



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Bacharelado

Matheus Rodrigues Linhares Guimarães

Solução numérica de uma equação de difusão usando o Método dos Elementos Finitos

São Luís - MA
2022

Matheus Rodrigues Linhares Guimarães 

Solução numérica de uma equação de difusão usando o Método dos Elementos Finitos

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Curso de Matemática – Bacharelado
Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Me. Cleber Araújo Cavalcanti

São Luís - MA
2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Rodrigues Linhares Guimarães, Matheus.

Solução numérica de uma equação de difusão usando o
Método dos Elementos Finitos / Matheus Rodrigues Linhares
Guimarães. - 2023.

62 f.

Orientador(a): Cleber Araújo Cavalcanti.

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática,
Universidade Federal do Maranhão, LABMAT, 2023.

1. Algoritmo de Thomas. 2. Método de Faedo-Galerkin.
3. Método dos Elementos Finitos. I. Araújo Cavalcanti,
Cleber. II. Título.

Matheus Rodrigues Linhares Guimarães

Solução numérica de uma equação de difusão usando o Método dos Elementos Finitos

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 21/07/2023

Prof. Me. Cleber Araújo Cavalcanti
Orientador
DEMAT/UFMA

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior
Primeiro Examinador
DEMAT/UFMA

Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva
Segundo Examinador
DEMAT/UFMA

Este trabalho dedico a minha avó Lourença Filomena Pinheiro, A meu Avô José de Ribamar Cabral Rodrigues e meu tio Felipe Gonçalves Rodrigues - In Memoriam

Agradecimentos

Ao concluir este Trabalho de Conclusão de Curso marcando o final do percurso da Graduação, objetivo conseguido com muito trabalho, esforço e dedicação, que para que fosse cumprido pessoas interviram com colobaração e ajuda.

Em primeiro lugar, agradeço a **Deus** por ter me dado forças e saúde para nunca desistir e nem fraquejar para que fosse possível conquistar meu objetivo.

Agradeço também ao Laboratório Labmat por ter me dado apoio e oportunidade para conclusão do meu trabalho.

A meu orientador **Prof. Me. Cleber Araújo Cavalcanti** pela paciência e suporte dedicados a mim desde o começo de minha jornada acadêmica até a conclusão do curso.

Ao **Prof. Dr. Anselmo Raposo** pela ajuda em diversos momentos de dificuldade. Ao **Prof. Dr. Ivaldo Nunes** por disponibilizar uma sala de estudos enquanto eu era aluno da graduação.

Aos meus amigos **Tiago Souza Lima, Sidney de Souza Lima, Juarez Bezerra Muniz** pela força e amizade sem fim. Ao meu amigo e irmão de curso **Gabriel Teobaldo** por dividir seus anos de graduação a meu lado e me ajudar a alcançar meu objetivo.

A meu avô **Dr. Jayron Guimarães** que durante toda minha graduação me foi norte como profissional e exemplo de ser humano, que por diversas vezes seus conselhos me foram de grande ajuda e me fossem motivos de esperança e dedicação.

A meu tio **Adalberto Linhares** que por diversas vezes me aconselhou e me ajudou em momentos de dificuldade.

Agradeço a minha namorada **Jaciele** pela paciência, companhia e carinho, me dando forças em momentos difíceis e não deixar que eu desistisse.

A meu irmão **Diego** pela ajuda, a meu pai **Douglas**, a minha mãe e amiga fiel **Regiane** pelos seus conselhos e que me apoiou sem medir esforços, a minha tia-mãe Regilene Lemos, a minha avó Itajacy Gonçalves, a meu tio Rafael Gonçalves.

Magia é a capacidade de multiplicar com artes, cálculos e símbolos o nosso domínio sobre o mundo.

Giordano Bruno (Século XVI)

Resumo

O método dos elementos finitos é, em primeiro lugar, um método de interpolação muito poderoso e sistemático. Suas características mais atraentes são três: primeiro, o pré-processo de interpolação é virtualmente independente da geometria do domínio em consideração. Conseqüentemente, funções definidas em domínios muito irregulares, até mesmo com conexões múltiplas, podem ser facilmente interpoladas. Em segundo lugar, as condições em determinadas funções em pontos na fronteira podem ser combinadas de maneira sistemática pelo interpolador de elementos finitos. Finalmente, uma vez que os conceitos de interpolação e aproximação estão intimamente relacionados, o conceito de elementos finitos leva a um método muito poderoso para a solução aproximada de problemas de valor de contorno. As propriedades das técnicas como método de aproximação, no entanto, não podem ser totalmente apreciadas até que suas propriedades como método de interpolação sejam estabelecidas, para isso foram desenvolvidos técnicas e métodos, dentre muitos o Método de Faedo-Galerkin se destaca. A partir do Método de Faedo-Galerkin um determinado problema resumiu-se a um sistema tridiagonal de equações, nesse caso faz-se-à necessário invocar o algoritmo de Thomas. Finalmente, combinando o Método de Faedo-Galerkin com o Algoritmo de Thomas, o Métodos dos Elementos Finitos pode ser implementado numericamente, e é para esse objetivo que o presente trabalho se dirige.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos, Método de Faedo-Galerkin, Sistema Tridiagonal de equações, Algoritmo de Thomas.

Abstract

The finite element method is, firstly, a very complex interpolation method. powerful and systematic. Its most attractive features are three: first, the pre-process interpolation is virtually independent of the geometry of the domain under consideration. Consequently, functions defined in very irregular domains, even with multiple connections, can be easily interpolated. Secondly, the conditions in certain functions at points on the boundary can be combined in a systematic way by the finite element interpolator. Finally, since the concepts of interpolation and approximation are closely related, the concept of finite elements leads to a Very powerful method for the approximate solution of boundary value problems. The properties of techniques as an approximation method, however, cannot be fully appreciated until its properties as an interpolation method are established, for this purpose techniques and methods were developed, among many the Method by Faedo-Galerkin stands out. From the Faedo-Galerkin Method a certain The problem can be summarized as a tridiagonal system of equations, in which case it will be necessary invoke Thomas's algorithm. Finally, combining the Faedo-Galerkin Method With the Thomas Algorithm, Finite Element Methods can be implemented numerically, and it is towards this objective that the present work is directed.

Keywords: Finite Element Method, Faedo-Galerkin Method, System Tridiagonal equations, Thomas Algorithm.

Sumário

	INTRODUÇÃO	10
1	PRELIMINARES	11
1.1	Princípios de conservação e a origem da equação de difusão	11
1.1.1	Descrição de um Meio Contínuo	12
1.1.2	Equação de Conservação - Fórmula de Massa	14
1.1.3	Lei de Conservação de Energia - Equação de Difusão	18
2	O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	22
2.1	O Método de Faedo-Galerkin para Problemas de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF)	22
2.1.1	Cálculo do Produto interno das funções φ	26
2.1.1.1	Produto interno da forma (φ_j, φ_i)	26
2.1.1.2	Produto interno da forma $((\varphi_j)_x, \varphi_i)$	39
2.1.1.3	Produtos interno interno da forma $((\varphi_j)_x, (\varphi_i)_x)$	43
2.1.2	Sistemas tridiagonais de equações	48
2.1.2.1	Algoritmo de Thomas para resolver sistemas tridiagonais	49
2.2	Implementação para Elementos Finitos via linguagem <i>Python</i>	53
	REFERÊNCIAS	63

Introdução

Muitos fenômenos que acontecem na natureza podem ser descritos através de uma equação diferencial parcial. Essas equações estão presentes nos mais diversos campos das ciências. Campos como a Ótica, Ondulatória, Mecânica, Flúidos, e etc., fazem uso constante dessas equações.

Existe uma infinidade de equações e cada um possui uma forma específica de comportamento, que vai desde a linearidade quanto homogeneidade.

Uma equação diferencial é dita parcial quando envolve derivadas parciais, ou seja, quando é uma expressão da forma

$$F \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_i \dots \partial x_i m} \right) = 0, \quad (1)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ pertence a algum $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função com derivadas parciais até a ordem m . Uma solução para uma equação diferencial parcial é uma função que satisfaz a equação. Diz-se que uma equação diferencial parcial tem ordem m quando a derivada parcial de ordem mais alta que figura nela tem ordem m . Uma das distinções mais fundamentais entre equações diferenciais parciais é aquela entre equações lineares e não lineares (BASSANEZI; Ferreira Jr, 1988).

Definição 0.1. *Diz-se que (1) é linear se F é linear em relação a u e a todas as suas derivadas parciais. Caso contrário, é não linear.*

Definição 0.2. *Uma equação é dita homogênea, se não aparece uma função (apenas das variáveis independentes) isolada. Caso contrário é não homogênea.*

No decorrer deste trabalho ficará claro a importância das definições mostradas anteriormente. A atenção estará voltada para a solução da equação de difusão levando em consideração as partes que a constituem, tais como advecção, difusão e reação. No Capítulo 1, faz-se uma breve passagem pela construção da equação de difusão, partindo da hipótese do contínuo e da Lei de Fick. No Capítulo 2, apresenta-se o Método dos Elementos Finitos e o Método de Faedo-Galerkin. Neste capítulo faz-se necessário apresentar noções e conceitos presentes na análise funcional, que ajudaram na compreensão dos cálculos feitos e que serão base para desenvolvimento central do trabalho que se encontrará na parte final deste trabalho. Apresenta-se também as matrizes tridiagonais juntamente com o algoritmo de Thomas. Neste capítulo estará a parte fundamental deste trabalho, onde mostra-se que a equação de difusão pode ser reescrita por um sistema linear formado por matrizes tridiagonais. Por fim, mostra-se a implementação e aplicação do Método dos Elementos Finitos via linguagem Python para a equação de difusão-advecção-reação.

1 Preliminares

1.1 Princípios de conservação e a origem da equação de difusão

Vários fenômenos físicos ocorrem constantemente no mundo natural, bem como em sistemas feitos pelo homem. Nossa capacidade de formular modelos matemáticos dos fenômenos físicos mais importantes determina o sucesso de se prever ou simular quantitativamente estes fenômenos. Historicamente, a área de estudo dos fenômenos difusivos foi de interesse de vários pesquisadores, matemáticos, médicos e, sobretudo físicos. Esse fenômeno abrange os mais diversos sistemas, desde sociais, em que existe o conceito de *difusão social*, até biológicos, em que diversos fenômenos importantes podem ser estudados. Contudo, os fenômenos de transporte tiveram uma de suas primeiras constatações feita pelo poeta e filósofo Romano Lucretius (99 AEC – 55 AEC) em *De Rerum Natura* datada de 60 AEC (consulte a tradução moderna para o inglês *The Nature of Things*, (CARUS, 1882)). Em alguns trechos dessa obra, a descrição do movimento de grãos de areia no ar pode ser encontrada de uma forma bastante detalhada, como pode ser visto no fragmento a seguir, retirado da supracitada:

first of all, some part of earth, when baked by ceaseless suns, trodden by the force of many feet, gives off a mist and flying clouds of dust, which stormy winds scatter through all the air.

a qual pode ser traduzida em português por

“primeiramente, alguma parte da terra, quando aquecida por sóis incessantes, pisoteada pela força de muitos pés, emite uma névoa e nuvens flutuantes de poeira, as quais tempestuosos ventos espalham pelo ar”.

É conveniente considerar um fenômeno físico como um processo a que um determinado sistema bem identificado será submetido, em outras palavras, queremos ver como o sistema se comporta, quando este é submetido a muitas transformações. Nesse sentido, quer-se estudar o estado do sistema, e quando diz-se **estado** entende-se como as propriedades físicas que esse sistema carrega, tais como: *pressão, massa, volume, temperatura, etc*, em um instante de *tempo*. Em fenômenos de transporte observamos três propriedades físicas fundamentais que são transportadas de um ponto a outro do espaço que são: massa, quantidade de movimento e energia. Os meios físicos, que caracterizam onde o processo ocorre, supostamente serão admitidos como contínuos, *i.e.*, há uma distribuição contínua de matéria onde pode-se definir as propriedades do meio como funções matemáticas contínuas do espaço. Ademais, a *Hipótese do contínuo* é válida se as escalas de comprimento relevantes no processo físico em questão forem várias ordens de magnitude maiores que o espaçamento médio entre as distâncias no meio.

1.1.1 Descrição de um Meio Contínuo

De acordo com (BASSANEZI; Ferreira Jr, 1988), a teoria da Elasticidade e Hidrodinâmica juntamente com sua formulação deram início ao estudo da Mecânica de um Meio Contínuo. Sua formulação matemática só foi satisfatoriamente conseguida com os trabalhos de Euler, Lagrange, Cauchy, Navier, Poisson e outros na primeira metade do século XIX.

Basicamente, pode-se usar duas formas complementares de se descrever um meio contínuo:

1. através da formulação de Euler, em que se fixa as coordenadas \mathbf{x} (no espaço \mathbb{R}^n) e o instante t , e observa então cada propriedade pontual e instantânea do meio em (\mathbf{x}, t) ; ou seja, a descrição é feita através de funções das variáveis $(\mathbf{x}, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ ponto a ponto, e
2. através da formulação de Lagrange, em que a descrição se dá de modo que o observador acompanha um ponto a partir de sua posição inicial, em sua trajetória que segue o fluxo do meio contínuo. A descrição, neste caso, é feita através de funções das variáveis (\mathbf{A}, t) , onde \mathbf{A} é a coordenada da posição inicial do ponto; poderíamos dizer que \mathbf{A} é o nome da “partícula” observada. Neste caso, o termo “partícula” está mais próximo do conceito de ponto geométrico e *não* é uma tentativa de representar uma partícula de matéria propriamente dita.

As hipóteses físicas que faremos inicialmente são:

- (i) a existência da função $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ continuamente diferenciável em \mathbf{A} e t ;
- (ii) a possibilidade de invertê-la como $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$; e
- (iii) a sua diferenciabilidade com respeito a \mathbf{x} e t .

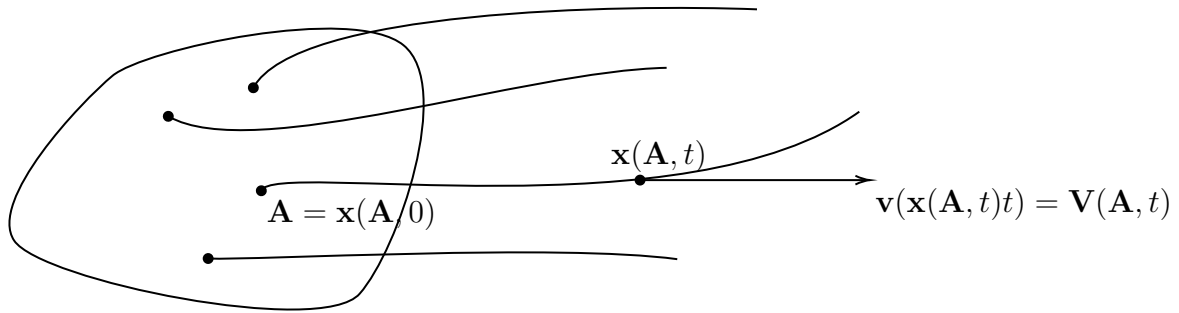
$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t) &= \mathbf{x} \text{ para todo } \mathbf{x} \text{ e } t; \mathbf{x}(\mathbf{A}, \mathbf{0}) = \mathbf{A} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t) &= \mathbf{A} \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ e } t; \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{x}\end{aligned}$$

Estas hipóteses caracterizam, de certa forma, o conceito de contínuo como o próprio \mathbb{R}^n , onde cada ponto mantém a sua individualidade no processo dinâmico, sem fusão e sem fissão.

Observa-se que $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ é uma função da descrição de Euler e $\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ da descrição de Lagrange, e ambas servem para fazermos a transposição de uma descrição para a outra e vice versa. A função $\mathbf{V}(\mathbf{A}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\mathbf{A}, t)$, é a *velocidade* da “partícula” \mathbf{A} no instante t , e como esta representa a velocidade do meio contínuo, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t)$ é o *campo de velocidades* pela descrição de Euler.

A descrição cinemática do meio contínuo se faz essencialmente através do campo de velocidades, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ou $\mathbf{V}(\mathbf{A}, t)$, e da função de fluxo, $\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ ou $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$. A função de

Figura 1.1



Fonte: o autor.

fluxo pode ser obtida (teoricamente), ao integrarmos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \end{cases}$$

Desta forma, observamos que a descrição cinemática do meio contínuo e a interpretação geométrica do problema de Cauchy para as equações diferenciais ordinárias estão intimamente relacionadas. Entretanto, do ponto de vista físico os problemas são bem distintos, uma vez que em Mecânica do Meio Contínuo o campo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ *não* é um dado do problema, mas sim uma função incógnita a ser determinada a partir de equações diferenciais parciais, que a relacionam com outras propriedades do meio.

