamente quando determina-se a cor de um *pixel* em uma renderização, comumente baseia-se tal cálculo nas informações sobre o objeto subjacente que aparece naquele *pixel*; Para um triângulo na malha, por exemplo, a orientação do triângulo determina quão brilhante um ponto específico será ao receber iluminação em uma cena.

Em alguns casos, o triângulo pode ser assinado por uma única cor (*i.e.*, sua aparência sob iluminação por luz branca), o que também usamos, mas em alguns casos pode ser associado para cada vértice, e podemos interpolar para pegar a cor no ponto de interesse. Frequentemente, os vértices do triângulo são associados em uma localização em um **mapa de textura**, que tipicamente é uma matriz $n \times k$ da imagem; é fácil pensar no triângulo como tendo sido esticado e deformado para se assentar na imagem.

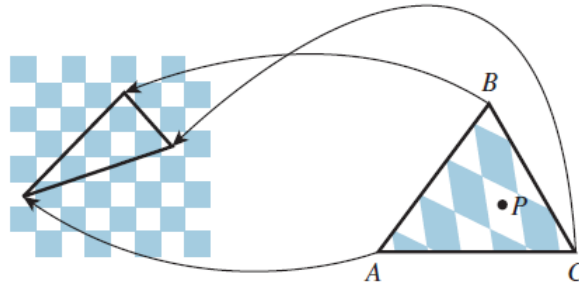
A cor do ponto de interesse é então determinada olhando para sua localização no *mapa de textura*, como na Figura 3.8, e encontrando a cor lá (HUGHES et al., 2013).

3.7.1 Atribuição de coordenadas de textura

Texturizar um modelo é o ato de mapear uma imagem 2D dentro de um polígono 3D. Para isso precisa-se lidar com a transformação que leva a imagem que está no espaço de textura para o mundo onde está o objeto, e que depois disso pode ser direcionada para uma tela, como mostrado na Figura 3.9.

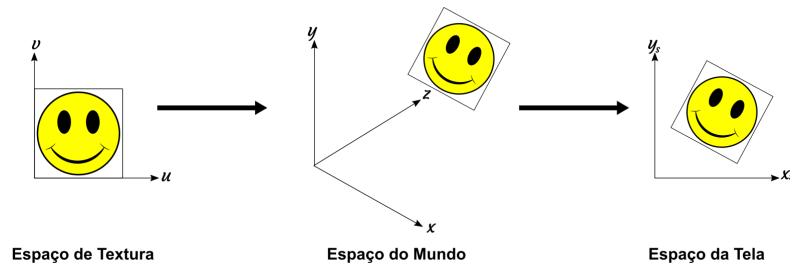
Mas para isso precisa-se resolver um problema de localização, pois, como seria corresponder um ponto da textura a um ponto no modelo? Isso é um problema potencial-

Figura 3.8 – O ponto P do triângulo $T = \triangle ABC$ tem sua cor determinada por um mapa de textura. Os pontos A , B e C foram atribuídos a pontos na imagem do tabuleiro de xadrez, conforme mostrado pelas setas; o ponto P corresponde a um ponto em um quadrado branco, então sua cor de textura é branca.



Fonte: (HUGHES et al., 2013).

Figura 3.9 – Espaços.



Fonte: Autora.

mente complicado, pois imagine que deseje-se usar uma localização do objeto que está no mundo. Isso seria inviável para fazer transformações como rotações e escalas no modelo, em vez disso, adiciona-se dois valores para cada vértice, denominadas de coordenadas UV , que são as coordenadas dos *Textels* que são *pixels* na textura.

Nesse espaço 2D em que a **textura** existe, com horizontal e vertical que denotamos por $u \in [0, 1]$ e $v \in [0, 1]$, onde nada existe fora desses intervalos, pois do contrário a escolha de uma textura com uma resolução maior, resultaria em coordenadas de textura diferente. Por causa disso, as coordenadas de textura são geralmente especificadas como números entre zero e um, para que seja possível atingir o objetivo de preencher esse espaço com o mapa de textura.

No entanto, para que possamos realizar esse procedimento precisamos determinar as coordenadas dos *textels* (U, V) escalonando da seguinte forma:

$$U = \lfloor M_x \cdot u + 1 \rfloor$$

$$V = \lfloor M_y \cdot v + 1 \rfloor$$

Note que M_x e M_y representam o número de *textels* na horizontal e vertical, respectivamente. Além disso, é necessário restringir-se ao intervalo, $u, v \in (0, 1)$, pois não

existe 0 *pixel* e nem fora do intervalo de tamanho da textura.

