



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Bacharelado

Ronaldo Pinheiro

O Teorema de Green e Aplicações

São Luís - MA
2024

Ronaldo Pinheiro 

O Teorema de Green e Aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Bacharel em Matemática.

Curso de Matemática – Bacharelado

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa

São Luís - MA

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Pinheiro, Ronaldo.

Teorema de Green / Ronaldo Pinheiro. - 2024.

59 p.

Orientador(a): Prof. Dr. José Santana Campos Costa.
Monografia (Graduação) - Curso de Matemática,
Universidade Federal do Maranhão, São Luís - Ma, 2024.

1. Curvas. 2. Derivadas Parciais. 3. Integrais de
Linha. 4. Integrais Duplas. 5. Teorema de Green. I.
Campos Costa, Prof. Dr. José Santana. II. Título.

Ronaldo Pinheiro 

O Teorema de Green e Aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 19/09/2024

Prof. Dr. José Santana Campos Costa
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo
DEMAT/UFMA
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Ermerson Rocha Araujo
DEMAT/UFMA
Segundo Examinador

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me concedeu saúde para poder estar presente nas aulas e realizar todas as atividades, conseguindo cumprir os requisitos para a conclusão do curso. A minha família, em especial, minha avó Raimunda Benedita Pinheiro, a minha mãe Ana Maria Pinheiro e a minha irmã Ana Carolina Pinheiro, que me ajudaram, contribuindo para que eu me dedicasse apenas ao curso. Agradeço muito ao meu grande amigo e compadre Sidney Pereira (in memorian) "meu amigo, prometi a você que me formaria na UFMA, eu sei que mesmo aí de cima, continua sendo meu anjo protetor". Ao meu Orientador, Dr. José Santana Campos Costa, O qual não consigo encontrar palavras para descrever o quanto eu sou grato por tudo que ele fez para me ajudar. Aos docentes da UFMA que são muito atenciosos e prestativos com todos os alunos, em especial aos professores, Cleber Cavalcante, Ivaldo Nunes, Elivaldo Rodrigues. Por fim, quero registrar aqui os meus sinceros agradecimentos a todos meus amigos que de alguma forma participaram dessa caminhada, em especial Carla Beatriz, Davi Komura, Renata Franca e Ygor Penha, e principalmente ao Rafael Vieira, que nessa reta final da graduação esteve mais presente, me incentivando e cobrando, ele foi de suma importância para minha conclusão do curso, desejo que Deus, continue abençoando a sua vida.

Resumo

A monografia refere-se a um estudo sobre o Teorema de Green, o qual foi desenvolvido pelo cientista inglês George Green. Trata-se de um teorema essencial na matemática, que relaciona a integral de linha ao longo de uma curva fechada simples com a integral dupla sobre a região delimitada por essa curva. Neste trabalho demonstramos e aplicamos o Teorema de Green. Para isto, realizamos uma vasta revisão bibliográfica.

Palavras-chave: Curvas, Derivadas Parciais, Integrais de Linha, Integrais Duplas e Teorema de Green.

Abstract

The monograph refers to a study on Green's Theorem, which was developed by the English scientist George Green. It is an essential theorem in mathematics, relating the line integral along a simple closed curve to the double integral over the region enclosed by that curve. In this work, we demonstrate and apply Green's Theorem. To do so, we conducted an extensive bibliographic review.

Keywords: Curves, Partial Derivatives, Line Integrals, Double Integrals, and Green's Theorem.

Sumário

	Lista de ilustrações	8
	INTRODUÇÃO	9
1	CURVAS	10
1.1	Parametrização	11
1.1.1	Parametrização na Reta	12
1.1.2	Parametrização na Circuferência	14
1.1.3	Parametrização na Elipse	16
1.2	Gradientes e Derivadas Direcionais	18
1.2.1	Gradientes	18
1.2.2	Derivadas Direcionais	18
1.3	Campo Vetorial	20
1.4	Campo Gradiente	21
1.5	Campo Rotacional	22
1.6	Campo Divergente	23
2	INTEGRAIS MÚLTIPLAS	25
2.1	Integrais de Linha	26
2.1.1	Integrais de Linha Escalar	26
2.1.2	Integrais de Linha Vetoriais	29
2.2	Integrais duplas	32
2.2.1	Propriedades das Integrais Duplas	32
2.2.2	Integral dupla sobre Retângulo	32
2.2.3	Integrais iteradas	34
2.2.4	Integrais duplas em regiões mais gerias	37
2.3	Integrais de Superfície	42
2.3.1	Superfície Parametrizada	42
2.3.2	Integrais de Superfície e área de Superfície	44
3	O TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES	47
3.1	Quem foi George Green	47
3.2	O Teorema de Green	47
3.3	Aplicações do Teorema de Grenn	50
	Considerações finais	57

REFERÊNCIAS 59

Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Trajetória de uma partícula percorrendo um caminho α no plano.	10
Figura 1.2 – Representação geométrica da definição da curva.	11
Figura 1.3 – Representação geométrica da definição da curva.	12
Figura 1.4 – Representação geométrica da definição da curva	13
Figura 1.5 – Representação geométrica.	15
Figura 1.6 – Circunferência com centro em $C = (3, 2)$ com o raio $r = (3)$ e no plano $z = 3$	16
Figura 1.7 – Elipse	17
Figura 1.8 – Para um vetor unitário u , $D_u f(a, b)$ é a inclinação em $P' = (a, b, f(a, b))$ do traço dado pelo o plano vertical por $P = (a, b)$ na direção de u	19
Figura 1.9 – Campo vetorial em \mathbb{R}^2	20
Figura 1.10–Campo vetorial	21
Figura 2.1 – Curva C dividida em N arcos pequenos	26
Figura 2.2 – Uma partição da curva parametrizada ct)	27
Figura 2.3 – A hélice $c(t) = (cost, sent, t)$	28
Figura 2.4 – Semi-circulo	29
Figura 2.5 – $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$	33
Figura 2.6 – A Soma de Riemann:	33
Figura 2.7 – Região tipo I	38
Figura 2.8 – Região tipo II	38
Figura 2.9 – $f(x, y) = x^3$ ao longo do segmento vertical entre as curvas em x	39
Figura 2.10–semicírculo	40
Figura 2.11–Região delimitada por $y = x^2$ e $y = 2x$	41
Figura 2.12–Cone $x^2 + y^2 = z^2$	44
Figura 3.1 – Gráfico das curvas $y = x^2$ e $y = x^3$ no primeiro quadrante.	50
Figura 3.2 – Triângulo com os vértices $(0, 0)$, $(2, 2)$ e $(2, 4)$	51
Figura 3.3 – Semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$	53
Figura 3.4 – D tem área 8 e C_2 é um círculo de $r = 1$	54

Introdução

Este trabalho apresenta o Teorema de Green. E, para o seu entendimento é feita a sua demonstração de uma forma clara e objetiva. Esse objeto de estudo foi uma escolha para ser o trabalho de conclusão de curso (monografia) pela sua importância e aplicação nas mais diversas áreas do conhecimento. Que o referido teorema que é o foco do trabalho, o Teorema de Green é aplicado em diversas áreas do conhecimento.

A abordagem do teorema é vista em livros de Cálculo Diferencial e Vetorial. Sendo, portanto, o teorema de suma importância no cálculo de áreas de figuras planas fechadas. Na parte central do trabalho será enunciado o Teorema de Green, que faz uma relação entre uma integral de linha ao longo de uma curva fechada simples C e integral dupla sobre a região D do plano delimitada por C assumindo que D é constituído por todos os pontos de C internos de bem como todos os pontos de C (que será denominado de fronteira de C), usado na matemática como ferramenta para o cálculo de áreas de figuras planas limitadas e fechadas e também tem fundamental importância na formulação de outro teorema. É trabalhado a aplicação do teorema o qual é utilizado não só na matemática, mas nas mais variadas áreas do conhecimento.

No Capítulo 1, estão expostos conceitos elementares indispensáveis para o entendimento do Teorema de Green e aplicações. Dentre eles, estão: curvas, parametrização de curvas planas, Gradiente e Derivadas Direcionais, etc.

No Capítulo 2, definimos as integrais múltiplas, tais como: Integral de linha, Integral dupla, Integral de Superfície e etc.

No Capítulo 3, fizemos um breve biografia do George Green, e fizemos a demonstração do Teorema de Green para regiões simples e apresentamos alguns exemplos de como utilizá-lo.

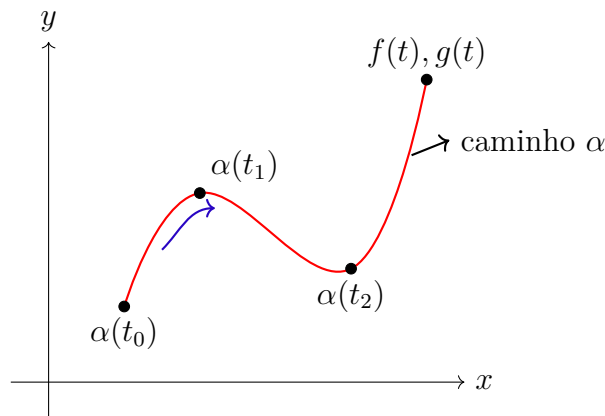
1 Curvas

Neste capítulo iremos utilizar as seguintes referências ((ROGAWSKI; ADAMS, 2009), (ALENCAR; SANTOS; NETO, 2020), (PEREIRA; MARTINS, 2010), (FLEMMING; GONÇALVES, 2007), (STEWART, 2013) e (THOMAS, 2009) que servirá de base para a construção do primeiro capítulo.

As equações paramétricas são úteis no Cálculo a várias variáveis, especialmente em três dimensões, nas quais não é mais possível descrever uma curva como o gráfico de uma função (o gráfico de uma função de duas variáveis é uma superfície em \mathbb{R}^3 e não uma curva).

As curvas que são gráficos de funções ou equações. Vão expor uma nova e importante maneira de descrever uma curva, via equações paramétricas. Imagine um objeto S percorrendo um caminho α como função do tempo t veja a figura (1.1). Então as coordenadas de S são funções de t :

Figura 1.1 – Trajetória de uma partícula percorrendo um caminho α no plano.



Fonte: Próprio autor

$$x = f(t) \text{ e } y = g(t). \quad (1.1)$$

As Equações (1.1) são denominadas equações paramétricas do caminho α com parâmetro t . Denotemos dessa forma:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)).$$

Quando t varia no domínio, geralmente um intervalo da reta real, $\alpha(t)$ representa um ponto em movimento ao longo do caminho α . Dizemos que α é uma curva parametrizada

ou paramétrica. O sentido do movimento é indicado com uma seta perto do esboço de $\alpha(t)$, como na figura(1.1). Como x e y são funções de t , vão denotar dessa maneira,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)),$$

em vez de $(f(t), g(t))$.

Definição 1.1. (*Curva Fechada e Simples*): $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, se $\alpha(a) = \alpha(b)$ e para quais quer $t, s \in [a, b]$ tais que $t \neq s$, então $\alpha(t) \neq \alpha(s)$, daí temos que, se o único ponto duplo de α ocorre nos seus pontos inicial e final. Uma curva α fechada e simples.