A descrição completa de um meio contínuo exige a introdução de outras funções que caracterizam propriedades materiais como densidades de massas dos diversos componentes, densidade de energia térmica, densidade de carga elétrica, temperatura, campos vetoriais (velocidade, forças, campo elétrico etc.) e campos tensoriais (de deformação de tensão, magnético, de difusão, etc).

Para o estudo de cada problema específico são escolhidas certas funções que representam matematicamente as informações essenciais para descrição do fenômeno e, a partir de hipóteses físicas (biológicas, etc) básicas, obtemos as equações que servirão para caracterizar matematicamente estas funções.

Um princípio elementar e útil na formulação matemática destes problemas é, a grosso modo, que o número de incógnitas seja igual ao número de equações.

Apresentaremos a seguir os argumentos matemáticos para a formulação de uma ampla classe de equações diferenciais parciais que provém dos chamados princípios de conservação. Tais princípios são de extrema importância no estudo de fenômenos físicos e biológicos, servindo como pontos de referência e balizas na descrição de processos de grande complexidade.

1.1.2 Equação de Conservação - Fórmula de Massa

Abordaremos apenas o caso *unidimensional* e para fixarmos as ideias, começamos tratando da função $\rho(x, t)$ que representará matematicamente o conceito físico de densidade de massa por unidade de volume. O modelo unidimensional é utilizado no estudo de processos cujas características variam apenas em uma direção e se mantêm constantes em cada secção, ou então tomamos o valor médio em cada secção e obtemos apenas a variação na direção restante.

Consideremos o intervalo $[A_1, A_2]$, $A_1 < A_2$, carregado pelo fluxo do meio contínuo. Desta forma

$$x_1(t) = x(A_1, t) < x_2(t) = x(A_2, t)$$

para todo t , e se $A_1 \leq \bar{A} \leq A_2$, então $x(A_1, t) \leq x(\bar{A}, t) \leq x(A_2, t)$ e, vice-versa, se $x_1 \leq \bar{x} \leq x_2$, então existe um único \bar{A} no intervalo $[A_1, A_2]$, tal que $x(\bar{A}, t) = \bar{x}$. O total de massa existente neste intervalo em qualquer instante é dado por

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = M(t)$$

A taxa de variação desta massa total que se encontra entre os pontos $x_1(t) = x(A_1, t)$ e $x_2(t) = x(A_2, t)$ é

$$\frac{d}{dt} M(t) = \frac{d}{dt} \int_{x(A_1, t)}^{x(A_2, t)} \rho(x, t) dx$$

Para calcular esta derivada podemos usar a Regra da Cadeia com

$$F(x_1, x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx$$

através do Teorema de Leibniz e sua verificação pode ser vista em (BARTLE, 1964) ou então fazemos uma mudança de variáveis para fixar a região de integração, deixando apenas o integrando como funções de t . Para isso, tomamos então a variável A e $x(A, t) = x$, para obter

$$M(t) = \int_{A_1}^{A_2} \rho(x(A, t), t) \frac{\partial x(A, t)}{\partial A} dA$$

(Utilizaremos este caminho porque sua adaptação ao caso multidimensional é direta.)

Derivando, vem

$$\frac{dM}{dt} = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho(x(A, t), t) \frac{\partial x(A, t)}{\partial A} \right) dA$$

observando que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = V(A, t) \text{ e } \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{\partial x}{\partial A} \right) = \frac{\partial}{\partial A} V(A, t) = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial A}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \int_{A_1}^{A_2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} V(A, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial A} dA = \\ &= \int_{A_1}^{A_2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) \right] dx \end{aligned}$$

A fórmula

$$\frac{d}{dt} \int_{x(A_1,t)}^{x(A_2,t)} \rho(x,t) dx = \int_{x(A_1,t)}^{x(A_2,t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) \right] dx \quad (1.1)$$

é denominada *fórmula de Reynolds* (unidimensional).

O operador diferencial que se aplica a $\rho(x,t)$ depende do campo $v(x,t)$, ou seja,

$$L\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v)$$

Neste ponto, uma hipótese física do problema é necessária para que tenhamos *não* uma fórmula matemática válida em geral, mas uma *equação* que, conseqüentemente, dará significado físico às funções envolvidas. A hipótese física aqui utilizada pode ser expressa pela afirmação de que “a massa total contida em *qualquer* intervalo $[x(A_1,t), x(A_2,t)]$ permanece constante com o tempo”, ou seja, a massa em uma região transportada pelo fluxo permanece constante. Esta afirmação, em termos matemáticos, pode ser traduzida inicialmente através de formulação original:

$$\int_{x(A_1,t)}^{x(A_2,t)} \rho(x,t) dx = \int_{x(A_1,s)}^{x(A_2,s)} \rho(x,s) ds \quad (1.2)$$

para $A_1 < A_2$ e todos t e s . A Equação (1.2) não é uma equação diferencial e, apesar de ser muito extensa e complicada, tem a vantagem de não exigir que a função $\rho(x,t)$ seja diferenciável, o que pode ser relevante em algumas aplicações.

Se a função $\rho(x,t)$ tem derivadas parciais integráveis, então podemos utilizar a fórmula de Reynolds (1.1) e a afirmação física pode ser traduzida por

$$\int_{x(A_1,t)}^{x(A_2,t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) \right) dx = 0 \quad (1.3)$$

para $A_1 < A_2$ e todo t .

Esta Equação (1.3) *não é uma fórmula puramente matemática*, mas uma afirmação sobre a inter-relação que existe entre as funções $v(x,t)$ e $\rho(x,t)$ (continuamente deriváveis), obtida das interpretações e hipóteses físicas dadas. Se ρ e v têm derivadas parciais contínuas, a afirmação de que, fixado t , a Integral (1.3) efetuada em *qualquer* intervalo $[A_1, A_2]$ é nula, é equivalente à afirmação de que o integrando é um função nula de x para todo t . A equação (1.3), escrita então na forma diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0 \quad (3')$$

é denominada *equação diferencial parcial para a conservação de massa* (em meio contínuo com fluxo causado pelo campo de velocidade $v(x,t)$ e densidade de massa $\rho(x,t)$).

A conservação de massa e, portanto, a equação diferencial correspondente, é uma hipótese que pode ou não ser adequada para o problema a ser analisado. Se $\rho(x,t)$ se refere a uma substância componente do meio contínuo que reage quimicamente ou decai,

transformando-se em outra substância, a hipótese de conservação de massa (para esta substância) pode não ser válida. Neste caso, se $f(x, t)$ é a função produção da nova substância por unidade de volume e tempo, a equação de conservação de massa deve ser substituída por

$$\int_{x(A_1,t)}^{x(A_2,t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx \quad (1.4)$$

para todo t e $x_1 < x_2$ ($A_1 < A_2$).

O segundo membro da Equação (1.4) fornece taxa de produção (perda) de massa por unidade de tempo em todo intervalo $[x_1, x_2]$.

A Equação (1.4) pode também ser escrita na forma de uma equação diferencial parcial se os integrandos forem contínuos, o que nos dará

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = f \quad (1.5)$$

para todo x e t .

Se houver informações independentes para a taxa de produção (nascimento)

$$n(x, t) = \frac{|f(x, t)| + f(x, t)}{2}$$

e a taxa de perda (morte)

$$m(x, t) = \frac{|f(x, t)| - f(x, t)}{2}$$

a Equação (1.5) toma a forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = n - m \quad (1.6)$$

Agora, analisemos esta equação sob o ponto de vista de Euler.

Retornando à equação original de conservação de massa (1.3), podemos escrever

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} dx = - \rho v \Big|_{x_1}^{x_2}$$

e, portanto

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \rho(x_1, t) v(x_1, t) - \rho(x_2, t) v(x_2, t) \quad (1.7)$$

A mesma fórmula (1.7) pode ser escrita através de argumentos físicos.

Fixados os extremos x_1 e x_2 de um intervalo, à taxa de variação da massa total incluída neste intervalo é dada por

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx$$

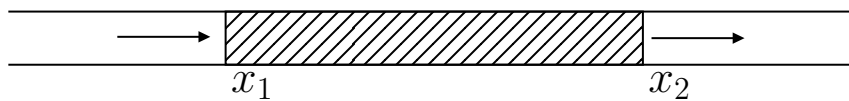
Em geral esta massa não é constante, uma vez que, sendo fixos x_1 e x_2 , há fluxo de massa através destes pontos, o que modifica a quantidade de massa total incluída em $[x_1, x_2]$.

Inicialmente observa-se o ponto x_1 , e verificamos que a taxa de massa por unidade de tempo que “penetra” $[x_1, x_2]$ vinda da região $x < x_1$ é dada por $\rho(x_1, t) v(x_1, t)$ (lembrando que se $v(x, t)$ for positivo, o fluxo de massa é positivo em x_1). No ponto x_2 a taxa de massa por unidade de tempo que “penetra” $[x_1, x_2]$ vindo da região $x > x_2$ é dada por

$$\rho(x_2, t) (-v(x_2, t)) = -\rho(x_2, t) v(x_2, t)$$

(sendo $v(x, t)$ positivo, o fluxo de massa é negativo em x_2 , isto é, a massa está sendo retirada de $[x_1, x_2]$ em x_2) (ver Figura 1.2).

Figura 1.2



Fonte: o autor.

Impondo a hipótese de conservação de massa, isto é, de que não há produção e nem perda de massa no meio contínuo, mas apenas transporte dela, a tradução matemática deste fato será

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} (x, t) dx = \rho(x_1, t) v(x_1, t) - \rho(x_2, t) v(x_2, t)$$

que é a Equação (1.7) obtida anteriormente!

O termo $\rho(x, t) v(x, t) = \rho v$ adquire então um significado físico importante: é a quantidade de massa que atravessa x na direção positiva por unidade de tempo, também chamado *fluxo de massa*.

Resumindo, a Lei de Conservação de Massa, analisada do ponto de vista de Euler, é constituída de uma equação diferencial parcial que relaciona a densidade de massa à função que fornece o fluxo de massa em cada ponto, sendo uma forma conveniente e bastante geral de Leis de conservação.

Uma *lei geral de conservação* é constituída dos seguintes ingredientes:

- (i) $\rho(x, t) \equiv$ densidade volumétrica da propriedade a ser analisada,
- (ii) $\phi(x, t) \equiv$ fluxo desta propriedade através do ponto x na direção positiva.
- (iii) $f(x, t) = n(x, t) - m(x, t) \equiv$ fonte desta propriedade, onde $n(x, t) \equiv$ taxa de produção por unidade de tempo e volume, $m(x, t) \equiv$ taxa de perda por unidade de tempo e volume.

Com tais ingredientes podemos escrever uma lei geral de conservação na seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \phi(x_1, t) - \phi(x_2, t) + \int_{x_1}^{x_2} (n(x, t) - m(x, t)) dx$$

para todo $x_1 < x_2$ e $t \geq 0$.

Supondo que as funções envolvidas tenham derivadas parciais contínuas, podemos escrever

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) dx + \int_{x_1}^{x_2} (n(x, t) - m(x, t)) dx$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + (n - m) \quad (1.8)$$

1.1.3 Lei de Conservação de Energia - Equação de Difusão

A relação constitutiva que nos fornece a tensão em termos da característica e do estado do material depende, em alguns casos, de forma considerável da temperatura do meio $\theta(x, t)$, que não pode ser obtida das outras incógnitas. Isto pressupõe que devemos ter uma quarta equação para fechar o sistema. Esta nova equação é geralmente obtida da hipótese de *conservação de energia*, sendo considerada a energia mecânica e a energia térmica. Neste caso devemos introduzir uma nova função $\varepsilon(x, t)$: densidade de energia térmica por unidade de massa, o que nos leva a buscar uma quinta equação de estado que relacione ε , ρ e θ .

Observe que em todos os casos o sistema só é fechado com uma relação constitutiva que escapa às considerações puramente da Mecânica do Meio Contínuo e provém do conhecimento da microestrutura da matéria.

Para simplificar a questão consideramos aqui a equação de conservação da energia apenas no caso em que o sistema mecânico está em repouso e há apenas modificações na energia interna do meio.

A energia térmica total no intervalo $[x_1, x_2]$ é

$$E(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) \varepsilon(x, t) dx$$

A modificação desta energia só poderá ocorrer pelos seguintes motivos:

1. Produção ou perda de energia térmica internamente, causadas pela passagem de uma corrente elétrica, por uma reação química, por absorção ou emissão de radiação, ou por fluxo de calor através da fronteira longitudinal da barra.

Seja $f(x, t)$ a função fonte que representa a produção ou perda de energia térmica por unidade de massa e tempo.

2. Fluxo de energia térmica através das extremidades x_1 ou x_2 . Para descrever este fluxo definimos a função $\phi(x_0, t)$: energia térmica por unidade de tempo que passa de $x < x_0$ para $x > x_0$.

Com isto a equação de conservação de energia fica

$$\frac{dE}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \rho) dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho f dx + \phi(x_1, t) - \phi(x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\rho f - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx$$

para todo $x_1 < x_2$.

Supondo que as funções envolvidas nesta equação tenham derivadas contínuas, podemos escrever

$$\frac{\partial (\varepsilon \rho)}{\partial t} = \rho f - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Se não consideramos fluxo de massa, podemos supor que ρ seja constante com o tempo e escrevemos ε e ϕ por meio de relações constitutivas em função da temperatura $\theta(x, t)$, que será assim a única incógnita do problema.

Tomemos inicialmente $\varepsilon = c\theta$ onde $c(x)$ é uma constante de calor específico que pode variar com a composição do material ao longo de x .

Para escrever $\phi(x, t)$ em termos de $\theta(x, t)$ utilizamos a Lei de Newton-Fourier

$$\phi(x, t) = -k_1 \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

significando que o fluxo de calor é proporcional à variação da temperatura e se dá no sentido contrário ao do gradiente desta (da região de maior temperatura para a região de menor temperatura).

O coeficiente k , chamado *condutividade térmica*, depende em geral do ponto e da temperatura.

Desta forma, a Lei de Conservação de Energia Térmica vem escrita como

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1(\theta, x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + f \quad (1.9)$$

Tal expressão é denominada *equação de difusão de calor* (para um meio contínuo unidimensional estacionário).

Se k, ρ, c são constantes e não há produção ou perda interna temos a equação clássica da difusão do calor

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (1.10)$$

Lei de Conservação de Massa com Difusão

Na Seção (1.1.1) mostra-se a equação de conservação de massa para um meio contínuo em cuja caracterização dar-se-à pelo deslocamento macroscópico do meio: a *convecção*.

Considerara-se agora um meio contínuo unidimensional em que se encontra distribuída uma outra substância de densidade $\delta(x, t)$. Assim, podemos considerar separadamente as equações de conservação de massa para cada substância. Suponhamos que o meio contínuo de fundo tenha densidade $\rho(x, t)$ e velocidade $v(x, t)$ e, portanto, satisfaça

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

Consideremos agora a substância diluída que pode ser transportada pelo movimento macroscópico mecânico do meio, dado por $v(x, t)$, e que pode também ser transportada por um processo de difusão. O fluxo desta substância através do ponto x_0 , que é igual à quantidade de massa por unidade de tempo que atravessa x_0 , no sentido de $x < x_0$ para $x > x_0$, é constituído de dois termos. O primeiro deles é o fluxo macroscópico, dado por

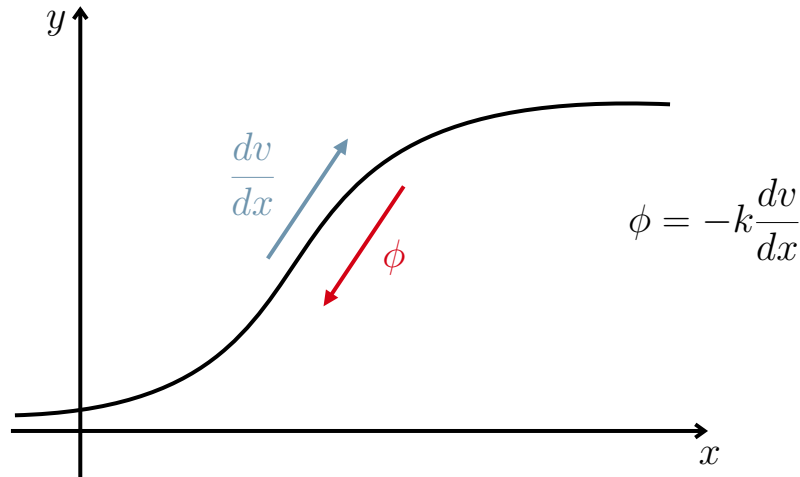
$$\delta(x_0, t) v(x_0, t) = \phi_1(x_0, t),$$

também chamado convecção, e o segundo, o fluxo microscópico causado pela difusão que descrevemos pela Lei de Fick, em que o fluxo é proporcional à variação da concentração e ocorre no sentido contrário a concentração (ver Figura 1.3)

$$\phi_2(x_0, t) = -k \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

semelhante à Lei de Newton-Fourier para a difusão do calor.