O código a seguir, escrito em linguagem *Python*, retorna as coordenadas de *texel*:

```
from math import floor

d = 1/(10^6)
def texelCoordinates(u, v, Mx, My):
    if u <= d:
        u = d
    elif u >= 1 - d:
        u = 1 - d
    if v <= d:
        v = d
    elif v >= 1 - d:
        v = 1 - d
    U = floor(Mx*u+1)
    V = floor(My*v+1)

    return print("(" , U , "," , V , ")")

texelCoordinates(0.72, 0.40, 1024, 1024)
```

Que nos retorna (738, 410) como sendo a posição do *texel*.

3.8 Transformações

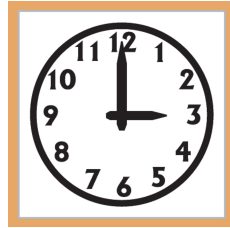
Podemos usar a *Computação Gráfica* como mais um pretexto para aumentar o nosso domínio em certos conteúdos, por ser uma forma concreta, já que a existência de um erro no código, pode ser percebida na tela. Então, por um lado a Álgebra linear aparenta ser difícil e frustrante para alguns por conta do nível de abstração, por outro lado a Computação Gráfica é uma oportunidade de se aproximar dos conteúdos da Álgebra Linear de forma mais suave com interpretações concretas que podem melhorar a intuição no conteúdo matemático.

Conforme (MARSCHNER et al., 2016) talvez as ferramentas mais universais dos programas gráficos sejam as matrizes que mudam ou transformam pontos e vetores. Observe-se que um vetor pode ser representado por uma matriz coluna e que o vetor pode ser representado em uma base diferente por meio da multiplicação com uma matriz quadrada. Também descreve-se como usar essas multiplicações para realizar mudanças no vetor, tais como escala, rotação e translação.

O mecanismo da Álgebra Linear pode ser usado para expressar muitas das operações necessárias para organizar objetos em uma cena 3D, visualizá-los com câmeras e colocá-los na tela. Transformações geométricas (rotação, reflexão, escala e projeção) podem ser

realizadas com multiplicação de matrizes. A seguir mostra-se como um conjunto de pontos transforma-se nos pontos forem representados como vetores de deslocamento da origem e usaremos o relógio mostrado na Figura 3.10 como um exemplo de conjunto de pontos. Portanto, pense no relógio como um monte de pontos que são as extremidades de vetores cujas caudas estão na origem.

Figura 3.10 – Relógio que passará por transformações



Fonte: (MARSCHNER et al., 2016)

3.8.1 Transformação Linear 2D

Conforme (MARSCHNER et al., 2016) podemos usar uma matriz 2×2 para mudar ou transformar, um vetor 2D:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

É o tipo de operação que dado um vetor $[x \ y]^T$ e retorna outro vetor $[X \ Y]^T$, usando apenas multiplicações de matrizes simples, denominada *transformação linear*.

Por essa fórmula pode-se realizar uma variedade de transformações úteis, dependendo do que se puser nas entradas da matriz \mathbf{A}

- Escala

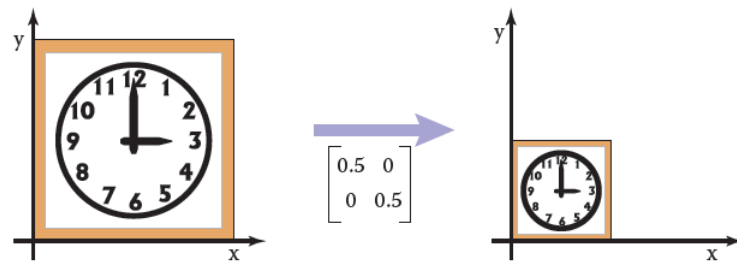
$$Escala(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}.$$

Note o que a matriz faz com as componentes do vetor cartesiano $[x \ y]^T$

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x \\ s_y y \end{bmatrix}$$

Graficamente, usando a Figura 3.10 obtém-se o resultado mostrado na Figura 3.11 quando usa-se $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$:

Figura 3.11 – Escalonado uniformemente pela metade de cada eixo.



