UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

FILIPE BASTOS RIBEIRO

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA SOBRE CONJUNTOS ENUMERÁVEIS E NÃO-ENUMERÁVEIS

São Luís – MA

2021

FILIPE BASTOS RIBEIRO

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA SOBRE CONJUNTOS ENUMERÁVEIS E NÃO-ENUMERÁVEIS

Monografia apresentada ao curso de Matemática - Licenciatura da UFMA, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo

São Luís – MA

2021

FILIPE BASTOS RIBEIRO

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA SOBRE CONJUNTOS ENUMERÁVEIS E NÃO-ENUMERÁVEIS

Monografia apresentada ao curso de Matemática - Licenciatura da UFMA, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

São Luís, 12/03/2021.

BANCA EXAMINADORA

Elivaldo Rodrigues Macedo
Prof. Dr. - UFMA
(Orientador)

Cléber Araújo Cavalcanti
Prof. Me. - UFMA
(Examinador)

Valeska Martins de Souza
Prof. Dr. - UFMA
(Examinadora)

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Ribeiro, Filipe Bastos.
Uma abordagem didática sobre conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis / Filipe Bastos Ribeiro. - 2021.
120 p.

Orientador(a): Elivaldo Rodrigues Macedo.
Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2021.

1. Axiomas de Peano. 2. Conjuntos e Funções. 3. Conjuntos Finitos e Infinitos. 4. Enumeráveis e Não-enumeráveis. I. Macedo, Elivaldo Rodrigues. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Não há motivos para deixar de agradecer a Deus e aos meus familiares por todo o apoio ao longo desses anos de estudos. Agradeço, também, aos professores deste curso, em especial aos que tive a oportunidade de cursar disciplinas.

Sem dúvida, a educação pública, em todos os seus níveis, contribui direta e indiretamente para a transformação da realidade vivenciada por todos.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo detalhado sobre conjuntos, funções, conjuntos finitos e infinitos, e sobre conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis, com o objetivo de abordar este conteúdo teórico de forma didática. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica em livros desta área de conhecimento. Foram obtidos exemplos adicionais devidamente verificados a partir da teoria apresentada. E, devido ao modo razoavelmente claro e conciso com que a teoria e as demonstrações (provas dos resultados matemáticos) foram abordadas, considerou-se que a proposta deste trabalho de apresentar o tema de modo didático foi alcançada com êxito.

Palavras-chave: Conjuntos e Funções. Axiomas de Peano. Conjuntos Finitos e Infinitos. Enumeráveis e Não-enumeráveis.

ABSTRACT

This work presents a detailed study on sets, functions, finite and infinite sets, and about enumerable and non-enumerable sets, in order to approach this theoretical content in a didactic way. The methodology used was bibliographic research in books in this area of knowledge. Additional examples were obtained, duly verified from the presented theory. And, due to the reasonably clear and concise way in which the theory and the demonstrations (of the mathematical results) were approached, it was considered that the proposal of this work to present the theme in a didactic way was successfully achieved.

Keywords: Sets and Functions. Peano's axioms. Finite and Infinite Sets. Enumerable and Non-enumerable.

Lista de Figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste em um estudo sobre conjuntos, funções, conjuntos finitos e infinitos, e sobre conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis. O tema escolhido é parte de algumas das mais relevantes subáreas da Matemática, como a Teoria dos Conjuntos, a Teoria dos Números e a Análise Real, por exemplo.

Um estudo detalhado e didático sobre Conjuntos e Funções, poderá servir ao leitor como base para a compreensão de outros conceitos abordados neste texto e, de modo geral, em outras áreas da Matemática.

A principal fonte de pesquisa utilizada são as referências bibliográficas: utilizou-se alguns dos livros de maior destaque sobre o assunto utilizados, nas últimas duas ou três décadas, por estudantes de Matemática e pesquisadores brasileiros, sobre o assunto. Com o objetivo de abordar este conteúdo teórico de forma mais didática.

Os objetivos específicos ao abordar o tema são aos seguintes: detalhar os principais conceitos sobre conjuntos e funções; exemplificar e provar resultados que surgem em decorrência da teoria de conjuntos e funções; realizar um estudo introdutório e detalhado sobre os axiomas de Peano e a teoria dos números naturais; apresentar o carácter ordinal do números naturais; prosseguir com a dedução da teoria sobre conjuntos finitos e infinitos; apresentar o aspecto cardinal dos números naturais; realizar um estudo sobre conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis; e, por fim, exemplificar e provar outros resultados (teoremas, proposições, fórmulas, etc), que surgem como consequência da teoria apresentada anteriormente.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta a linguagem de Conjuntos e Funções, bem como suas operações e alguns resultados adicionais.

2.1 Conjuntos

Não há uma definição formal, em Matemática, para o que poderíamos chamar de conjunto. No entanto, podemos compreender por conjunto, uma coleção de objetos físicos ou abstratos que possuem em comum uma determinada característica ou propriedade. Esses objetos são chamados de elementos.

Definição 2.1.1 [Relação de pertinência] Seja X um conjunto e x um elemento. Se x está no conjunto X dizemos que x pertence a X. Isto é denotado por $x \in \mathsf{X}$. Por outro lado se x não está no conjunto X dizemos que x não pertence a X. E isto é denotado por $x \notin \mathsf{X}$.

Portanto um conjunto estará formalmente definido quando houver uma regra ou propriedade, ou característica que permita o uso da relação de pertinência.

Exemplo 2.1.1 Seja B o conjunto dos triângulos cuja base mede m unidades. Um objeto abstrato x pertence a B se x possui a característica de ser a figura geométrica plana, triângulo e, além disso, um de seus lados mede m unidades.

A notação convencional para conjuntos é $\mathsf{X} = \{a, b, c, ...\}$ sendo a, b, c, ..., elementos do conjunto X

Exemplo 2.1.2 Alguns conjuntos frequentemente utilizados são: o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..\}$; o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$; e o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\right\}$, que em palavras significa que $\mathbb{Q}$ é o conjunto das frações p/q tais que p e q pertencem a $\mathbb{Z}$ e q é diferente de zero.

O modo mais frequentemente utilizado para definir um conjunto é o uso de uma propriedade em comum e exclusiva dos elementos dos que irão compor esse conjunto. Assim, se deseja-se definir um conjunto Y a partir de uma propriedade $\mathcal{P}$ comum a todos os elementos de Y escreve-se $\mathsf{Y} = \{y;\ y \text{ tem a propriedade } \mathcal{P}\}$.

Observe que, em palavras, isto significa que Y é o conjunto de todos os objetos y tais que y possui a propriedade $\mathcal{P}$. O símbolo "; " lê-se como "tal que " ou "tais que ".

Exemplo 2.1.3 $\mathsf{X} = \{x \in \mathbb{N}; x > 4\}$ denota o conjunto de elementos x pertencentes a $\mathbb{N}$ tais que x é maior que 4. Assim, $\mathsf{X} = \{5, 6, 7, ...\}$.

Definição 2.1.2 O conjunto que não possui elementos é chamado de conjunto vazio, e é denotado por $\oslash$ ou $\{\ \}$.

Assim, qualquer que seja x, tem-se que $x \notin \oslash$.

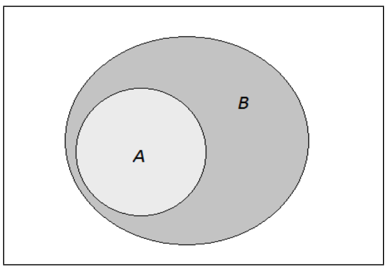
Exemplo 2.1.4 Tem-se que $\mathsf{A} = \{x \in \mathbb{N}; n < x < n+1, n \in \mathbb{N}\} = \oslash$.

Prova: Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n < x < n + 1$.

Por definição, $n < x \Rightarrow \exists\ q \in \mathbb{N}$ tal que $x = n + q$, e $x < n + 1 \Rightarrow \exists\ p \in \mathbb{N}$ tal que $n+1 = x+p$. Logo, $n+1 = (n+q)+p$, daí, $n+1 = n+(q+p)$, portanto, $1 = q+p$. Assim, por definição, $1 > p$ e $1 > q$, o que é contraditório, pois $1 = min\ \mathbb{N}$. Logo, não existe x, e portanto, $\mathsf{A} = \oslash$. ■

Definição 2.1.3 [Relação de Inclusão] Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A é subconjunto de B, ou A está contido em B, e denotamos por $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, quando $\forall\ x \in \mathsf{A}$, tem-se que $x \in \mathsf{B}$.

Figura 2.1: O conjunto A está contido no conjunto B.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.1.5 Se B é o conjunto dos triângulos e A é o conjunto dos triângulos cuja base mede m unidades, tem-se que $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, pois os elementos de A também são triângulos, logo também pertencem a B.

Observe que afirmar que $x \in \mathsf{X}$, equivale a afirmação de que $\{x\} \subset \mathsf{X}$.

Proposição 2.1.1 Tem-se que $\oslash \subset \mathsf{A}$, seja qual for o conjunto A.

Prova: Seja A um conjunto. E Suponha que $\emptyset \not\subset \mathsf{A}$, por definição, existirá um x tal que $x \in \emptyset$ e $x \notin \mathsf{A}$. E isto é contraditório, pois não existe x tal que $x \in \emptyset$. Logo, $\emptyset \subset \mathsf{A}$. ■

Propriedades da relação de inclusão:

(I) Reflexiva: $\mathsf{A} \subset \mathsf{A}$, seja qual for o conjunto A;

Prova: De fato, seja A um conjunto qualquer. $\forall\ x \in \mathsf{A}$, tem-se que $x \in \mathsf{A}$. Logo, pela definição 2.1.3, conclui-se que $\mathsf{A} \subset \mathsf{A}$. ■

(II) Anti-simétrica: se $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$ e $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$, então $\mathsf{A} = \mathsf{B}$;

Prova: Sejam A e B conjuntos tais que $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$ e $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$. Suponha que $\mathsf{A} \neq \mathsf{B}$. Então existe $x \in \mathsf{A}$ tal que $x \notin \mathsf{B}$, ou existe $y \in \mathsf{B}$ tal que $y \notin \mathsf{A}$, isto é, $\mathsf{A} \not\subset \mathsf{B}$ ou $\mathsf{B} \not\subset \mathsf{A}$. O que é contraditório. Logo, $\mathsf{A} = \mathsf{B}$. ■

(III) Transitiva: se $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$ e $\mathsf{B} \subset \mathsf{C}$, então $\mathsf{A} \subset \mathsf{C}$.

Prova: Sejam A, B e C conjuntos tais que $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$ e $\mathsf{B} \subset \mathsf{C}$. Segue-se que $\forall\ x \in \mathsf{A}$ tem-se que $x \in \mathsf{B}$. E, $\forall\ y \in \mathsf{B}$ tem-se que $y \in \mathsf{C}$.

Como $x \in \mathsf{B}$, então tem-se que $x \in \mathsf{C}$. Logo, $\forall\ x \in \mathsf{A}$ tem-se que $x \in \mathsf{C}$. E, pela definição 2.1.3, conclui-se que $\mathsf{A} \subset \mathsf{C}$. ■

Definição 2.1.4 Dado um conjunto X, indica-se com $\mathbb{P}(\mathsf{X})$ o conjunto cujos elementos são partes de X, isto é, subconjuntos de X.

Exemplo 2.1.6 Seja $\mathsf{Y} = \{m, n, o\}$. Os subconjuntos de Y são $\emptyset$, $\{m\}$, $\{n\}$, $\{o\}$, $\{m, n\}$, $\{n, o\}$, $\{m, o\}$ e $\{m, n, o\}$. Portanto, o conjunto das partes do conjunto Y é $\mathbb{P}(\mathsf{Y}) = \{\emptyset, \{m\}, \{n\}, \{o\}, \{m, n\}, \{n, o\}, \{m, o\}, \{m, n, o\}\}$.

Exemplo 2.1.7 Seja $\mathsf{A} = \{1, 2, 3, 4\}$. Os subconjuntos possíveis de A são $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$ e $\{1, 2, 3, 4\}$. Portanto o conjunto de partes do conjunto A é

$$\mathbb{P}(\mathsf{A}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}.$$

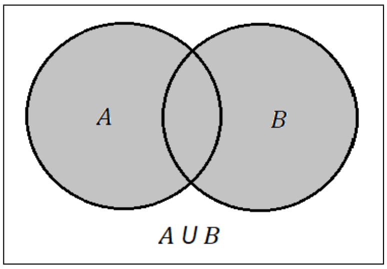
2.2 Operações entre Conjuntos

Definição 2.2.1 [Reunião] Sejam A e B conjuntos. O conjunto dos elementos x tais que $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{B}$, chama-se reunião dos conjuntos A e B, e é denotado por $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

Em símbolos, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} := \{x;\ x \in \mathsf{A} \text{ ou } x \in \mathsf{B}\}$.