Figura 1.3



Fonte: o autor

Assim, supondo não haver produção ou perda interna, a Lei de Conservação de Massa para esta substância será

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \delta(x, t) dx &= \phi_1(x_1, t) - \phi_1(x_2, t) + \phi_2(x_1, t) - \phi_2(x_2, t) = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\partial}{\partial x}(\delta v) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) dx \end{aligned}$$

para todo $x_1 < x_2$, de onde tiramos

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) \quad (1.11)$$

Considerando o meio contínuo estacionário (macroscopicamente), temos

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) \quad (1.12)$$

onde k depende, em geral, da concentração δ . Em alguns casos k pode ser considerado constante e, portanto, a equação de difusão fica sendo

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \quad (1.13)$$

Observe que as equações desta Seção e da Seção (1.1.3) são formalmente idênticas e denominadas *equações de difusão*.

Os processos de difusão, vistos como transporte microscópico de massa, são geralmente muito mais lentos que os processos macroscópicos (também chamados *convecção*) e estes problemas são caracterizados por difusão lenta e convecção rápida.

2 O método dos elementos finitos

2.1 O Método de Faedo-Galerkin para Problemas de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF)

O método de Faedo-Galerkin foi elaborado para encontrar soluções dos problemas de evolução. Inicialmente o método de Galerkin foi desenvolvido para ser aplicado em problemas de contorno que podiam ser reduzidos aos variacionais. Sendo uma combinação do Método de Fourier o do Método Galerkin, este foi elaborado 30 anos após o método Galerkin por Sandro Faedo (FAEDO, 1949).

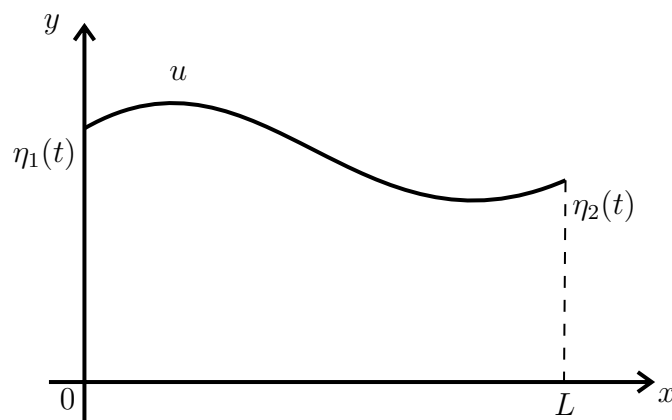
Considere-se o problema de valor inicial e de fronteira

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - c^2 u_{xx} + \nu u_x + \mu u = f(x, t), \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = \eta_1(t), \quad t \geq 0 \\ u(L, t) = \eta_2(t), \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0, \quad x \in [0, L] \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Pelo fato de o problema acima envolver problema de valor inicial e condições de fronteira (PVIF) é chamado de problema misto.

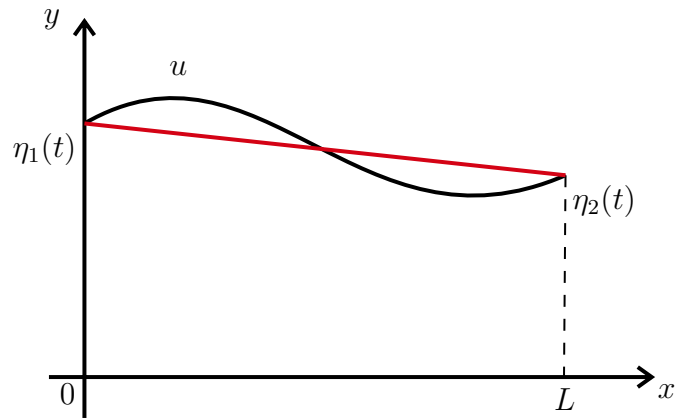
O problema (2.1) não modela apenas a difusão unidimensional. Os termos νu_x e μu , modelam, respectivamente, a advecção e a reação (dissipação) do sistema. A equação (2.1a) é denominada *Equação de difusão-advecção-reação*.

Figura 2.1 – Gráfico que representa o comportamento da função u .



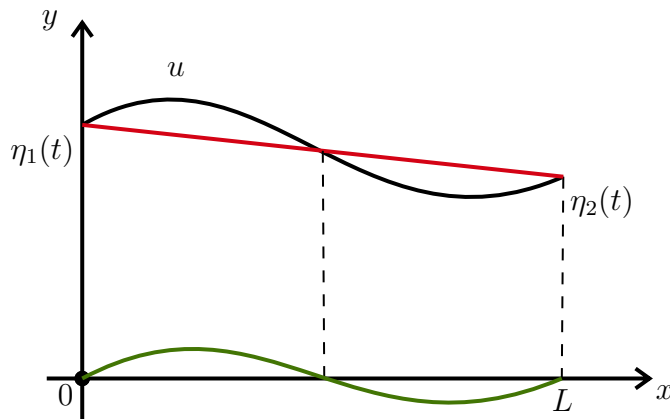
Fonte: o autor

Figura 2.2 – Gráfico que representa a reta que liga η_1 e η_2 .



Fonte: o autor

Figura 2.3 – Gráfico da reta que representa a mudança de variável.



Fonte: o autor

Da Figura 2.3, temos que a equação da reta que une η_1 e η_2 é dada por

$$r(x, t) = \frac{\eta_2(t) - \eta_1(t)}{L} (x - L) + \eta_2(t)$$

Isso sugere que a função $v = u - r$, dada pela expressão

$$v(x, t) = u(x, t) - r(x, t) = u(x, t) - \eta_2(t) - [\eta_2(t) - \eta_1(t)] \left(\frac{x}{L} - 1 \right), \quad (2.2)$$

anula-se nos pontos de fronteira, *i.e.*, $v(0, t) = v(L, t) = 0$. De (2.2),

$$u = v + \eta_2(t) + [\eta_2(t) - \eta_1(t)] \left(\frac{x}{L} - 1 \right) = v + f_3 \quad (2.3)$$

Diante da equação (2.3) iremos deriva-la com relação à t e x seguindo a ordem das derivadas na equação (2.1)

$$\begin{aligned} u_t &= v_t + \eta_2'(t) + [\eta_2'(t) - \eta_1'(t)] \left(\frac{x}{L} - 1 \right) = v_t + f_1 \\ u_x &= v_x + \frac{1}{L} [\eta_2(t) - \eta_1(t)] = v_x + f_2 \\ u_{xx} &= v_{xx} \end{aligned}$$

substituindo em (2.1) de tal modo que obtém-se um novo PVIF v da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t - c^2 v_{xx} + \nu v_x + \mu v = F, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty) \\ v(0, t) = 0 \\ v(L, t) = 0 \\ v(x, 0) = u(x, 0) - \eta_2(0) - (\eta_2(0) - \eta_1(0)) \left(\frac{x}{L} - 1 \right) = v_0(x) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

na qual

$$F = f - f_1 - \nu f_2 - \mu f_3$$

Note que o PVIF (2.4) apresenta uma vantagem sobre o PVIF (2.1): as condições de fronteira do segundo são homogêneas.

A noção de solução consiste em encontrar $v : [0, L] \times \{t \in \mathbb{R} ; t \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça pontualmente o PVIF (2.4), denominada solução clássica para o PVIF (2.4).

Sob condições iniciais menos restritivas, outra noção de solução é necessária. Uma função v é solução fraca para (2.4) quando

$$\begin{aligned} v &: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{D}'(]0, L[) \\ t &\mapsto v(t) \end{aligned}$$

para todo $T > 0$ fixo porém arbitrário, satisfaz o problema no sentido de $\mathcal{D}'(]0, T[)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle v_t(t), \varphi \rangle + c^2 \langle v_x(t), \varphi_x \rangle + \nu \langle v_x(t), \varphi \rangle + \mu \langle v(t), \varphi \rangle = \langle F(t), \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, L[) \\ v(0) = v_0 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

a qual, depois de algumas considerações (ver (ROBINSON, 2001)), pode ser substituída pela definição de que uma função v é solução fraca para (2.4) quando

$$\begin{aligned} v &: [0, +\infty) \rightarrow H_0^1(]0, L[) \\ t &\mapsto v(t) \end{aligned}$$

para todo $T > 0$ fixo porém arbitrário, satisfaz o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_t(t), \varphi) + c^2 (v_x(t), \varphi_x) + \nu (v_x(t), \varphi) + \mu (v(t), \varphi) = (F(t), \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(]0, L[) \\ v(0) = v_0 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

para quase todo $t \in [0, T]$, no qual (\cdot, \cdot) representa o produto interno em $L^2(]0, L[)$, supondo-se $F \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; L^\infty(]0, L[))$ e $v_0 \in H_0^1(]0, L[)$.

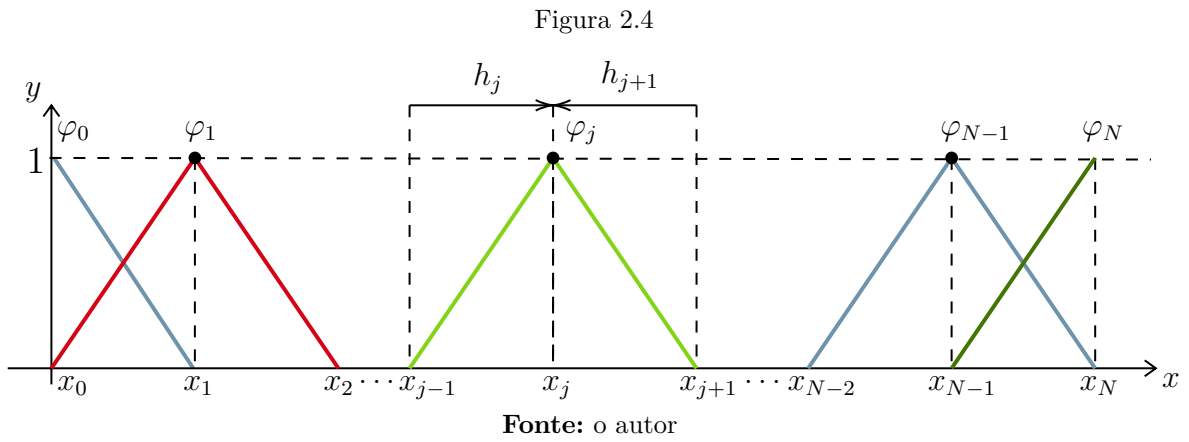
Como $H_0^1(]0, L[)$ é separável, existe uma base hilbertiana (sistema ortonormal completo) $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(]0, L[)$ (ver (BRÉZIS, 2011)). Procura-se por aproximações $v^{(N)}$ da solução v dadas sob a forma

$$v^{(N)}(t) = \sum_{j=0}^N \omega_j^{(N)}(t) \varphi_j \quad (2.7)$$

na qual $\omega_j^{(N)}$ são funções a determinar, e $\{\varphi_j\}_{j=1,2,\dots,N}$ é um subconjunto do sistema de funções $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Para o intervalo $[0, L]$, por simplicidade, para cada N fixo, considere uma partição regular com $N + 1$ nós $\{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L\}$. Denote por h o valor absoluto da diferença entre nós consecutivos: $h = x_{j+1} - x_j$. Para fins de aproximação por Elementos Finitos, as funções φ_j são obtidas como limite de uma sequência de funções em $H^1(]0, L[)$ que satisfazem $\varphi_j(x_j) = 1$, $\varphi_j(x_i) = 0$, sempre que $x_j \neq x_i$. Note-se que estas φ_j não têm as mesmas propriedades de ortogonalidade da base hilbertiana acima.

A Figura 2.4 abaixo mostra como as funções φ_j se dispõem.



Pondo (2.7) na expressão (2.6a), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\omega_j^{(N)}(t) \sum_{j=0}^N \varphi_j, \varphi \right) + c^2 \left(\omega_j^{(N)}(t) \sum_{j=0}^N (\varphi_j)_x, \varphi_x \right) \\ + \nu \left(\omega_j^{(N)}(t) \sum_{j=0}^N (\varphi_j)_x, \varphi \right) + \mu \left(\omega_j^{(N)}(t) \sum_{j=0}^N \varphi_j, \varphi \right) = (F(t), \varphi), \end{aligned} \quad (2.8)$$

para toda $\varphi \in H_0^1(]0, L[)$. Como a função $\omega_j^{(N)}$ depende apenas de t

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \omega_j^{(N)}(t) \sum_{j=0}^N (\varphi_j, \varphi) + c^2 \omega_j^{(N)}(t) \sum_{j=0}^N \left((\varphi_j)_x, \varphi_x \right) + \nu \omega_j^{(N)}(t) \sum_{j=0}^N \left((\varphi_j)_x, \varphi \right) \\ + \mu \omega_j^{(N)}(t) \sum_{j=0}^N (\varphi_j, \varphi) = (F(t), \varphi) \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in H_0^1(]0, L[)$, resultando em

$$\begin{aligned} \left[\omega_j^{(N)} \right]'(t) \sum_{j=0}^N (\varphi_j, \varphi) + \omega_j^{(N)}(t) \sum_{j=0}^N \left[c^2 \left((\varphi_j)_x, \varphi_x \right) \right. \\ \left. + \nu \left((\varphi_j)_x, \varphi \right) + \mu (\varphi_j, \varphi) \right] = (F(t), \varphi) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como (2.9) vale para toda $\varphi \in H_0^1(]0, L[)$, em particular, vale para as funções $\{\varphi_i\}_{i=0,\dots,N}$

$$\begin{aligned} \left[\omega_j^{(N)} \right]'(t) \sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i) + \omega_j^{(N)}(t) \sum_{j=1}^N \left[c^2 \left((\varphi_j)_x, (\varphi_i)_x \right) \right. \\ \left. + \nu \left((\varphi_j)_x, \varphi_i \right) + \mu (\varphi_j, \varphi_i) \right] = (F(t), \varphi_i), \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Em particular para $t = t_k$

$$\left[\omega_j^{(N)} \right]'(t_k) \sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i) + \omega_j^{(N)}(t_k) \sum_{j=1}^N \left[c^2 \left((\varphi_j)_x, (\varphi_i)_x \right) + \nu \left((\varphi_j)_x, \varphi_i \right) + \mu (\varphi_j, \varphi_i) \right] = (F(t), \varphi_i)$$

para $\forall k = 1, 2, \dots$

Devem ser calculados os produtos internos descritos na expressão (2.1). Fixe j , com $j = 0$ enquanto $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Tem-se as seguintes integrais de produto interno

$$\int_0^L \varphi_0(x) \varphi_0(x) dx; \quad \int_0^L \varphi_0(x) \varphi_1(x) dx; \quad \int_0^L \varphi_0(x) \varphi_i(x) dx = 0, \quad \forall |i - j| > 1;$$

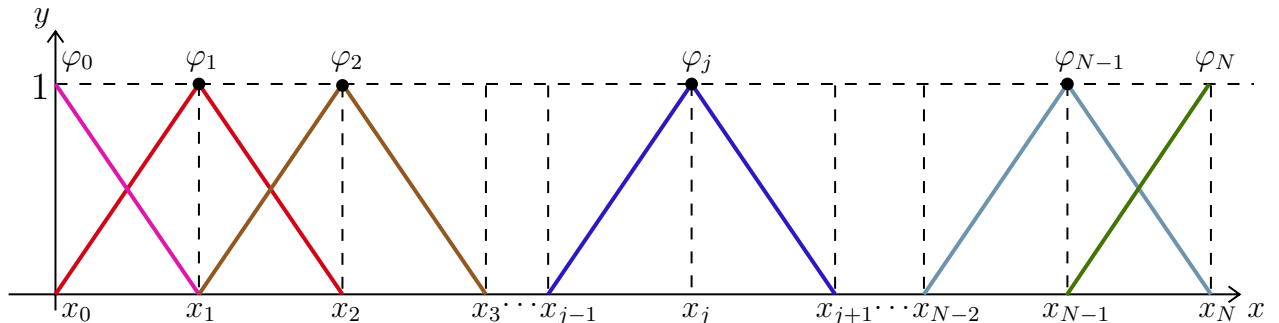
$$\int_0^L \varphi_j(x) \varphi_j(x) dx; \quad \int_0^L \varphi_j(x) \varphi_{j-1}(x) dx; \quad \int_0^L \varphi_j(x) \varphi_{j+1}(x) dx;$$

$$\int_0^L \varphi_N(x) \varphi_N(x) dx; \quad \int_0^L \varphi_N(x) \varphi_{N-1}(x) dx; \quad \int_0^L \varphi_N(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad \forall j < N - 1.$$

Todo o cálculo feito só foi possível porque o espaço considerado é o $L^2(0, L)$.

Para resolvermos esses produtos internos, precisamos achar as funções correspondente ao gráfico das funções teste φ_i (ver Figura 2.5).

Figura 2.5 – Gráfico das funções teste φ .