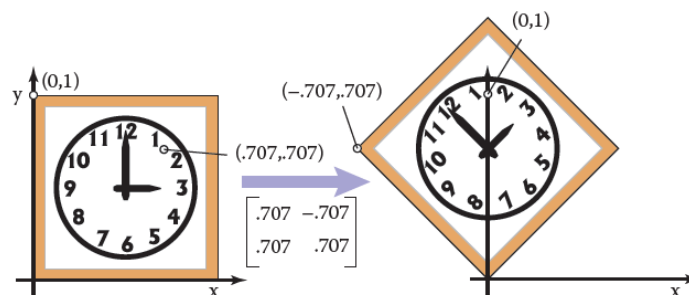
Fonte: (MARSCHNER et al., 2016)

- Rotação

$$\text{Rotação}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ \text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Quando rotaciona-se $\pi/4$ radianos, obtém-se o resultado ilustrado na Figura 3.12:

Figura 3.12 – Uma rotação $\pi/4$.



Fonte: (MARSCHNER et al., 2016)

- Reflexão

$$\text{Reflexão}(-y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Reflexão}(-x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

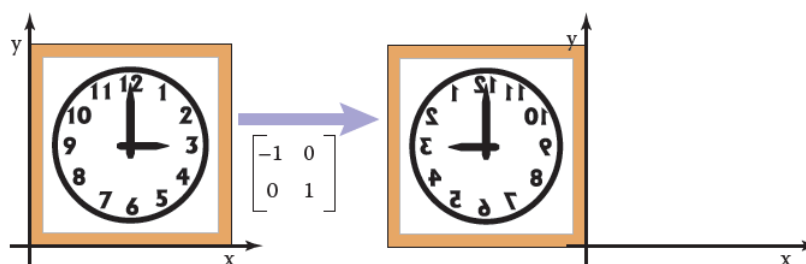
Reflete-se um vetor com um fator negativo na escala, conforme ilustrado na Figura 3.13

3.8.2 Transformação Linear 3D

Conforme (MARSCHNER et al., 2016) as transformações lineares 3D são extensões da transformação 2D. Por exemplo, uma escala ao longo do eixo Cartesiano é:

$$\text{Escala}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix}.$$

Figura 3.13 – Uma reflexão sobre o eixo y é alcançada multiplicando todas as coordenadas x por -1 .



Fonte: (MARSCHNER et al., 2016)

Mas rotações são consideradas mais complicadas em 3D do que em 2D, pois têm mais eixos de rotação possíveis. No entanto, se quisermos simplificar a rotação sobre *eixo* z , o que irá mudar é somente as coordenadas x e y , podemos usar uma matriz de rotação 2D sem operar em z

$$\text{Rotação}_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4 Realidade Virtual no ensino da Matemática

Segundo (MOLINA, 2018) usar a Realidade Virtual em sala de aula não é apenas um recurso novo, no que se refere as novas tecnologias, mas também é um recurso que encoraja o aluno a se expressar de forma diferente, utilizando um novo estilo de letramento digital.

Pensando nisso, (LEI et al., 2018) aponta como exemplo que: “as crianças podem observar modelos 3D diretamente de todos os ângulos e não precisam mais converter entre figuras 2D de livros em modelos 3D”, o que tem-se notado ser um problema no ensino da Matemática, pois geometria tridimensional (3D) e questões relacionadas ao movimento, são difíceis para as crianças. Mas durante a aprendizagem elas necessitam constantemente estarem realizando essa conversão.

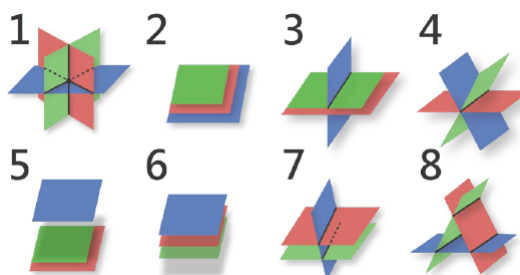
Diante disso, temos a RV como um fator auxiliador para que as crianças possam sair de suas zonas de conforto, desafiando os limites de si mesmas, o que é uma parte importante da educação. Visto que no momento em que nos encontramos muitas pessoas normalmente usam a tecnologia para consumir, mas não para criar.