Note que, em Matemática a palavra " ou " inclui a possibilidade de ocorrerem ambos os fatos. Ou seja, poderá ocorrer que $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}$, simultaneamente.

Figura 2.2: Reunião dos conjuntos A e B (região em cinza).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 2.2.1 Se A e B são conjuntos quaisquer então $\mathsf{A} \subset \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ e $\mathsf{B} \subset \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

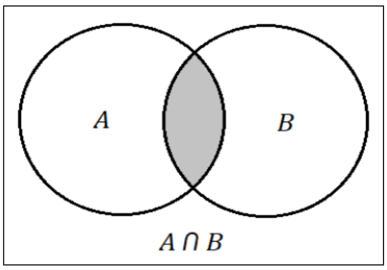
Prova: Se $x \in \mathsf{A}$, então $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{B}$. Logo, $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. Portanto, $\mathsf{A} \subset \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

Se $y \in \mathsf{B}$ então $y \in \mathsf{B}$ ou $y \in \mathsf{A}$. Daí, $y \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. Portanto, $\mathsf{B} \subset \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. ■

Definição 2.2.2 [Interseção] Sejam X e Y conjuntos quaisquer. O conjunto dos elementos comuns a X e Y chama-se interseção dos conjuntos X e Y, e é denotado por $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}$.

Em símbolos, $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} := \{x;\ x \in \mathsf{X} \text{ e } x \in \mathsf{Y}\}$. Deste modo, se $x \in \mathsf{X} \cap \mathsf{Y}$, então $x \in \mathsf{X}$ e $x \in \mathsf{Y}$, simultaneamente.

Figura 2.3: Interseção dos conjuntos A e B (região em cinza).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 2.2.2 Se X e Y são conjuntos quaisquer, então $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$ e $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} \subset \mathsf{Y}$.

Prova: Se $x \in \mathsf{X} \cap \mathsf{Y}$, então, pela definição 2.2.2, tem-se que $x \in \mathsf{X}$ e $x \in \mathsf{Y}$. Daí, $x \in \mathsf{X}$. Portanto, pela definição 2.1.3, conclui-se que $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$.

Se $y \in \mathsf{X} \cap \mathsf{Y}$, então, pela definição 2.2.2, tem-se que $y \in \mathsf{X}$ e $y \in \mathsf{Y}$. Logo, $y \in \mathsf{X}$. Portanto, pela definição 2.1.3, conclui-se que $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} \subset \mathsf{Y}$. ■

Exemplo 2.2.1 Sejam $\mathsf{X} = \{x \in \mathbb{N}; x > 2\}$ e $\mathsf{Y} = \{x \in \mathbb{N}; x \leq 3\}$. Então, tem-se $\mathsf{X} \cup \mathsf{Y} = \{3, 4, 5, ...\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\} = \mathbb{N}$ e $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} = \{3\}$.

Definição 2.2.3 Sejam X e Y conjuntos quaisquer. Diz-se que os conjuntos X e Y são disjuntos se $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} = \oslash$.

Exemplo 2.2.2 Sejam $\mathsf{A} = \{x \in \mathbb{N}; x > 2\}$ e $\mathsf{B} = \{x \in \mathbb{N}; x < 3\}$. Então, tem-se que $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{x \in \mathbb{N}; 2 < x < 3\}$. Segue-se do exemplo 2.1.4 que $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \oslash$. Portanto, os conjuntos A e B são disjuntos.

Principais propriedades das operações de reunião e interseção de conjuntos:

(a.I) $\mathsf{A} \cup \oslash = \mathsf{A}$;

Prova: Se $x \in \mathsf{A} \cup \oslash$, então $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \oslash$. Note que não existe x tal que $x \in \oslash$. Logo, $x \in \mathsf{A}$. Portanto, $\mathsf{A} \cup \oslash \subset \mathsf{A}$.

Por outro lado, se $x \in \mathsf{A}$, então $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \oslash$. Portanto, $x \in \mathsf{A} \cup \oslash$. Logo, $\mathsf{A} \subset \mathsf{A} \cup \oslash$.

E, pela propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos, conclui-se que $\mathsf{A} \cup \oslash = \mathsf{A}$. ■

(a.II) $\mathsf{A} \cup \mathsf{A} = \mathsf{A}$;

Prova: Se $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{A}$, então $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{A}$. Em qualquer caso, $x \in \mathsf{A}$. Logo, $\mathsf{A} \cup \mathsf{A} \subset \mathsf{A}$.

Por outro lado, se $x \in \mathsf{A}$, então $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{A}$. Portanto, $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{A}$. Logo, $\mathsf{A} \subset \mathsf{A} \cup \mathsf{A}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$\mathsf{A} \cup \mathsf{A} = \mathsf{A}$. ■

(a.III) $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{B} \cup \mathsf{A}$;

Prova: Se $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$, então $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{B}$. Portanto, $x \in \mathsf{B}$ ou $x \in \mathsf{A}$. Logo, $x \in \mathsf{B} \cup \mathsf{A}$. Portanto, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \subset \mathsf{B} \cup \mathsf{A}$.

Por outro lado, se $x \in \mathsf{B} \cup \mathsf{A}$, então $x \in \mathsf{B}$ ou $x \in \mathsf{A}$. Logo, $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{B}$.

Portanto, $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. Logo, $\mathsf{B} \cup \mathsf{A} \subset \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

Segue-se que $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{B} \cup \mathsf{A}$. ■

(a.IV) $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cup \mathsf{C} = \mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cup \mathsf{C})$;

Prova: Se $x \in (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cup \mathsf{C}$, então $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ ou $x \in \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{C}$ ou $x \in \mathsf{B}$ ou $x \in \mathsf{C}$. Portanto, $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{B} \cup \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cup \mathsf{C})$. Portanto, $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cup \mathsf{C} \subset \mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cup \mathsf{C})$.

Por outro lado, se $x \in \mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cup \mathsf{C})$, então $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{B} \cup \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{B}$ ou $x \in \mathsf{C}$. Portanto, $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ ou $x \in \mathsf{C}$. Logo, $x \in (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cup \mathsf{C}$. Portanto, $\mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cup \mathsf{C}) \subset (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cup \mathsf{C}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cup \mathsf{C} = \mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cup \mathsf{C})$. ■

(a.V) $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, $\mathsf{A}' \subset \mathsf{B}' \Rightarrow \mathsf{A} \cup \mathsf{A}' \subset \mathsf{B} \cup \mathsf{B}'$;

Prova: Se $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{A}'$, então $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{A}'$. E, por hipótese, se $x \in \mathsf{A}$ então $x \in \mathsf{B}$. E se $x \in \mathsf{A}'$, então $x \in \mathsf{B}'$.

Logo, se $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{A}'$ então $x \in \mathsf{B}$ ou $x \in \mathsf{B}'$. Portanto, $x \in \mathsf{B} \cup \mathsf{B}'$. Logo, $\mathsf{A} \cup \mathsf{A}' \subset \mathsf{B} \cup \mathsf{B}'$. ■

(a.VI) $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$;

Prova: Suponha que $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{A}$. Pela propriedade reflexiva da inclusão de conjuntos tem-se que $\mathsf{A} \subset \mathsf{A}$. Logo, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{A} \subset \mathsf{A}$, isto é, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$. Se $y \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$, então $y \in \mathsf{A}$ ou $y \in \mathsf{B}$.

Caso $y \in \mathsf{B}$, então $y \in \mathsf{A}$, pois $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$. Logo, $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$.

Inversamente, suponha que $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$. Pela propriedade reflexiva, tem-se que $\mathsf{A} \subset \mathsf{A}$. Segue-se da propriedade (a.V) que, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \subset \mathsf{A} \cup \mathsf{A}$. E, pela propriedade (a.II) tem-se que, $\mathsf{A} \cup \mathsf{A} = \mathsf{A}$. Logo, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$

Por outro lado, se $x \in \mathsf{A}$, então $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{B}$. Logo, $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. Portanto, $\mathsf{A} \subset \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{A}$. ■

(a.VII) $\mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{C})$;

Prova: Se $x \in \mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$, então $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{B} \cap \mathsf{C}$.

Se $x \in \mathsf{A}$, então não há restrições para escrever que $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ e que $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{C}$. Portanto, $x \in (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{C})$.

Se $x \in \mathsf{B} \cap \mathsf{C}$, então $x \in \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{C}$ e não há restrições para concluirmos que $x \in \mathsf{B} \cup \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{C} \cup \mathsf{A}$. Pela propriedade (a.III), tem-se que $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{C}$. Logo, $x \in (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{C})$.

Em ambos os casos conclui-se que, $\mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) \subset (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{C})$.

Por outro lado, se $x \in (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{C})$, então $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{C}$.

Se $x \notin \mathsf{A}$ então $x \in \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{B} \cap \mathsf{C}$. E não há restrições para escrever que $x \in (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) \cup \mathsf{A}$. Pela propriedade (a.III) tem-se que $x \in \mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$.

Se $x \in \mathsf{A}$, tem-se que $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{B} \cup \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$.

Em ambos os casos conclui-se que, $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{C}) \subset \mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$\mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{C})$. ■

(b.I) $\mathsf{A} \cap \emptyset = \emptyset$;

Prova: Se $x \in \mathsf{A} \cap \emptyset$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \emptyset$. No entanto, não existe x tal que $x \in \emptyset$. Logo, $\mathsf{A} \cap \emptyset = \emptyset$. ■

(b.II) $\mathsf{A} \cap \mathsf{A} = \mathsf{A}$;

Prova: Se $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{A}$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{A}$. Logo, $x \in \mathsf{A}$. E, portanto, $\mathsf{A} \cap \mathsf{A} \subset \mathsf{A}$.

Reciprocamente, se $x \in \mathsf{A}$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{A}$. Logo, $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{A}$. Portanto, $\mathsf{A} \cap \mathsf{A} \subset \mathsf{A}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$\mathsf{A} \cap \mathsf{A} = \mathsf{A}$. ■

(b.III) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \mathsf{B} \cap \mathsf{A}$;

Prova: Se $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}$. Logo, $x \in \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{A}$. Portanto, $x \in \mathsf{B} \cap \mathsf{A}$. Logo, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \subset \mathsf{B} \cap \mathsf{A}$.

Por outro lado, se $x \in \mathsf{B} \cap \mathsf{A}$, então $x \in \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{A}$. Logo, $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}$. Portanto, $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$. Logo, $\mathsf{B} \cap \mathsf{A} \subset \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$.

Segue-se que, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \mathsf{B} \cap \mathsf{A}$. ■

(b.IV) $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cap \mathsf{C} = \mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$;

Prova: Se $x \in (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cap \mathsf{C}$, então $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{C}$. Portanto, $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B} \cap \mathsf{C})$. Logo, $x \in \mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$. Portanto, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cap \mathsf{C} \subset \mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$.

Por outro lado, se $x \in \mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B} \cap \mathsf{C})$. Logo, $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{C}$. Portanto, $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{C}$. Logo, $x \in (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cap \mathsf{C}$. Portanto, $\mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) \subset (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cap \mathsf{C}$.

Segue-se que, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cap \mathsf{C} = \mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$. ■

(b.V) $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, $\mathsf{A}' \subset \mathsf{B}' \Rightarrow \mathsf{A} \cap \mathsf{A}' \subset \mathsf{B} \cap \mathsf{B}'$;

Prova: Se $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{A}'$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{A}'$.

E, por hipótese, se $x \in \mathsf{A}$, então $x \in \mathsf{B}$, pois $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$. E se $x \in \mathsf{A}'$, então $x \in \mathsf{B}'$, pois $\mathsf{A}' \subset \mathsf{B}'$.

Logo, se $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{A}'$, então $x \in \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{B}'$. Logo, $x \in \mathsf{B} \cap \mathsf{B}'$. Portanto, $\mathsf{A} \cap \mathsf{A}' \subset \mathsf{B} \cap \mathsf{B}'$. ■

(b.VI) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{A} \subset \mathsf{B}$;

Prova: Suponha que $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \mathsf{A}$. Pela propriedade reflexiva da inclusão de conjuntos, tem-se que $\mathsf{A} \subset \mathsf{A}$. Logo, $\mathsf{A} \subset \mathsf{A} = \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, ou seja, $\mathsf{A} \subset \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$.

Se $x \in \mathsf{A}$, então $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$. Logo, $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}$. Em particular, $x \in \mathsf{B}$. Logo, $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$.

Por outro lado, suponha que $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$. Pela propriedade reflexiva da inclusão de conjuntos, tem-se que $\mathsf{A} \subset \mathsf{A}$. Segue-se da propriedade (b.v) que $\mathsf{A} \cap \mathsf{A} \subset \mathsf{B} \cap \mathsf{A}$. E, pela propriedade (b.II), $\mathsf{A} \cap \mathsf{A} = \mathsf{A}$. Logo, $\mathsf{A} \subset \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$.