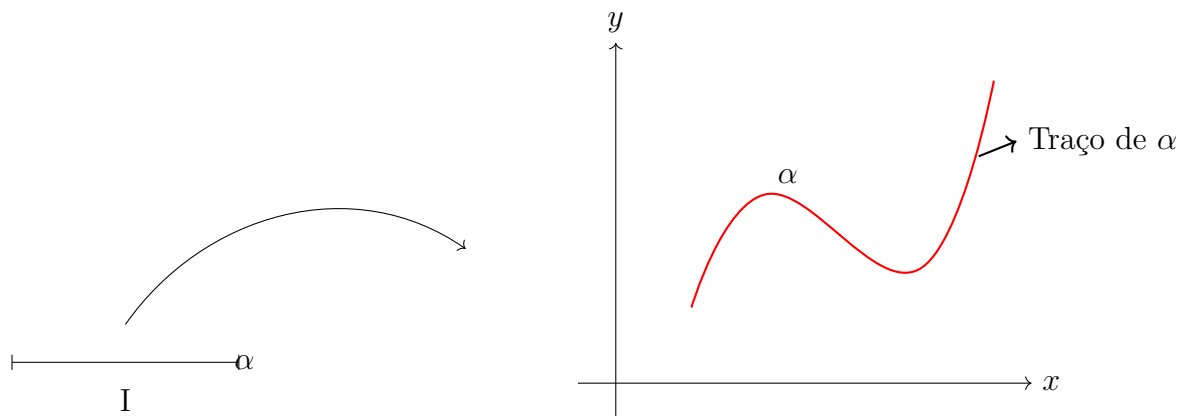
1.1 Parametrização

Definição 1.2. Uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ , onde I é um intervalo fechado de \mathbb{R} . Neste caso, vamos escrever dessa forma.

$$\alpha = (x(t), y(t)), t \in I. \quad (1.2)$$

Onde $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ , $t \in \mathbb{R}$ é o parâmetro da curva α e o subconjunto $\{\alpha(t); t \in I\}$ formado pela imagem do intervalo I por meio da aplicação α é chamado caminho de α veja figura (1.2). Além disso, α é dita regular se $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $\alpha \in I$. De acordo com essa Definição (1.2), $\alpha \in C^\infty$ onde α é

Figura 1.2 – Representação geométrica da definição da curva.



Fonte: Próprio autor

uma curva suficientemente suave, então α possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens em todos os pontos de I .

Essa aplicação nada mais é que funções com valores vetoriais são curvas, então a ideia de parametrizar tais curvas é expressar as coordenadas x e y dos pontos do \mathbb{R}^2 sobre uma curva plana ou coordenadas x, y e z dos pontos do \mathbb{R}^3 sobre uma curva espacial como

funções de uma variável t .

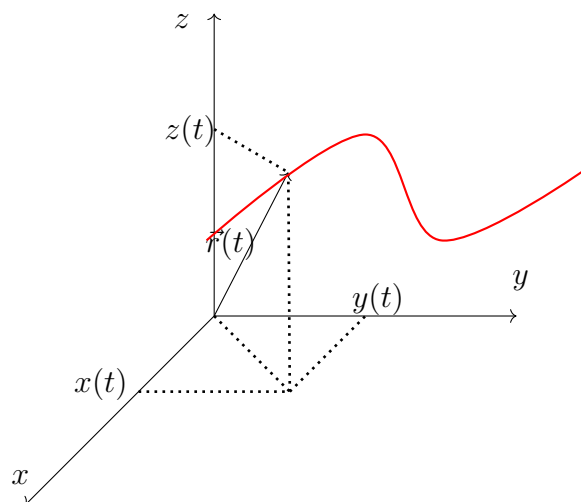
Então temos:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ para o } \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \text{ para } \mathbb{R}^3. \quad (1.3)$$

As coordenadas x, y e z sendo funções contínuas de uma variável t definida para $t \in [a, b]$.

As Equações (1.4) são chamadas equações paramétricas de uma curva e t é chamado parâmetro. Quando temos as equações paramétricas de uma curva, podemos ter equações vetoriais para ela. Para isso precisamos considerar o vetor posição $\vec{s}(t)$ de cada ponto da curva. As componentes de $\vec{s}(t)$ são precisamente as coordenadas do ponto como mostra a Figura (1.3).

Figura 1.3 – Representação geométrica da definição da curva.



Fonte: Próprio autor

Veja que, se as funções $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ são funções escalares, quando aplicadas a um parâmetro t , transformando-se em uma constante e a curva se degenera em um ponto.

A seguir daremos a parametrização de algumas curvas consideradas importantes, tendo em vista a sua utilização em muitos problemas práticos.

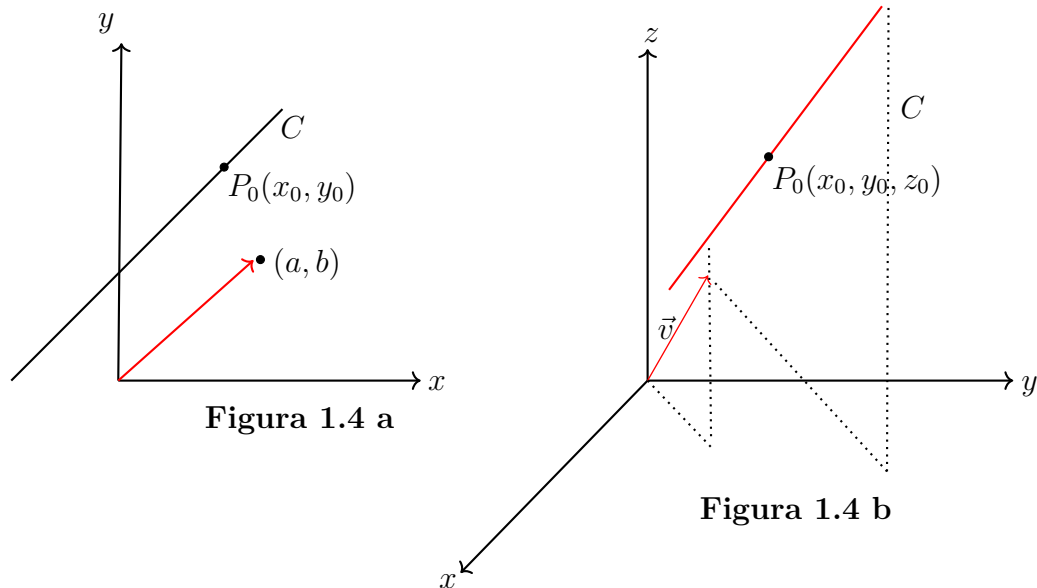
1.1.1 Parametrização na Reta

Reta Determinada por um Ponto e um Vetor Diretor:

Uma reta no plano ou espaço, pode ser determinada especificando-se um ponto sobre a reta e um vetor não nulo paralelo à reta. Nas Figuras (1.4a e 1.4b) mostraremos como

obter as equações paramétricas da reta r que passa por um ponto P_0 e é paralela ao vetor não nulo \vec{v} .

Figura 1.4 – Representação geométrica da definição da curva



Fonte: Próprio autor

Um segmento de reta no plano que passa no ponto $P_0(x_0, y_0)$ e é paralela ao vetor não nulo $\vec{v} = (a, b)$, então temos $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ tem as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Dada sua representação vetorial:

$$\vec{r} = (x(t), y(t)) = (x_0 + at, y_0 + bt).$$

Um segmento de reta no espaço que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, paralela a um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c) = (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$.

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \\ z(t) = z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Dada sua representação vetorial:

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t)) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct).$$

Exemplo 1.3. Determinar as equações paramétricas da reta, que passa pelo ponto $P_0 = (3, 5)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (4\vec{i} - 3\vec{j})$. Descreva sua função vetorial.

Solução: As equações paramétricas são dadas por:

$$\begin{cases} x(t) = 3 + 4t \\ y(t) = 5 - 3t \end{cases}, \text{ com } t \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

A função vetorial é dada por:

$$(\vec{r}(t) = (3 + 4t, 5 - 3t) \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

■

1.1.2 Parametrização na Circunferência

A circunferência com centro $C = (x_0, y_0)$ e raio r tem equação cartesiana dada por:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Tomando:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos(t) \\ y = y_0 + r \sin(t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (1.7)$$

Temos que x e y dessa forma satisfazem a equação:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Donde,

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos(t) \\ y = y_0 + r \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (1.8)$$

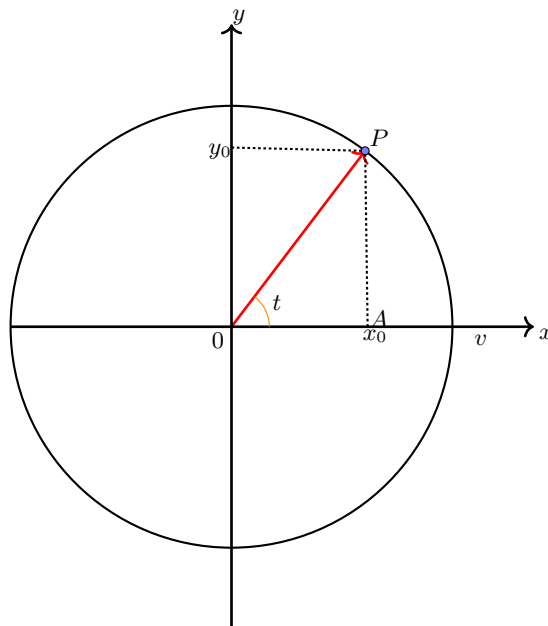
é a parametrização de uma circunferência e sua representação vetorial é dada por:

$$\vec{r} = (x(t), y(t)) = (x_0 + r \cos(t), y_0 + r \sin(t)).$$

A equação da circunferência de centro na origem do plano cartesiano, ou seja, $C(0, 0)$ e raio r é dada por:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Figura 1.5 – Representação geométrica.



Fonte: Próprio autor

$$\begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (1.9)$$

A função vetorial que representa essa circunferência é dada por:

$$\vec{r} = (r \cos(t), r \sin(t)) \text{ com } t \in [0, 2\pi].$$

Exemplo 1.4. Determine as equações paramétricas da circunferência dada no plano $z = 3$ e esboce graficamente:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

Solução:

A equação da circunferência dada, se trata de uma circunferência com centro em $C = (3, 2)$ com o raio $r = (3)$ e no plano $z = 3$.

Daí temos as seguintes equações paramétricas:

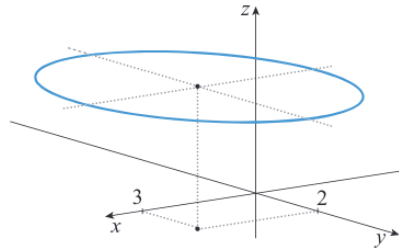
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + r \cos(t) \\ y(t) = y_0 + r \sin(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 3 + 3 \cos(t) \\ y(t) = 2 + 3 \sin(t) \end{cases}, \quad \text{para } t \in [0, 2\pi]. \quad (1.10)$$

Sua função vetorial é dada dessa forma:

$$\vec{r} = (3 + 3 \cos(t), 2 + 3 \sin(t)) \text{ com } t \in [0, 2\pi].$$



Figura 1.6 – Circunferência com centro em $C = (3, 2)$ com o raio $r = (3)$ e no plano $z = 3$



autor: ((PEREIRA; MARTINS, 2010))

1.1.3 Parametrização na Elipse

A elipse de focos $F1$ e $F2$ é o conjunto de pontos $P(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ cuja soma das distâncias aos pontos para $F1$ e $F2$ é uma constante.