Conforme (OLIVEIRA, 2021), onde tem tecnologia, tem também matemática. O que começou com os números binários – zeros e uns – agora se expandiu (ainda mantendo os zeros e uns) para quase tudo o que existe e que foi criado pela mente humana, o metaverso, por exemplo, é uma realidade que não existe fisicamente, mas que ainda assim movimenta e interage com a vida real das pessoas. A matemática presente nos gráficos, nas transações econômicas ou até mesmo na criação desses universos é pensada por pessoas reais e está ligada diretamente com a vida de muitos. No entanto, como mencionado por (SCHUTERA et al., 2021) apesar da necessidade de compreender conceitos e princípios matemáticos ser essencial para muitos campos como da tecnologia e ciência a matemática não goza de grande popularidade como matéria de ensino em geral.

(SCHUTERA et al., 2021) apontou que uma das razões para a parcial impopularidade das aulas de matemática e do conteúdo pedagógico reside na forma abstrata e teórica de ensino, que exige dos alunos a memorização, mas não necessariamente a compreensão da matéria. E para contornar isso, a realidade virtual trás uma série de vantagens para o processo de ensino. Em primeiro lugar, por não ser um método de ensino tradicional, muitas vezes desperta um primeiro interesse e curiosidade nos participantes, que na sua maioria raramente o utilizam. Além disso, permite interação e visualização em 3D para algumas coisas que nunca poderiam existir como objetos 3D na realidade, ou que não sejam fisicamente acessíveis para os alunos, e portanto possibilitando um melhor entendimento dos mesmos; por exemplo, visualizar o fluxo de ar simulado em torno de um carro.

Apesar de o pesquisador Roberto Imbuzeiro, do IMPA, ter afirmado que ainda falta muito para que exista um diálogo efetivo entre a matemática da sala de aula e o mundo digital. Ele ressalta que essa forma de interação deve aparecer cada vez com mais propriedade dentro dos currículos. Um exemplo disso é, um estudo mostrado por (HSU, 2021) em que foi aplicado a realidade virtual para avaliar o desempenho dos alunos no ensino de *sistemas de equações lineares em três variáveis*, os alunos do ensino médio deviam determinar oito situações de interseção formadas por três planos, como mostrado na Figura 4.1.

Figura 4.1 – As oito possíveis situações de interseção de três planos



Fonte: (HSU, 2021)

Isso incluiu uma situação em que os três planos se cruzam em um único ponto, se cruzam em uma linha reta ou deixam de se cruzar. Os professores relatam que os alunos muitas vezes lutam para compreender as oito situações de interseção formadas por três planos a partir dos gráficos encontrados nos livros didáticos, ou comumente não entendem os métodos de reticulação apresentados pelos gráficos. Portanto, este estudo previa o uso da RV para apresentar os oito tipos de interseção formados por três planos de forma mais clara.

Em um estudo realizado com 28 alunos do ensino médio foi relatado um aumento de atitudes positivas e interesse em relação a Matemática após o uso de Realidade Virtual e os resultados confirmaram que a Realidade Virtual pode melhorar o aprendizado de sistemas de equações lineares em três variáveis. Alguns alunos até mencionaram que não esperavam que a matemática pudesse ser introduzida no aprendizado equacional por meio da ilusão de ótica e que por estarem curiosos pela tecnologia, ao explorar a composição dos três planos, prestaram mais atenção à tarefa em questão. Além disso, pesquisadores e professores observaram que a participação dos alunos foi excepcionalmente boa e eles mostraram grande entusiasmo.

Ou seja, conforme (HSU, 2021) a tecnologia de RV é benéfica para os alunos quando é corretamente adaptada para a sala de aula, como mencionado por (SCHUTERA et al., 2021) deve-se considerar que a maioria das pessoas não está familiarizada com esses tipos de sistemas. Então saber como esse efeito de novidade influenciou os resultados

permaneceu em aberto. Independentemente disso, verificou-se que as tarefas físicas eram mais fáceis de aprender com o suporte de RV. Além disso, foi observada uma influência fortalecedora na memória de longo prazo, um aumento significativo na motivação por conta da diversão que injetou ânimo nos alunos, pois como apresentado por (HSU, 2021) a RV tem o poder de fornecer ao aluno a oportunidade de operar ativamente e praticar repetidamente uma determinada tarefa.

Pois, de acordo com Imbuzeiro, é preciso ter cuidado na aplicação dessa tecnologia no ensino, apesar de ser uma tarefa que deve ser realizada.

Eu acho que tem dois caminhos naturais para trazer a matemática que tem a ver com esses dois aspectos da era digital: a presença da computação e a necessidade de transformar dados em informação e conhecimento do ponto de vista da computação

disse à (OLIVEIRA, 2021). Além disso, ressaltou Hallison que:

A era digital deixa ainda mais evidente o papel da matemática no desenvolvimento da sociedade e reforça a importância de nós buscarmos compreendê-la para exercermos a nossa cidadania e construirmos um futuro.