Por outro lado, se $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}$. Em particular, $x \in \mathsf{A}$. Logo, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$.

Portanto, pela propriedade anti-simétrica, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \mathsf{A}$. ■

(b.VII) $\mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cup \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{C})$.

Prova: Se $x \in \mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cup \mathsf{C})$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B} \cup \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}$ ou $x \in \mathsf{C}$.

Se $x \in \mathsf{B}$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}$. Logo, $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$.

Se $x \in \mathsf{C}$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{C}$. E, portanto, $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{C}$.

Logo, tem-se $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ ou $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{C}$. Então, $x \in (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{C})$. Portanto, $\mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cup \mathsf{C}) \subset (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{C})$.

Por outro lado, se $x \in (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{C})$, então $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ ou $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}$ ou $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}$ ou $x \in \mathsf{C}$. Portanto, $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B} \cup \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cup \mathsf{C})$. Portanto, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{C}) \subset \mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cup \mathsf{C})$.

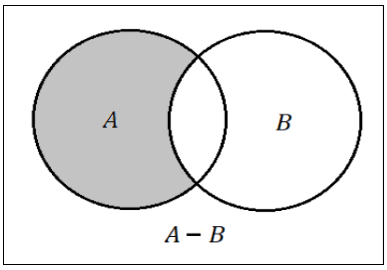
Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$\mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cup \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{C})$. ■

Definição 2.2.4 [Diferença]. Sejam Y e W conjuntos. O conjunto dos elementos x tais que $x \in \mathsf{Y}$ e $x \notin \mathsf{W}$ chama-se diferença entre os conjuntos Y e W, e é denotado por $\mathsf{Y} - \mathsf{W}$.

Em símbolos, $\mathsf{Y} - \mathsf{W} := \{x;\ x \in \mathsf{Y} \text{ e } x \notin \mathsf{W}\}$.

Figura 2.4: Diferença entre os conjuntos A e B (região em cinza).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 2.2.3 Se A e B são conjuntos quaisquer, então $\mathsf{A} - \mathsf{B} = \mathsf{A} - (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$.

Prova: Se $x \in \mathsf{A} - \mathsf{B}$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \notin \mathsf{B}$. E pela proposição 2.2.2, tem-se que $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \subset \mathsf{B}$. Logo, se $x \notin \mathsf{B}$ então $x \notin \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$.

Assim, se $x \in \mathsf{A}$ e $x \notin \mathsf{B}$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \notin \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$. Logo, $x \in \mathsf{A} - (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$. Portanto, $\mathsf{A} - \mathsf{B} \subset \mathsf{A} - (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$.

Por outro lado, se $x \in \mathsf{A} - (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \notin \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$.

Observe que se $x \notin \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, então $x \notin \mathsf{A}$ ou $x \notin \mathsf{B}$. Como, por hipótese, $x \in \mathsf{A}$, conclui-se que $x \notin \mathsf{B}$.

Assim, se $x \in \mathsf{A}$ e $x \notin \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \notin \mathsf{B}$. Logo, $x \in \mathsf{A} - \mathsf{B}$. Portanto, $\mathsf{A} - (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \subset \mathsf{A} - \mathsf{B}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$\mathsf{A} - \mathsf{B} = \mathsf{A} - (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$. ■

Corolário 2.2.1 Se Y e W são conjuntos disjuntos quaisquer, então $\mathsf{Y} - \mathsf{W} = \mathsf{Y}$.

Prova: Pela proposição 2.2.3, tem-se que $\mathsf{Y} - \mathsf{W} = \mathsf{Y} - (\mathsf{Y} \cap \mathsf{W})$. E, por hipótese, Y e W são disjuntos. Logo, por definição, $\mathsf{Y} \cap \mathsf{W} = \oslash$. Portanto, tem-se que $\mathsf{Y} - (\mathsf{Y} \cap \mathsf{W}) = \mathsf{Y} - \oslash$

Por outro lado, se $x \in \mathsf{Y} - \oslash$ então $x \in \mathsf{Y}$ e $x \in \oslash$.

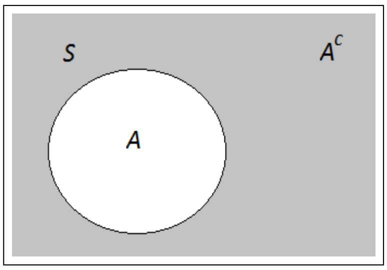
Defina o conjunto $\mathsf{A} = \{x;\ x \notin \oslash\}$. Note que se $x \notin \oslash$ então $x \in \mathsf{A}$. Logo, se $x \in \mathsf{Y}$ e $x \notin \oslash$, então $x \in \mathsf{Y}$ e $x \in \mathsf{A}$. E, portanto, $x \in \mathsf{Y} \cap \mathsf{A}$. Assim, definimos, $\mathsf{Y} - \oslash = \mathsf{Y} \cap \mathsf{A}$.

Observe que para todo $y \in \mathsf{Y}$, tem-se, por definição de conjunto vazio, que $y \notin \oslash$. Logo, $y \in \mathsf{A}$ e portanto, $\mathsf{Y} \subset \mathsf{A}$.

Segue-se da propriedade (b.VI) que $\mathsf{Y} \cap \mathsf{A} = \mathsf{Y}$. Logo, $\mathsf{Y} - \mathsf{W} = \mathsf{Y}$. ■

Definição 2.2.5 Sejam X e Y conjuntos tais que $\mathsf{X} \subset \mathsf{Y}$. A diferença $\mathsf{Y} - \mathsf{X}$, chama-se conjunto complementar de X em relação a Y e denota-se por X^{C}.

Figura 2.5: Complementar de A em relação ao conjunto S (região em cinza).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em símbolos, se $\mathsf{X} \subset \mathsf{Y}$ tem-se $\mathsf{X}^{\mathsf{C}} = \mathsf{Y} - \mathsf{X}$.

Portanto, quando estivermos realizando operações apenas entre subconjuntos de um determinado conjunto E que, em geral, chama-se de conjunto básico ou conjunto universo, então tem-se que $\mathsf{X}^{\mathsf{C}} = \mathsf{E} - \mathsf{X}$, sendo X um subconjunto qualquer de E.

Proposição 2.2.4 Tem-se que $x \in \mathsf{X}^{\mathsf{C}}$ se, e somente se, $x \notin \mathsf{X}$.

Prova: Seja X um subconjunto do conjunto básico E. Se $x \in \mathsf{X}^{\mathsf{C}}$, então $x \in \mathsf{E} - \mathsf{X}$. Logo, $x \in \mathsf{E}$ e $x \notin \mathsf{X}$, e portanto, $x \notin \mathsf{X}$.

Inversamente, se $x \notin \mathsf{X}$, então $x \in \mathsf{E}$ e $x \notin \mathsf{X}$. Logo, $x \in \mathsf{E} - \mathsf{X} = \mathsf{X}^{\mathsf{C}}$. ■

Exemplo 2.2.3 Sejam $\mathsf{A} = \{x \in \mathbb{Z}; x \geqslant -4\}$ e $\mathsf{B} = \{x \in \mathbb{Z}; x \leqslant 5\}$. Determinar os conjuntos $\mathsf{B} - \mathsf{A}$ e $\mathsf{A} - \mathsf{B}$ e o complementar de A e de B, em relação ao conjunto básico $\mathbb{Z}$.

Solução: Tem-se que, $\mathsf{B} - \mathsf{A} = \{..., -7, -6, -5\} = \{x \in \mathbb{Z}; x \leqslant -5\}$ e

$\mathsf{A} - \mathsf{B} = \{6, 7, 8, ...\} = \{x \in \mathbb{Z}; x \geqslant 6\}$.

$\mathsf{A}^\mathsf{C} = \mathbb{Z} - \mathsf{A} = \{..., -7, -6, -5\} = \{x \in \mathbb{Z}; x < -4\}$ e

$\mathsf{B}^\mathsf{C} = \mathbb{Z} - \mathsf{B} = \{6, 7, 8, ...\} = \{x \in \mathbb{Z}; x > 5\}$.

Corolário 2.2.2 Se A e B são subconjuntos de um conjunto básico E, então $\mathsf{A} - \mathsf{B} = \mathsf{A} \cap \mathsf{B}^\mathsf{C}$.

Prova: Se $x \in \mathsf{A} - \mathsf{B}$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \notin \mathsf{B}$. Pela proposição 2.2.4, conclui-se que se $x \notin \mathsf{B}$ então $x \in \mathsf{B}^\mathsf{C}$.

Portanto, se $x \in \mathsf{A}$ e $x \notin \mathsf{B}$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}^\mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}^\mathsf{C}$. Assim, $\mathsf{A} - \mathsf{B} \subset \mathsf{A} \cap \mathsf{B}^\mathsf{C}$.

Por outro lado, se $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}^\mathsf{C}$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}^\mathsf{C}$.

Pela proposição 2.2.4, conclui-se que se $x \in \mathsf{B}^\mathsf{C}$, então $x \notin \mathsf{B}$.

Portanto, se $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}^\mathsf{C}$, então $x \in \mathsf{A}$ e $x \notin \mathsf{B}$. Logo, $x \in \mathsf{A} - \mathsf{B}$. Desse modo, tem-se que $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^\mathsf{C} \subset \mathsf{A} - \mathsf{B}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$\mathsf{A} - \mathsf{B} = \mathsf{A} \cap \mathsf{B}^\mathsf{C}$. ■

Principais propriedades relacionadas a complementares de conjuntos:

(c.I) $(\mathsf{A}^\mathsf{C})^\mathsf{C} = \mathsf{A}$;

Prova: Se $x \in (\mathsf{A}^\mathsf{C})^\mathsf{C}$, então, pela proposição 2.2.4, conclui-se que $x \notin \mathsf{A}^\mathsf{C}$, e novamente que $x \in \mathsf{A}$. Logo, $(\mathsf{A}^\mathsf{C})^\mathsf{C} \subset \mathsf{A}$.

Por outro lado, se $x \in \mathsf{A}$, conclui-se, pela proposição 2.2.4 que $x \notin \mathsf{A}^\mathsf{C}$, e novamente que $x \in (\mathsf{A}^\mathsf{C})^\mathsf{C}$. Portanto, $\mathsf{A} \subset (\mathsf{A}^\mathsf{C})^\mathsf{C}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$(\mathsf{A}^\mathsf{C})^\mathsf{C} = \mathsf{A}$. ■

(c.II) $\mathsf{A} \subset \mathsf{B} \Leftrightarrow \mathsf{B}^\mathsf{C} \subset \mathsf{A}^\mathsf{C}$;

Prova: Suponha que $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$. Se $x \in \mathsf{B}^\mathsf{C}$, então, pela proposição 2.2.4, conclui-se que $x \notin \mathsf{B}$. Como, por hipótese, A é subconjunto de B, então $x \notin \mathsf{A}$. E, novamente, pela proposição 2.2.4, tem-se que $x \in \mathsf{A}^\mathsf{C}$. Portanto, $\mathsf{B}^\mathsf{C} \subset \mathsf{A}^\mathsf{C}$.

Inversamente, suponha que $\mathsf{B}^\mathsf{C} \subset \mathsf{A}^\mathsf{C}$. Se $x \in \mathsf{A}$, então, pela propriedade (c.I), tem-se que $x \in (\mathsf{A^C})^\mathsf{C}$. E, pela proposição 2.2.4, conclui-se que $x \notin \mathsf{A^C}$. Como, por hipótese, $\mathsf{B^C}$ é subconjunto de $\mathsf{A^C}$, então $x \notin \mathsf{B^C}$. Logo, pela proposição 2.2.4, $x \in (\mathsf{B^C})^\mathsf{C}$. E, pela propriedade (c.I), $(\mathsf{B^C})^\mathsf{C} = \mathsf{B}$. Logo, $x \in \mathsf{B}$, e portanto, $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$. ■

(c.III) $\mathsf{A} = \varnothing \Leftrightarrow \mathsf{A^C} = \mathsf{E}$;

Prova: Suponha que $\mathsf{A} = \varnothing$. Por definição, $\mathsf{A^C} = \mathsf{E} - \mathsf{A}$. Logo, $\mathsf{E} - \mathsf{A} = \mathsf{E} - \varnothing$.

Se $x \in \mathsf{E} - \varnothing$, então $x \in \mathsf{E}$ e $x \notin \varnothing$.

Defina o conjunto $\mathsf{W} = \{x;\ x \notin \varnothing\}$. Observe que se $x \notin \varnothing$, então $x \in \mathsf{W}$. Logo, se $x \in \mathsf{E}$ e $x \notin \varnothing$, então $x \in \mathsf{E}$ e $x \in \mathsf{W}$. E, portanto, $x \in \mathsf{E} \cap \mathsf{W}$. Deste modo, definimos $\mathsf{E} - \varnothing = \mathsf{E} \cap \mathsf{W}$.