A equação da elipse de centro $C(x_0, y_0)$, eixo maior que tem medida $2a$ paralelo ao eixo das abscissas e cujo eixo menor mede $2b$ é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (1.11)$$

As equações paramétricas da elipse são dadas por:

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + a \cos(t) \\ y(t) &= y_0 + b \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (1.12)$$

A função vetorial que representa essa elipse é dada por:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + a \cos(t), y_0 + b \sin(t)) \text{ com } t \in [0, 2\pi].$$

A equação da elipse de centro na origem do plano cartesiano, ou seja, $C(0, 0)$ e eixo maior paralelo ao eixo das abscissas é dada por:

$$\frac{(x)^2}{a^2} + \frac{(y)^2}{b^2} = 1. \quad (1.13)$$

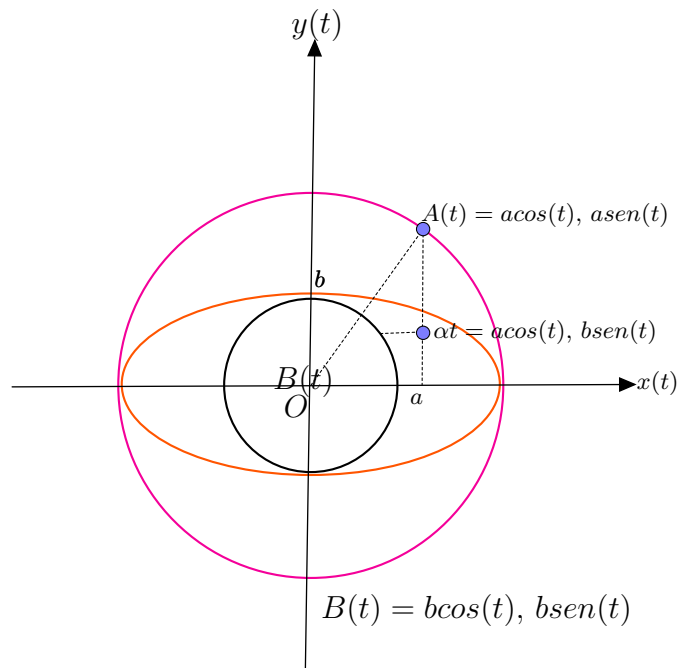
As equações paramétricas da elipse são dadas por:

$$\begin{cases} x(t) &= a \cdot \cos(t) \\ y(t) &= b \cdot \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (1.14)$$

A função vetorial que representa essa elipse é dada por:

$$\vec{r}(t) = (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t)) \text{ com } t \in [0, 2\pi].$$

Figura 1.7 – Elipse



Fonte: Próprio autor

Exemplo 1.5. Determinar as equações paramétricas da elipse de centro no ponto $C(2, 3)$, eixo maior medindo 12 cm paralelo ao eixo das abscissas e eixo menor medindo 8 cm. Descreva a função vetorial que a representa.

Solução: As equações paramétricas da elipse são dadas por:

$$\begin{cases} x(t) = 2 + 6\cos(t) \\ y(t) = 3 + 4\sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (1.15)$$

A função vetorial que representa essa elipse é dada por:

$$\vec{r}(t) = 2 + 6\cos(t), 3 + 4\sin(t) \text{ com } t \in [0, 2\pi].$$



1.2 Gradientes e Derivadas Direcionais

1.2.1 Gradientes

De início temos que o Gradiente ∇f_p , que é o vetor cujos componentes são as derivadas parciais de f no ponto P .

Definição 1.6. *Definição: O gradiente de uma função $f(x, y)$ num ponto $P = (a, b)$ é o vetor*

$$\nabla f_p = [f_x(a, b), f_y(a, b)].$$

Para três variáveis, se o ponto $P = (a, b, c)$

$$\nabla f_p = [f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c)].$$

Usualmente descrevemos o Gradiente dessa forma:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

O gradiente ∇f associa um vetor ∇f_p cada ponto do domínio de f .

Exemplo 1.7. *Encontre o gradiente de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ em $P = (3, 1)$ e esboce alguns vetores gradientes.*

Solução: *As derivadas parciais são $f_x(x, y) = 4x$ e $f_y(x, y) = 2y$. Daí,*

$$\nabla f = (4x, 2y)$$

. *Temos $P = (3, 1)$, então o Gradiente no ponto é dado por:*

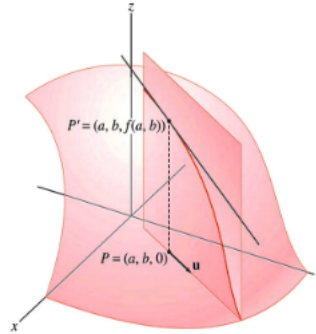
$$\nabla f_p = \nabla f(3, 1) = (12, 2).$$



1.2.2 Derivadas Direcionais

A derivada $D_v f$ definida para qualquer vetor v , mas quando u for um vetor unitário, $D_u f$ é denominada a derivada direcional na direção e sentido de u . Nesse caso, $D_u f$ é a taxa de variação de f por variação unitária na direção e sentido de u . Também podemos interpretar $D_u f(a, b)$ como a inclinação em $P' = (a, b, f(a, b))$ do traço definido pelo plano vertical por $P = (a, b)$ na direção u . veja a Figura (1.8).

Figura 1.8 – Para um vetor unitário u , $D_u f(a, b)$ é a inclinação em $P' = (a, b, f(a, b))$ do traço dado pelo plano vertical por $P = (a, b)$ na direção de u



autor: (ROGAWSKI; ADAMS, 2009)

Definição 1.8. *Derivada direcional, É a derivada de $f(x, y)$ em $P = (a, b)$ em relação a um vetor não-nulo $v = (h, k)$ é o limite (desde que ele exista):*

$$D_v f(P) = D_v f(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th, b + tk) - f(a, b)}{t}$$

Seu u for um vetor unitário, $d_u f$ é denominada a derivada direcional na direção e sentido de u .

Exemplo 1.9. *Encontre a derivada direcional usando a definição: A derivada de $f(x, y) = x^2 + xy$, no ponto $P(1, 2)$ na direção do vetor unitário $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j\right)$.*

Solução: *Pela Definição (1.8) temos:*

$$\begin{aligned} D_v f(a, b) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th, b + tk) - f(a, b)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(f\left(1 + t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 2)\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - (1^2 + 1 \cdot 2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{2t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2}\right) + \left(2 + \frac{3t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2}\right) - 3}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{\sqrt{2}} + t^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{2}} + t = \frac{5}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{5}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

■

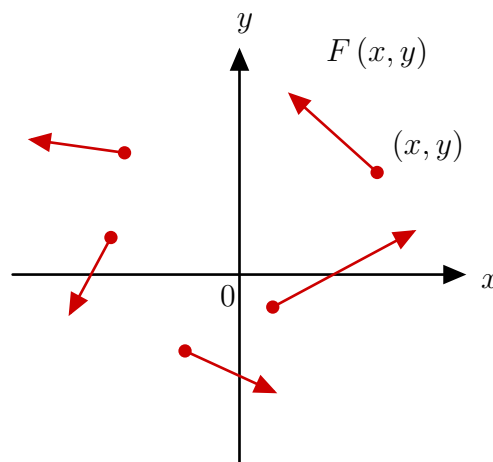
1.3 Campo Vetorial

Um campo vetorial é uma função cujo domínio D é um conjunto de pontos de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 e cuja imagem é um conjunto de vetores em V_2 ou V_3 .

Definição 1.10. *Um campo vetorial em \mathbb{R}^2 é uma função F que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional $F(x, y)$.*

Agora podemos visualizar F fazendo isso para alguns pontos representativos em D . Uma vez que $F(x, y)$ é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas funções componentes P e Q da seguinte forma: Veja a Figura (1.9).

Figura 1.9 – Campo vetorial em \mathbb{R}^2



Fonte: Próprio autor

$$F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle.$$

Observe que P e Q são funções escalares de duas variáveis e são chamadas, algumas vezes, campos escalares, para distingui-los dos campos vetoriais.

Para tridimensional usaremos a seguinte forma:

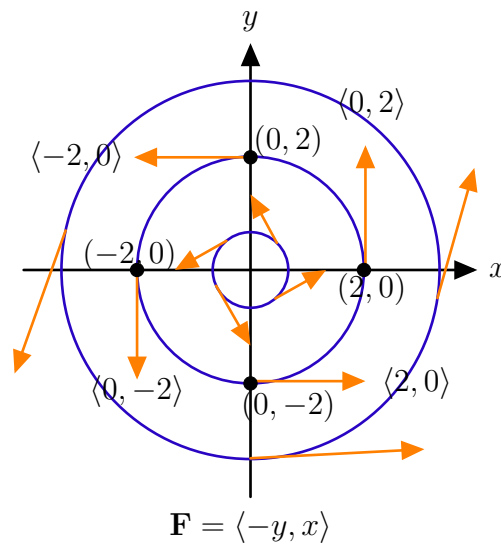
$$F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k.$$

Exemplo 1.11. *Esboce o campo vetorial $F(x, y) = \langle -y, x \rangle$.*

Solução: Temos que $F(x, y) = \langle -y, x \rangle$ é perpendicular ao vetor posição $\langle x, y \rangle$ e tem o mesmo comprimento. Dai, podemos denotar F como o vetor ao longo do círculo de raio r centrado na origem são tangentes ao círculo e têm comprimento r . Veja na Figura (1.10)

$$F(2, 0) = \langle 0, 2 \rangle, F(-2, 0) = \langle 0, -2 \rangle, F(0, 2) = \langle -2, 0 \rangle \text{ e } F(0, -2) = \langle 2, 0 \rangle.$$

Figura 1.10 – Campo vetorial



Fonte: Próprio autor



1.4 Campo Gradiente

Condições para definir um campo gradiente:

- 1) Os componentes de um campo vetorial gradiente têm a propriedade especial de que são as "parciais mistas são iguais".
- 2) Um campo gradiente é um campo vetorial da forma $F = \nabla f$, onde $f = f(x, y, z)$ é uma função diferenciável.

Definição 1.12. Se f é uma função escalar de duas variáveis, sabemos que seu gradiente ∇f (ou $\text{grad } f$) é dada por:

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j = \nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j$$

De fato, ∇f é realmente um campo vetorial em \mathbb{R}^2 é denominado campo vetorial gradiente. Já para três variáveis denotaremos dessa forma:

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)i + f_y(x, y, z)j + f_z(x, y, z)k = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k.$$

Exemplo 1.13. Encontre o campo gradiente da função:

$$f(x, y) = (x^2 - y)$$

Solução: Pela definição de gradiente temos que:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j = (2xi - 1j)$$

■

Exemplo 1.14. Prove que $f(x, y, z) = xy + yz^2$ é um campo gradiente de $F = \langle y, x + z^2, 2yz \rangle$.

Solução: Vamos encontrar o gradiente de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z^2 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2yz. \quad \text{Daí temos:}$$

$$\nabla f = \langle y, x + z^2, 2yz \rangle.$$

Então $\nabla f = F$ o que queríamos provar.

■

1.5 Campo Rotacional

Definição 1.15. O rotacional é um vetor calculado a partir de um campo vetorial em um ponto definido por:

Seja $\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k}$, esse campo vetorial é definido em um domínio D com derivadas de primeira ordem em D . Definição o Rotacional de F . Descrevemos da seguinte forma $\text{rot } \mathbf{F}$.

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}.$$

Se $\mathbf{F} = Pi + Qj + Rk$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e as derivadas parciais de P, Q e R existem então o Rotacional de \mathbf{F} também vem ser um campo vetorial em \mathbb{R}^3 denotamos dessa forma:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k.$$

Vamos utilizar o operador diferencial vetorial chamado ∇ (DEL)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k.$$

Agora vamos desenvolver o determinante, usando as regras usuais para achar o $\text{rot } \mathbf{F}$.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \text{rot } \mathbf{F}.$$

Dai temos que:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}. \quad (1.17)$$

Exemplo 1.16. Determine o rotacional do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2yz)\mathbf{i} + (xy^2z)\mathbf{j} + (xyz^2)\mathbf{k}$.