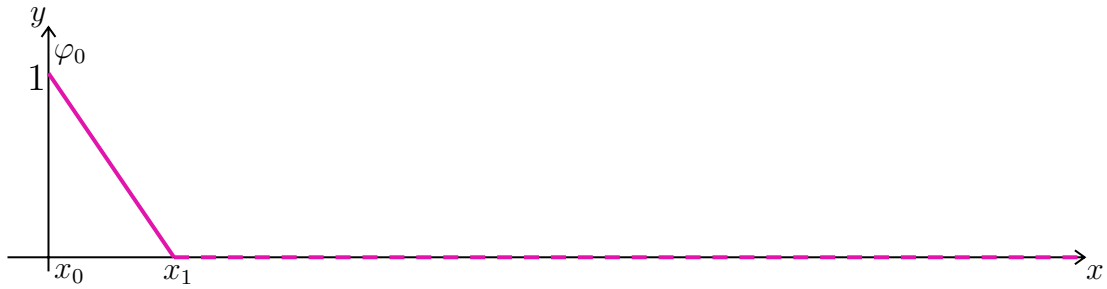
Fonte: o autor

2.1.1 Cálculo do Produto interno das funções φ

2.1.1.1 Produto interno da forma (φ_j, φ_i)

Da Figura 2.5, tem-se uma partição regular, logo a distância entre dois x_i consecutivos é constante e igual a h , ou seja, $h = x_{j+1} - x_j, \forall j = 0, \dots, N - 1$. Diante dessas informações e para $j = 0$ fixo, para encontrarmos a função teste φ_0 , temos que analisar o seguinte gráfico abaixo:

Figura 2.6 – Gráfico para φ_0



Fonte: o autor

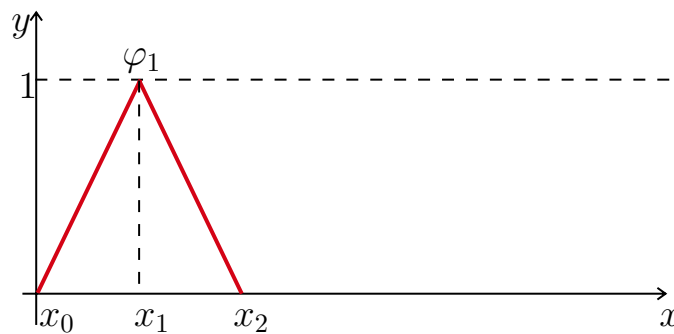
A equação da reta que corresponde a função φ_0 será dada por:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x-x_0}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \in [x_1, x_N] \end{cases} \implies \varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \in [x_1, x_N] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \varphi_0) &= \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_0(x) dx = \int_a^b \varphi_0^2(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 dx = \frac{1}{(x_1-x_0)^2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^2 dx \\ &= \frac{1}{(x_1-x_0)^2} \frac{1}{3} (x_1-x_0)^3 - \frac{1}{(x_1-x_0)^2} \frac{1}{3} (x_0-x_0)^3 \\ &= \frac{1}{3} \frac{(x_1-x_0)^3}{(x_1-x_0)^2} \\ &= \frac{1}{3} (x_1-x_0) = \frac{1}{3} h \end{aligned}$$

Da Figura 2.5, temos que para $i = 1$, o gráfico correspondente será

Figura 2.7 – Gráfico para φ_1



Fonte: o autor

Pela análise do gráfico, temos para φ_1 ,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 1 - \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x \in [x_1, x_2] \\ 0, & x \in [x_2, x_N] \end{cases} \implies \varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{x-x_0}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ \frac{x_2-x}{x_2-x_1}, & x \in [x_1, x_2] \\ 0, & x \in [x_2, x_N] \end{cases}$$

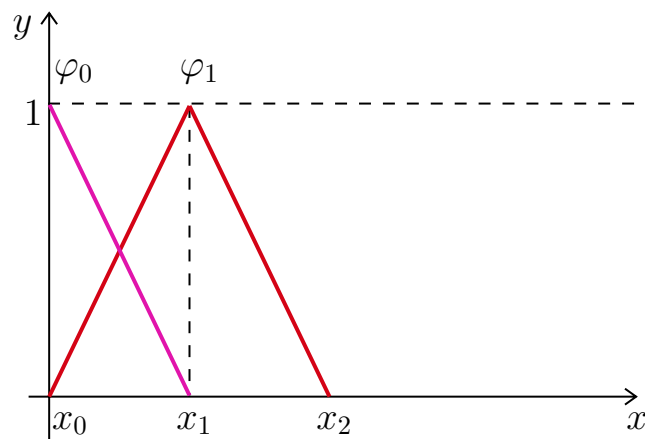
$$\begin{aligned}
 (\varphi_1, \varphi_1) &= \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_1(x) dx = \int_a^b \varphi_1^2(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1^2(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1^2(x) dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right]^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{x_2-x}{x_2-x_1} \right]^2 dx = \frac{1}{x_1-x_0} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^2 dx + \frac{1}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} (x_2-x)^2 dx
 \end{aligned}$$

como $h = x_{j+1} - x_j \implies h = x_1 - x_0 \iff h = x_2 - x_1$

$$\begin{aligned}
 &\implies \frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^2 dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_1}^{x_2} (x_2-x)^2 dx = \frac{1}{3} (x-x_0)^3 \Big|_{x_0}^{x_1} - \frac{1}{3} (x_2-x)^3 \Big|_{x_1}^{x_2} \\
 &= \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^3}{2} - \left(-\frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} \right) = \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}h \\
 &= \frac{h+h}{3} = \frac{2}{3}h
 \end{aligned}$$

Para resolvermos o caso (φ_0, φ_1) precisamos analisar o seguinte gráfico abaixo:

Figura 2.8 – Gráfico para a função φ_0 em interação com φ_1



Fonte: o autor.

Da análise do gráfico, temos

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(x) &= \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \in [x_1, x_N] \end{cases} \\
 \varphi_1(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_0}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ \frac{x_2-x}{x_2-x_1}, & x \in [x_1, x_2] \\ 0, & x \in [x_1, x_N] \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\varphi_0, \varphi_1) &= \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_1(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} \varphi_0(x) \varphi_1(x) dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} \varphi_0(x) \varphi_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_0(x) \varphi_1(x) dx + \int_{x_2}^{x_N} \varphi_0(x) \varphi_1(x) dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} \varphi_0(x) \varphi_1(x) dx, \quad x \in [x_0, x_1] \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{x_1-x}{x_1-x_0} \right) \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right) dx \\
 &= \frac{1}{(x_1-x_0)^2} \int_{x_0}^{x_1} (x_1-x)(x-x_0) dx
 \end{aligned}$$

sendo $h = x_{j+1} - x_j \implies h = x_1 - x_0$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_1} (x_1-x)(x-x_0) dx$$

fazendo $u = x - x_0 \iff x = u + x_0$

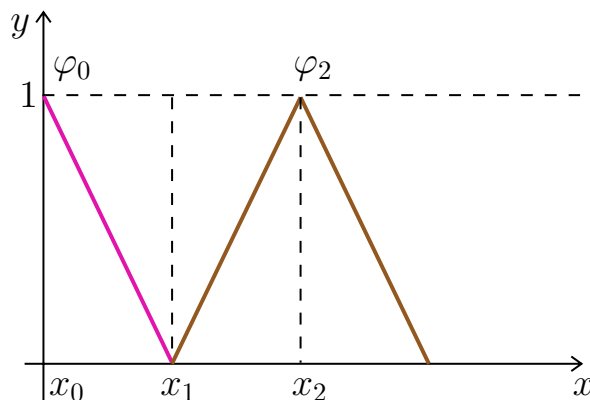
$$\begin{aligned}
 (\varphi_0, \varphi_1) &= \frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_1} (x_1-x) u du \\
 &= \frac{1}{h^2} \int_0^{x_1-x_0} (x_1 - (u + x_0)) u du \\
 &= \frac{1}{h^2} \int_0^{x_1-x_0} (x_1 - x_0 - u) u du
 \end{aligned}$$

Como $h = x_{j+1} - x_j \implies h = x_1 - x_0$

$$\begin{aligned}
 (\varphi_0, \varphi_1) &= \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-u) u du \\
 &= \frac{1}{h^2} \left[h \cdot \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^h \\
 &= \left[\frac{1}{h^2} \cdot h \cdot \frac{u^2}{2} - \frac{1}{h^2} \cdot \frac{u^3}{3} \right]_0^h = \left[\frac{1}{h^2} \cdot h \cdot \frac{h^2}{2} - \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} \right] \\
 &= \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}
 \end{aligned}$$

Como já fora feito o caso (φ_0, φ_1) , resta fazer os casos (φ_0, φ_i) com $i \geq 2$. Para $i = 2$

Figura 2.9 – Gráfico para a função φ_0 em interação com φ_2



Fonte: o autor.

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \in [x_1, x_N] \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x \in [x_1, x_2] \\ \frac{x_3-x}{x_3-x_2}, & x \in [x_2, x_3] \\ 0, & x \in [x_3, x_N] \end{cases}$$

Logo,

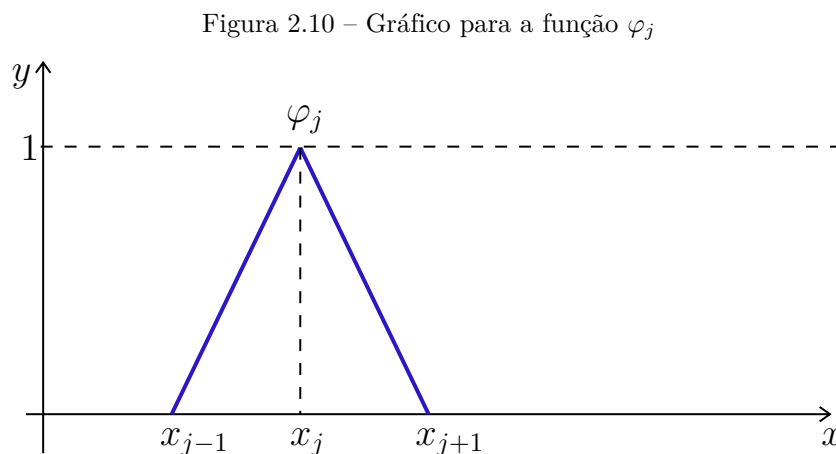
$$\begin{aligned} (\varphi_0, \varphi_2) &= \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_2(x) dx = \int_{x_0}^{x_3} \varphi_0(x) \varphi_2(x) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \varphi_0(x) \cancel{\varphi_2^0(x)} dx + \int_{x_1}^{x_2} \cancel{\varphi_0^0(x)} \varphi_2(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} \cancel{\varphi_0^0(x)} \varphi_2(x) dx \\ &\quad + \int_{x_3}^{x_N} \cancel{\varphi_0^0(x)} \cancel{\varphi_2^0(x)} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para os casos em que o módulo da diferença entre i e j supera um, tem-se o mesmo resultado.

$$|j - i| > 1 \implies (\varphi_j, \varphi_i) = \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx = 0 \quad (2.10)$$

Para casos particulares: $(\varphi_{j-1}, \varphi_j)$, (φ_j, φ_j) , $(\varphi_j, \varphi_{j+1})$, $(\varphi_{N-2}, \varphi_N)$, $(\varphi_{N1}, \varphi_N)$, (φ_N, φ_N) , (φ_N, φ_N)

O gráfico para φ_j é,



Fonte: o autor.

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_j] \cup [x_j, x_{j+1}] \end{cases} \quad (2.11)$$

fazendo $j \mapsto j - 1$:

$$\varphi_{j-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-2}}{x_{j-1}-x_{j-2}}, & x \in [x_{j-2}, x_{j-1}] \\ \frac{x_j-x}{x_j-x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ 0, & x \notin [x_{j-2}, x_{j-1}] \cup [x_{j-1}, x_j] \end{cases} \quad (2.12)$$

fazendo $j \mapsto j - 2$:

$$\varphi_{j-2}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-3}}{x_{j-2}-x_{j-3}}, & x \in [x_{j-3}, x_{j-2}] \\ \frac{x_{j-1}-x}{x_{j-1}-x_j}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ 0, & x \notin [x_{j-3}, x_{j-2}] \cup [x_{j-1}, x_j] \end{cases} \quad (2.13)$$

fazendo $j \mapsto j + 1$:

$$\varphi_{j+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_j}{x_{j+1}-x}, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ \frac{x_{j+2}-x}{x_{j+2}-x_{j+1}}, & x \in [x_{j+1}, x_{j+2}] \\ 0, & x \notin [x_j, x_{j+1}] \cup [x_{j+1}, x_{j+2}] \end{cases} \quad (2.14)$$

fazendo $j \mapsto j + 2$:

$$\varphi_{j+2}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ \frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+2}}, & x \in [x_{j+2}, x_{j+3}] \\ 0, & x \notin [x_j, x_{j+1}] \cup [x_{j+2}, x_{j+3}] \end{cases} \quad (2.15)$$

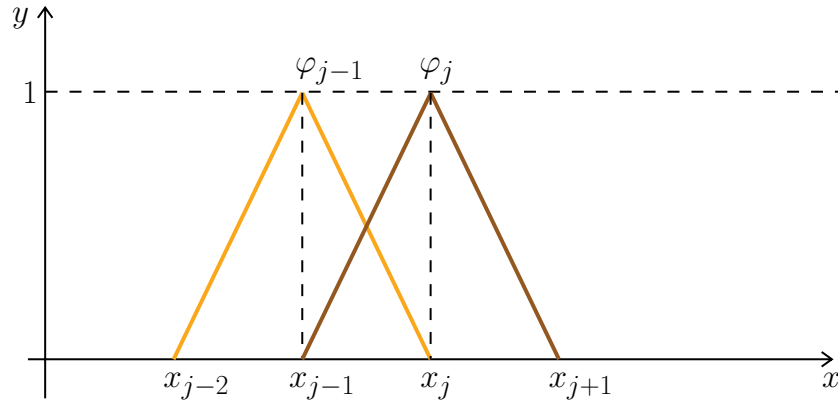
$$\begin{aligned}
 (\varphi_j, \varphi_j) &= \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_j(x) dx = \int_a^b \varphi_j^2(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j^2(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j^2(x) dx \\
 &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} \right]^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} \right]^2 dx \\
 &= \frac{1}{(x_j-x_{j-1})^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x-x_{j-1})^2 dx + \frac{1}{(x_{j+1}-x_j)^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{j+1}-x)^2 dx \\
 &= \frac{1}{(x_j-x_{j-1})^2} \frac{1}{3} (x-x_{j-1})^3 \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} - \frac{1}{(x_{j+1}-x_j)^2} \frac{1}{3} (x_{j+1}-x)^3 \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} \\
 &= \frac{1}{(x_j-x_{j-1})^2} \frac{1}{3} [(x_j-x_{j-1})^3 - (x_{j-1}-x_{j-1})^3] - \\
 &\quad - \frac{1}{(x_{j+1}-x_j)^2} \frac{1}{3} [(x_{j+1}-x_{j+1})^3 - (x_{j+1}-x_j)^3]
 \end{aligned}$$

como $x_{j+1} - x_j = h \implies x_j - x_{j-1} = -h$

$$\begin{aligned}
 (\varphi_j, \varphi_j) &= \frac{1}{(x_j-x_{j-1})^2} \frac{1}{3} (x_j-x_{j-1})^3 - \frac{1}{(x_{j+1}-x_j)^2} \frac{1}{3} [-(x_{j+1}-x_j)^3] \\
 &= \frac{1}{3} \frac{(x_j-x_{j-1})^3}{(x_j-x_{j-1})^2} + \frac{1}{3} \frac{(x_{j+1}-x_j)^3}{(x_{j+1}-x_j)^2} \\
 &= \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}h = \frac{2}{3}h.
 \end{aligned}$$

Para $(\varphi_{j-1}, \varphi_j)$:

Figura 2.11 – Gráfico para a função φ_{j-1} em interação com φ_j



Fonte: o autor.