Se $y \in \mathsf{E}$, tem-se pela definição de conjunto vazio que $y \notin \varnothing$. Logo, $y \in \mathsf{W}$. Daí, $\mathsf{E} \subset \mathsf{W}$.

Segue-se da propriedade (b.VI) que $\mathsf{E} \cap \mathsf{W} = \mathsf{E}$. Logo, $\mathsf{A^C} = \mathsf{E}$.

Inversamente, suponha que $\mathsf{A^C} = \mathsf{E}$. Pela definição 2.2.5, tem-se que

$\mathsf{A^C} = \mathsf{E} - \mathsf{A}$. Logo, $\mathsf{E} - \mathsf{A} = \mathsf{E}$.

Suponha que $\mathsf{A} \neq \varnothing$. Então, existe $y \in \mathsf{A}$ tal que $y \in \mathsf{E}$, pois $\mathsf{A} \subset \mathsf{E}$. Portanto, $y \notin \mathsf{E} - \mathsf{A}$. Logo, como $y \in \mathsf{E}$ e $y \notin \mathsf{E} - \mathsf{A}$, conclui-se que $\mathsf{E} \neq \mathsf{E} - \mathsf{A}$, o que é contraditório. Logo, $\mathsf{A} = \varnothing$. ■

(c.IV) $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})^\mathsf{C} = \mathsf{A^C} \cap \mathsf{B^C}$;

Prova: Se $x \in (\mathsf{A} \cup \mathsf{B})^\mathsf{C}$, então, pela proposição 2.2.4, tem-se que $x \notin \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. Logo, $x \notin \mathsf{A}$ e $x \notin \mathsf{B}$. E, pela proposição 2.2.4, conclui-se que $x \in \mathsf{A^C}$ e $x \in \mathsf{B^C}$. Logo, $x \in \mathsf{A^C} \cap \mathsf{B^C}$. Portanto, $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})^\mathsf{C} \subset \mathsf{A^C} \cap \mathsf{B^C}$

Por outro lado, se $x \in \mathsf{A^C} \cap \mathsf{B^C}$, então $x \in \mathsf{A^C}$ e $x \in \mathsf{B^C}$. Pela proposição 2.2.4, conclui-se que $x \notin \mathsf{A}$ e $x \notin \mathsf{B}$. Logo, $x \notin \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ e pela proposição 2.2.4, conclui-se que $x \in (\mathsf{A} \cup \mathsf{B})^\mathsf{C}$. Logo, $\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B^C} \subset (\mathsf{A} \cup \mathsf{B})^\mathsf{C}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})^\mathsf{C} = \mathsf{A^C} \cap \mathsf{B^C}$. ■

(c.V) $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})^\mathsf{C} = \mathsf{A^C} \cup \mathsf{B^C}$.

Prova: Se $x \in (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})^\mathsf{C}$, então, pela proposição 2.2.4, tem-se que $x \notin \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$. Logo, $x \notin \mathsf{A}$ ou $x \notin \mathsf{B}$. E, pela proposição 2.2.4, conclui-se que $x \in \mathsf{A^C}$ ou $x \in \mathsf{B^C}$. Logo, $x \in \mathsf{A^C} \cup \mathsf{B^C}$.

Portanto, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})^{\mathsf{C}} \subset \mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cup \mathsf{B}^{\mathsf{C}}$.

Por outro lado, se $x \in \mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cup \mathsf{B}^{\mathsf{C}}$, então $x \in \mathsf{A}^{\mathsf{C}}$ ou $x \in \mathsf{B}^{\mathsf{C}}$. E, pela proposição 2.2.4, tem-se que $x \notin \mathsf{A}$ ou $x \notin \mathsf{B}$. Logo, $x \notin \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, e novamente, pela proposição 2.2.4, tem-se que $x \in (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})^{\mathsf{C}}$. Logo, $\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cup \mathsf{B}^{\mathsf{C}} \subset (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})^{\mathsf{C}}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})^{\mathsf{C}} = \mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cup \mathsf{B}^{\mathsf{C}}$. ■

2.3 Produto Cartesiano

Definição 2.3.1 Dados dois objetos quaisquer a e b. A linha (a, b) denomina-se par ordenado, cuja primeira coordenada é o objeto a e a segunda coordenada é o objeto b.

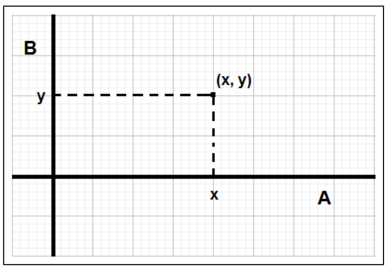
Deste modo, dois pares ordenados (a, b) e (x, y) serão iguais quando os objetos das respectivas coordenadas forem iguais.

Em símbolos, $(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow a = x$ e $b = y$.

Definição 2.3.2 Sejam A e B conjuntos. O conjunto dos pares ordenados (x, y) tais que $x \in \mathsf{A}$ e $y \in \mathsf{B}$, chama-se produto cartesiano e é denotado por $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$.

Em símbolos, $\mathsf{A} \times \mathsf{B} = \{(x, y);\ x \in \mathsf{A} \text{ e } y \in \mathsf{B}\}$.

Figura 2.6: Produto cartesiano dos conjuntos A e B representados pelos eixos horizontal e vertical, respectivamente, e o par ordenado (x, y).



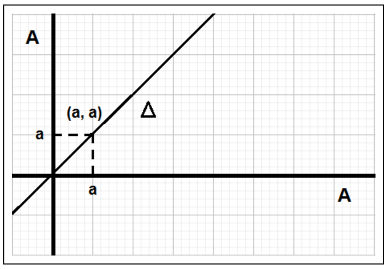
Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que se $\mathsf{A} = \mathsf{B}$, o produto cartesiano $\mathsf{A} \times \mathsf{B} = \mathsf{A} \times \mathsf{A}$, também é denotado por $\mathsf{A}^2 = \{(x, y);\ x \in \mathsf{A} \text{ e } y \in \mathsf{A}\}$.

Definição 2.3.3 O subconjunto $\Delta \subset \mathsf{A} \times \mathsf{A}$ dos pares (a, a) tais que $a \in \mathsf{A}$, chama-se diagonal de A^2.

Em símbolos, $\Delta = \{(a, a);\ a \in \mathsf{A}\}$.

Figura 2.7: Representação do produto cartesiano A^2 e do subconjunto Δ.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.3.1 Sejam $\mathsf{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathsf{Y} = \{a, b\}$. Então, tem-se que

$\mathsf{X} \times \mathsf{Y} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b), (4, a), (4, b)\}$.

2.4 Funções

Definição 2.4.1 Sejam A e B conjuntos. Chama-se função de A em B, uma regra que a cada elemento de A associa um único elemento de B.

Uma função f do conjunto A no conjunto B, denota-se por $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ e $x \mapsto f(x)$, onde A é o conjunto de partida ou domínio da função f, denotado por $\mathsf{D_f}$, B é o conjunto de chegada ou contradomínio da função f, denotado por $\mathsf{CD_f}$ e $f(x) \in \mathsf{B}$ é o valor assumido pela função f em $x \in \mathsf{A}$.

Em símbolos, $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ é função se, dados m_1, $m_2 \in \mathsf{A}$, tem-se que

$m_1 = m_2 \Rightarrow f(m_1) = f(m_2)$, ou equivalentemente, $f(m_1) \neq f(m_2) \Rightarrow m_1 \neq m_2$.

Definição 2.4.2 Sejam $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ uma função e X um subconjunto de A. Chama-se imagem de X pela função f, o conjunto $\mathsf{f(X)} = \{f(x);\ x \in \mathsf{X}\}$.

Denota-se por $\mathsf{Im_f}$, o conjunto $\mathsf{f(A)} = \{f(x);\ x \in \mathsf{A}\}$, que chama-se conjunto imagem da função f.

É necessário observar os seguintes aspectos para a definição de um função $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$:

(I) A regra que associa $x \in \mathsf{A}$ a $f(x) \in \mathsf{B}$ deve fornecer um valor $f(x)$ para todo $x \in \mathsf{A}$.

(II) Cada $x \in \mathsf{A}$ deve corresponder a um valor $f(x)$ único em B.

Definição 2.4.3 Sejam $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ e $g : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ funções, tem-se que $f = g$ se, e somente se $\mathsf{A} = \mathsf{X}$, $\mathsf{B} = \mathsf{Y}$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathsf{A}$.

Em outras palavras, duas funções são iguais quando têm o mesmo domínio, contradomínio e a mesma regra de correspondência entre seus elementos.

Exemplo 2.4.1 Seja P, o conjunto dos polígonos do plano. É possível definir uma função $f : \mathsf{P} \to \mathbb{R}$, que associa cada polígono $x \in \mathsf{P}$ sua área $f(x) \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.4.2 Seja $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ uma regra que a cada $x \in \mathbb{Q}$ associa $f(x) \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$, ou de forma equivalente, $x.f(x) = 1$.

Esta regra não define uma função, pois $0 \in \mathbb{Q}$ e não existe $f(0) = y$ tal que $0.f(0) = 1 \;\Leftrightarrow\; 0.y = 1$.

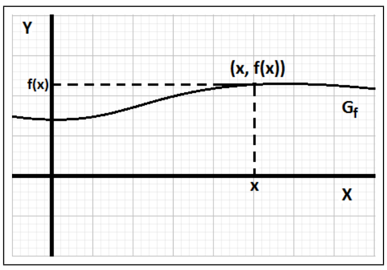
Exemplo 2.4.3 Sejam S o conjunto dos retângulos e $f : \mathbb{R}^+ \to \mathsf{S}$ a função que a cada $x \in \mathbb{R}^+$ faz corresponder o retângulo $f(x) \in \mathsf{S}$, cuja área é x.

Esta regra não pode definir uma função, pois há mais de um retângulo cuja área é x, sendo contraditório à definição de função.

Definição 2.4.4 Seja $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função. O subconjunto do produto cartesiano $\mathsf{X} \times \mathsf{Y}$ cujos elementos são os pares ordenados $(x, f(x))$, onde $x \in \mathsf{X}$ e $f(x) \in \mathsf{Y}$, chama-se gráfico da função f, e é denotado por $\mathsf{G_f}$.

Em símbolos, $\mathsf{G_f} = \{(x, y) \in \mathsf{X} \times \mathsf{Y};\; y = f(x)\}$.

Figura 2.8: Gráfico de uma função f (curva).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que $\mathsf{G_f}$ fica definido quando a função f está definida, isto é, quando f possui domínio, contradomínio e uma regra de correspondência entre esse conjuntos.

Logo, se duas funções possuem o mesmo gráfico, então pela definição 2.4.3, serão iguais.

Definição 2.4.5 Uma função $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ chama-se injetiva, quando dados x, $y \in \mathsf{A}$, tem-se que $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.

Em símbolos, uma função $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ é injetiva se dados x, $y \in \mathsf{A}$, tem-se que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, ou equivalentemente, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Definição 2.4.6 Uma função $f : \mathsf{Y} \to \mathsf{W}$ chama-se sobrejetiva se, para todo $y \in \mathsf{W}$ existe $x \in \mathsf{Y}$ tal que $f(x) = y$.

Em símbolos, uma função $f : \mathsf{Y} \to \mathsf{W}$ é sobrejetiva se $\forall y \in \mathsf{W}\ \exists x \in \mathsf{Y}$ tal que $f(x) = y$. Ou ainda, se $\mathsf{Im_f} = \mathsf{CD_f}$.

Exemplo 2.4.4 As projeções, $\pi_1 : \mathsf{A} \times \mathsf{B} \to \mathsf{A}$ definida por $\pi_1(a,b) = a$ e $\pi_2 : \mathsf{A} \times \mathsf{B} \to \mathsf{B}$ definida por $\pi_2(a,b) = b$ são funções sobrejetivas.

Exemplo 2.4.5 A inclusão $i : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ é uma função injetiva, definida quando A é um subconjunto de B pela regra $i(x) = x$ para todo $x \in \mathsf{A}$.

Exemplo 2.4.6 Seja $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função definida pela regra $g(x) = 3x + 1$. Verificar a injetividade e a sobrejetividade da g.

Solução: Sejam x_1, $x_2 \in \mathsf{D_f} = \mathbb{Z}$. Tem-se que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3.x_1 + 1 = 3.x_2 + 1 \Rightarrow 3.x_1 = 3.x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Logo, por definição g é injetiva.

Seja $y \in \mathsf{CD_f} = \mathbb{Z}$, deve-se verificar a existência de $x \in \mathbb{Z}$ tal que $g(x) = y$.