4.1 *Serious Games*

Serious Games é o nome pelo qual são conhecidos jogos digitais desenvolvidos com objetivos que vão além do entretenimento. Como jogos digitais, *serious games* podem ser desenvolvidos para diferentes plataformas e utilizar tecnologias diversas, como realidade virtual, redes sociais, computação móvel e interação natural, dentre outras (UFPB, 2020).

Conforme (VAKALIUK; SHEVCHUK; SHEVCHUK, 2020):

Nos últimos anos, novos objetivos e ideias para o ensino da Matemática na escola têm sido cada vez mais discutidos, conceitos originais foram propostos e novos livros didáticos sobre o curso de Matemática escolar foram considerados.

Uma das ideias é o uso de realidade virtual e aumentada (RV e RA) tecnologias, que criam oportunidades únicas na educação. Ao usar os dados da tecnologia RA e RV no processo de ensino da matemática, complementando-os com informações visuais adequadas, é possível construir um modelo visual de material educacional.

Como resultado, a imaginação espacial dos alunos é desenvolvida, o que aumenta sua compreensão profunda de processos, propriedades e prova de teoremas.

Assim como no estudo de (HSU, 2021) o objetivo foi integrar a realidade virtual para explorar a motivação de aprendizagem e eficácia dos alunos após o ensino digital, que como já mencionado obteve resultados experimentais satisfatórios que mostraram que a RV tem o efeito de melhorar a motivação dos alunos acrescentando como bônus o aumento na eficácia no ensino da Matemática.

Mas como mencionado por (SCHUTERA et al., 2021) devido aos elevados requisitos, existem apenas alguns aplicativos utilizáveis destinados ao ensino até agora. Em primeiro lugar, um conceito didático deve formar a base, e isso deve se encaixar na vida cotidiana existente nas escolas. Em segundo lugar, a implementação técnica deve ser compreensível e utilizável mesmo para alunos que não entendem de tecnologia. Além disso, o aluno deve ser capaz de interagir com o meio em vez de apenas olhar para ele de maneira passiva.

Pensando nisso, desenvolvi um jogo simples que visa compilar e aplicar os conceitos apresentados nesse trabalho, pois como afirma (OLIVEIRA; CALEJON; BRITO, 2016) o uso de jogos no ensino de conteúdos matemáticos reduz a formalidade existente em geral nestes contextos, ampliando a atratividade da tarefa.

Diante disso, tenho como objetivo, apresentar uma forma de enriquecer o ensino da Matemática na graduação, visando criar conteúdos que possam fortalecer o ensino de conceitos matemáticos para o público infanto-juvenil.

4.2 Torre de Hanói

O jogo Torre de Hanói é considerado, por estudiosos, como um valioso recurso didático-metodológico para o ensino de conceitos matemáticos por induzir o aluno a perceber as leis matemáticas a ele relacionado e além disso, existe a possibilidade de se trabalhar com o desenvolvimento de habilidades mentais, tais como: estabelecimento de plano de ação durante as jogadas.

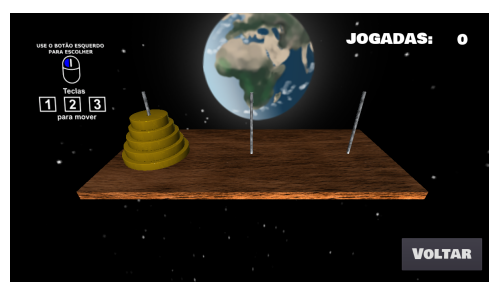
Nas Figuras 4.2 e 4.3 pode-se ver imagens do jogo finalizado.

Figura 4.2 – Menu do Jogo



Fonte: Autora.

Figura 4.3 – Ambiente do Jogo



Fonte: Autora.

Nesse projeto podemos expandir a ideia apresentada no trabalho de (OLIVEIRA; CALEJON; BRITO, 2016) que segue a teoria de que o aluno deve ser posto como construtor do seu conhecimento, tendo que assumir a responsabilidade desta construção a partir de uma participação ativa do sujeito, sendo que o professor assume o papel de mediador entre o saber e o aluno. Dessa maneira o aluno age, reflete, cria hipótese e constrói seu conhecimento.