Solução: Usando a Equação (1.17) temos:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & xy^2z & xyz^2 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(xyz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(x^2yz) - \frac{\partial}{\partial x}(xyz^2) \right] \mathbf{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz) \right] \mathbf{k} \\ &= (-2y - xy)\mathbf{i} - (0 - x)\mathbf{j} + (yz - 0)\mathbf{k} \\ &= -y(2 + x)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k} \\ &= (xz^2 - xy^2)\mathbf{i} + (x^2y - yz^2)\mathbf{j} + (y^2z - x^2z)\mathbf{k} \\ &= \text{rot } \mathbf{F} = x(z^2 - y^2)\mathbf{i} + y(x^2 - z^2)\mathbf{j} + z(y^2 - x^2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

■

1.6 Campo Divergente

Definição 1.17. O divergente é um escalar, calculado a partir de um campo vetorial em um ponto definido por:

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (P, Q, R) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) = \text{div } \mathbf{F}.$$

Consideranlmos que $\mathbf{F} = Pi + Qj + Rk$ sendo um campo vetorial e o operador gradiente nabra $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right)$ então o divergente \mathbf{F} pode ser escrito como produto escalar, denotamos dessa forma.

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (1.18)$$

Exemplo 1.18. *Determine o divergente do campo vetorial.*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}.$$

Solução: Usando a Definição (1.17) temos que:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2yz) + \frac{\partial}{\partial y} (xy^2z) + \frac{\partial}{\partial z} (xyz^2) = 6(xyz)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 6(xyz).$$



2 Integrais Múltiplas

Neste Capítulo iremos utilizar as seguintes referências (LIMA, 2002), (STEWART, 2013), (ROGAWSKI; ADAMS, 2009) e (THOMAS, 2009), que servirá de base para contruirmos o próximo capítulo. Ao iniciar esse capítulo, enunciaremos algumas definições e teoremas importantes que servirá de apoio para a sequência do nosso trabalho.

Definição 2.1. *Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$, temos $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Em símbolos, ser contínua no ponto a significa:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in X, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Definição 2.2. *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A derivada da função f no ponto a é o limite:*

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Bem entendido, o limite acima pode existir ou não. Se existir, diz-se que f é derivável no ponto a . Quando existe a derivada $f'(x)$ em todos os pontos $x \in X \cap X'$, diz-se que a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no conjunto X e obtém-se uma nova função $f' : X \cap X' \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, chamada de função derivada de f . Se f' é contínua, diz-se que f é de classe C^1 .

Teorema 2.3 (Teorema do Valor Médio, de Lagrange). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2.1)$$

A demonstração pode ser vista em (LIMA, 2002).

Teorema 2.4 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se uma função integrável $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma primitiva $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, então*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Em outras palavras se uma função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivada integrável então

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt.$$

A demonstração pode ser vista em (LIMA, 2002).

2.1 Integrais de Linha

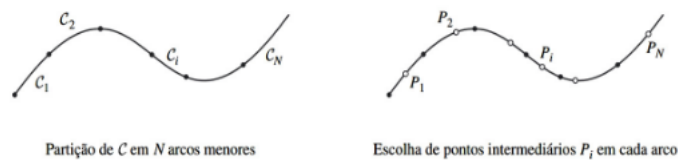
2.1.1 Integrais de Linha Escalar

A integral de linha de uma função $f(x, y, z)$ ao longo de uma curva C é denominada integral de linha escalar e é denotada por

$$\int_C f(x, y, z) ds.$$

Para definir a integral de linha escalar, montamos uma soma de Riemann dividindo C em N arcos consecutivos C_1, \dots, C_n , veja a figura (2.1). Denote por Δs_i o comprimento

Figura 2.1 – Curva C dividida em N arcos pequenos



Fonte: (ROGAWSKI; ADAMS, 2009)

do arco C_i dentro de cada arco C_i , escolhemos um ponto amostral $P_i \in C_i$ e consideramos a soma de Riemann:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{(\Delta s_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(P_i) \Delta s_i \tag{2.2}$$

As integrais de linha podem ser calculadas usando parametrizações da curva. vamos usar a notação $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para denotar um caminho em \mathbb{R}^3 . Utilizamos $c(t)$ como sendo um ponto em movimento no espaço como uma função do tempo t . A derivada $c'(t)$ é o vetor tangente.

$$c'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$$

Lembre que se $c'(t) \neq 0$, então $c'(t)$ é tangente ao caminho, aponta no sentido do movimento e seu comprimento $\|c'(t)\|$ é a velocidade no instante t . Agora suponha que C tenha uma parametrização $c(t)$ ao longo de $a \leq t \leq b$ com derivada $c'(t)$ contínua. Escolhemos uma partição do intervalo $[a, b]$:

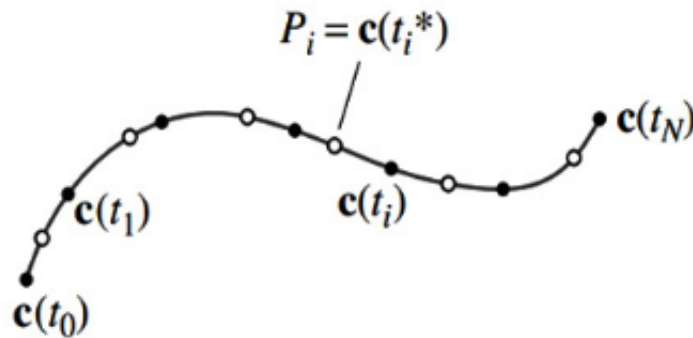
$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$$

e C_i a porção de C parametrizada por $c(t)$ ao longo de $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ veja a figura (2.2).

De acordo com a fórmula do comprimento de arco:

$$\text{Comprimento}(C_i) = \Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|c'(t)\| dt$$

Figura 2.2 – Uma partição da curva parametrizada $c(t)$



Fonte: (ROGAWSKI; ADAMS, 2009)

Lembrando que a fórmula do comprimento de arco $c(t)$ ao longo do de $a \leq t \leq b$ é dado pela integral:

$$\int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, existe um ponto intermediário t_i^* em $[t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \|\mathbf{c}'(t_i^*)\| \Delta t_i, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

Tomando $P_i = c(t_i^*)$ como nosso ponto intermediário em C_i vemos pela Equação (2.2) que:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{(\Delta t_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{c}(t_i^*)) \|\mathbf{c}'(t_i^*)\| \Delta t_i. \quad (2.3)$$

O limite é tomado sobre todas partições quando o máximo dos comprimentos δt_i tende a zero. Como as somas do lado direito são somas de Riemann para a integral

$$\int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Segue que podemos usar qualquer parametrização para calcular uma integral de linha escalar.

Calculando uma integral de linha escalar. Seja $c(t)$ uma parametrização de uma curva C ao longo de $a \leq t \leq b$. Suponha que $f(x, y, z)$ e $c'(t)$ sejam contínuas. Donde

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt. \quad (2.4)$$

Note que se $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$, então:

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

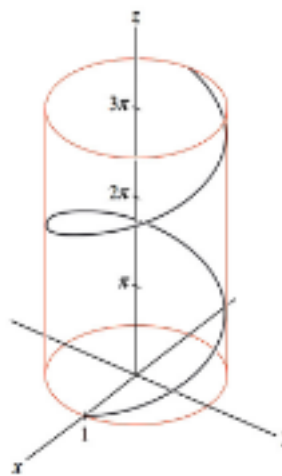
A integral de linha escalar pode ser denotada dessa forma:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt. \quad (2.5)$$

Para o \mathbb{R}^2 é de forma análoga ao \mathbb{R}^3 , com suas devidas parametrizações.

Exemplo 2.5. Calcule $\int_C f(x, y, z) ds$, onde C é a hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ao longo de $0 \leq t \leq \pi$.

Figura 2.3 – A hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$



Fonte: (ROGAWSKI; ADAMS, 2009)

Solução: Vamos primeiro calcular a $ds = \|\mathbf{c}'(t)\| dt$. daí temos, $\mathbf{c}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$

onde:

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$ds = \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \sqrt{2} dt.$$

Agora vamos escrever $\mathbf{f}(\mathbf{c}(t))$ e achar a integral de linha. Então $f(x, y, z) = x + y + z$

$$f(\mathbf{c}(t)) = f(\cos t, \sin t, t) = \cos t + \sin t + t$$

usando a Equação (2.4)

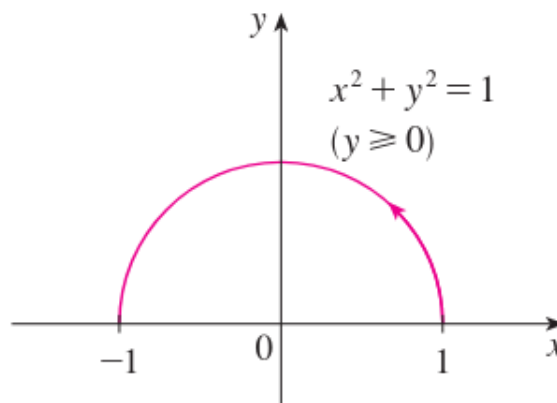
$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_0^\pi f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_0^\pi (\cos t + \sin t + t) \sqrt{2} dt \\ &= \sqrt{2} \left(\sin t - \cos t + \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_0^\pi \\ &= \sqrt{2} \left(0 + 1 + \frac{1}{2} \pi^2 \right) - \sqrt{2} (0 - 1 + 0) \\ &= 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi^2. \end{aligned}$$



Exemplo 2.6. Calcule $\int_C (2 + x^2y) ds$, onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: Sabemos que o círculo unitário tem parametrização do tipo $x = \cos t$ $y = \sin t$, então $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$ como é a metade do círculo, então o intervalo do parâmetro será $0 \leq t \leq \pi$.

Figura 2.4 – Semi-circulo



Fonte: (STEWART, 2013)

Calculando $ds = \|\mathbf{c}'(t)\|dt$. Dai temos $\mathbf{c}'(t) = \langle -\sin t, \cos t \rangle$

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = 1$$

$$ds = \|\mathbf{c}'(t)\|dt = 1dt.$$

Vamos calcular $f(\mathbf{c}(t))$, então seja;

$$f(x, y) = 2 + x^2y$$

$$f(\mathbf{c}(t)) = f(\cos t, \sin t) = (2 + \cos^2 t \sin t), \text{ dai temos :}$$

$$\int_C f(x, y) ds = \int_0^\pi f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) 1 dt$$

$$= 2t - \frac{1}{3} \cos^3 t \Big|_0^\pi$$

$$= 2\pi + \frac{2}{3}.$$



2.1.2 Integrais de Linha Vetoriais

A integral de linha vetorial é a integral do componente tangencial do campo vetorial ao longo da curva. Para definir uma integral de linha vetorial, devemos especificar um

sentido de percurso ao longo da curva. Uma curva C pode ser percorrida em um de dois sentidos e dizemos que C está orientada se um desses sentidos foi especificado. Esse é o sentido positivo ao longo da curva.

Definição 2.7. (*Integral de linha vetorial:*) Seja C uma curva orientada e seja \mathbf{T} o vetor tangente unitário apontando no sentido positivo ao longo de C . **A integral de linha de um campo vetorial \mathbf{F} ao longo de C é a integral do componente tangencial de \mathbf{F} :**

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) ds.$$

Para Integrais Vetoriais devemos escolher uma parametrização $\mathbf{c}(t)$ que percorra C no sentido positivo. Também supomos que $\mathbf{c}(t)$ seja regular, $\mathbf{c}'(t) \neq 0$ ou seja, para $a \leq t \leq b$. Nesse caso, $\mathbf{c}'(t)$ é um vetor tangente não-nulo apontando no sentido positivo e o vetor tangente unitário é

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$$

\mathbf{T} = (Vetor unitário), e o componente tangencial de \mathbf{T} em $\mathbf{c}(t)$ é $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{c}(t))$, daí,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} \|\mathbf{c}'(t)\| dt \\ \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Exemplo 2.8. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, onde C é a parametrização $\mathbf{c}(t) = (t+1, e^t, t^2)$ ao longo de $0 \leq t \leq 2$ e Seja $\mathbf{F} = \langle z, y^2, x \rangle$.