Tem-se que $f(x) = y \Rightarrow 3.x + 1 = y \Rightarrow 3.x = y - 1 \Rightarrow x = \dfrac{y-1}{3}$. E observe que, por contra-exemplo, se $y = 0$ então $x = \dfrac{-1}{3}$, e $\dfrac{-1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Logo, para $y = 0$ não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = y$. Portanto, g não é sobrejetiva.

Exemplo 2.4.7 Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função definida pela regra $f(x) = x^2$. Verificar se f é injetiva e se f é sobrejetiva.

Solução: Sejam x_1, $x_2 \in \mathsf{D_f} = \mathbb{Z}$. Tem-se que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm|x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$.

Em particular, se $x_1 = -x_2$ então $x_1 \neq x_2$. Logo, f não é injetiva.

Seja $y \in \mathsf{CD_f} = \mathbb{Z}$, deve-se verificar a existência de $x \in \mathsf{D_f} = \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = y$.

Tem-se que $f(x) = y \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y} \Rightarrow |x| = \sqrt{y} \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$.

Observe que, por contra-exemplo, se $y < 0$ então $x \notin \mathbb{Z} = \mathsf{D_f}$.

Logo, para $y < 0$, $y \in \mathbb{Z}$, não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = y$. Logo f não é sobrejetiva.

Definição 2.4.7 Uma função $f : \mathsf{W} \to \mathsf{Y}$ chama-se bijetiva ou bijeção (ou correspondência biunívoca) se f for injetiva e sobrejetiva.

Exemplo 2.4.8 Sejam a, $b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Mostrar que a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida pela regra $f(x) = a.x + b$ é bijetiva.

Prova: Sejam x_1, $x_2 \in \mathsf{D_f} = \mathbb{Q}$. Tem-se que $f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; a.x_1 + b = a.x_2 + b \;\Rightarrow\; a.x_1 = a.x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$. Logo, por definição, f é injetiva.

Seja $y \in \mathsf{CD_f} = \mathbb{Q}$ tal que $y = f(x)$. Tem-se que $y = f(x) \;\Rightarrow\; y = a.x + b \;\Rightarrow\; a.x = y - b \;\Rightarrow\; x = \frac{y-b}{a} \;\Rightarrow\; \forall y \in \mathbb{Q}$, tem-se que $x \in \mathbb{Q}$. Logo f é sobrejetiva.

Portanto, por definição, f é bijetiva. ■

Sejam $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função, A e B subconjuntos de X. São válidas as seguintes propriedades:

(d.I) $f(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = f(\mathsf{A}) \cup f(\mathsf{B})$;

Prova: Se $y \in f(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})$, então existe $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ tal que $f(x) = y$. Logo, $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{B}$ tal que $y = f(x)$, portanto $y \in f(\mathsf{A})$ ou $y \in f(\mathsf{B})$. Logo, $y \in f(\mathsf{A}) \cup f(\mathsf{B})$. E, $f(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \subset f(\mathsf{A}) \cup f(\mathsf{B})$.

Por outro lado, se $z \in f(\mathsf{A}) \cup f(\mathsf{B})$, então $z \in f(\mathsf{A})$ ou $z \in f(\mathsf{B})$. Logo, existe $w \in \mathsf{A}$ tal que $f(w) = z$ ou existe $k \in \mathsf{B}$ tal que $f(k) = z$.

Em qualquer dos casos, existe $c \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ tal que $f(c) = z$. Logo, $z \in f(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})$. Portanto, $f(\mathsf{A}) \cup f(\mathsf{B}) \subset f(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$f(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = f(\mathsf{A}) \cup f(\mathsf{B})$. ■

(d.II) $f(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \subset f(\mathsf{A}) \cap f(\mathsf{B})$;

Prova: Se $w \in f(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$, então existe $z \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ tal que $f(z) = w$. Logo, existe $z \in \mathsf{A}$ tal que $f(z) = w$ e existe $z \in \mathsf{B}$ tal que $f(z) = w$. Portanto, $w \in f(\mathsf{A})$ e $w \in f(\mathsf{B})$. Logo, $w \in f(\mathsf{A}) \cap f(\mathsf{B})$. E, portanto, $f(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \subset f(\mathsf{A}) \cap f(\mathsf{B})$. ■

(d.III) $\mathsf{A} \subset \mathsf{B} \Rightarrow f(\mathsf{A}) \subset f(\mathsf{B})$;

Prova: Se $y \in f(\mathsf{A})$, então existe $x \in \mathsf{A}$ tal que $f(x) = y$. Como, por hipótese, $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, então tem-se que $x \in \mathsf{B}$. Logo, existe $x \in \mathsf{B}$ tal que $f(x) = y$. Portanto, $x \in f(\mathsf{B})$.

Logo, $f(\mathsf{A}) \subset f(\mathsf{B})$. ■

(d.IV) $f(\oslash) = \oslash$.

Prova: Se $y \in f(\oslash)$, então existe $x \in \oslash$ tal que $f(x) = y$. Mas, por definição não existe x tal que $x \in \oslash$. Logo, não existe y tal que $y \in f(\oslash)$. Portanto, $f(\oslash) = \oslash$. ■

Exemplo 2.4.9 Seja $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função com $\mathsf{A} \subset \mathsf{X}$ e $\mathsf{B} \subset \mathsf{X}$. Provar que f é injetiva se, e somente se $f(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = f(\mathsf{A}) \cap f(\mathsf{B})$.

Prova: Suponha que f é uma função injetiva. Se $y \in f(\mathsf{A}) \cap f(\mathsf{B})$ então $y \in f(\mathsf{A})$ e $y \in f(\mathsf{B})$. Logo, existe $w \in \mathsf{A}$ tal que $f(w) = y$ e existe $k \in \mathsf{B}$ tal que $f(k) = y$.

Logo, $y = f(w) = f(k)$ e pelo fato de f ser injetiva, tem-se, pela definição 2.4.5, que $w = k$.

Portanto, existe $w \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ tal que $f(w) = y$. Logo, $y \in f(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$. Conclui-se, portanto, que $f(\mathsf{A}) \cap f(\mathsf{B}) \subset f(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$.

Segue-se da propriedade (d.II) e da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que $f(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = f(\mathsf{A}) \cap f(\mathsf{B})$.

Por outro lado, suponha que $f(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = f(\mathsf{A}) \cap f(\mathsf{B})$. Se a função f não for injetiva, então existem x_1, $x_2 \in \mathsf{X}$ tais que $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2) = y$.

Observe que se $\mathsf{A} = \{x_1\}$ e $\mathsf{B} = \{x_2\}$. Então, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \oslash$ e , pela propriedade (d.IV) tem-se que $f(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = f(\oslash) = \oslash$. No entanto, $f(\mathsf{A}) \cap f(\mathsf{B}) = \{y\} \cap \{y\} = \{y\}$.

Logo, neste caso, $f(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \neq f(\mathsf{A}) \cap f(\mathsf{B})$. O que é contraditório. Logo, f é injetiva. ■

2.5 Operações com Funções

Definição 2.5.1 Sejam $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função e B um subconjunto de Y. O conjunto dos elementos $x \in \mathsf{A}$ tais que $f(x) \in \mathsf{B}$, chama-se imagem inversa de B pela função f e denota-se por $f^{-1}(\mathsf{B})$.

Em símbolos, $f^{-1}(\mathsf{B}) = \{x \in \mathsf{X};\ f(x) \in \mathsf{B}\}$. Observe que se $\mathsf{B} = \{y\}$, denota-se $f(\mathsf{B})$ por $f(y)$.

Exemplo 2.5.1 Seja $\mathsf{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida pela regra $g(x,y) = x^2 + y^2$. Observe que $g^{-1}(1) = \mathsf{C}$.

Exemplo 2.5.2 Seja $\mathsf{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a.x + b.y = c\}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida pela regra $f(x,y) = a.x + b.y$. Então tem-se que $f^{-1}(c) = \mathsf{X}$.

Se $g : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ é uma função e Y e W subconjuntos de B. Então são válidas as seguintes propriedades:

(e.I) $g^{-1}(\mathsf{Y} \cup \mathsf{W}) = g^{-1}(\mathsf{Y}) \cup g^{-1}(\mathsf{W})$;

Prova: Se $x \in g^{-1}(\mathsf{Y} \cup \mathsf{W})$, então $g(x) \in \mathsf{Y} \cup \mathsf{W}$. Logo, $g(x) \in \mathsf{Y}$ ou $g(x) \in \mathsf{W}$. Portanto, $x \in g^{-1}(\mathsf{Y})$ ou $x \in g^{-1}(\mathsf{W})$. Consequentemente, $x \in g^{-1}(\mathsf{Y}) \cup g^{-1}(\mathsf{W})$. Logo, $g^{-1}(\mathsf{Y} \cup \mathsf{W}) \subset g^{-1}(\mathsf{Y}) \cup g^{-1}(\mathsf{W})$.

Por outro lado, se $x \in g^{-1}(\mathsf{Y}) \cup g^{-1}(\mathsf{W})$, então $x \in g^{-1}(\mathsf{Y})$ ou $x \in g^{-1}(\mathsf{W})$. Logo, $g(x) \in \mathsf{Y}$ ou $g(x) \in \mathsf{W}$. Consequentemente, $g(x) \in \mathsf{Y} \cup \mathsf{W}$. Logo, $x \in g^{-1}(\mathsf{Y} \cup \mathsf{W})$. Portanto, $g^{-1}(\mathsf{Y}) \cup g^{-1}(\mathsf{W}) \subset g^{-1}(\mathsf{Y} \cup \mathsf{W})$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$g^{-1}(\mathsf{Y} \cup \mathsf{W}) = g^{-1}(\mathsf{Y}) \cup g^{-1}(\mathsf{W})$. ■

(e.II) $g^{-1}(\mathsf{Y} \cap \mathsf{W}) = g^{-1}(\mathsf{Y}) \cap g^{-1}(\mathsf{W})$;

Prova: Se $x \in g^{-1}(\mathsf{Y} \cap \mathsf{W})$, então $g(x) \in \mathsf{Y} \cap \mathsf{W}$. Logo, $g(x) \in \mathsf{Y}$ e $g(x) \in \mathsf{W}$. Consequentemente, $x \in g^{-1}(\mathsf{Y})$ e $x \in g^{-1}(\mathsf{W})$. Portanto, $x \in g^{-1}(\mathsf{Y}) \cap g^{-1}(\mathsf{W})$. Logo, $g^{-1}(\mathsf{Y} \cap \mathsf{W}) \subset g^{-1}(\mathsf{Y}) \cap g^{-1}(\mathsf{W})$.

Por outro lado, se $x \in g^{-1}(\mathsf{Y}) \cap g^{-1}(\mathsf{W})$ então, $x \in g^{-1}(\mathsf{Y})$ e $x \in g^{-1}(\mathsf{W})$. Logo, $g(x) \in \mathsf{Y}$ e $g(x) \in \mathsf{W}$. Consequentemente, $g(x) \in \mathsf{Y} \cap \mathsf{W}$. Portanto, $x \in g^{-1}(\mathsf{Y} \cap \mathsf{W})$. Logo, $g^{-1}(\mathsf{Y}) \cap g^{-1}(\mathsf{W}) \subset g^{-1}(\mathsf{Y} \cap \mathsf{W})$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$g^{-1}(\mathsf{Y} \cap \mathsf{W}) = g^{-1}(\mathsf{Y}) \cap g^{-1}(\mathsf{W})$. ■

(e.III) $g^{-1}(\mathsf{Y}^{\mathsf{C}}) = (g^{-1}(\mathsf{Y}))^C$;

Prova: Se $x \in g^{-1}(\mathsf{Y}^{\mathsf{C}})$, então $g(x) \in \mathsf{Y}^{\mathsf{C}}$. Logo, pela proposição 2.2.4, tem-se que

$g(x) \notin \mathsf{Y}$. Portanto, $x \notin g^{-1}(\mathsf{Y})$, e novamente, pela proposição 2.2.4, tem-se que

$x \in (g^{-1}(\mathsf{Y}))^C$. Logo, $g^{-1}(\mathsf{Y}^{\mathsf{C}}) \subset (g^{-1}(\mathsf{Y}))^C$.