Usando a mesma premissa do trabalho que é voltado para o público infantil que após a apresentação do jogo, foram propostas atividades e resolução de problemas envolvendo conceitos matemáticos relativos a: Função Exponencial, Progressões Geométricas e Sequências Recursivas.

Acredito que poderíamos manter esse propósito para esse público e acrescentar como objetivo atingir os alunos do ensino superior utilizando-os na base do desenvolvimento de aplicações usando conceitos matemáticos como quebra-cabeças ou desenvolver aplicações voltadas para o ensino da Matemática, pois como podemos observar a matemática pode ser usada como um meio visando a si mesma como um fim.

4.3 Desenvolvimento do Jogo

O primeiro passo do projeto foi definir qual aplicação seria desenvolvida e o seu objetivo didático. No meu caso, escolhi a Torre de Hanói por ser um quebra cabeça clássico que na grande maioria das vezes foi apresentado nas escolas de maneira física, com mesa e os discos, então seria muito interessante trazer esse jogo de uma forma mais atualizada.

No momento o jogo foi elaborado para ser usado em um carácter não imersivo, ou seja, pode ser apresentado em diversas plataformas sem a necessidade de uso do óculos de realidade virtual, que no momento ainda representa um alto custo para a nossa realidade.

E por fim, o objeto era despertar o interesse na graduação por essa tecnologia, já que desenvolver uma aplicação exige um conhecimento sólido da teoria ensinada no curso de Matemática, ou seja isso representa uma nova forma de poder solidificar os conhecimentos adquiridos e em contra partida ainda adquirir as expertises necessárias que os alunos do futuro vão exigir dos seus professores.

A partir disso, podemos iniciar o desenvolvimento tendo em mente qual a complexidade da aplicação e quais recursos serão necessários para que ela possa ser desenvolvida. No meu caso escolhi recursos *OpenSource*, por serem gratuitos e possuírem informações de fácil acesso.

O jogo foi desenvolvido usando a *engine* Godot, a modelagem dos itens foi feita usando o Blender e as edições de imagens foram realizadas no Krita.

4.3.1 Regra do Jogo

A essência do jogo permanece a mesma, com a diferença que a agora a jogabilidade depende de cliques na tela e durante as jogadas o usuário começa a se deparar com as seguintes regras:

1. O jogo finaliza quando todos os discos do primeiro pino são movidos para o último.

2. Acontece a movimentação de apenas um disco por movimento.
3. É extremamente necessário utilizar um pino como auxiliar.
4. Os movimentos são válidos apenas na ordem decrescente, ou seja, do maior para o menor, nunca o maior sobre o menor.

O que torna o jogo competitivo é o fato de tentar realizar as jogas com consciência para não exceder o número mínimo de movimentos.

4.3.2 Conceitos Matemáticos

Como a dinâmica do jogo é de quebra-cabeça, sua construção foi puramente lógica. Então, todos os conceitos matemáticos estão escondidos nos *softwares* que tornam possíveis a visualização do jogo, conceitos já mencionados em capítulos anteriores.

4.3.2.1 Algoritmo

Algo que foi muito importante para a construção da lógica do jogo, foi simplifica-lo como se ele tivesse apenas duas peças, pois assim a construção do algoritmo se tornou muito mais fácil e estender para um número maior de peças seria consequência. Abaixo temos o algoritmo base:

```

pino1 ← ["disco5", "disco4"] {Lista que armazenar os discos conforme os pinos}
pino2 ← []
pino3 ← []
se pino3 ≠ totalDiscos então
  se disco foi escolhido então
    imprime "escolher pino"
    se escolha válida então
      imprime "mover disco"
    senão
      imprime "voltar para posição de origem"
  fim se
fim se
senão
  imprime "encerrar"
fim se

```

No ¹ [Link](#) é possível encontrar o código base completo escrito em *gdscrip*t.

¹ <https://github.com/jugrigori/TorreDeHanoi/blob/2b2ef7576bcc05bbb2773301dd67b1ae7725dc50/Base>

4.3.3 Pesquisa

Por fim, foi realizada uma pesquisa cujo o objetivo principal era definir a real relevância do que foi apresentado no presente trabalho, a ferramenta escolhida para a aplicação da pesquisa foi o *Google Forms*

Escolhemos como forma de distribuição da pesquisa o próprio jogo que foi disponibilizado de forma gratuita no ² [Google Play](https://play.google.com/store/apps/details?id=game.torredehanoi) para celulares android e para Desktop o acesso ao download se deu através do ³ [Google Drive](https://drive.google.com/file/d/1NJ96tsyXPLTY0W8f1oWyFtIrYs5WiAfG/view?usp=sharing).