Solução: Calcular o integrando $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) &= (t+1, e^t, t^2) \\ \mathbf{c}'(t) &= \langle 1, e^t, 2t \rangle \\ \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) &= \langle z, y^2, x \rangle = \langle t^2, e^{2t}, 1+t \rangle. \end{aligned}$$

Fazendo o produto escalar.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) &= \langle t^2, e^{2t}, 1+t \rangle \cdot \langle 1, e^t, 2t \rangle \\ &= e^{3t} + 3t^2 + 2t. \end{aligned}$$

Agora vamos calcular a integral de linha.

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt \\
 &= \int_0^2 (e^{3t} + 3t^2 + 2t) dt \\
 &= \left(\frac{1}{3}e^{3t} + t^3 + t^2 \right) \Big|_0^2 \\
 &= \left(\frac{1}{3}e^6 + 8 + 4 \right) - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{3}(e^6 + 35).
 \end{aligned}$$

■

Observamos a relação entre as integrais de linha de campos vetoriais e as integrais de linha de campos escalares. Vamos supor que o campo vetorial \mathbf{F} em \mathbb{R}^3 seja dado na forma de componente, a equação $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Usamos a Definição (2.7) para calcular a sua integral de linha ao longo de C . Escolhemos uma parametrização $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Com $dx = \frac{dx}{dt}dt$, $dy = \frac{dy}{dt}dt$, $dz = \frac{dz}{dt}dt$

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt \\
 &= \int_a^b (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}) dt
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_C P dx + Q dy + R dz \\
 &= \int_a^b \underbrace{\left(P(\mathbf{c}(t)) \frac{dx}{dt} + Q(\mathbf{c}(t)) \frac{dy}{dt} + R(\mathbf{c}(t)) \frac{dz}{dt} \right)} dt
 \end{aligned}$$

Exemplo 2.9. Calcule $\int_C 2ydx - 3dy$ onde C é a elipse parametrizada no sentido anti-horário por $\mathbf{c}(t) = (4 + 3 \cos \theta, 3 + 2 \sin \theta)$ ao longo de $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Solução: Então temos $x(\theta) = 4 + 3 \cos \theta$ e $y(\theta) = 3 + 2 \sin \theta$ com suas devidas

$$\frac{dx}{d\theta} = -3 \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 2 \cos \theta$$

donde

$$\begin{aligned}
 2ydx - 3dy &= \left(2y \frac{dx}{d\theta} - 3 \frac{dy}{d\theta} \right) d\theta \\
 &= (2(3 + 2 \sin \theta)(-3 \sin \theta) - 3(2 \cos \theta)) d\theta \\
 &= -(6 \cos \theta + 18 \sin \theta + 12 \sin^2 \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

Calculando a integral de linha, vamos lembrar que as integrais de $\cos \theta$ e $\sin \theta$ ao longo de $[0, 2\pi]$ são nulas.

$$\begin{aligned} \int_C 2y dx - 3dy &= - \int_0^{2\pi} (6 \cos \theta + 18 \sin \theta + 12 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= -12 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = -12 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= -(12)(\pi) = -12\pi \end{aligned}$$

■

2.2 Integrais duplas

Nesta subseção calculamos a integral dupla usando o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), aplicando ele duas vezes.

2.2.1 Propriedades das Integrais Duplas

Vamos listar três propriedades das integrais duplas, admitindo que todas as integrais existam.

- 1) $\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA$
- 2) $\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA$ onde c é uma constante.
Se $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) em R , então:
- 3) $\iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA.$

2.2.2 Integral dupla sobre Retângulo

Seja uma função de duas variáveis $f(x, y)$ definida em um região D (retângulo fechado)

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (2.7)$$

a integral dupla é um limite de somas de Riemann. Para formar uma soma de Riemann, escolhemos inteiros positivos N e M e partições dos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$:

Sejam $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ as larguras dos subintervalos definidos por essas partições. Então subdividimos R em NM sub-retângulos R_{ij} , cuja área denotamos por ΔA_{ij} :

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad R_{ij} = \Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j.$$

A partição é regular se: $\Delta x_i = \Delta x$ e $\Delta y_j = \Delta y$, donde

$$\Delta x = \frac{b - a}{N}, \quad \Delta y = \frac{d - c}{M}.$$

Escolhemos arbitrariamente um ponto amostral $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ em cada sub-retângulo R_{ij} veja a figura (2.5), e construímos uma caixa de altura $f(P_{ij})$ acima de R_{ij} .

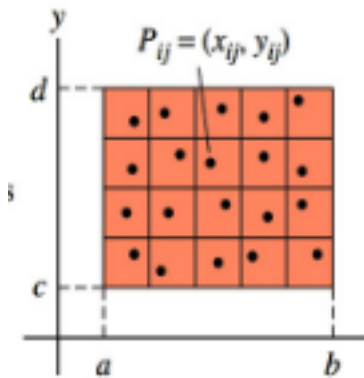
$$f(P_{ij}) \Delta A_{ij} = f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

A soma de Riemann $S_{N,M}$ é a soma dos volumes com sinal das caixas observe a figura (2.6):

$$S_{N,M} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M f(P_{ij}) \Delta A_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

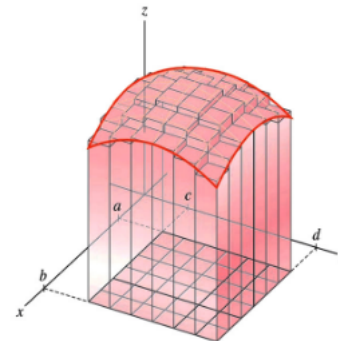
Esse somatório duplo deve ser tomado sobre todos i e j tais que $1 \leq i \leq N$ e $1 \leq j \leq M$, num total de NM parcelas. Esse somatório duplo deve ser tomado sobre todos

Figura 2.5 – $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$



Fonte: (ROGAWSKI; ADAMS, 2009)

Figura 2.6 – A Soma de Riemann:



Fonte: (ROGAWSKI; ADAMS, 2009)

i e j tais que $1 \leq i \leq N$ e $1 \leq j \leq M$, num total de NM parcelas.

Sejam $P = ((x_i), (y_j))$ o conjunto de extremidades da partição e $\|P\|$ o máximo dos comprimentos $\Delta x_i, \Delta y_j$. Quando $\|P\|$ tende a zero, as caixas ficam mais finas e aproximam melhor os volumes com sinal.

Nesse caso, denotaremos

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_{N,M} = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M f(P_{ij}) \Delta A_{ij} = L.$$

Esse limite L , se existir, é denominado a integral dupla de $f(x, y)$ ao longo de R e é denotado por: $\iint_R f(x, y) dA$.

Definição 2.10. (Integral dupla no retângulo:) **A integral dupla** de $f(x, y)$ ao longo do retângulo R é definida como o limite

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M f(P_{ij}) \Delta A_{ij}. \quad (2.8)$$

Se o limite existir, então $f(x, y)$ é integrável em R .

No entanto, calcular uma integral pela sua definição pode ser muito complicado. Por isso, veremos alguns métodos mais práticos que simplificam esse cálculo.

2.2.3 Integrais iteradas

Vamos supor que f seja uma função de duas variáveis que é integrável no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Usaremos a notação $\int_c^d f(x, y) dy$ significando que x é mantido fixo e $f(x, y)$ é integrada em relação a y de $y = c$ até $y = d$. Esse procedimento é chamado integração parcial em relação a y . Como $\int_c^d f(x, y) dy$ é um número que depende do valor de x , ele define uma função de x :

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Agora vamos integrar a função A com relação à variável x de $x = a$ a $x = b$, teremos

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (2.9)$$

A integral do lado direito da equação (2.9) é chamada integral iterada. Em geral, os colchetes são omitidos. Assim,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (2.10)$$

Exemplo 2.11. Calcule o valor da integral iterada $\int_0^1 \int_2^4 x^2 y^3 dy dx$.

Solução:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_2^4 x^2 y^3 dy dx &= \int_0^1 \left(\int_2^4 x^2 y^3 dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{4} x^2 y^4 \Big|_2^4 \right) dx \\
 &= \int_0^1 (64x^2 - 4x^2) dx \\
 &= \int_0^1 60x^2 dx = 20x^3 \Big|_0^1 \\
 &= 20.
 \end{aligned}$$

Agora integraremos primeiro em relação a x :

$$\begin{aligned}
 \int_2^4 \int_0^1 x^2 y^3 dx dy &= \int_2^4 \left(\int_0^1 x^2 y^3 dx \right) dy = \\
 &= \int_2^4 \left(\frac{1}{3} x^3 y^3 \Big|_0^1 \right) dy \\
 &= \int_2^4 \left(\frac{1}{3} y^3 \right) dy \\
 &= \frac{1}{12} y^4 \Big|_2^4 \\
 &= 20.
 \end{aligned}$$

■

Observamos que no exemplo (2.11) obtemos a mesma resposta se integramos primeiro em relação a y ou a x , de modo geral acontece isso.

O próximo teorema apresenta um método prático para calcular uma integral dupla, expressando-a como uma integral iterada em qualquer ordem.

Teorema 2.12 (Teorema de Fubini). *Se f for contínua no retângulo então: $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ então*

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy. \quad (2.11)$$

De modo mais geral, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em R , f tenha descontinuidades apenas em um número finito de curvas suaves e que a integral iterada exista.

Exemplo 2.13. *seja $\iint_R (x - 3y^2) dA$ onde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$, Calcule a integral dupla*

Solução: Pelo Teorema (2.12)

$$\begin{aligned}
 \iint_R (x - 3y^2) \, dA &= \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^2 \left(xy - y^3 \Big|_1^2 \right) dx \\
 &= \int_0^2 (x - 7) \, dx \\
 &= \frac{1}{2}x^2 - 7x \Big|_0^2 \\
 &= -12.
 \end{aligned}$$

(2.12)

Aplicaremos denovo o Teorema (2.12), mas dessa vez integrando com relação a x primeiro, então:

$$\begin{aligned}
 \iint_R (x - 3y^2) \, dA &= \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2) \, dx \, dy \\
 &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 3xy^2 \Big|_0^2 \right) dy \\
 &= \int_1^2 (2 - 6y^2) \, dy \\
 &= 2y - 2y^3 \Big|_1^2 \\
 &= -12.
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.14. Calcule a integral $\int_1^3 \int_0^2 x^3 y \, dy \, dx$, usando o Teorema de Fubini:

Solução:

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 \int_0^2 x^3 y \, dy \, dx &= \int_1^3 \left(\int_0^2 x^3 y \, dy \right) dx \\
 &= \int_1^3 \left(\frac{1}{2}x^3 y^2 \Big|_0^2 \right) dx \\
 &= \int_1^3 2x^3 \, dx \\
 &= \frac{1}{2}x^4 \Big|_1^3 \\
 &= 40.
 \end{aligned}$$

■

Quando a função é um produto $f(x, y) = g(x)h(y)$ a integral dupla num retângulo é, simplesmente, o produto das integrais simples. Isso pode ser visto escrevendo a integral dupla como uma integral iterada:

$$\begin{aligned} \iint_R g(x)h(y) dA &= \int_a^b \left(\int_c^d g(x)h(y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b g(x) \left(\int_c^d h(y) dy \right) dx \\ &= \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right). \end{aligned}$$

Exemplo 2.15. Calcule a integral de uma função produto $\int_0^1 \int_0^2 x^4 y^3 dy dx$

Solução: Como o integrando $f(x, y) = x^4 y^3$ é uma função produto, então temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^2 x^4 y^3 dy dx &= \left(\int_0^1 x^4 dx \right) \cdot \left(\int_0^2 y^3 dy \right) \\ &= \left(\frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1 \right) \cdot \left(\frac{1}{4} y^4 \Big|_0^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{5} \right) \cdot (4) \\ &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

■

2.2.4 Integrais duplas em regiões mais gerais

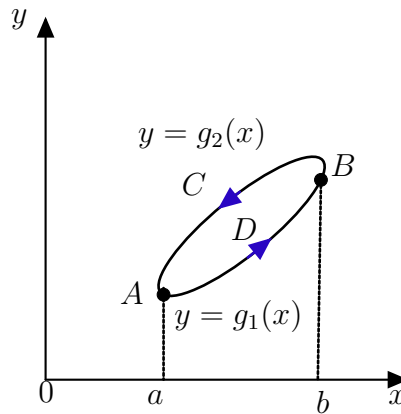
Para integrais duplas em outras regiões, temos que integrar a função f não somente sobre retângulos, como também sobre uma região D de forma mais geral, vamos apresentar a ideia das regiões: **Região do Tipo I e Região do tipo II**, veremos a seguir.