Por outro lado, se $x \in (g^{-1}(\mathsf{Y}))^C$, então, pela proposição 2.2.4, tem-se que

$x \notin g^{-1}(\mathsf{Y})$. Logo, $g(x) \notin \mathsf{Y}$ e novamente pela proposição 2.2.4, tem-se que $g(x) \in \mathsf{Y}^{\mathsf{C}}$. Portanto, $x \in g^{-1}(\mathsf{Y}^{\mathsf{C}})$. Logo, $(g^{-1}(\mathsf{Y}))^C \subset g^{-1}(\mathsf{Y}^{\mathsf{C}})$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$g^{-1}(\mathsf{Y}^{\mathsf{C}}) = (g^{-1}(\mathsf{Y}))^C$. ■

(e.IV) $\mathsf{Y} \subset \mathsf{W} \Rightarrow g^{-1}(\mathsf{Y}) \subset g^{-1}(\mathsf{W})$;

Prova: Se $x \in g^{-1}(\mathsf{Y})$, então $g(x) \in \mathsf{Y}$. E, por hipótese, $\mathsf{Y} \subset \mathsf{W}$. Logo, $g(x) \in \mathsf{W}$ e , consequentemente, $x \in g^{-1}(\mathsf{Y})$. Portanto, $g^{-1}(\mathsf{Y}) \subset g^{-1}(\mathsf{W})$. ■

(e.V) $g^{-1}(\mathsf{B}) = \mathsf{A}$;

Prova: Se $x \in g^{-1}(\mathsf{B})$, então $g(x) \in \mathsf{B}$. Logo, $x \in \mathsf{A}$. Portanto, $g^{-1}(\mathsf{B}) \subset \mathsf{A}$.

Por outro lado, se $x \in \mathsf{A}$ então, pelo fato de g ser função, tem-se que existe $y \in \mathsf{B}$ tal que $g(x) = y$. Logo, $g(x) \in \mathsf{B}$ e, portanto, $x \in g^{-1}(\mathsf{B})$. Assim conclui-se que $\mathsf{A} \subset g^{-1}(\mathsf{B})$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$g^{-1}(\mathsf{B}) = \mathsf{A}$. ■

(e.VI) $g^{-1}(\oslash) = \oslash$.

Prova: Se $x \in g^{-1}(\oslash)$, então $g(x) \in \oslash$. Mas, por definição, não existe $g(x) = y$ tal que $y \in \oslash$. Logo, não existe x tal que $x \in g^{-1}(\oslash)$. Assim, por definição, $g^{-1}(\oslash) = \oslash$. ■

Definição 2.5.2 Sejam $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ e $g : \mathsf{Y} \to \mathsf{W}$ funções tais que $\mathsf{CD_f} \subseteqq \mathsf{D_f}$. A função $g \circ f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ chama-se função composta. E para cada $x \in \mathsf{X}$ existe um $w \in \mathsf{W}$ único tal que $w = g(f(x))$.

Observe que $g(f(x))$ também denota-se por $(g \circ f)(x)$.

Proposição 2.5.1 [Propriedade Associativa] Se $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$, $g : \mathsf{B} \to \mathsf{C}$ e $h : \mathsf{C} \to \mathsf{W}$ são funções. Então, tem-se que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) : \mathsf{A} \to \mathsf{W}$.

Prova: Se $x \in \mathsf{A}$, então

$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h[g(f(x))] = h[(g \circ f)(x)] = [h \circ (g \circ f)](x)$.

Além disso, $h[g(f(x))] = h[g(y)]$, onde $y \in B$. E, $h[g(y)] = h[w]$, onde $w \in \mathsf{C}$. E, $h(w) = z$, onde $z \in \mathsf{W}$. Logo, $\mathsf{D_{(h \circ g) \circ f}} = \mathsf{D_{h \circ (g \circ f)}} = \mathsf{A}$ e $\mathsf{CD_{(h \circ g) \circ f}} = \mathsf{CD_{h \circ (g \circ f)}} = \mathsf{W}$.

Logo, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. ■

Proposição 2.5.2 Se $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ e $g : \mathsf{B} \to \mathsf{C}$ são funções injetivas, então a função $g \circ f : \mathsf{A} \to \mathsf{C}$ também é injetiva.

Prova: Sejam x_1, $x_2 \in \mathsf{A}$. Tem-se que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, então

$(g(f(x_1)) = (g(f(x_2))$. Como, por hipótese, g é injetiva, então $f(x_1) = f(x_2)$. E, pelo fato de f ser injetiva, tem-se que $x_1 = x_2$.

Portanto, pela definição 2.4.5, conclui-se que $g \circ f$ é injetiva. ∎

Proposição 2.5.3 Se $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ e $g : \mathsf{B} \to \mathsf{C}$ são funções sobrejetivas então a função $g \circ f : \mathsf{A} \to \mathsf{C}$ também é sobrejetiva.

Prova: Seja $y \in \mathsf{C}$. Como, por hipótese g é sobrejetiva, então existe $x \in \mathsf{B}$ tal que $y = g(x)$.

E, por hipótese, f é sobrejetiva. Logo, para todo $x \in \mathsf{B}$ existe $z \in \mathsf{A}$ tal que $x = f(z)$.

Logo, $y = g(x) \Rightarrow y = g(f(z)) \Rightarrow y = (g \circ f)(z)$. Portanto, dado $y \in \mathsf{C}$, existe $z \in \mathsf{A}$ tal que $y = (g \circ f)(z)$. Logo, pela definição 2.4.6, $g \circ f$ é sobrejetiva.

Corolário 2.5.1 Se $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ e $g : \mathsf{B} \to \mathsf{C}$ são funções bijetivas, então a função $g \circ f : \mathsf{A} \to \mathsf{C}$ também é bijetiva.

Prova: Por hipótese, f e g são funções bijetivas. Em particular, f e g são funções injetivas. Logo, pela proposição 2.5.2, a função $g \circ f$ também é injetiva.

Além disso, em particular f e g são funções sobrejetivas. Logo, pela proposição 2.5.3, a função $g \circ f$ também é sobrejetiva.

Portanto, pela definição 2.4.7, conclui-se que $g \circ f : \mathsf{A} \to \mathsf{C}$ é uma função bijetiva. ∎

Proposição 2.5.4 Sejam $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ e $g : \mathsf{Y} \to \mathsf{W}$ funções. Se $g \circ f : \mathsf{X} \to \mathsf{W}$ é uma função injetiva, então f é injetiva.

Prova: Sejam x_1, $x_2 \in \mathsf{X}$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Note que $f(x_1)$, $f(x_2) \in \mathsf{Y} = \mathsf{D_f}$. E, pelo fato de g ser função tem-se que $f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Logo, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. E, pelo fato de $g \circ f$ ser injetiva, tem-se que $x_1 = x_2$.

Portanto, pela definição 2.4.5, conclui-se que a função f é injetiva. ∎

Proposição 2.5.5 Sejam $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ e $g : \mathsf{Y} \to \mathsf{W}$ funções. Se $g \circ f : \mathsf{X} \to \mathsf{W}$ é uma função sobrejetiva, então g é sobrejetiva.

Prova: Por hipótese, $g \circ f$ é sobrejetiva. Logo, dado $z \in \mathsf{W}$, existe $x \in \mathsf{X}$ tal que $z = (g \circ f)(x)$. Portanto, $z = g(f(x))$.

Seja $y = f(x)$. Como $y \in \mathsf{D_f} = \mathsf{Y}$, tem-se que dado $z \in \mathsf{W}$, existe $y \in \mathsf{Y}$ tal que $z = g(y)$. Logo, por definição, a função g é sobrejetiva. ■

Proposição 2.5.6 Sejam $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ e $g : \mathsf{Y} \to \mathsf{W}$ funções. Se $g \circ f : \mathsf{X} \to \mathsf{W}$ é uma função injetiva e f é sobrejetiva, então g é injetiva.

Prova: Dados y_1, $y_2 \in \mathsf{Y}$, segue do fato de f ser sobrejetiva que existem x_1, $x_2 \in \mathsf{X}$ tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

Por hipótese, $g \circ f$ é injetiva. Logo, dados x_1, $x_2 \in \mathsf{X}$, tem-se que

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$. E, pelo fato de f ser função tem-se que $x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) = f(x_2)$.

Portanto, dados x_1, $x_2 \in \mathsf{X}$, tem-se $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \;\Rightarrow\; f(x_1) = f(x_2)$, ou seja, dados y_1, $y_2 \in \mathsf{Y}$ tem-se que $g(y_1) = g(y_2) \;\Rightarrow\; y_1 = y_2$. Logo, por definição, g é injetiva. ■

Exemplo 2.5.3 Seja $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função. Escreva $f = g \circ h$, sendo g uma função sobrejetiva e h uma função injetiva.

Solução: Defina a função $h : \mathsf{A} \to \mathsf{A} \times \mathsf{B}$, cuja regra de correspondência é

$h(x) = (x, f(x))$.

Observe que dados x_1, $x_2 \in \mathsf{A}$, tem-se que $h(x_1) = h(x_2) \;\Rightarrow$

$(x_1, f(x_1)) = (x_2, f(x_2)) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$. Em, particular, $x_1 = x_2$. Logo, por definição, h é injetiva.

Defina a função $g : \mathsf{A} \times \mathsf{B} \to \mathsf{B}$, obtida pela regra $g(x, y) = y$.

Dado $y \in \mathsf{B}$, observe que existe o par ordenado $(a, y) \in \mathsf{A} \times \mathsf{B}$, com $a \in \mathsf{A}$ (pois, $\mathsf{A} \neq \oslash$), tal que $g(a, y) = y$. Logo, por definição, g é sobrejetiva.

E tem-se que $\mathsf{CD_h} = \mathsf{A} \times \mathsf{B} = \mathsf{D_g}$. Logo, existe a função composta $g \circ h : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ cuja regra é $(g \circ h)(x) = y$.

Observe que $\mathsf{D_{g \circ h}} = \mathsf{A} = \mathsf{D_f}$, $\mathsf{CD_{g \circ h}} = \mathsf{D_f}$ e $(g \circ f)(x) = y = f(x)$. Logo,

$f = g \circ h$.

Proposição 2.5.7 Sejam $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ e $g : \mathsf{B} \to \mathsf{C}$ funções. Se $\mathsf{X} \subset \mathsf{A}$, então

$(g \circ f)(\mathsf{X}) = g(f(\mathsf{X}))$.

Prova: Se $x \in (g \circ f)(\mathsf{X})$, então $x \in g(f(\mathsf{X}))$. Logo, $(g \circ f)(\mathsf{X}) \subset g(f(\mathsf{X}))$.

Por outro lado, se $x \in g(f(\mathsf{X}))$, então $x \in (g \circ f)(\mathsf{X})$. Logo, $g(f(\mathsf{X})) \subset (g \circ f)(\mathsf{X})$.

Portanto, pela propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos, tem-se que $(g \circ f)(\mathsf{X}) = g(f(\mathsf{X}))$. ■

Proposição 2.5.8 Sejam $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ e $g : \mathsf{B} \to \mathsf{Y}$ funções. Se $\mathsf{W} \subset \mathsf{Y}$, então

$(g \circ f)^{-1}(\mathsf{W}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathsf{W}))$.

Prova: Se $x \in (g \circ f)^{-1}(\mathsf{W})$, então $(g \circ f)(x) \in \mathsf{W}$. Logo, $g(f(x)) \in \mathsf{W}$ e, portanto $f(x) \in g^{-1}(\mathsf{W})$. Logo, $x \in f^{-1}(g^{-1}(\mathsf{W}))$. Portanto, $(g \circ f)^{-1}(\mathsf{W}) \subset f^{-1}(g^{-1}(\mathsf{W}))$.

Por outro lado, se $x \in f^{-1}(g^{-1}(\mathsf{W}))$, então $f(x) \in g^{-1}(\mathsf{W})$. Logo, $g(f(x)) \in \mathsf{W}$. Portanto, $(g \circ f)(x) \in \mathsf{W}$ e, consequentemente, $x \in (g \circ f)^{-1}(\mathsf{W})$. Logo,

$f^{-1}(g^{-1}(\mathsf{W})) \subset (g \circ f)^{-1}(\mathsf{W})$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$(g \circ f)^{-1}(\mathsf{W}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathsf{W}))$. ■

Definição 2.5.3 Seja $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ uma função. Chama-se restrição de f a um subconjunto $\mathsf{X} \subset \mathsf{A}$ a função $f|X : \mathsf{X} \to \mathsf{B}$, definida pela regra $(f|X)(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathsf{X}$.

Definição 2.5.4 Sejam $g : \mathsf{X} \to \mathsf{B}$ uma função e X um subconjunto de A, a função $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ chama-se extensão de g, se $f|X = g$.

Exemplo 2.5.4 Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função definida pela regra $f(x) = x^3$. Tem-se que a restrição de f ao conjunto $\mathbb{R}^+$ é a função $f|\mathbb{R}^+ : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Por sua vez, a função f é uma extensão da função $f|\mathbb{R}^+$.

Definição 2.5.5 Sejam $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ e $g : \mathsf{B} \to \mathsf{A}$ funções. Diz-se que a função g é uma inversa à esquerda para f, se $g \circ f : \mathsf{A} \to \mathsf{A}$ fica definida pela regra $g(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathsf{A}$.