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_j] \cup [x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

$$\varphi_{j-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-2}}{x_{j-1}-x_{j-2}}, & x \in [x_{j-2}, x_{j-1}] \\ \frac{x_j-x}{x_j-x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ 0, & x \notin [x_{j-2}, x_{j-1}] \cup [x_{j-1}, x_j] \end{cases}$$

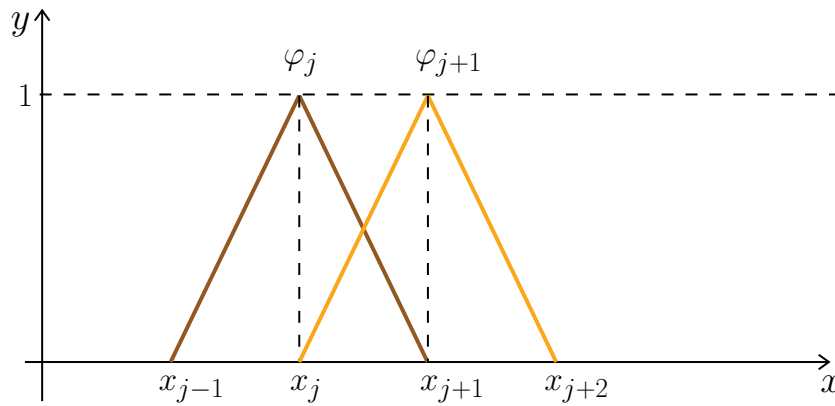
$$\begin{aligned} (\varphi_{j-1}, \varphi_j) &= \int_a^b \varphi_{j-1}(x) \varphi_j(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} \right) \left(\frac{x - x_{j-1}}{x_{j-1} - x_j} \right) dx \\ &= \frac{1}{(x_j - x_{j-1})^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - x)(x - x_{j-1}) dx \end{aligned}$$

sendo $h = x_j - x_{j-1}$ e fazendo $u = x - x_{j-1} \iff x = u + x_{j-1}$

$$\begin{aligned} (\varphi_{j-1}, \varphi_j) &= \frac{1}{h^2} \int_0^{x_j - x_{j-1}} (x_j - x) u du = \frac{1}{h^2} \int_0^h (x_j - (u + x_{j-1})) u du = \frac{1}{h^2} \int_0^h (h - u) u du \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{hu^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{h^2} \left[\frac{hh^2}{2} - \frac{h^3}{3} \right] = \frac{1}{h^2} \frac{h^3}{2} - \frac{1}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{h}{6}. \end{aligned}$$

Para $(\varphi_j, \varphi_{j+1})$:

Figura 2.12 – Gráfico para a função φ_j em interação com φ_{j+1}



Fonte: o autor.

$$\begin{aligned} (\varphi_j, \varphi_{j+1}) &= \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_{j+1}(x) dx = \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_{j+1}(x) dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \varphi_j(x) \varphi_{j+1}(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j(x) \varphi_{j+1}(x) dx \\ &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right) \left(\frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \right) dx; \quad x_j - x_{j-1} = h = x_{j+1} - x_j \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - x)(x - x_{j-1}) dx \end{aligned}$$

sendo $h = x_{j+1} - x_j = x_j - x_{j-1} \iff -h = x_j - x_{j+1} = x_{j-1} - x_j$

$$(\varphi_j, \varphi_{j+1}) = \frac{1}{h^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_{j-1})(x_{j+1} - x) dx$$

fazendo $u = x_{j+1} - x \iff -u = x - x_{j+1} \Rightarrow x = u + x_{j+1}$

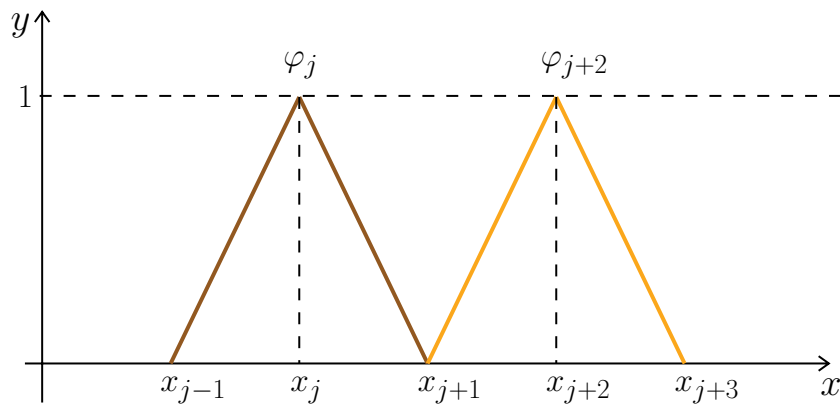
$$\begin{aligned} (\varphi_j, \varphi_{j+1}) &= \frac{1}{h^2} \int_0^{x_{j+1} - x_j} (x_j - (u + x_{j+1})) u du \\ &= \frac{1}{h^2} \int_0^{x_{j+1} - x_j} (x_j - x_{j-1} - u) u du \end{aligned}$$

como $h = x_j - x_{j-1}$

$$\begin{aligned}
 (\varphi_j, \varphi_{j+1}) &= \frac{1}{h^2} \int_0^h (h-u) u du \\
 &= \frac{1}{h^2} \left[h \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^h \\
 &= \frac{1}{h^2} \left[h \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \right] \implies \left[\frac{1}{h^2} h \frac{h^2}{2} - \frac{1}{h^2} \frac{h^3}{3} \right] \\
 &= \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}.
 \end{aligned}$$

Para $(\varphi_j, \varphi_{j+2})$:

Figura 2.13 – Gráfico para a função φ_j em interação com φ_{j+2}



Fonte: o autor.

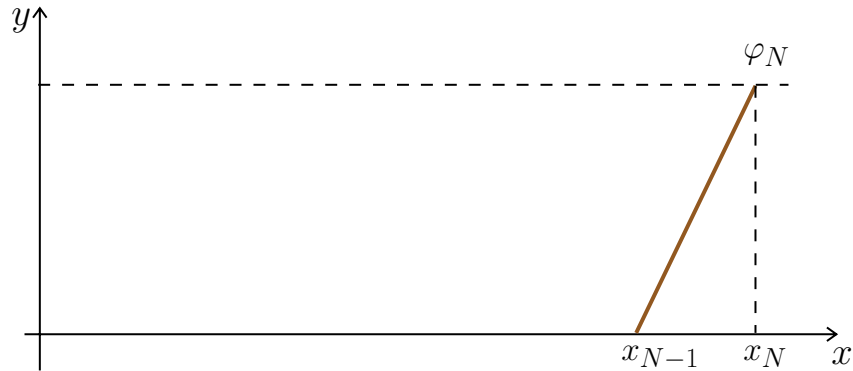
$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_j] \cup [x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

$$\varphi_{j+2}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-2}}{x_{j-1}-x_{j-2}}, & x \in [x_{j-2}, x_{j-1}] \\ \frac{x_j-x}{x_j-x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ 0, & x \notin [x_{j-2}, x_{j-1}] \cup [x_{j-1}, x_j] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (\varphi_j, \varphi_{j+2}) &= \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_{j+2}(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+2}} \varphi_j(x) \varphi_{j+2}(x) dx \\
 &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j(x) \varphi_{j+1}(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+2}} \varphi_{j+1}(x) \varphi_{j+2}(x) dx \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Observa-se que $(\varphi_{j-2}, \varphi_j) \equiv (\varphi_j, \varphi_{j+2})$, de tal modo, omitimos o caso $(\varphi_{j-2}, \varphi_j)$, mas é análogo ao caso acima.

Para (φ_N, φ_N) :

Figura 2.14 – Gráfico para a função φ_N 

Fonte: o autor.

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{N-1}}{x_N-x_{N-1}}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0, & x \notin [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

De tal modo que,

$$\begin{aligned} (\varphi_N, \varphi_N) &= \int_a^b \varphi_N(x) \varphi_N(x) dx = \int_a^b \varphi_N^2(x) dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{x-x_{N-1}}{x_N-x_{N-1}} \right)^2 dx = \left(\frac{1}{x_N-x_{N-1}} \right)^2 \int_a^b (x-x_{N-1})^2 dx \\ &= \frac{1}{(x_N-x_{N-1})^2} \int_{x_{N-1}}^{x_N} (x-x_{N-1})^2 dx \\ &= \frac{1}{(x_N-x_{N-1})^2} \frac{1}{3} (x-x_{N-1})^3 \Big|_{x_{N-1}}^{x_N} \\ &= \frac{1}{(x_N-x_{N-1})^2} \frac{1}{3} [(x_N-x_{N-1})^3 - (x_{N-1}-x_{N-1})^3] \\ &= \frac{1}{(x_N-x_{N-1})^2} \frac{1}{3} (x_N-x_{N-1})^3 \end{aligned}$$

sendo $h = x_{j+1} - x_j \iff -h = x_N - x_{N-1}$

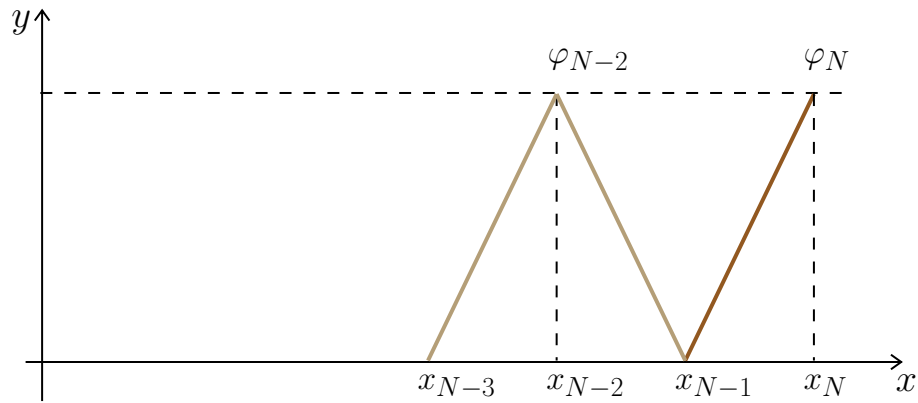
$$(\varphi_N, \varphi_N) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{h} \right)^2 h^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{h} \right)^2 h^3 = \frac{2}{3} h$$

Para $(\varphi_N, \varphi_{N-2})$:

$$\varphi_{N-2}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{N-3}}{x_{N-2}-x_{N-3}}, & x \in [x_{N-3}, x_{N-2}] \\ \frac{x_{N-2}-x}{x_{N-2}-x_{N-1}}, & x \in [x_{N-2}, x_{N-1}] \\ 0, & x \notin [x_{N-3}, x_{N-2}] \cup [x_{N-2}, x_{N-1}] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_{N-2}, \varphi_N) &= \int_a^b \varphi_{N-2}(x) \varphi_N(x) dx = \int_{x_{N-3}}^{x_N} \varphi_{N-2}(x) \varphi_N(x) dx \\ &= \int_{x_{N-3}}^{x_{N-2}} \varphi_{N-2}(x) \varphi_N(x) dx + \int_{x_{N-2}}^{x_{N-1}} \varphi_{N-2}(x) \varphi_N(x) dx + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \varphi_{N-2}(x) \varphi_N(x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

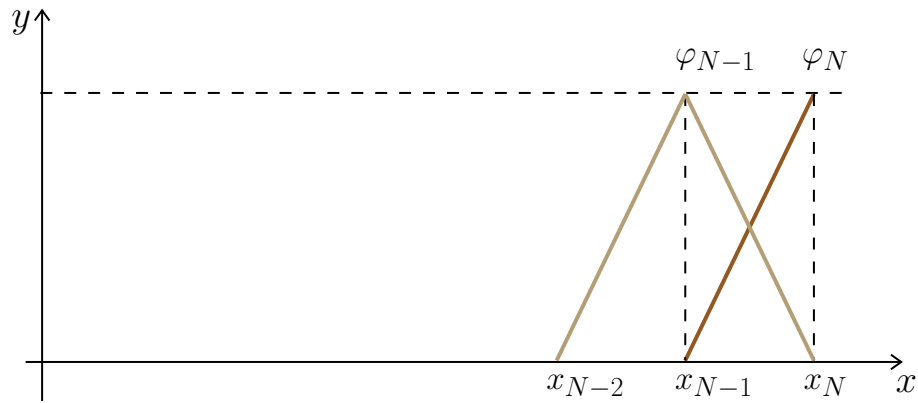
Figura 2.15 – Gráfico para a função φ_{N-2} em interação com φ_N



Fonte: o autor.

Para $(\varphi_N, \varphi_{N-1})$:

Figura 2.16 – Gráfico para a função φ_{N-1} em interação com φ_N



Fonte: o autor.

$$\varphi_{N-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{N-2}}{x_{N-2}-x_{N-1}}, & x \in [x_{N-2}, x_{N-1}] \\ \frac{x_N-x}{x_N-x_{N-1}}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0, & x \notin [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

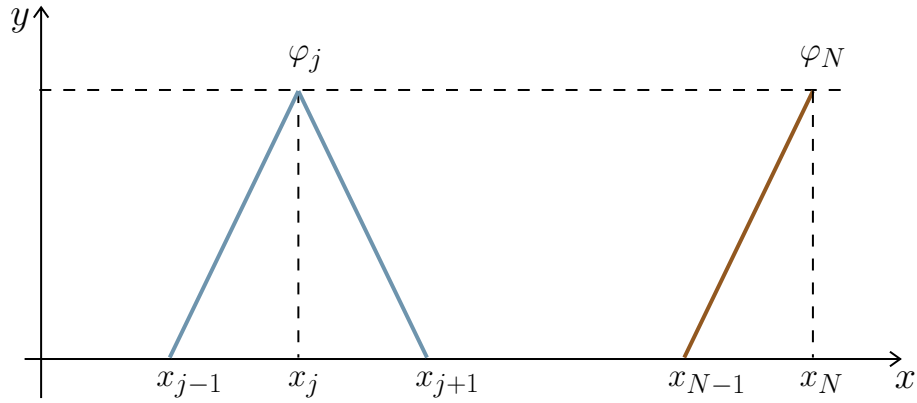
$$\begin{aligned} (\varphi_{N-1}, \varphi_N) &= \int_a^b \varphi_{N-1}(x) \varphi_N(x) dx = \int_{x_{N-2}}^{x_N} \varphi_{N-1}(x) \varphi_N(x) dx \\ &= \int_{x_{N-2}}^{x_{N-1}} \varphi_{N-1}(x) \varphi_N(x) dx + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \varphi_{N-1}(x) \varphi_N(x) dx \\ &= \int_{x_{N-1}}^{x_N} \varphi_{N-1}(x) \varphi_N(x) dx = \int_{x_{N-1}}^{x_N} \left(\frac{x_N-x}{x_N-x_{N-1}} \right) \left(\frac{x-x_{N-1}}{x_N-x_{N-1}} \right) dx \\ &= \frac{1}{(x_N-x_{N-1})^2} \int_{x_{N-1}}^{x_N} (x_N-x)(x-x_{N-1}) dx \end{aligned}$$

fazendo $u = x - x_{N-1} \implies x = u + x_{N-1}$

$$\begin{aligned}
 (\varphi_{N-1}, \varphi_N) &= \frac{1}{(x_N - x_{N-1})^2} \int_{x_{N-1}}^{x_N} (x_N - x) u du = \frac{1}{h^2} \int_{x_{N-1}}^{x_N} (x_N - (u + x_{N-1})) u du \\
 &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{N-1}}^{x_N} (x_N - x_{N-1} - u) u du = \frac{1}{h^2} \int_{x_{N-1}}^{x_N} (h - u) u du \\
 &= \frac{1}{h^2} \int_0^{x_N - x_{N-1}} (h - u) u du = \frac{1}{h^2} \left(h \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^h \\
 &= \frac{h}{6}.
 \end{aligned}$$

Para (φ_j, φ_N) :

Figura 2.17 – Gráfico para a função φ_j em interação com φ_N



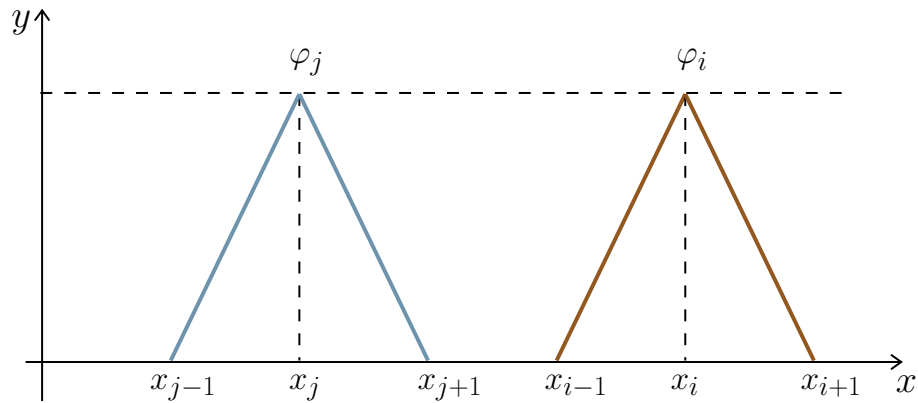
Fonte: o autor.

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_j] \cup [x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0, & x \notin [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (\varphi_j, \varphi_N) &= \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_N(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_N} \varphi_j(x) \varphi_N(x) dx \\
 &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j(x) \varphi_N(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j(x) \varphi_N(x) dx \\
 &\quad + \int_{x_{j+1}}^{x_{N-1}} \varphi_j(x) \varphi_N(x) dx + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \varphi_j(x) \varphi_N(x) dx \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Figura 2.18 – Gráfico para a função φ_j em interação com φ_i



Fonte: o autor.

De fato, o produto interno entre (φ_j, φ_N) será zero pois não há interação entre as funções.