Região do tipo I

Se f é contínua em uma região D do tipo **I** tal que

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \text{ então,} \\ \iint_D f(x, y) dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Figura 2.7 – Região tipo I



Fonte: Próprio autor

Região do tipo II

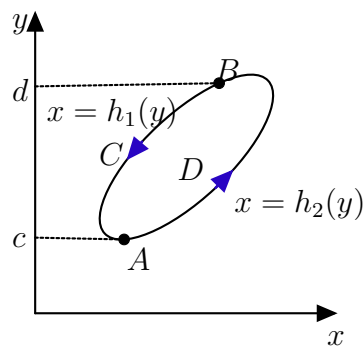
Vamos considerar a região plana do tipo II,

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\} \text{ onde, } h_1 \text{ e } h_2 \text{ são contínuas .}$$

Então,

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy. \quad (2.14)$$

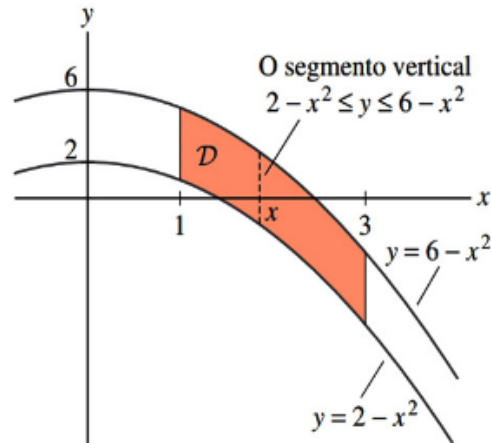
Figura 2.8 – Região tipo II



Fonte: Próprio autor

Exemplo 2.16. Calcule $\iint_D x^3 dA$ onde D é a região da figura (2.9)

Figura 2.9 – $f(x, y) = x^3$ ao longo do segmento vertical entre as curvas em x



Fonte: (ROGAWSKI; ADAMS, 2009)

Solução: Vamos denotar a região D verticalmente daí temos.

limite da integral de fora $1 \leq x \leq 3$

limite da integral de dentro $2 - x^2 \leq y \leq 6 - x^2$.

Agora vamos resolver a integral iterada, então.

$$\iint_D x^3 dA = \int_1^3 \int_{2-x^2}^{6-x^2} x^3 dy dx.$$

Calculando a integral de dentro temos

$$\int_{2-x^2}^{6-x^2} x^3 dy = x^3 y \Big|_{2-x^2}^{6-x^2} = x^3 (6 - x^2) - x^3 (2 - x^2) = 4x^3.$$

Daí temos

$$\iint_D x^3 dA = \int_1^3 4x^3 dx = x^4 \Big|_1^3 = 3^4 - 1^4 = 80.$$

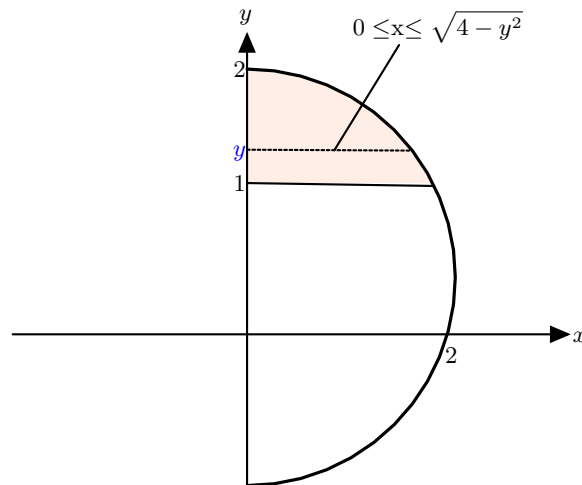
■

Exemplo 2.17. Calcule $\iint_D \frac{x}{y} dA$ onde D é a região destacada do semicírculo de raio 2 na Figura (2.10).

Solução: O domínio D pode ser denotado como uma região horizontalmente

$$1 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}$$

Figura 2.10 – semicírculo



Fonte: Próprio autor

As desigualdades são os limites de integração:

$$\iint_D \frac{x}{y} dA = \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{x}{y} dx dy.$$

Calculando a integral de dentro temos

$$\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{x}{y} dx = \frac{x^2}{2y} \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} = \frac{4-y^2}{2y} = \frac{2}{y} - \frac{y}{2}.$$

Agora Calculando a integral dupla temos

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x}{y} dA &= \int_1^2 \left(\frac{2}{y} - \frac{y}{2} \right) dy = \left(2 \ln y - \frac{y^2}{4} \right) \Big|_1^2 \\ &= (2 \ln 2 - 1) - \left(0 - \frac{1}{4} \right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.18. Calcule a integral

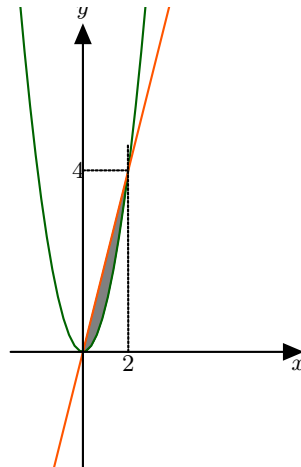
$$\iint_D x + y dA$$

onde D é a região delimitada por $y = x^2$ e $y = 2x$.

Solução: A região de integração é representada pela figura (2.11).

Observamos que a região D pode ser descrita com tipo I quanto no tipo II

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$$

Figura 2.11 – Região delimitada por $y = x^2$ e $y = 2x$ 

Fonte: Próprio autor

$$D_2 = \{(x, y) \mid \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 4\}.$$

A integral pode ser calculada de duas maneiras, porém optamos expor a do tipo I (D_1)

$$\iint_D (x + y) \, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x + y) \, dy \, dx.$$

Calculando a integral de dentro temos

$$\int_{x^2}^{2x} (x + y) \, dy = \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{2x} = \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 4x^2 \right).$$

Calculando a integral dupla

$$\iint_D (x + y) \, dA = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 4x^2 \right) \, dx.$$

Aplicando uma das propriedades da integral temos:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 4x^2 \right) \, dx &= -\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^4 \right) \, dx - \int_0^2 (x^3) \, dx + \int_0^2 (4x^2) \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^2 (x^4) \, dx - \int_0^2 (x^3) \, dx + 4 \int_0^2 (x^2) \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 4 \cdot \frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^2. \end{aligned}$$

Aplicando o teorema Fundamental do Cálculo obtemos:

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 4x^2 \right) dx &= \left(-\frac{1}{10} \cdot 2^5 - \frac{2^4}{4} + \frac{4}{3} \cdot 2^3 \right) - \left(-\frac{1}{10} \cdot 0^5 - \frac{0^4}{4} + \frac{4}{3} \cdot 0^3 \right) \\
 &= -\frac{16}{5} - \int_0^2 (x^3) dx \\
 &= \left(-\frac{32}{10} - \frac{16}{4} + \frac{32}{3} \right) - 0 \\
 &= -\frac{192}{60} - \frac{240}{60} + \frac{640}{60} \\
 &= -\frac{432}{60} + \frac{640}{60} = \frac{208}{60} \\
 \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 4x^2 \right) dx &= \frac{52}{15}.
 \end{aligned}$$

■

2.3 Integrais de Superfície

Vamos desenvolver o conceito de integral de superfície. Uma superfície parametrizada S . Vamos supor que f seja uma função de três variáveis cujo domínio inclui uma superfície S . Definiremos a integral de superfície de f sobre S de tal forma que, no caso em que $f(x, y, z) = 1$, o valor da integral de superfície seja igual à área da superfície de S .

2.3.1 Superfície Parametrizada

$$r(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k, \quad (u, v) \in D.$$

Vamos supor que o domínio dos parâmetros D seja um retângulo e vamos dividi-lo em sub-retângulos R_{ij} com dimensões Δu e Δv . Então, a superfície S é dividida em retângulos correspondentes S_{ij} . Calculamos f em um ponto P_{ij^*} de cada retângulo, multiplicamos pela área ΔS_{ij} do retângulos e formamos a soma de Riemann.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij^*}) \Delta S_{ij}.$$

Admitiremos que o limite quando o número de retângulos aumenta e definimos a integral de superfície de f na superfície S desta formar:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij^*}) \Delta S_{ij}. \quad (2.15)$$

Observamos semelhanças na Equação (2.15) com as integrais de linha e integrais duplas. Para calcularmos a integral de superfície na Equação (2.15), aproximamos a área do

retângulo ΔS_{ij} pela área de um paralelogramo aproximador no plano tangente.

$$\Delta S_{ij} |r_u \times r_v| \Delta u \Delta v.$$

Onde

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \quad r_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}.$$

São os vetores tangentes em um canto de S_{ij} . Se as componentes são contínuas e r_u e r_v são não nulos e não paralelos no interior de D , pode ser mostrado, pela Equação 2.15, mesmo quando D não é retangular, que

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(r(u, v)) |r_u \times r_v| dA. \quad (2.16)$$

Através da equação (2.16), nos permite calcular uma integral de superfície, convertendo-a em uma integral dupla sobre o domínio do parâmetro D . Ao usar essa equação (2.16), lembre-se de que $f(r(u, v))$ é avaliado ao escrever $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$ na fórmula $f(x, y, z)$.