Exemplo 2.5.5 Sejam $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, funções definidas respectivamente por $f(x) = x^3$ e $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{w} & \text{se} \quad w \geq 0 \\ 3w^2 + 1 & \text{se} \quad w < 0 \end{cases}$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ tem-se que $g(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x$. Portanto a função g assim definida é uma inversa à esquerda para a função f.

Proposição 2.5.9 Seja $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função. A função f possui inversa à esquerda se, e somente se é injetiva.

Prova: Suponha que a função $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ possui uma inversa à esquerda $g : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$. Segue-se que dados x_1, $x_2 \in \mathsf{X}$ tem-se que $f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$, pois, por hipótese, $g(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathsf{X}$. Logo, f é injetiva.

Inversamente, suponha que a função $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ é injetiva. Defina uma função $g : \mathsf{f}(\mathsf{X}) \to \mathsf{Y}$, pela regra $g(f(x)) = x$.

Pelo fato de f ser injetiva tem-se que para todo $y \in \mathsf{f}(\mathsf{X})$ existe um único $x \in \mathsf{X}$ tal que $y = f(x)$. Logo, pela definição 2.4.1, a função g está definida para todo $y \in \mathsf{f}(\mathsf{X})$.

Agora seja h a extensão da função g, a função $h : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ obtida pela regra

$$h(y) = \begin{cases} g(y) & \text{se} \quad y \in \mathsf{f}(\mathsf{X}) \\ x_0, \text{ com } x_0 \in \mathsf{X} & \text{se} \quad y \in \mathsf{X} - \mathsf{f}(\mathsf{X}) \end{cases}.$$

Para todo $x \in \mathsf{X}$ tem-se que $h(f(x)) = g(f(x)) = x$. Logo, por definição, a função h é uma inversa à esquerda para a função f. ■

Definição 2.5.6 Sejam $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ e $g : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ funções. Diz-se que a função g é uma inversa à direita para f se a função $f \circ g : \mathsf{Y} \to \mathsf{Y}$ fica definição pela regra $f(g(y)) = y$ para todo $y \in \mathsf{Y}$.

Exemplo 2.5.6 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida pela regra $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{4}} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$ e a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(y) = (y-1)^4$.

Para todo $y \in \mathsf{Y}$, tem-se $g(y) = (y-1)^4 \geq 0$. Logo,

$f(g(y)) = [g(y)]^{\frac{1}{4}} + 1 = [(y-1)^4]^{\frac{1}{4}} + 1 = (y-1) + 1 = y$.

Portanto a função g, assim definida, é uma inversa à direita para a função f.

Proposição 2.5.10 Seja $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função. A função f possui inversa à direita se, e somente se, é sobrejetiva.

Prova: Seja $f : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ uma função inversa à direita para a função f. Tem-se que para todo $y \in \mathsf{Y}$, existe $x \in \mathsf{X}$ tal que $g(y) = x$, pois g é função. Além disso, por hipótese, g é uma função. Além disso, por hipótese, g é uma inversa à direita para f, logo

$f(x) = f(g(y)) = y$. Portanto, para todo $y \in \mathsf{Y}$ existe $x \in \mathsf{X}$ tal que $f(x) = y$. Logo, por definição, f é sobrejetiva.

Inversamente, suponha que a função f é sobrejetiva. Tem-se, portanto, que para todo $y \in \mathsf{Y}$ existe $x \in \mathsf{X}$ tal que $f(x) = y$.

Agora defina uma função $\alpha : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ tal que $x = \alpha(y)$. Observe que o fato de a função f ser sobrejetiva, permite a existência de uma função α assim definida, pois para todo $y \in \mathsf{Y}$ existe $x \in \mathsf{X}$ tal que $x = \alpha(y)$. E, $f(\alpha(y)) = f(x) = y$. Portanto, α é uma inversa à direita para f. ■

Definição 2.5.7 Seja $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ uma função. Uma função $g : \mathsf{B} \to \mathsf{A}$, chama-se inversa da função f, quando g é uma inversa à esquerda e à esquerda e à direita para f.

Em símbolos, g é uma inversa para f se $\forall x \in \mathsf{A}$ tem-se $g(f(x)) = x$ e $\forall y \in \mathsf{B}$ tem-se $f(g(y)) = y$.

Para denotar que a função g é inversa de uma função f escreve-se $f = g^{-1}$.

Exemplo 2.5.7 Seja $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ a função definida pela regra $f(x) = k.x$, $k \neq 0$ constante. E seja, $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ uma função definida por $g(y) = \dfrac{y}{k}$.

Observe que $g(f(x)) = \dfrac{f(x)}{k} = \dfrac{k.x}{k} = x$, logo g é uma inversa à esquerda para f. E que $f(g(y)) = k.[g(y)] = k.\dfrac{y}{k} = y$. Portanto, g é uma inversa à direita para a função f. Logo, por definição g é inversa da função f.

Corolário 2.5.2 Uma função $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ possui inversa se, e somente se é uma bijeção.

Prova: Suponha que a função f possui inversa. Então, por definição, existe uma função $g : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ tal que g é uma inversa à esquerda e a direita para f. Logo, pela proposição 2.5.9, a função f é injetiva e, pela proposição 2.5.10, f é sobrejetiva. Logo, por definição, f é bijetiva.

Reciprocamente, suponha que a função $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ seja bijetiva. Então, por definição, f é injetiva. Logo, para todo $y \in \mathsf{f(Y)}$ existe $x \in \mathsf{X}$ único tal que $f(x) = y$. Isso permite definir uma função $g : \mathsf{f(X)} \to \mathsf{X}$ tal que $x = g(y)$.

Além disso, f também é sobrejetiva, logo $\mathsf{f(X)} = \mathsf{Y}$. Portanto, para todo $y \in \mathsf{Y}$ existe $x \in \mathsf{X}$ tal que $x = g(y)$.

Para todo, $x \in \mathsf{X}$ tem-se que $g(f(x)) = g(y) = x$. E, para todo $x \in \mathsf{Y}$ tem-se que $f(g(y)) = f(x) = y$. Logo, por definição g é uma inversa à esquerda e à direita da função f.

Portanto, g é inversa da função f. ■

Proposição 2.5.11 Se uma função $f : \mathsf{X} \rightarrow \mathsf{Y}$ possui inversa, ela é única.

Prova: Considere as funções $\mathsf{I_X} : \mathsf{X} \rightarrow \mathsf{X}$ e $\mathsf{I_Y} : \mathsf{Y} \rightarrow \mathsf{Y}$, definidas, respectivamente, $\mathsf{I_Y}(x) = x$ e $\mathsf{I_Y}(x) = x$.

Suponha que as funções $g : \mathsf{Y} \rightarrow \mathsf{X}$ e $\alpha : \mathsf{Y} \rightarrow \mathsf{X}$ sejam ambas inversas da função f. Então, $g = g \circ \mathsf{I_Y} = g \circ (f \circ \alpha) = (g \circ f) \circ \alpha = \mathsf{I_Y} \circ \alpha = \alpha$.

Portanto, a inversa é única. ■

2.6 Família de Conjuntos

Definição 2.6.1 Seja L um conjunto de índices. Uma família de elementos de X é uma função $\alpha : \mathsf{L} \rightarrow \mathsf{X}$ tal que $\alpha(\lambda) = x_\lambda$, sendo que $\lambda \in \mathsf{L}$ e $x \in \mathsf{X}$.

A função α também é denotada por $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathsf{L}}$.

Exemplo 2.6.1 Seja $\mathsf{L} = \{1, 2, 3\}$. Uma família de elementos de X com índices em L é uma função $\alpha : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathsf{X}$ tal que $\alpha(1) = x_1$, $\alpha(2) = x_2$ e $\alpha(3) = x_3$. Obtém-se, assim, a tripla-ordenada (x_1, x_2, x_3).

Note que toda n-úpla ordenada $(x_1, x_2, ..., x_n)$ pode ser vista como uma família $\alpha : \{1, 2, ..., n\} \rightarrow \mathsf{X}$. Assim, o produto cartesiano $\mathsf{X}^n = \mathsf{X} \times \mathsf{X} \times ... \times \mathsf{X}$ é o conjunto das funções [ou famílias], $\alpha : \{1, 2, ..., n\} \rightarrow \mathsf{X}$.

Definição 2.6.2 Sejam $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, ..., \mathsf{X}_n$, conjuntos não-vazios. O produto cartesiano

$\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times ... \times \mathsf{X}_n$ é o conjunto das funções (ou famílias) $\alpha : \{1, 2, ..., n\} \rightarrow \mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_n$ tais que $x_1 \in \mathsf{X}_1$, $x_2 \in \mathsf{X}_2$, ..., $x_n \in \mathsf{X}_n$.

Definição 2.6.3 Seja L um conjunto de índices. Uma família de conjuntos é uma função $\alpha : \mathsf{L} \rightarrow \mathsf{X}$ tal que $\alpha(\lambda) = \mathsf{A}_\lambda$, sendo que $\lambda \in \mathsf{L}$ e $\mathsf{A} \in \mathsf{X}$. E, X é um conjunto cujos elementos são conjuntos.

Denota-se uma família de conjuntos por $(\mathsf{A}_\lambda)_{\lambda \in \mathsf{L}}$. E, se $\mathsf{L} = \{1, 2, ..., n\}$, então $(\mathsf{A}_\lambda)_{\lambda \in \mathsf{L}} = (\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, ..., \mathsf{A}_n)$, que é uma sequência de conjuntos.

Definição 2.6.4 [Reunião] Seja $(\mathsf{W}_\lambda)_{\lambda\in\mathsf{L}}$ uma família de conjuntos. O conjunto dos elementos x tais que x pertence a pelo menos um dos conjuntos W_λ, chama-se reunião da família $(\mathsf{W}_\lambda)_{\lambda\in\mathsf{L}}$.

Em símbolos, $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{W}_\lambda = \{x;\ \exists\lambda\in\mathsf{L} \text{ com } x\in\mathsf{W}_\lambda\}$.

Definição 2.6.5 [Interseção] Seja $(\mathsf{W}_\lambda)_{\lambda\in\mathsf{L}}$ uma família de conjuntos. O conjunto dos elementos x tais que $x\in\mathsf{W}_\lambda$ para todo $\lambda\in\mathsf{L}$, chama-se interseção da família $(\mathsf{W}_\lambda)_{\lambda\in\mathsf{L}}$.

Em símbolos, $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{W}_\lambda = \{x;\ x\in\mathsf{W}_\lambda\ \forall\lambda\in\mathsf{L}\}$.

Uma família com índices no conjunto $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ [dos números naturais], chama-se sequência.

Reuniões e interseções de uma sequência de conjuntos $(\mathsf{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são representados por:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{W}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{W}_n = \mathsf{W}_1\cup\mathsf{W}_2\cup...\cup\mathsf{W}_n\cup...;$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{W}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathsf{W}_n = \mathsf{W}_1\cap\mathsf{W}_2\cap...\cap\mathsf{W}_n\cap....$$

Exemplo 2.6.2. Seja $\mathsf{W}_n=\{-n,1-n,...,-1,0,1,...,n-1,n\}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Tem-se que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathsf{W}_n=\mathbb{Z}$ e que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathsf{W}_n=\{-1,0,1\}$.

Seja $(\mathsf{A}_\lambda)_{\lambda\in\mathsf{L}}$, uma família de subconjuntos de um conjunto básico E. São válidas as seguintes propriedades:

(f.I) $\displaystyle(\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}}\mathsf{A}_\lambda)^C = \bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}}\mathsf{A}_\lambda^C$;

Prova: Se $x\in(\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}}\mathsf{A}_\lambda)^C$, então pela proposição 2.2.4, tem-se que $x\notin\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}}\mathsf{A}_\lambda$. Portanto, não existe $\lambda\in\mathsf{L}$ tal que $x\in\mathsf{A}_\lambda$, ou equivalentemente, $x\notin\mathsf{A}_\lambda$ para todo $\lambda\in\mathsf{L}$.

E, pela proposição 2.2.4, tem-se que $x\in(\mathsf{A}_\lambda)^C$ para todo $\lambda\in\mathsf{L}$. Logo, $x\in\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}}\mathsf{A}_\lambda^C$. Portanto, $(\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}}\mathsf{A}_\lambda)^C\subset\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}}\mathsf{A}_\lambda^C$.