Para (φ_j, φ_i) :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_j] \cup [x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \end{cases} \quad (2.16)$$

Do mesmo modo, como feito no caso acima, tem-se que o produto interno será zero. Logo,

$$\begin{aligned} (\varphi_j, \varphi_i) &= \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_i} \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx + \\ &\quad + \int_{x_{j+1}}^{x_{i-1}} \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando-se os resultados obtidos acima, tem-se a matriz \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_0, \varphi_2) & (\varphi_0, \varphi_3) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_N) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_1, \varphi_3) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_N) \\ (\varphi_2, \varphi_0) & (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_3) & \cdots & (\varphi_2, \varphi_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_N, \varphi_0) & (\varphi_N, \varphi_1) & (\varphi_N, \varphi_2) & (\varphi_N, \varphi_3) & \cdots & (\varphi_N, \varphi_N) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} \end{bmatrix} = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.1.1.2 Produto interno da forma $((\varphi_j)_x, \varphi_i)$

O objetivo agora é calcular os produtos internos da forma $((\varphi_j)_x, \varphi_i)$. Aqui faz-se uso de boa parte do cálculo feito anteriormente na Seção 2.1.1.1. Usando a expressão (2.11), que define φ_j , e derivando-a uma vez com relação a x , tem-se

$$(\varphi_j)_x = \begin{cases} \frac{1}{x_j - x_{j-1}} & , \quad x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{-1}{x_{j+1} - x_j} & , \quad x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & , \quad x \notin [x_{j-1}, x_j] \cup [x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

Logo para $i = j$

$$\begin{aligned} ((\varphi_j)_x, \varphi_j) &= \int_a^b (\varphi_j)_x(x) \varphi_j(x) dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (\varphi_j)_x(x) \varphi_j(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi_j)_x(x) \varphi_j(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\varphi_j)_x(x) \varphi_j(x) dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[\frac{1}{x_j - x_{j-1}} \right] \left(\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\frac{-1}{x_{j+1} - x_j} \right] \left(\frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \right) dx \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x - x_{j-1}) dx - \frac{1}{h^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{j+1} - x) dx \end{aligned}$$

fazendo $u = (x - x_{j-1})$ na primeira integral e $u = (x_{j+1} - x)$ na segunda integral, temos

$$((\varphi_j)_x, \varphi_j) = \frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u du - \frac{1}{h^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u du$$

como,

$$\begin{aligned} u = x - x_{j-1} &\implies x = u + x_{j-1} \iff du = dx \\ u = x_{j+1} - x &\implies x = x_{j+1} - u \iff dx = -du \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
 ((\varphi_j)_x, \varphi_j) &= \frac{1}{h^2} \int_0^{x_j - x_{j-1}} (u + x_{j-1} - x_{j-1}) b du - \frac{1}{h^2} \int_{x_{j+1} - x_j}^0 (x_{j+1} - (x_{j+1} - u)) du \\
 &= \frac{1}{h^2} \int_0^{x_j - x_{j-1}} u du - \frac{1}{h^2} \int_{x_{j+1} - x_j}^0 (x_{j+1} - x_{j+1} + u) (-du) \\
 &= \frac{1}{h^2} \int_0^{x_j - x_{j-1}} u du + \frac{1}{h^2} \int_{x_{j+1} - x_j}^0 u du
 \end{aligned}$$

como $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$, $a < b$

$$\begin{aligned}
 ((\varphi_j)_x, \varphi_j) &= \int_a^b (\varphi_j)_x(x) \varphi_j(x) dx \\
 &= \frac{1}{h^2} \int_0^{x_j - x_{j-1}} u du - \frac{1}{h^2} \int_0^{x_{j+1} - x_j} u du \\
 &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{u^2}{2} \Big|_0^{x_j - x_{j-1}} - \frac{u^2}{2} \Big|_0^{x_{j+1} - x_j} \right] \\
 &= \frac{1}{2h^2} \left[(x_j - x_{j-1})^2 - 0^2 - (x_{j+1} - x_j)^2 + 0^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2h^2} \left[(x_j - x_{j-1})^2 - (x_{j+1} - x_j)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2h^2} \left[h^2 - h^2 \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Para $i \mapsto j - 1$,

$$\begin{aligned}
 ((\varphi_j)_x, \varphi_{j-1}) &= \int_a^b (\varphi_j)_x(x) \varphi_{j-1}(x) dx = \int_{x_{j-2}}^{x_{j+1}} (\varphi_j)_x(x) \varphi_{j-1}(x) dx \\
 &= \int_{x_{j-2}}^{x_{j-1}} \cancel{(\varphi_j)_x(x)} \varphi_{j-1}(x) dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi_j)_x(x) \varphi_{j-1}(x) dx \\
 &\quad + \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\varphi_j)_x(x) \cancel{\varphi_{j-1}(x)} dx \\
 &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi_j)_x(x) \varphi_{j-1}(x) dx \\
 &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[\frac{1}{x_j - x_{j-1}} \right] \left(\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right) dx \\
 &= \frac{1}{(x_j - x_{j-1})^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x - x_{j-1}) dx \\
 &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x - x_{j-1}) dx \\
 &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} (x - x_{j-1})^2 \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} \right] = \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} (x_j - x_{j-1})^2 \right] - \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} (x_{j-1} - x_{j-1})^2 \right] \\
 &= \frac{1}{h^2} \frac{1}{2} h^2 \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

para $i \mapsto j + 1$

$$\begin{aligned}
 ((\varphi_j)_x, \varphi_{j+1}) &= \int_a^b (\varphi_j)_x(x) \varphi_{j+1}(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+2}} (\varphi_j)_x(x) \varphi_{j+1}(x) dx \\
 &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi_j)_x(x) \varphi_{j+1}(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\varphi_j)_x(x) \varphi_{j+1}(x) dx \\
 &\quad + \int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} (\varphi_j)_x(x) \varphi_{j+1}(x) dx \\
 &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\varphi_j)_x(x) \varphi_{j+1}(x) dx \\
 &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[\frac{-1}{x_{j+1}-x_j} \right] \left(\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j} \right) dx \\
 &= -\frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x-x_j) dx \\
 &= -\frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} (x-x_j)^2 \right]_{x_{j-1}}^{x_j} \\
 &= -\frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} (x_j-x_j)^2 \right] - \left(-\frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} (x_{j-1}-x_j)^2 \right] \right) \\
 &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} (x_{j-1}-x_j)^2 \right]
 \end{aligned}$$

como $h = x_j - x_{j-1} \implies -h = x_{j-1} - x_j$

$$((\varphi_j)_x, \varphi_{j+1}) = \frac{1}{h^2} \frac{(-h^2)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

O cálculo acima foi feito da forma em que $i \mapsto j-1$, $i \mapsto j$, $i \mapsto j+1$, mas pode-se seguir o mesmo procedimento feito no início desta seção, no qual fixou-se j e fez-se $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

$$\begin{aligned}
 ((\varphi_1)_x, \varphi_1) &= \int_a^b (\varphi_1)_x \varphi_1 dx = \int_{x_0}^{x_2} (\varphi_1)_x \varphi_1 dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} (\varphi_1)_x \varphi_1 dx + \int_{x_1}^{x_2} (\varphi_1)_x \varphi_1 dx \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{x_1-x_0} \right] \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{-1}{x_2-x_1} \right] \left(\frac{x_2-x}{x_2-x_1} \right) dx \\
 &= \frac{1}{(x_1-x_0)^2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0) dx + \frac{1}{(x_2-x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} (x_2-x) dx
 \end{aligned}$$

como $h = x_{j+1} - x_j = x_j - x_{j-1}$

$$((\varphi_1)_x, \varphi_1) = \frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0) dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_1}^{x_2} (x_2-x) dx$$

fazendo $u = x - x_0$ na primeira integral e $u = x_2 - x$ na segunda integral e mudando os intervalos de integração conforme a mudança de variável, tem-se

$$u = x - x_0 \implies x = u + x_0 \implies dx = du$$

$$u = x_2 - x \implies x = x_2 - u \implies dx = -du$$

$$u = x_1 - x_0$$

$$u = x_0 - x_0 = 0$$

$$u = x_2 - x_2 = 0$$

$$u = x_2 - x_1$$

diante disso,

$$\begin{aligned} ((\varphi_1)_x, \varphi_1) &= \frac{1}{h^2} \int_0^{x_1-x_0} (u + x_0 - x_0) du - \frac{1}{h^2} \int_{x_2-x_1}^0 (x_2 - (x_2 - u)) (-du) \\ &= \frac{1}{h^2} \int_0^{x_1-x_0} u du - \frac{1}{h^2} \int_{x_2-x_1}^0 u (-du) \\ &= \frac{1}{h^2} \int_0^{x_1-x_0} u du + \frac{1}{h^2} \int_{x_2-x_1}^0 u du \end{aligned}$$

como $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, $a < b$

$$\begin{aligned} ((\varphi_1)_x, \varphi_1) &= \frac{1}{h^2} \int_0^{x_1-x_0} u du - \frac{1}{h^2} \int_0^{x_2-x_1} u du \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^{x_1-x_0} - \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^{x_2-x_1} \end{aligned}$$

como $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$,

$$\begin{aligned} ((\varphi_1)_x, \varphi_1) &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^h - \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^h \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} (h^2 - 0^2) \right] - \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} (h^2 - 0^2) \right] \\ &= \frac{1}{h^2} \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{h^2} \frac{1}{2} h^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, para $j = 0$ e $i = 1$, temos

$$\begin{aligned} ((\varphi_0)_x, \varphi_1) &= \int_a^b (\varphi_0)_x \varphi_1 dx = \int_{x_0}^{x_2} (\varphi_0)_x \varphi_1 dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (\varphi_0)_x \varphi_1 dx + \int_{x_1}^{x_2} \cancel{(\varphi_0)_x} \varphi_1 dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (\varphi_0)_x \varphi_1 dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{x_1-x_0} \right] \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right) dx \\ &= \frac{1}{(x_1-x_0)^2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0) dx \end{aligned}$$

como $h = x_j - x_{j-1}$, $\forall j \in 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} ((\varphi_0)_x, \varphi_1) &= \frac{1}{h^2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0) dx = \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} (x-x_0)^2 \right]_{x_0}^{x_1} \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} (x_1-x_0)^2 \right] - \frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} (x_0-x_0)^2 \right] \\ &= \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot h^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

para $j = 0$ e $i \geq 2$,

$$\begin{aligned} ((\varphi_0)_x, \varphi_i) &= \int_a^b (\varphi_0)_x(x) \varphi_i(x) dx = \int_{x_0}^{x_3} (\varphi_0)_x(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (\varphi_0)_x(x) \varphi_i(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} (\varphi_0)_x(x) \varphi_i(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} (\varphi_0)_x(x) \varphi_i(x) dx \\ &\quad + \int_{x_3}^{x_N} (\varphi_0)_x(x) \varphi_2(x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

para $((\varphi_N)_x, \varphi_N)$:

$$\begin{aligned} ((\varphi_N)_x, \varphi_N) &= \int_{x_{N-1}}^{x_N} \varphi_N(x) (\varphi_N)_x(x) dx \\ &= \int_{L-h}^L \left(\frac{1}{h}\right) \cdot \frac{x-L+h}{h} dx = \frac{1}{h^2} \int_{L-h}^L x dx + \frac{1}{h^2} \int_{L-h}^L dx \\ &= \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{2}(L^2 - (L-h)^2) + \frac{1}{h^2} \cdot (h-L)(L-L+h) \\ &= \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{2}(L^2 - L^2 - 2hL - h^2) + \frac{1}{h^2} \cdot h \cdot (h-L) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2L}{h} - 1\right) + 1 - \frac{1}{h} \\ &= \frac{L}{h} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{L}{h} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Agora que calculamos todos os produtos internos de interesse, temos em mão a seguinte matriz:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} (\varphi_0, (\varphi_0)_x) & (\varphi_0, (\varphi_1)_x) & (\varphi_0, (\varphi_2)_x) & (\varphi_0, (\varphi_3)_x) & \cdots & (\varphi_0, (\varphi_N)_x) \\ (\varphi_1, (\varphi_0)_x) & (\varphi_1, (\varphi_1)_x) & (\varphi_1, (\varphi_2)_x) & (\varphi_1, (\varphi_3)_x) & \cdots & (\varphi_1, (\varphi_N)_x) \\ (\varphi_2, (\varphi_0)_x) & (\varphi_2, (\varphi_1)_x) & (\varphi_2, (\varphi_2)_x) & (\varphi_2, (\varphi_3)_x) & \cdots & (\varphi_2, (\varphi_N)_x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_N, (\varphi_0)_x) & (\varphi_N, (\varphi_1)_x) & (\varphi_N, (\varphi_2)_x) & (\varphi_N, (\varphi_3)_x) & \cdots & (\varphi_N, (\varphi_N)_x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2.1.1.3 Produtos interno interno da forma $((\varphi_j)_x, (\varphi_i)_x)$

$$(\varphi_j)_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_j - x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{-1}{x_{j+1} - x_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & x \in [x_{j-1}, x_j] \cup [x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

para $i = j - 1$: derivando (2.12) e usando a equação acima, temos

$$\begin{aligned}
((\varphi_j)_x, (\varphi_{j-1})_x) &= \int_a^b (\varphi_j)_x(x) (\varphi_{j-1})_x(x) dx = \int_{x_{j-2}}^{x_{j+1}} (\varphi_j)_x(x) (\varphi_{j-1})_x(x) dx \\
&= \int_{x_{j-2}}^{x_{j-1}} \cancel{(\varphi_j)_x(x)} (\varphi_{j-1})_x(x) dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi_j)_x(x) (\varphi_{j-1})_x(x) dx \\
&\quad + \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\varphi_j)_x(x) \cancel{(\varphi_{j-1})_x(x)} dx \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi_j)_x(x) (\varphi_{j-1})_x(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[\frac{1}{x_j - x_{j-1}} \right] \left[\frac{-1}{x_j - x_{j-1}} \right] dx \\
&= -\frac{1}{(x_j - x_{j-1})^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx = -\frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx = -\frac{1}{h^2} x \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} = -\frac{1}{h^2} (x_j - x_{j-1}) \\
&= -\frac{1}{h^2} h = -\frac{1}{h}.
\end{aligned}$$

para $i = j$: usando a derivada de (2.11), temos

$$\begin{aligned}
((\varphi_j)_x, (\varphi_j)_x) &= \int_a^b (\varphi_j)_x(x) (\varphi_j)_x(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (\varphi_j)_x^2(x) dx \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi_j)_x^2(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\varphi_j)_x^2(x) dx \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[\frac{1}{x_j - x_{j-1}} \right]^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\frac{-1}{x_{j+1} - x_j} \right]^2 dx \\
&= \frac{1}{(x_j - x_{j-1})^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (1)^2 dx + \frac{-1}{(x_{j+1} - x_j)^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (-1)^2 dx \\
&= \frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} dx \\
&= \frac{1}{h^2} x \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} + \frac{1}{h^2} x \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} = \frac{1}{h^2} (x_j - x_{j-1}) + \frac{1}{h^2} (x_{j+1} - x_j) = \frac{1}{h^2} h + \frac{1}{h^2} h \\
&= \frac{2}{h}.
\end{aligned}$$

para $i = j + 1$: derivando (2.14), temos

$$\begin{aligned}
((\varphi_j)_x, (\varphi_{j+1})_x) &= \int_a^b (\varphi_j)_x(x) (\varphi_{j+1})_x(x) dx = \int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} (\varphi_j)_x(x) (\varphi_{j+1})_x(x) dx \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi_j)_x(x) \cancel{(\varphi_{j+1})_x(x)} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\varphi_j)_x(x) (\varphi_{j-1})_x(x) dx \\
&\quad + \int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} \cancel{(\varphi_j)_x(x)} (\varphi_{j+1})_x(x) dx \\
&= \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\varphi_j)_x(x) (\varphi_{j-1})_x(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[\frac{-1}{x_{j+1} - x_j} \right] \left[\frac{1}{x_{j+1} - x_j} \right] dx \\
&= -\frac{1}{(x_{j+1} - x_j)^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} dx = -\frac{1}{h^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} dx = -\frac{1}{h^2} x \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} = -\frac{1}{h^2} (x_{j+1} - x_j) \\
&= -\frac{1}{h^2} h = -\frac{1}{h}.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} ((\varphi_0)_x, (\varphi_0)_x) & \langle (\varphi_0)_x, (\varphi_1)_x \rangle & ((\varphi_0)_x, (\varphi_2)_x) & \cdots & ((\varphi_0)_x, (\varphi_N)_x) \\ ((\varphi_1)_x, (\varphi_0)_x) & ((\varphi_1)_x, (\varphi_1)_x) & ((\varphi_1)_x, (\varphi_2)_x) & \cdots & ((\varphi_1)_x, (\varphi_N)_x) \\ ((\varphi_2)_x, (\varphi_0)_x) & ((\varphi_2)_x, (\varphi_1)_x) & ((\varphi_2)_x, (\varphi_2)_x) & \cdots & ((\varphi_2)_x, (\varphi_N)_x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ((\varphi_N)_x, (\varphi_0)_x) & ((\varphi_N)_x, (\varphi_1)_x) & ((\varphi_N)_x, (\varphi_2)_x) & \cdots & ((\varphi_N)_x, (\varphi_N)_x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

De início, é desconhecido o fato de os produtos internos terem comportamento tridiagonal, o cálculo feito na seção (2.1.1) tinha como objetivo mostrar que a equação (2.1) pudesse ser reescrita por um sistema linear formado por matrizes tridiagonais. Diante disso, na (2.9), os índices fora da condição produzem coeficientes (que advém dos produtos internos) nulos. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{j=i-1 \geq 0}^{i+1 \leq N} \omega'_j(t) (\varphi_j, \varphi_i) + c^2 \sum_{j=i-1 \geq 0}^{i+1 \leq N} \omega_j(t) ((\varphi_j)_x, (\varphi_i)_x) + \nu \sum_{j=i-1 \geq 0}^{i+1 \leq N} \omega_j(t) ((\varphi_j)_x, \varphi_i) + \\ + \mu \sum_{j=i-1 \geq 0}^{i+1 \leq N} \omega_j(t) (\varphi_j, \varphi_i) = (F(t), \varphi_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.17)$$

Reescrevendo a equação acima, agora com o passo $\omega_j(n+1)$ e pondo em evidência ω_j , tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=i-1 \geq 0}^{i+1 \leq N} (\varphi_j, \varphi_i) \omega_j(t_{n+1}) = (F(t_n), \varphi_i) \\ - \sum_{j=i-1 \geq 0}^{i+1 \leq N} [c^2 \Delta t ((\varphi_j)_x, (\varphi_i)_x) + \nu \Delta t ((\varphi_j)_x, \varphi_i) - (1 - \mu \Delta t) (\varphi_j, \varphi_i)] \omega_j(t_n) \end{aligned}$$

para, $i = 0, 1, \dots, N$.