Agora vamos denotar algumas parametrizações de superfícies

- 1) Parametrização da esfera ($x^2 + y^2 + z^2 = a^2$)

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta) \mathbf{i} + (a \sin \phi \sin \theta) \mathbf{j} + (a \cos \phi) \mathbf{k}$$

com

$$x = a \sin \phi \cos \theta \quad y = a \sin \phi \sin \theta \quad z = a \cos \phi \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

- 2) Parametrização do cone ($x^2 + y^2 = z^2$) com $0 \leq z \leq 1$

$$\mathbf{r}(t, \theta) = (t \cos \theta) \mathbf{i} + (t \sin \theta) \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

com

$$x = t \cos \theta \quad y = t \sin \theta \quad z = t \quad 0 \leq t \leq 1 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

- 3) Parametrização do cilindro de raio R dado por $x^2 + y^2 = R^2$

$$\mathbf{r}(\theta, t) = (R \cos \theta) \mathbf{i} + (R \sin \theta) \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

com

$$x = R \cos \theta \quad y = R \sin \theta \quad z = t \quad 0 \leq t \leq 1 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

2.3.2 Integrais de Superfície e área de Superfície

Seja $\mathbf{r}(u, v)$ uma parametrização de uma superfície S com domínio dos parâmetros D . Suponha que \mathbf{r} seja continuamente diferenciável, injetora e regular (exceto, possivelmente, na fronteira de D). Então

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{n}(u, v)\| du dv. \quad (2.17)$$

Para $f(x, y, z) = 1$, obtemos a área de superfície de S :

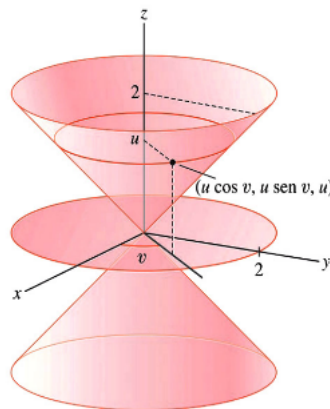
$$\text{Área}(S) = \iint_D \|\mathbf{n}(u, v)\| du dv.$$

Denotaremos simbolicamente o elemento de superfície de

$$dS = \|\mathbf{n}(u, v)\| du dv.$$

Exemplo 2.19. Calcule $\text{Área}(S)$ e $\iint_S x^2 z dS$, onde S é a parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ que fica acima do disco $x^2 + y^2 \leq 4$

Figura 2.12 – Cone $x^2 + y^2 = z^2$



Fonte: (ROGAWSKI; ADAMS, 2009)

Solução: Usando a parametrização do cone, usando as variáveis θ e t então temos

$$\mathbf{r}(\theta, t) = (t \cos \theta, t \sin \theta, t), \quad 0 \leq t \leq 2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Calculando os vetores tangentes e normais, temos

$$\mathbf{T}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \langle -t \sin \theta, t \cos \theta, 0 \rangle \quad \mathbf{T}_t = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \langle \cos \theta, \sin \theta, 1 \rangle$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_t &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -t \sin \theta & t \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \end{vmatrix} \\ &= t \cos \theta \mathbf{i} + t \sin \theta \mathbf{j} - t \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Agora fazendo a norma do vetor.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{n}\| &= \sqrt{(t \cos \theta)^2 + (t \sin \theta)^2 + (-t)^2} \\ &= \sqrt{t^2 \cos^2 \theta + t^2 \sin^2 \theta + t^2} \\ &= \sqrt{t^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + t^2} \\ &= \sqrt{2t^2} = \sqrt{2} t. \end{aligned}$$

Assim o $dS = \sqrt{2} t d\theta dt$.

Calculando a Integral de Superfície :

$$\begin{aligned} \text{Área}(S) &= \iint_D \|\mathbf{n}(u, v)\| du dv \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2} t d\theta dt \\ &= \int_0^2 \left(\sqrt{2} t \theta \Big|_0^{2\pi} \right) dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{2} 2\pi t dt = \sqrt{2} \pi t^2 \Big|_0^2 = 4\sqrt{2} \pi. \end{aligned}$$

Agora vamos calcular a Integral de Superfície seja $f(x, y, z) = x^2 z$ usando os parâmetros t e θ :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}(\theta, t)) &= f(t \cos \theta, t \sin \theta, t) = (t \cos \theta)^2 t = t^3 \cos^2 \theta \\ \iint_S f(x, y, z) dS &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(\theta, t)) \|\mathbf{n}(\theta, t)\| d\theta dt \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (t^3 \cos^2 \theta) (\sqrt{2} t) d\theta dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^2 \int_0^{2\pi} (t^4 \cos^2 \theta) d\theta dt. \end{aligned}$$

Aplicando a regra da propriedade de integrais temos :

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \sqrt{2} \left(\int_0^2 \int_0^{2\pi} t^4 \cos^2(\theta) d\theta dt \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\int_0^2 t^4 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta dt \right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Agora vamos resolver as integrais respectivamente em relação θ e t então:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left(2\pi + \frac{\text{sen}(4\pi)}{2} \right) - 0 \\ &= \frac{1}{2} (2\pi + 0) = \pi.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Calculando em relação a t temos:

$$\begin{aligned}\int_0^2 t^4 dt &= \frac{t^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5} \\ &= \frac{32}{5}\end{aligned}\tag{2.20}$$

Agora somando o resultado das integrais (2.19) e (2.20) a (2.18) obtemos o seguinte resultado:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \sqrt{2} \left(\int_0^2 t^4 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \right) d\theta dt = \frac{32}{5} \sqrt{2} \cdot \pi.$$



3 O Teorema de Green e Aplicações

Neste Capítulo estudaremos o Teorema de Green, um teorema fascinante e importante que relaciona uma integral de linha ao longo de uma curva fechada com uma integral dupla sobre a região plana limitada pela curva. Iremos demonstrar e aplicar o Teorema de Green. Iremos utilizar nesse Capítulo as seguintes referências ([STEWART, 2013](#)) e ([ROGAWSKI; ADAMS, 2009](#)).

3.1 Quem foi George Green

George Green nasceu em 1793 e morreu em 1841. George Green era filho de um padeiro que vivia em Nottingham onde funcionava o estabelecimento de seu pai e foi aí que passou grande parte de sua vida trabalhando. A história diz que ele frequentou apenas dois anos do ensino elementar e não fica bem claro como George Green obteve o conhecimento matemático já que não frequentou nenhuma instituição de ensino regular. Com 30 anos, Green tornou-se membro da Subscription Library, Nottingham, instituição fundada em 1816 e o objetivo claro desta instituição era o encontro de não-acadêmicos para discutir questões de avanço da ciência. Quando completou 35 anos publicou seu primeiro e mais importante trabalho: uma obra sobre a aplicação da análise matemática à eletricidade e ao magnetismo, onde o teorema de Green foi utilizado, sua primeira publicação *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* como um conceito matemático preliminar que seria aplicado a tópicos posteriores relacionados à física. mas passou despercebido pela pequena tiragem do trabalho. Como esta obra teve uma tiragem bastante reduzida, por que foi financiada pelo autor e amigos da Subscription Library, não teve grande repercussão. George Green foi a primeira pessoa a usar o termo potencial na teoria do campo e introduziu vários teoremas de análise vetorial que permitiram calcular o potencial eletrostático. Com 40 anos ingressou na Universidade de Caius, em Cambridge como estudante de licenciatura. Algum tempo depois cerca de 4 anos, formou-se com desempenho desapontador possivelmente por estar engajado em sua pesquisa, então voltou para sua casa em Nottingham para cuidar de seus filhos e do moinho de seu pai, onde alguns anos mais tarde ficou doente e faleceu aos 48 anos.

3.2 O Teorema de Green

O seguinte teorema pode ser encontrado ([ROGAWSKI; ADAMS, 2009](#))

Teorema 3.1. *Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por trechos, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então*

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (3.1)$$

Demonstração. Considere nos casos onde D é uma região simples, então o **Teorema de Green** estará demonstrada se mostrarmos

$$\oint_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA. \quad (3.2)$$

$$\oint_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA. \quad (3.3)$$

Vamos demonstrar (3.2) exprimindo D como uma região do tipo I:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

onde $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são funções contínuas.

Para provar a Equação (3.2), vamos referir a Figura (2.7), note que C consiste em duas curvas C_1 e C_2 que possuem as equações $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, respectivamente.

Daí:

$$\begin{aligned} \oint_C P dx &= \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx + \int_b^a P(x, g_2(x)) dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx. \end{aligned}$$

Aplicando a Figura (2.7) à integral dupla $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$ nos dá,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b P(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx. \\ &= \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx. \end{aligned}$$

Comparando essa expressão com a da Equação (3.2), vemos que

$$\oint_C P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

Também temos de maneira análoga, vamos demonstrar (3.3) exprimindo D como uma região do tipo II:

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

onde $h_1(y)$ e $h_2(y)$ são funções contínuas.

Para provar a Equação (3.3), vamos referir a Figura (2.8), note que C consiste em duas curvas C_1 e C_2 que possuem as equações $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$, respectivamente.

$$\begin{aligned} \oint_C Q \, dy &= \int_{C_1} Q(x, y) \, dy + \int_{C_2} Q(x, y) \, dy \\ &= \int_c^d Q(h_1(y), y) \, dy + \int_d^c Q(h_2(y), y) \, dy \\ &= \int_c^d Q(h_2(y), y) \, dy - \int_c^d Q(h_1(y), y) \, dy. \end{aligned}$$

Aplicando a Figura (2.8) à integral dupla $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} \, dA$ nos dá,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} \, dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy \\ &= \int_c^d Q(x, y) \Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} \, dy. \\ &= \int_c^d [Q(y, h_2(y)) - Q(y, h_1(y))] \, dy. \end{aligned}$$

Comparando essa expressão com a da Equação (3.3), vemos que

$$\oint_C Q(x, y) \, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} \, dA.$$

Portanto temos que:

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA,$$

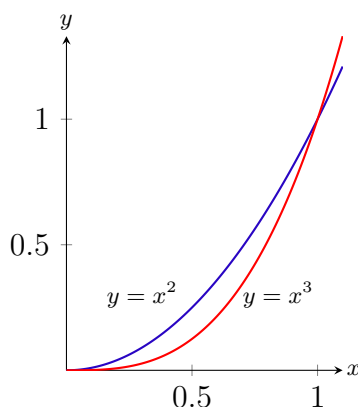
logo o **Teorema de Grenn** está demonstrado. ■

3.3 Aplicações do Teorema de Green

Aplicação 1. Calcule $\oint_C (x^2 - y^2) dx + (2y - x) dy$ aplicando o Teorema de Green, em que C consiste no contorno da região, no primeiro quadrante, que está limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = x^3$.

Solução: Observe a Figura (3.1) Vamos calcular a integral de linha aplicando o Teorema de Green, temos que;

Figura 3.1 – Gráfico das curvas $y = x^2$ e $y = x^3$ no primeiro quadrante.



Fonte: Próprio autor

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Donde, $P = (x^2 - y^2)$ e $Q = (2y - x)$.

Então temos as seguintes derivadas Parciais $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \right)$ e $\left(-\frac{\partial P}{\partial y} = -2y \right)$, como as funções são deriváveis logo é contínuas. Então podemos aplicar o Teorema de Green para calcular a integral indicada.

$$\oint_C (x^2 - y^2) dx + (2y - x) dy = \iint_D (-1 + 2y) dA.$$

Temos os seguintes limites de integração:

$$D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 \leq y \leq x^2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Dai temos:

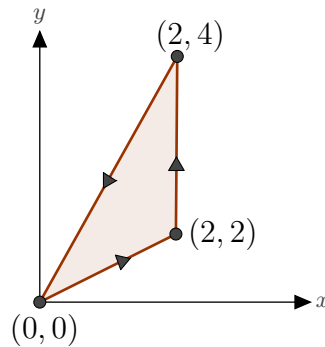
$$\begin{aligned}
 \oint_C (x^2 - y^2) dx + (2y - x) dy &= \iint_D (-1 + 2y) dA \\
 &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (-1 + 2y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left(-y + 2 \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^3}^{x^2} dx \\
 &= \int_0^1 (-y + y^2) \Big|_{x^3}^{x^2} dx \\
 &= \int_0^1 [(-x^2 + x^4 + x^3 - x^6)] dx \\
 &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{4} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} \right]_0^1 \\
 \oint_C (x^2 - y^2) dx + (2y - x) dy &= -\frac{11}{420}.
 \end{aligned}$$

■

Aplicação 2. Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva. $\oint_C (xy^2) dx + (2x^2y) dy$. Onde C é o triângulo com os vértices $(0, 0)$, $(2, 2)$ e $(2, 4)$.

Solução: Observe que a região Denglobada por C é simples e que C tem orientação positiva. Veja a Figura (3.2).