4.3.4 Resultados

O período de aplicação da pesquisa foi um pouco curto, teve início no dia 19 de janeiro de 2022 e foi finalizada 28 de janeiro de 2022. Mas o resultados obtidos podem ser considerados bem satisfatórios dado o tempo de aplicação, pois 100% dos participantes acharam interessante a proposta do jogo.

Participaram da pesquisa 23 pessoas, que possuíam uma faixa etária entre 15 e 42 anos, dentre os quais 4,3% possuíam o Ensino Fundamental, 34,8% Ensino Médio e 60,9% Ensino Superior. Dado a maior parte dos participantes serem do Ensino Médio e Ensino Superior, o esperado era que a maior parte já tivesse tido contato em algum momento com o jogo Torre de Hanói, no entanto o resultado foi completamente diferente apenas 34,8% conheciam o jogo.

Ou seja, o primeiro objetivo com esse projeto foi alcançado que era apresentar esse clássico para o público em geral. No entanto, notamos que da porcentagem dos participantes que conheciam o jogo apenas 75% dos entrevistados conheciam os conceitos matemáticos que estão embutidos no quebra-cabeça, o que nos mostra que quando entraram em contato com o jogo foi perdida uma oportunidade de apresentar a Matemática de uma forma mais leve, pois 62,5% dos participantes manifestaram interesse em comprovar que realmente os conceitos matemáticos mencionados estavam presentes no jogo.

De forma opcional foi deixada uma aba de comentários para os participantes que manifestaram as seguintes considerações:

1. “Trata-se de um jogo que estimula o raciocínio, algo que é muito bom.”
2. “Um excelente recurso didático!”
3. “Gostei do jogo, parece ser simples mas tem um nível de dificuldade que provoca estímulo para terminar de jogar.”
4. “Gostei do jogo e de saber que existe toda uma coisa interessante relacionada a ele.”

² <https://play.google.com/store/apps/details?id=game.torredehanoi>

³ <https://drive.google.com/file/d/1NJ96tsyXPLTY0W8f1oWyFtIrYs5WiAfG/view?usp=sharing>

5. “Parabéns, o jogo e a proposta são excelentes! Que Deus a abençoe.”

Conclusão

Podemos perceber que a Realidade Virtual é uma tecnologia que só tem crescido devido o desenvolvimento tecnológico e que vários são os aspectos matemáticos envolvidos nesse processo em que para notá-los é necessário apenas uma análise mais crítica.

Análise que pode representar uma oportunidade de solidificar o aprendizado do discente na graduação, seja como um auxiliar no ensino de conceitos abstratos como os de Álgebra Linear por exemplo, ou como apenas um estimulador que fornece ao aluno a oportunidade de com criatividade colocar os conhecimentos adquiridos durante o curso em prática.

Mas note que como mostrado no projeto de jogo Torre de Hanói isso pode alcançar a sociedade em geral proporcionando assim uma possibilidade de entrar em contato com aplicações que possam despertar o interesse ou incrementar no seu aprendizado, seja em Lógica, como na resolução de um quebra-cabeça, ou em qualquer outro tópico de ensino da Matemática, dependendo apenas do objetivo de ensino que foi traçado.