Seguindo o que foi feito anteriormente, para o lado esquerdo da equação, o primeiro produto interno equivale à matriz \mathbf{M} que é a mesma matriz para o último produto interno. Os outros dois produtos internos renomeia-se pelas matrizes \mathbf{S} e \mathbf{N}

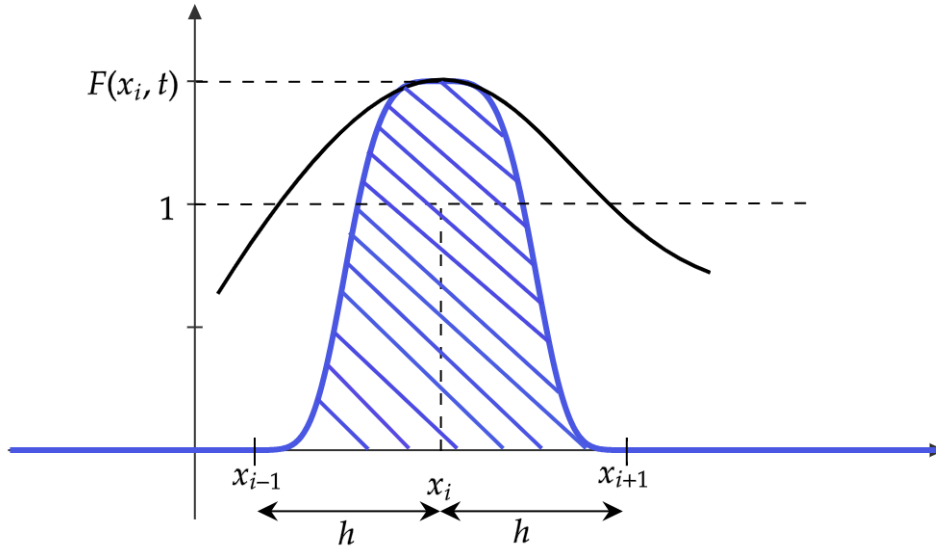
$$\begin{aligned} \sum_{j=i-1 \geq 0}^{i+1 \leq N} \mathbf{M}_{ij} \omega_j(t_{n+1}) = (F(t_n), \varphi_i) \\ - \sum_{j=i-1 \geq 0}^{i+1 \leq N} [c^2 \Delta t \mathbf{N}_{ij} + \nu \Delta t \mathbf{S}_{ij} - (1 - \mu \Delta t) \mathbf{M}_{ij}] \omega_j(t_n), \quad i = 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

já toda expressão que está no somatório do lado direito após o sinal de menos pode ser reescrita por uma matriz \mathbf{Q} , de tal modo que resulta em

$$\sum_{j=i-1 \geq 0}^{i+1 \leq N} \mathbf{M}_{ij} \omega_j(t_{n+1}) = (F(t_n), \varphi_i) - \sum_{j=i-1 \geq 0}^{i+1 \leq N} \mathbf{Q}_{ij} \omega_j(t_n), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

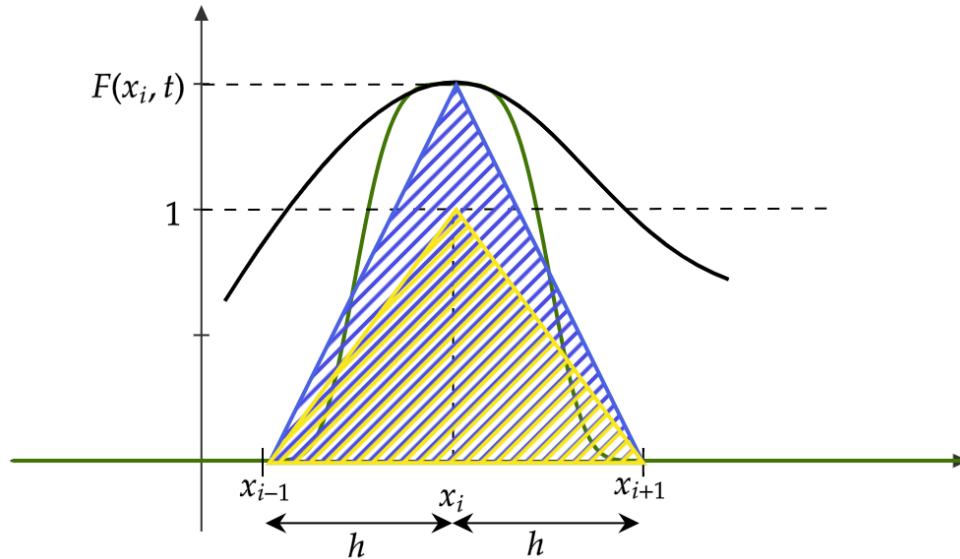
O produto interno é a área hachurada na Figura 2.19, a qual será aproximada pela área da Figura 2.20

Figura 2.19 – $(F(t), \varphi_i)$



Fonte: o autor.

Figura 2.20 – Aproximação para $(F(t), \varphi_i)$



Fonte: o autor.

da aproximação pela integral, tem-se

$$(F(t), \varphi_j) = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} F(x, t) \varphi_j(x) dx \approx \frac{1}{2} (x_{j+1} - x_{j-1}) F(x_j, t) = \Delta x F(x_j, t). \quad (2.18)$$

Resultando em,

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} \mathbf{M}_{ij} \omega_j(t_{n+1}) = \Delta x F(x_i, t_n) - \sum_{j=i-1}^{i+1} \mathbf{Q}_{ij} \omega_j(t_n), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (2.19)$$

multiplica-se ambos os lados por $\frac{\Delta t}{2}$, tem-se

$$\Omega(t_{k+1/2}) - \Omega(t_k) [\mathbf{M}_{ij}] = \frac{\Delta t}{4\Delta x} [\mathcal{F}(t_{k+1/2}) + \mathcal{F}(t_k)] - \frac{\Delta t}{4\Delta x} [\mathbf{Q}_{ij}] [\Omega(t_{k+1/2}) + \Omega(t_k)] \quad (2.25)$$

reagrupando os termos em comum, tem-se

$$\left([\mathbf{M}_{ij}] + \frac{\Delta t}{4\Delta x} [\mathbf{Q}_{ij}] \right) \Omega(t_{k+1/2}) = \left([\mathbf{M}_{ij}] - \frac{\Delta t}{4\Delta x} [\mathbf{Q}_{ij}] \right) \Omega(t_k) + \frac{\Delta t}{4\Delta x} [\mathcal{F}(t_{k+1/2}) + \mathcal{F}(t_k)] \quad (2.26)$$

para $k + 1$, o procedimento é análogo

$$\left([\mathbf{M}_{ij}] + \frac{\Delta t}{4\Delta x} [\mathbf{Q}_{ij}] \right) \Omega(t_{k+1}) = \left([\mathbf{M}_{ij}] - \frac{\Delta t}{4\Delta x} [\mathbf{Q}_{ij}] \right) \Omega(t_{k+1/2}) + \frac{\Delta t}{4\Delta x} [\mathcal{F}(t_{k+1}) + \mathcal{F}(t_{k+1/2})] \quad (2.27)$$

$$\Omega(t_{k+1}) = \frac{\Delta t}{4\Delta x} \frac{[\mathcal{F}(t_{k+1}) + \left(1 + \frac{[\mathbf{M}_{ij}] - \frac{\Delta t}{4\Delta x}}{[\mathbf{M}_{ij}] + \frac{\Delta t}{4\Delta x}} \right) \mathcal{F}(t_{k+1/2})]}{\left([\mathbf{M}_{ij}] + \frac{\Delta t}{4\Delta x} [\mathbf{Q}_{ij}] \right)} \quad (2.28)$$

$$+ \left(\frac{[\mathbf{M}_{ij}] - \frac{\Delta t}{4\Delta x}}{[\mathbf{M}_{ij}] + \frac{\Delta t}{4\Delta x}} \right) \mathcal{F}(t_k) + \frac{\left([\mathbf{M}_{ij}] - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \right)^2}{\left([\mathbf{M}_{ij}] + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \right)^2} \Omega(t_k) \quad (2.29)$$

De agora em diante o trabalho será adaptar a equação (2.29) para o código *Python* que será descrito mais a frente.

2.1.2 Sistemas tridiagonais de equações

Sistemas tridiagonais de equações lineares têm uma matriz de coeficientes com zero como entrada, exceto ao longo dos elementos diagonais, acima da diagonal e abaixo da diagonal. Um sistema tridiagonal de n equações em forma de matriz é mostrado na (2.30) e é ilustrado para um sistema de cinco equações matriciais abaixo.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & & & & & & & & \\ & A_{21} & A_{22} & A_{23} & & & & & & \\ & & A_{32} & A_{33} & A_{34} & & & & & \\ & & & A_{43} & A_{44} & A_{45} & & & & \\ & & & & A_{54} & A_{55} & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n-2,n-2} & A_{n-2,n-1} & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{n-2} \\ B_{n-1} \\ B_n \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

A matriz de coeficientes de sistemas tridiagonais tem muitos elementos que são nulos (especialmente quando o sistema contém um grande número de equações). O sistema pode ser resolvido com os métodos padrão (decomposição de Gauss, Gauss-Jordan, LU), mas então um grande número de elementos zero são armazenados e um grande número de operações desnecessárias (com zeros) são executadas. Para economizar memória do computador e tempo de computação, métodos especiais foram desenvolvidos para resolver sistemas tridiagonais de equações. Um desses métodos, o algoritmo de Thomas, é descrito nesta seção.

Muitas aplicações em engenharia e ciência requerem a solução de sistemas tridiagonais de equações. Alguns métodos numéricos para resolver equações diferenciais também envolvem a solução de tais sistemas.

2.1.2.1 Algoritmo de Thomas para resolver sistemas tridiagonais

O algoritmo de Thomas é um procedimento para resolver sistemas tridiagonais de equações. O método de solução no algoritmo de Thomas é semelhante ao método de eliminação gaussiana, no qual o sistema é primeiro alterado para a forma triangular superior e depois resolvido usando a substituição reversa. O algoritmo de Thomas, no entanto, é muito mais eficiente porque apenas os elementos não nulos da matriz de coeficientes são armazenados e apenas as operações necessárias são executadas. (As operações desnecessárias nos elementos zero são eliminadas.)

O algoritmo de Thomas começa atribuindo os elementos diferentes de zero da matriz tridiagonal de coeficientes $[A]$ a três vetores. Os elementos diagonais A_{ii} são atribuídos ao vetor d (d significa diagonal) de modo que $d_i = A_{ii}$. Os elementos diagonais acima $A_{i,i+1}$ são atribuídos ao vetor a (a representa a diagonal acima), de modo que $a_i = A_{i,i+1}$, e os elementos diagonais abaixo $A_{i-1,i}$ são atribuídos ao vetor b (b representa abaixo da diagonal), tal que $b_i = A_{i-1,i}$. Com os elementos diferentes de zero na matriz de coeficientes armazenados como vetores, o sistema de equações tem a forma

$$\begin{bmatrix} d_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & d_2 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & b_3 & d_3 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n-2} & d_{n-2} & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & d_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{n-2} \\ B_{n-1} \\ B_n \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Deve-se enfatizar aqui que em (2.31) a matriz de coeficientes é exibida como uma matriz

(com os 0's), mas no algoritmo de Thomas apenas os vetores b, d e a são armazenados.

Em seguida, a primeira linha é normalizada dividindo a linha por d_1 . Isso torna o elemento d_1 (a ser usado como elemento pivô) igual a 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & d_2 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & b_3 & d_3 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n-2} & d_{n-2} & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & d_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{n-2} \\ B_{n-1} \\ B_n \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

onde $a'_1 = \frac{a_1}{d_1}$ e $B'_1 = \frac{B_1}{d_1}$. Agora o elemento b_2 são eliminados. A primeira linha (a linha pivô) é multiplicada por b_2 e depois subtraída da segunda linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d'_2 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & b_3 & d_3 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n-2} & d_{n-2} & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & d_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{n-2} \\ B_{n-1} \\ B_n \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

onde $d'_2 = d_2 - b_2 a'_1$, e $B'_2 = B_2 - B_1 b_2$. As operações realizadas com a primeira e segunda filas são repetidas com a segunda e terceira filas. A segunda linha é normalizada dividindo a linha por d'_2 . Isso torna o elemento d'_2 (a ser usado como elemento pivô) igual a 1. A segunda linha é então usada para eliminar b_3 na terceira linha.

Este processo continua linha após linha até que o sistema de equações seja transformado em 1's ao longo da diagonal triangular superior:

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a'_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a'_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_1 \\ B''_2 \\ B'''_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ B''_{n-2} \\ B''_{n-1} \\ B''_n \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Uma vez que a matriz dos coeficientes está na forma triangular superior, os valores das incógnitas são calculados usando a substituição inversa.