Figura 3.2 – Triângulo com os vértices $(0, 0)$, $(2, 2)$ e $(2, 4)$.



Fonte: Próprio autor

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Donde, $P = (xy^2)$ e $Q = (2x^2y)$.

Então temos as seguintes derivadas Parciais $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy \right)$ e $\left(-\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy \right)$, como as funções são deriváveis logo é contínuas. Então podemos aplicar o Teorema de Green

para calcular a integral indicada.

$$\oint_C (xy^2) dx + (2x^2y) dy = \iint_D (4xy - 2xy) dA = \iint_D 2xy dA$$

Temos os seguintes limites de integração:

$$D = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x \end{cases} \quad (3.5)$$

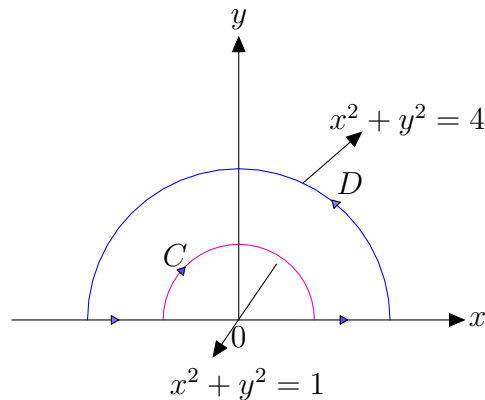
Daí temos:

$$\begin{aligned} \oint_C (xy^2) dx + (2x^2y) dy &= \iint_D (2xy) dA \\ &= \int_0^2 \int_x^{2x} (2xy) dy dx \\ &= \int_0^2 \left(2x \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{2x} dx \\ &= \int_0^2 (x \cdot y^2) \Big|_x^{2x} dx \\ &= \int_0^2 (x \cdot (2x)^2 - x \cdot x^2) dx \\ &= \int_0^2 (4x^3 - x^3) dx \\ &= \int_0^2 3x^3 dx \\ &= \left[\frac{3x^4}{4} \right]_0^2 \\ &= \frac{3}{4} [2^4 - 0^4] \\ &= \frac{3}{4} \cdot 16 \\ \oint_C (xy^2) dx + (2x^2y) dy &= 12. \end{aligned}$$

■

Aplicação 3. Calcule $\oint_C y^2 dx + 3xy dy$, onde C é o limite da região semianular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Solução: Observe que a região D não é uma curva simples, o eixo y divide em duas regiões simples. Veja a Figura (3.3).

Figura 3.3 – Semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$ 

Fonte: Próprio autor

Portanto o Teorema de Green fornece:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Donde, $P = y^2$ e $Q = 3xy$.

Então temos as seguintes derivadas Parciais $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} = 3y \right)$ e $\left(-\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \right)$, como as funções são deriváveis logo é contínuas. Então podemos aplicar o Teorema de Green para calcular a integral indicada.

$$\oint_C y^2 dx + 3xy dy = \iint_D (3y - 2y) dA = \iint_D y dA$$

Fazendo a parametrização, temos :

$$x = r \cdot \cos \theta \quad 1 \leq r \leq 2$$

$$y = r \cdot \text{sen } \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Sendo.

$$dA = r \cdot dr \cdot d\theta$$

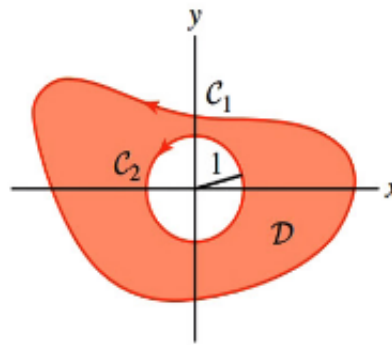
$$\oint_C y^2 dx + 3xy dy = \iint_D y dA = \int_0^\pi \int_1^2 (r \text{ sen} \theta) r dr d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi \int_1^2 (r^2 \operatorname{sen} \theta) dr d\theta \\
 &= \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta \int_1^2 r^2 dr \\
 &= \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \left(\frac{r^3}{3} \right) \Big|_1^2 d\theta \\
 &= \frac{7}{3} \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta \\
 &= \frac{7}{3} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \\
 &= -\frac{7}{3} (\cos \pi - \cos 0) \\
 &= -\frac{7}{3} (-1 - 1) \\
 \oint_C y^2 dx + 3xy dy &= \frac{14}{3}.
 \end{aligned}$$

■

Aplicação 4. O domínio D na Figura (3.4) tem área 8. Calcule $\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot ds$, onde $\mathbf{F} = (x - y, x + y^3)$ e C_1 é a curva da fronteira exterior de D com orientação anti-horária.

Figura 3.4 – D tem área 8 e C_2 é um círculo de $r = 1$.



Fonte: (ROGAWSKI; ADAMS, 2009)

Solução: Observe que nesse exercício não podemos calcular a integral de linha ao longo da curva C_1 diretamente, pois a curva não foi especificada. Assim $\partial D = C_1 - C_2$, pelo Teorema de Green, temos,

$$\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot ds - \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot ds = \iint_D \operatorname{rot}_\alpha(\mathbf{F}) dA,$$

ou melhor

$$\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot ds = \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot ds + \iint_D \operatorname{rot}_\alpha(\mathbf{F}) dA.$$

Aplicando o Teorema de Green,

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Donde, $P = (x - y)$ e $Q = (x + y^3)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_\alpha(\mathbf{F}) &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} (x + y^3) - \frac{\partial P}{\partial y} (x - y) \\ &= 1 - (-1) \\ \operatorname{rot}_\alpha(\mathbf{F}) &= 2. \end{aligned}$$

Note que a $\text{Área}(D) = 8$. Então,

$$\iint_D \operatorname{rot}_\alpha(\mathbf{F}) \, dA = \iint_D 2 \, dA = 2 \cdot \text{Área}(D) = 2 \cdot 8 = 16.$$

Agora vamos calcular a integral de linha ao longo da curva C_2 , para isso a curva parametrizada do círculo é dada por:

$$s(t) = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta).$$

Então:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}'(t) &= \langle \cos \theta - \operatorname{sen} \theta, \cos \theta + \operatorname{sen}^3 \theta \rangle \cdot \langle -\operatorname{sen} \theta, \cos \theta \rangle \\ &= -\operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta + \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta \cdot \cos \theta \\ &= 1 - \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta + \operatorname{sen}^3 \theta \cdot \cos \theta. \end{aligned}$$

As integrais de $\operatorname{sen} \theta$ e $\cos \theta$ ao longo de $[0, 2\pi]$, são ambas nulas, logo.

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot ds &= \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta + \operatorname{sen}^3 \theta \cdot \cos \theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\oint_{C_1} \mathbf{F} ds = 16 + 2\pi.$$



Aplicação 5. Seja C uma fronteira do retângulo $R = [(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1]$, percorrida uma única vez no sentido anti-horário. A integral

$$\oint_C (6x^5y + \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})) \, dx + (x^6 + x^2 + y^2 + e^2 \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(y)}) \, dy$$

é igual a:

Solução:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot dr = \iint_D \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \, dA$$

Aplicando o Teorema de Green,

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA$$

Donde, $P = (6x^5y + \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}))$ e $Q = (x^6 + x^2 + y^2 + e^2\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(y)})$.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} (x^6 + x^2 + y^2 + e^2\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(y)}) - \frac{\partial P}{\partial y} (6x^5y + \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})) \\ &= 6x^5 + 2x - 6x^5 = 2x \\ \operatorname{rot}(\mathbf{F}) &= 2x. \end{aligned}$$

Então,

$$\iint_D \operatorname{rot}(\mathbf{F}) dA = \iint_D 2x dx dy.$$

Agora vamos calcular as seguintes integrais duplas abaixo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^2 dx dy &= \int_0^1 \frac{2x^2}{2} \Big|_0^2 dy \\ &= \int_0^1 x^2 \Big|_0^2 dy \\ &= \int_0^1 4 dy \\ &= 4y \Big|_0^1 dy \\ &= 4 \end{aligned}$$



Considerações finais

Neste trabalho, apresentamos de forma didática como construir uma base para a demonstração do Teorema de Green, bem como definições, proposições de outros teoremas que são necessário para a construção e compreensão do Teorema de Green. De maneira metodológica, foi possível demonstrar algumas aplicações importante do Teorema de Green, um breve conhecimento da vida e obra do grande gênio o matemático, George Green.

O Teorema sob análise, fornece uma nova perspectiva a respeito das integrais de linha. Provamos que a circulação de um campo vetorial gradiente ao longo de uma curva fechada é igual a zero. O Teorema de Green expressa a circulação de um campo vetorial (F) qualquer como uma integral dupla, que não precisa ser nula se o campo (F) não for gradiente. Podemos concluir que todos os estudos e pesquisas realizadas foram de fundamental importância para compreensão dos conceitos necessários ao entendimento do Teorema de Green.

Demonstrou-se a importância de como o cálculo de integrais curvilíneas é fundamental no estudo da matemática, fazendo uso das derivadas parciais para estabelecer uma junção, ou melhor, dizendo uma harmonia entre integrais de linha e integrais duplas, tornando assim o cálculo dessas funções mais simples e prático. Sendo possível observar a aplicação do teorema em regiões de figuras fechadas, utilizando integrais de linhas e também em regiões que possuam singularidade, ou seja, que possuam "buracos". Foi visto os segmentos orientados de curvas, estudado os sinais do sentido horário e anti horário, as integrais duplas e campos vetoriais. Assuntos que tem fundamental importância para quem estuda cálculo e tem admiração pela matemática e suas aplicações em nosso cotidiano.

Uma das grandes dificuldades para a produção do presente trabalho conclusão de curso foi justamente a escrita, uma vez que pude perceber que é muito complexo o ato de produzir textos matemático com rigor, clareza e precisão. Não deixando de salientar, que também tive dificuldade na digitação do trabalho pois a minha compreensão do \LaTeX era muito pouco.

O trabalho agregou uma gama de conhecimentos relacionados ao cálculo nas suas mais várias versões, cálculo diferencial, vetorial, integral, derivada dentre outros. E também me levou a uma viagem para atingir uma maturidade quanto a compreensão da complexa linguagem de matemática abordada nos livros de cálculo.

Portanto, a realização desse trabalho de conclusão de curso ampliou o campo de visão e despertar meu interesse em continuar estudando tanto a matemática pura quanto a aplicada, e além disso, sempre tentado inovar e encontrar novos métodos e práticas de como ensinar tais conteúdos e facilitando o ensino de aprendizagem. Finalizando, esse trabalho foi realizado com pensamento voltado para alunos e professores, que venham a trabalhar com esse tema tão instigante e importante para nossa vida, que é o Teorema de Green.

Referências

ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G. S. **Geometria diferencial das curvas no R²**. [S.l.: s.n.], 2020. Citado na página 10.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo B: funções de várias variáveis integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, São Paulo, Brasil, 2007. Citado na página 10.

LIMA, E. L. Análise real. volume 1, impa. **Col. Mat. Universitária, RJ**, 2002. Citado na página 25.

PEREIRA, R.; MARTINS, M. H. S. **Cálculo III e IV**. [S.l.]: UFSC-EAD-CED-CFM, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 16.

ROGAWSKI, J.; ADAMS, C. **Cálculo: Volume 2**. [S.l.]: Bookman Editora, 2009. v. 2. Citado 11 vezes nas páginas 10, 19, 25, 26, 27, 28, 33, 39, 44, 47 e 54.

STEWART, J. **Cálculo volume 2**. [S.l.]: 2013, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 10, 25, 29 e 47.

THOMAS, G. B. **Cálculo B volume 2**. [S.l.]: 2009, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 25.