Referências

- BRAGA, M. Realidade virtual e educação. *Revista de Biologia e Ciências da Terra*, 2001. ISSN 1519-5228. Disponível em: <<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=50010104>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 19 e 20.
- HSU, Y. C. Exploring the effectiveness of two types of virtual reality headsets for teaching high school mathematics. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 2021. ISSN 1305-8223 (online). Disponível em: <<https://doi.org/10.29333/ejmste/10996>>. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.
- HUGHES, J. F. et al. *Computer Graphics: Principles and Practice*. [S.l.: s.n.], 2013. ISBN 0321399528. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- KIRNER, C.; SISCOUTTO, R. *Realidade Virtual e Aumentada: Conceitos, Projeto e Aplicações*. [S.l.: s.n.], 2007. Citado na página 18.
- LEI, X. et al. Can virtual reality help children learn mathematics better? the application of vr headset in children's discipline education. In: _____. [S.l.: s.n.], 2018. p. 60–69. ISBN 978-3-319-92251-5. Citado na página 34.
- MARÇAL, E.; ANDRADE, R.; RIOS, R. Aprendizagem utilizando dispositivos móveis com sistemas de realidade virtual. *RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação*, 2005. ISSN 1679-1916. Disponível em: <<https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/13824/8013>>. Citado na página 20.
- MARSCHNER, S. et al. *Fundamentals of Computer Graphics*. [S.l.: s.n.], 2016. ISBN 13: 978-1-4822-2941-7. Citado 8 vezes nas páginas 22, 23, 26, 27, 30, 31, 32 e 33.
- MOLINA, A. *The Use of Immersive Virtual Reality in the Mathematics Classroom*. 2018. Disponível em: <<https://blog.scientix.eu/2018/05/the-use-of-immersive-virtual-reality-in-the-mathematics-classroom/>>. Acesso em: 18 nov. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 34.
- MONTEIRO, J. *Empresa usa realidade virtual para simulação de treinamento militar*. 2021. Disponível em: <<https://noticiasconcursos.com.br/empresa-usa-realidade-virtual-para-simulacao-de-treinamento-militar/>>. Acesso em: 24 nov. 2021. Citado na página 16.
- MORAES, D. *Marketing de Realidade Virtual: entenda por que você deve usar essa inovação agora!* 2021. Disponível em: <<https://rockcontent.com/br/blog/marketing-de-realidade-virtual/>>. Acesso em: 25 nov. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- NETTO, A. V.; MACHADO, L. dos S.; OLIVEIRA, M. C. F. de. Realidade virtual - definições, dispositivos e aplicações. *Universidade de São Paulo*, São Paulo, n. 33, p. 0, 2002. Disponível em: <http://www.de.ufpb.br/~labteve/publi/2002_reic.pdf>. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 15 e 16.

- NVIDIA. Disponível em: <<https://developer.nvidia.com/discover/ray-tracing>>. Acesso em: 28 jan. 2022. Citado na página 24.
- OLIVEIRA, R. *A matemática está em tudo e o metaverso é mais um exemplo disso*. 2021. Disponível em: <<https://porvir.org/matematica-metaverso-dia-a-dia/>>. Acesso em: 12 dez. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.
- OLIVEIRA, S. G. de; CALEJON, L. M. C.; BRITO, A. S. A utilização e aplicação do jogo torre de hanói para o ensino de conceitos matemáticos mais atraente e eficaz. *Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, 2016. ISSN 2178-034X. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5316_2744_ID.pdf>. Citado na página 37.
- PARISI, T. *Learning Virtual Reality Developing Immersive Experiences and Applications for Desktop, Web and Mobile*. [S.l.: s.n.], 2015. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- REVISTASIM. Realidade virtual: tecnologia a serviço da arquitetura. *RevistaSim*, Recife, 2020. Disponível em: <<https://www.revistasim.com.br/arquitetura/realidade-virtual-arquitetura/>>. Citado na página 15.
- RIBEIRO, M.; ZORZAL, E. *Realidade Virtual e Aumentada: Aplicações e Tendências*. [S.l.: s.n.], 2011. Citado 5 vezes nas páginas 12, 13, 17, 18 e 19.
- ROSA, A. J. P.; PAVANATI, I. A utilização da realidade virtual e aumentada na formação dos policiais militares em santa catarina. *REVISTA ORDEM PÚBLICA*, Santa Catarina, 2014. ISSN 1984-1809 and 2237-6380. Disponível em: <<https://rop.emnuvens.com.br/rop/article/viewFile/81/80>>. Citado na página 16.
- SCHUTERA, S. et al. On the potential of augmented reality for mathematics teaching with the application clearmaths. *Educ. Sci.*, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/educsci11080368>>. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 37.
- UFPB. *Serious Games*. 2020. Disponível em: <<http://www.de.ufpb.br/~labteve/portugues/seriousgames.html>>. Acesso em: 18 nov. 2021. Citado na página 36.
- VAKALIUK, T. A.; SHEVCHUK, L. D.; SHEVCHUK, B. V. Possibilities of using ar and vr technologies in teaching mathematics to high school students. *Universal Journal of Educational Research*, 2020. ISSN 6280 - 6288. Citado na página 36.
- WIKIPEDIA. *Ray casting*. 2019. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ray_casting>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- WIKIPEDIA. *Rasterisation*. 2022. Disponível em: <<https://en.wikipedia.org/wiki/Rasterisation>>. Citado na página 26.