1ºPasso: Defina os vetores

$$b = [0, b_2, b_3, \dots, b_n],$$

$$d = [d_1, d_2, \dots, d_n],$$

2ºPasso: Calcular:

$$a_1 = \frac{a_1}{d_1} \text{ e } B_1 = \frac{B_1}{d_1}.$$

3ºPasso: Para $i = 2, 3, \dots, n - 1$, calcular:

$$a_i = \frac{a_i}{d_i - b_i a_{i-1}} \text{ e } B_i = \frac{B_i - b_i B_{i-1}}{d_i - b_i a_{i-1}}$$

4ºPasso: Calcular:

$$B_n = \frac{B_n - b_n B_{n-1}}{d_n - b_n a_{n-1}}$$

5ºPasso: Calcular a solução usando a substituição inversa:

$$x_n = B_n, \quad i = n - 1, n - 2, n - 3, \dots, 2, 1, \quad x_i = B_i - a_i x_{i+1}$$

a descrição do método pode ser vista com mais detalhes em (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009). Deve-se então adaptar todos os passos e as iterações acima para a linguagem Python que será descrito abaixo no código `tdma.py`.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Tue Jun 27 18:37:51 2023

@author: prof. Cleber Cavalcanti
        & Matheus Guimarães (Matemática - Bacharelado)
Algoritmo de Thomas
"""

import numpy as np

def tdma(M, d):
    """
    dp -- diagonal principal (b)
    ds -- diagonal superior (c)
    di -- diagonal inferior (a)
    """
    dp, ds, di = M[0], M[1], M[2]
    if isinstance(M, list):
        if len(ds) != len(di):
```

```

        raise ValueError("Diagonal inferior e superior incompatíveis")
    elif len(ds) != len(dp) - 1:
        raise ValueError("Diagonal principal incompatível com as demais diagonais")
    elif len(dp) != len(d):
        raise ValueError("Matriz de valores incompatível com matriz M")
    else:
        dp, ds, di = M[0], M[1], M[2]
elif isinstance(M, type(np.array([[1, 1, 1]], dtype=float))) and np.shape(M)[1] == 3:
    dp, ds, di = M.T[1], M.T[2][0:-1], M.T[0][1:]

n = len(d)
w = np.zeros(n - 1, float)
g = np.zeros(n, float)

X = np.zeros(n, float)

w[0] = ds[0]/dp[0]
g[0] = d[0]/dp[0]

for i in range(1, n-1):
    w[i] = ds[i]/(dp[i] - di[i-1]*w[i-1])

for i in range(1, n):
    g[i] = (d[i] - di[i-1]*g[i-1])/(dp[i] - di[i-1]*w[i-1])

X[n-1] = g[n-1]

for i in range(n-1, 0, -1):
    X[i-1] = g[i-1] - w[i-1]*X[i]

return X

if __name__ == '__main__':

    N = 8
    h = 0.1

    #
    dp = 4 * np.ones((N+1,), dtype=float) # diagonal principal
    dp[0], dp[N] = 2, 2
    dp = (h/6) * dp
    #print(dp)
    ds = h/6 * np.ones((N,), dtype=float) # diagonal superior
    di = h/6 * np.ones((N,), dtype=float) # diagonal inferior

    M = [dp, ds, di] # matriz tridiagonal

```

```

MT0 = np.array([0] + list(di), dtype=float)
print(MT0, np.shape(MT0))
MT1 = np.array(dp, dtype=float)
print(MT1, np.shape(MT1))
MT2 = np.array(list(ds) + [0], dtype=float)
print(MT2, np.shape(MT2))

MT = np.array([MT0, MT1, MT2], dtype=float)
print('ordem(MT)', np.shape(MT))

Mo = MT.T

d = np.zeros((N+1,), dtype=float)
d[0] = 1

X = np.array([tdma(Mo, d)], dtype=float).T

print('X =\n', X, '\n\nordem(X) =', np.shape(X))

MM = np.zeros((len(d), len(d)), dtype=float)
for i in range(0, len(d)):
    MM[i, i] = M[0][i]

for i in range(1, len(d)):
    MM[i, i-1] = M[2][i-1]

for i in range(0, len(d) - 1):
    MM[i, i+1] = M[1][i]

print('\n', MM @ X)

```

Inicialmente, define-se as diagonais principal, superior e inferior (dp, ds, di). As diagonais foram construídas de tal modo, que recebam listas ou vetores.

2.2 Implementação para Elementos Finitos via linguagem *Python*

Feito todo o desenvolvimento através de cálculos, faz-se uso agora da linguagem Python para buscar soluções do problema

A implementação numérica imposta sobre o problema foi submetido em duas etapas. A primeira etapa da implementação consistiu em desenvolver um código usando linguagem *Python* para criar as matrizes tridiagonais nomeado por `tdma.py` e assim aplicar o algoritmo de Thomas para resolver sistemas de matrizes.

Para que o código pudesse ser executado sem problemas fez-se necessário importar o código `calnum.py`, desenvolvido em sala de aula pelo professor Cleber Cavalcanti para a disciplina de Cálculo Numérico, ministrada para o público qualificado de discentes de graduação das diversas Ciências Exatas.

Fez-se necessário importar este código pelo suporte que o mesmo já oferecia. Tendo em vista que toda a parte de derivação e integração numérica já estavam desenvolvidas nele.

Para segunda parte da implementação foi desenvolvido um outro código nomeado de `fem_difusao.py`, este código já sendo a versão final do programa.

Neste, importamos o `calcnum.py` e o `tdma.py` para execução completa do código. O código `fem_difusao.py` teve por finalidade aplicar o Método dos Elementos Finitos, tendo em vista que toda discretização necessária já havia sido feita no dois códigos anteriores, necessitando apenas fazer algumas ponderações pontuais para que o mesmo fosse executado de forma clara e objetiva.

Segue-se o código completo:

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Mon Jul  3 18:58:04 2023

@author: prof. Cleber Cavalcanti (DEMAT/CCET/UFMA)
        & Matheus Guimarães (Matemática - Bacharelado)

Solução numérica via Elementos Finitos
para uma Equação de Difusão com Transporte
"""

import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation
import calcnum as cn
import tdma

L = 4
T = 30

c2, nu, mu = 0.0001, -0.004, 0.00 # difusividade, transporte, dissipação

def fonte(x, t):
    """
    Função fonte
    """
    if x > 0.125*L and x < 0.375*L:
        saida = 1
    else:
        saida = 0
    #return 2.5 * math.exp(- 100*(x - 0.375*L)**2)
    return saida
```

```
def f_esq(t):
    '''
    fronteira esquerda
    '''
    return 0

f_esq_dirichlet = True

def f_dir(t):
    '''
    fronteira direita
    '''
    return 0

f_dir_dirichlet = True

def u0(x):
    if x > 0.25*L and x < 0.75*L:
        saida = 3 * math.exp( -10*( x - 0.5*L)**2)
    else:
        saida = 0
    return saida

# Parâmetros da discretização
Nx, Nt = 200, 175
# dx = L/Nx
# dt = T/Nt

dominioX = cn.particao(0, L, Nx) # Domínio X discretizado com Nx + 1 nós
dominioT = cn.particao(0, T, Nt) # Domínio tempo discretizado com Nt + 1 nós

dominioT2 = cn.particao(0, T, 2*Nt)

#####
# Para facilitar outra implementação futura, #
# escreve-se os parâmetros em termos do domínio #
#####

Nx, Nt = len(dominioX) - 1, len(dominioT) - 1

print('difusividade: c^2 =', c2,
```



```

        '\ntransporte:      nu =', nu,
        '\ndissipacao:     mu =', mu)

dx, dt = dominioX[1] - dominioX[0], dominioT[1] - dominioT[0]
print('\ndx =', dx)
print('dt =', dt)

CFL = float(c2 * dt) / (dx ** 2)
print("\n CFL = ", CFL)
if abs(CFL) > 0.5:
    print("CFL deve ser menor do que 0.5")

Peclet = float(nu * dx) / c2
print("Peclet = ", Peclet)
if abs(Peclet) > 2:
    print("Peclet deve ser menor do que 2")

# Derivada da fronteira esquerda
img_fesq = cn.funcao_df5p(f_esq, dominioT2)
#print(img_fesq, type(img_fesq), np.shape(img_fesq))

# Derivada da fronteira direita
img_fdir = cn.funcao_df5p(f_dir, dominioT2)

MF = np.zeros((len(dominioT2), len(dominioX)), dtype=float)

for n in range(1, len(dominioT2)):
    for j in range(1, len(dominioX)-1):
        MF[n, j] = ( fonte(dominioX[j], dominioT2[n])
                    - (img_fdir[n] + (img_fdir[n] - img_fesq[n])*(dominioX[j]/L - 1))
                    - nu * ( f_dir(dominioT2[n]) - f_esq(dominioT2[n]) )/L
                    - mu * ( ( f_dir(dominioT2[n])
                              + ( f_dir(dominioT2[n]) - f_esq(dominioT2[n]) )*(
                                  dominioX[j]/L - 1) ) ) )

# Matriz MM = [ \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle ]
dp = 4 * np.ones((len(dominioX)), dtype=float)
dp[0], dp[-1] = 2, 2
dp = dp
ds = np.ones((len(dominioX)-1,), dtype=float)
di = np.ones((len(dominioX)-1,), dtype=float)

MM = [dp, ds, di]

# Matriz SS = [ \langle \varphi_i, (\varphi_j)_x \rangle ]
dp = np.zeros((len(dominioX)), dtype=float)
dp[0], dp[-1] = -0.5, 0.5

```

```

ds = 0.5 * np.ones((len(dominioX)-1), dtype=float)
di = -0.5 * np.ones((len(dominioX)-1), dtype=float)

SS = [dp, ds, di]

# Matriz NN = [ \langle \varphi_i \rangle_x, \langle \varphi_j \rangle_x \rangle ]
dp = 2 * np.ones((len(dominioX)), dtype=float)
dp[0], dp[-1] = 1, 1
ds = -1 * np.ones((len(dominioX)-1), dtype=float)
di = -1 * np.ones((len(dominioX)-1), dtype=float)

NN = [dp, ds, di]

# Matriz Q
dx6 = dx/6
dxm1 = 1/dx

dp = c2 * dxm1 * NN[0] + nu * SS[0] + mu * dx6 * MM[0]
ds = c2 * dxm1 * NN[1] + nu * SS[1] + mu * dx6 * MM[1]
di = c2 * dxm1 * NN[2] + nu * SS[2] + mu * dx6 * MM[2]

QQ = [dp, ds, di]

'''
if f_esq_dirichlet == True:
    QQ[0][0] = 1
    QQ[1][0] = 0
if f_dir_dirichlet == True:
    QQ[2][-1] = 0
    QQ[0][-1] = 1
'''

#####
##### Solução #####
#####
FF = np.zeros((len(dominioT2), len(dominioX)), dtype=float)
# \langle F, \varphi_i \rangle
for k in range(1, len(dominioT2) - 1):
    FF[k] = MF[k] + MF[k+1]

dt = 0.5 * dt

FF = 0.5 * dt * FF

# QQaux tridiagonal
QQaux = np.array([[0] + list(QQ[2])],

```

```

        QQ[0],
        list(QQ[1]) + [0]], dtype=float)

QQaux = QQaux.T    # Facilita o produto de vetores usando slicing abaixo (***)

# MM = [dp, ds, di]
MMaux = np.array([[0] + list(MM[2]),
                  MM[0],
                  list(MM[1]) + [0]], dtype=float)

MMaux = MMaux.T    # Facilita o produto de vetores usando slicing abaixo (***)

MMmais = (1/6) * MMaux + (2 * dt / dx) * QQaux
MMmenos = (1/6) * MMaux - (2 * dt / dx) * QQaux

if f_esq_dirichlet == True:
    MMmais[0, 1], MMmais[0, 2] = 1, 0
    MMmenos[0, 1], MMmenos[0, 2] = 1, 0
if f_dir_dirichlet == True:
    MMmais[-1, 1], MMmais[-1, 0] = 1, 0
    MMmenos[-1, 1], MMmenos[-1, 0] = 1, 0

#print('QQaux', QQaux, np.shape(QQaux))

#####
# A solução do PVIF com #
# condições homogêneas #
#####
VV = np.zeros( ( len(dominioT), len(dominioX) ), dtype=float )

VV[0] = cn.imagem(u0, dominioX)    # dado inicial inserido na matrix da solução
if f_esq_dirichlet == True:
    VV[0, 0] = 0                    # fronteira esquerda Dirichlet homogênea
if f_dir_dirichlet == True:
    VV[0, len(dominioX)-1] = 0     # fronteira direita Dirichlet homogênea

# MM @ VV[1] = MF[0, 1] - QQ[0] * VV[0]

VVaux = VV[0]
for k in range(1, len(dominioT2)):
    #print('\n%%%%%%%%\nn =', n, '\n%%%%%%%%')
    Qcol = np.zeros((len(dominioX)), dtype=float)
    for i in range(1, len(dominioX) - 1):    # i varia de 1 até Nx-1
        #print('\ni =', i, '\n')
        #print(VV[ n-1, i-1 : i+2], np.shape( VV[ n-1, i-1 : i+2]))
        Qcol[i] = sum( MMmenos[i] * VVaux[ i-1 : i+2] )    # (***)

```

```

VVaux = tdma.tdma( MMmais, FF[k-1] - Qcol )
if k % 2 == 0:
    VV[k//2] = VVaux

im_u0 = cn.imagem(u0, dominioX)

#####
# A solução do PVIF com #
# condições não-homogêneas #
#####

# plt.rc('text', usetex=True)
# plt.rcParams['text.usetex'] = True
plt.rcParams.update({
    "text.usetex": True,
    "font.family": "sans-serif",
    "font.sans-serif": "Helvetica",
})

ver_animacao = 0
while ver_animacao not in ['s', 'S', 'n', 'N']:
    ver_animacao = input('\nDeseja ver animação? ("S" ou "N") ')

if ver_animacao in ['n', 'N']:

#####
# Gráfico Estático #
#####

    plt.plot(dominioX, im_u0, 'r-', lw=4)
    for n in range(1, len(dominioT)):
        plt.plot(dominioX, VV[n], color=(0, 1 - n/len(dominioT), n/len(dominioT)))
        #plt.show()

#####
# Animação #
#####
elif ver_animacao in ['s', 'S']:

    videogravar = 0
    while videogravar not in ['s', 'S', 'n', 'N']:
        videogravar = input('Deseja gravar a animação? ("S" ou "N") ')

    Lx = 0.05*(dominioX[-1] - dominioX[0])
    U_min, U_max = np.nanmin(VV), np.nanmax(VV)
    Lu = 0.05*(U_max - U_min)

```

```

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, autoscale_on=False,
                    xlim=(dominioX[0] - Lx, dominioX[-1] + Lx),
                    ylim=(U_min - Lu, U_max + Lu))
ax.grid()

line_u, = ax.plot([], [], 'b-', label=r'Concentração', lw=1,
                 markersize=2)
line_f, = ax.plot([], [], 'k:', label=r'Fonte', lw=1)
time_template = 'tempo = %.2fs'
time_text = ax.text(0.05, 0.9, '', transform=ax.transAxes)

def init():

    line_u.set_data([], [])
    line_f.set_data([], [])
    time_text.set_text('')

    return line_u, line_f, time_text

FFaux = np.zeros((len(dominioT), len(dominioX)), dtype=float)

for k in range(1, len(dominioT2)):
    if k % 2 == 0:
        FFaux[k//2] = FF[k]

def animate(i):

    thisx = [dominioX]
    thisu = [VV[i]]
    thisf = [MF[i]]

    line_u.set_data(thisx, thisu)
    line_f.set_data(thisx, thisf)
    time_text.set_text(time_template % (i*2*dt))

    return line_u, line_f, time_text

plt.plot(dominioX, VV[0], 'r:', label=r'Dado inicial')

ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, range(1, len(dominioT)),
                             interval=T, blit=True,
                             init_func=init)

if nu >= 0:
    legloc = 'center left'

```

```

else:
    legloc = 'center right'

plt.legend(loc=legloc, fontsize='10')
plt.title(r'Difusividade: c2 = ' + str(c2) + ', Advecção: nu = '
          + str(nu) + ', Dissipação: mu = ' + str(mu) + ')
#plt.show()

#####
## Salvar video ##
#####

if videogravar in ['s', 'S']:
    FPS = Nt//T

    #start_time = timeit.default_timer()

    ani.save('Difusao1.mp4', fps=FPS)

    #final_time = timeit.default_timer()

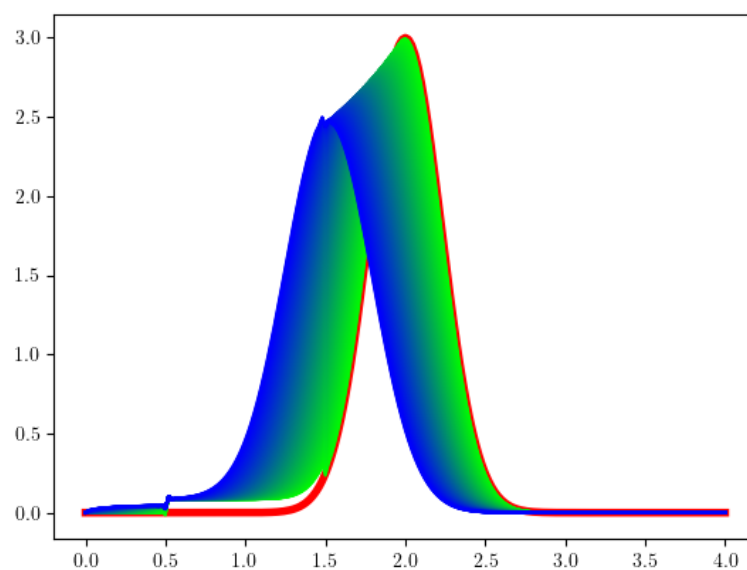
    #print("Tempo (video): ", final_time - start_time)

plt.show()

```

Ao executar corretamente o código, obtém-se o seguinte gráfico da solução

Figura 2.21 – Gráfico da solução referente ao problema 2.4



Fonte: o autor.

Na Figura 2.21, o comportamento da fonte pode ser interpretado como uma pequena incrementação na solução que advém de algum aspectos físicos externos em relação ao problema em questão.

De uma forma mais clara, o método dos elementos finitos é um tipo de ferramenta numérica usado para determinar soluções aproximadas para um problema de valor inicial e de contorno ao se discretizar o domínio em partes menores.

Referências

- BARTLE, R. G. **The elements of real analysis**. [S.l.]: Wiley New York, 1964. v. 2. Citado na página 14.
- BASSANEZI, R. C.; Ferreira Jr, W. C. **Equações Diferenciais: com aplicações**. [S.l.]: Harbra, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 12.
- BRÉZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. [S.l.]: Springer, 2011. v. 2. Citado na página 24.
- CARUS, T. L. **Lucretius on the Nature of Things**. [S.l.]: G. Bell and sons, 1882. Citado na página 11.
- FAEDO, S. Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione. **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche**, v. 1, n. 1-4, p. 1-41, 1949. Citado na página 22.
- GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. [S.l.]: Bookman Editora, 2009. Citado na página 51.
- ROBINSON, J. C. **Infinite Dimensional Dynamical Systems: An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. Citado na página 24.