Por outro lado, se $x\in\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}}\mathsf{A}_\lambda^C$, então $x\in\mathsf{A}_\lambda^C$ para todo $\lambda\in\mathsf{L}$. E, pela proposição 2.2.4, tem-se que $x\notin\mathsf{A}_\lambda^C$ para todo $\lambda\in\mathsf{L}$, ou equivalentemente, não existe $\lambda\in\mathsf{L}$ tal que $x\in\mathsf{A}_\lambda$. Logo, $x\notin\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}}\mathsf{A}_\lambda$, e pela proposição 2.2.4, conclui-se que $x\in(\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}}\mathsf{A}_\lambda)^C$. Portanto, $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}}\mathsf{A}_\lambda^C\subset(\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}}\mathsf{A}_\lambda)^C$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$(\bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda)^C = \bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda^C$. ■

(f.II) $(\bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda)^C = \bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda^C$;

Prova: Se $x \in (\bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda)^C$, então, pela proposição 2.2.4, $x \notin \bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$. Portanto, existe $\lambda \in \mathsf{L}$ tal que $x \notin \mathsf{A}_\lambda$. Logo, pela proposição 2.2.4, existe $\lambda \in \mathsf{L}$ tal que $x \notin (\mathsf{A}_\lambda)^C$. Logo, por definição, $x \in \bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda^C$. Portanto, $(\bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda)^C \subset \bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda^C$.

Por outro lado, se $x \in \bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda^C$, então existe $\lambda \in \mathsf{L}$ tal que $x \in \mathsf{A}_\lambda^C$. Logo, pela proposição 2.2.4, existe $\lambda \in \mathsf{L}$ tal que $x \notin \mathsf{A}_\lambda$. Portanto, $x \notin \bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$. E, pela proposição 2.2.4, conclui-se que $x \in (\bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda)^C$. Portanto, $\bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda^C \subset (\bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda)^C$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que

$(\bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda)^C = \bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda^C$. ■

Exemplo 2.6.3 Seja $(\mathsf{A}_\lambda)_{\lambda\in \mathsf{L}}$ uma família de subconjuntos de um conjunto básico E. Seja $\mathsf{B}_\lambda = (\mathsf{A}_\lambda)^C$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$. Provar que $\bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda = \mathsf{E}$, se , e somente se $\bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{B}_\lambda = \emptyset$.

Prova: Suponha que $\bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda = \mathsf{E}$. Logo, $(\bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda)^C = (\mathsf{E})^C$. Segue-se da propriedade (f.I), que $\bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} (\mathsf{A}_\lambda)^C = (\mathsf{E})^C$. Portanto, $\bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{B}_\lambda = (\mathsf{E})^C$. E, por definição, $(\mathsf{E})^C = \mathsf{E} - \mathsf{E} = \emptyset$. Logo, $\bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{B}_\lambda = \emptyset$.

Por outro lado, suponha $\bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{B}_\lambda = \emptyset$, então $\bigcap_{\lambda\in \mathsf{L}} (\mathsf{A}_\lambda)^C = \emptyset$. E, pela propriedade (f.I), tem-se que $(\bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda)^C = \emptyset$. Logo, $((\bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda)^C)^C = (\emptyset)^C$. Segue-se da propriedade (c.I) que $\bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda = (\emptyset)^C$. E, pela propriedade (c.III), tem-se $(\emptyset)^C = \mathsf{E}$. Logo,

$\bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda = \mathsf{E}$. ■

Sejam $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função, $(\mathsf{X}_\lambda)_{\lambda\in \mathsf{L}}$ uma família de subconjuntos de X e $(\mathsf{Y}_\alpha)_{\alpha\in \mathsf{M}}$ uma família de subconjuntos de Y. São válidas as seguintes propriedades:

(g.I) $f(\bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$;

Prova: Se $y \in f(\bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda)$, então existe $x \in \bigcup_{\lambda\in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda$ tal que $f(x) = y$. Logo, existe $\lambda \in \mathsf{L}$ tal que $x \in \mathsf{X}_\lambda$ e $f(x) = y$. Logo, existe $\lambda \in \mathsf{L}$ tal que $y \in f(\mathsf{X}_\lambda)$. Portanto, $y \in \bigcup_{\lambda \in \mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$. Logo, $f(\bigcup_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda \in \mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$.

Por outro lado, se $y \in \bigcup_{\lambda \in \mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$, então existe $\lambda \in \mathsf{L}$ tal que $y \in f(\mathsf{X}_\lambda)$. Logo, existe $\lambda \in \mathsf{L}$ tal que $x \in \mathsf{X}_\lambda$ e $f(x) = y$. Portanto, existe $x \in \bigcup_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda$ tal que $f(x) = y$. Logo, $y \in f(\bigcup_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda)$. Portanto, $\bigcup_{\lambda \in \mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda) \subset f(\bigcup_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda)$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que,

$f(\bigcup_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$. ■

(g.II) $f(\bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$;

Prova: Se $y \in f(\bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda)$, então existe $x \in \bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda$ tal que $f(x) = y$. Logo, para todo $\lambda \in \mathsf{L}$ existe $x \in \mathsf{X}_\lambda$ tal que $f(x) = y$. Portanto, para todo $\lambda \in \mathsf{L}$, $y \in f(\mathsf{X}_\lambda)$. Logo, para todo $y \in \bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$. Portanto, $f(\bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$.

Por outro lado, se $y \in \bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$, então $y \in f(\mathsf{X}_\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$. Portanto, existe $x \in \mathsf{X}_\lambda$ tal que $f(x) = y$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$.

Logo, para todo $\lambda \in \mathsf{L}$, $x \in \mathsf{X}_\lambda$ e $f(x) = y$. Portanto, $x \in \bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda$ e $f(x) = y$. Logo, $y \in f(\bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda)$. Portanto, $\bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda) \subset f(\bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda)$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que,

$f(\bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$. ■

(g.III) $f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \mathsf{M}} f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha)$;

Prova: Se $x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha)$, então existe $y \in \bigcup_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Portanto, existe $\alpha \in \mathsf{M}$ tal que $y \in \mathsf{Y}_\alpha$ e $f(x) = y$. Logo, existe $\alpha \in \mathsf{M}$ tal que $x \in f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha)$. Portanto, $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathsf{M}} f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha)$. Logo, $f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha)\alpha \bigcup_{\alpha \in \mathsf{M}} f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha)$.

Por outro lado, se $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathsf{M}} f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha)$, então existe $\alpha \in \mathsf{M}$ tal que $x \in f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha)$. Logo, existe $\alpha \in \mathsf{M}$ tal que $y \in \mathsf{Y}_\alpha$ e $f(x) = y$. Portanto, $y \in \bigcup_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha$ e $f(x) = y$. Logo, $x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha)$. E, portanto, $\bigcup_{\alpha \in \mathsf{M}} f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha) \subset f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha)$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que,

$f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \mathsf{M}} f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha).$ ■

(g.IV) $f^{-1}(\bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha).$

Prova: Se $x \in f^{-1}(\bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha)$, então existe $y \in \bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Logo, para todo $\alpha \in \mathsf{M}$ existe $y \in \mathsf{Y}_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Portanto, para todo $\alpha \in \mathsf{M}$, tem-se que $x \in f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha)$. Logo, $x \in \bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha)$. Portanto, $f^{-1}(\bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha)$.

Por outro lado, se $x \in \bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha)$, então para todo $\alpha \in \mathsf{M}$, tem-se que

$x \in f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha)$. Logo, para todo $\alpha \in \mathsf{M}$ existe

$y \in \mathsf{Y}_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Logo, existe $y \in \bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha$ tal que $f(x) = y$. Portanto,

$x \in f^{-1}(\bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha)$. Logo, $\bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha) \subset f^{-1}(\bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha)$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que,

$f^{-1}(\bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{Y}_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} f^{-1}(\mathsf{Y}_\alpha).$ ■

Definição 2.6.6 Dados os conjuntos $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, ..., \mathsf{X}_n$ não-vazios. O produto cartesiano $\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times ... \times \mathsf{X}_n$, denotado por, $\prod_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i$ é o conjunto de todas as n-úplas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tais que $x_1 \in \mathsf{X}_1$, $x_2 \in \mathsf{X}_2$, ..., $x_n \in \mathsf{X}_n$.

A definição 2.6.6 permite concluir que $\prod_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i$ é o conjunto de todas as funções [ou famílias] $\alpha : \{1, 2, ..., n\} \to \mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_n$ tais que $\alpha(k) = x_k$,com $x \in \mathsf{X}_k$ para $k \in \mathsf{D}_\alpha$.

Em um produto cartesiano, $\prod_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i = \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times ... \times \mathsf{X}_n$, frequentemente usa-se funções $\pi_1 : \prod_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i \to \mathsf{X}_1$, $\pi_2 : \prod_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i \to \mathsf{X}_2$, ..., $\pi_n : \prod_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i \to \mathsf{X}_n$ definidas, respectivamente pela regra, $\pi_1(x) = x_1 \in \mathsf{X}_1$, $\pi_2(x) = x_2 \in \mathsf{X}_2$, ...,$\pi_n(x) = x_n \in \mathsf{X}_n$, sendo que $x \in \prod_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i$, isto é, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Essas funções chamam-se projeções.

Observe que duas n-úplas em $\prod_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ são iguais se $x_k = y_k$ para todo $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Definição 2.6.7 Se $\mathsf{A} \subset \prod_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i$ e B é um conjunto qualquer. Uma função $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ chama-se função de n variáveis, sendo que a i-ésima variável pertence ao conjunto X_i.

Exemplo 2.6.4 Se $\mathsf{X} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, funções $f : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ são chamadas de funções reais de duas variáveis.

Definição 2.6.8 Seja $(\mathsf{W}_\lambda)_{\lambda \in \mathsf{L}}$ uma família de conjuntos. O produto cartesiano $\prod_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{W}_\lambda$ é o conjunto das famílias de elementos $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathsf{L}}$ tais que $\lambda \in \mathsf{L}$ e $x \in \mathsf{W}_\lambda$.

Em outras palavras, $\prod_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{W}_\lambda$ é o conjunto das funções (ou famílias) $\alpha : \mathsf{L} \to \bigcup_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{W}_\lambda$ tais que $\alpha(\lambda) = x_\lambda$, com $\lambda \in \mathsf{L}$ e $x \in \mathsf{W}_\lambda$.

Caso os conjuntos W_λ sejam todos iguais, denota-se $\prod_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{W}_\lambda$ por W^λ.

Observação 2.6.1 Seja $\mathsf{X} = \prod_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{W}_\lambda$. As funções [ou projeções] $\pi_\lambda : \mathsf{X} \to \mathsf{W}_\lambda$ definidas pela regra, $\pi_\lambda(x) = x_\lambda \in \mathsf{W}_\lambda$, sendo $x \in \prod_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{W}_\lambda$ são sobrejetoras, pois para todo $x_\lambda \in \mathsf{W}_\lambda$, existe $x \in \prod_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{W}_\lambda$ tal que a λ-ésima coordenada de x é $x_\lambda \in \mathsf{W}_\lambda$.

Logo, pela proposição 2.5.10, π_λ admite inversa à direita.

Seja $\mathsf{A} \in (\mathsf{W}_\lambda)_{\lambda \in \mathsf{L}}$. Dada a função $f : \mathsf{A} \to \prod_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{W}_\lambda$ é possível definir, para cada $\lambda \in \mathsf{L}$ uma função $\pi_\lambda \circ f : \mathsf{A} \to \mathsf{W}_\lambda$ tal que $\pi_\lambda \circ f(x) = \pi_\lambda(f(x)) = f(x)_\lambda$.

As funções $\pi_\lambda \circ f$ chamam-se coordenadas da função f.

Definição 2.6.9 O produto cartesiano de uma sequência infinita de conjuntos X_1, X_2, ..., X_n, ..., denotado por $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{X}_n$ ou por $\prod_{i=1}^{\infty} \mathsf{X}_i = \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times ... \times \mathsf{X}_n \times ...$ é o conjunto de todas as sequências $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ tais que $x_n \in \mathsf{X}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.7 Exemplos de Resultados Adicionais

Exemplo 2.2.4 Sejam A e B conjuntos quaisquer e X um conjunto com as seguintes propriedades: $\mathsf{X} \supset \mathsf{A}$ e $\mathsf{X} \supset \mathsf{B}$; se $\mathsf{Y} \supset \mathsf{A}$ e $\mathsf{Y} \supset \mathsf{B}$ então $\mathsf{Y} \supset \mathsf{X}$. Provar que $\mathsf{X} = \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

Prova: Se $\mathsf{X} \supset \mathsf{A}$ e $\mathsf{X} \supset \mathsf{B}$, então, pela propriedade (a.V), tem-se que $\mathsf{X} \cup \mathsf{X} \supset \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. Logo, $\mathsf{X} \supset \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. Portanto, $\mathsf{X} \supsetneq \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ ou $\mathsf{X} = \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

Suponha que $\mathsf{X} \supsetneq \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. Então, $\exists\exists$ (existem) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathsf{X}$ tais que

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \notin \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

Seja $\mathsf{Y} = \mathsf{X} - \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$. Evidentemente, $\mathsf{Y} \supset \mathsf{A}$ e $\mathsf{Y} \supset \mathsf{B}$. Logo, por hipótese, $\mathsf{Y} \supset \mathsf{X}$, ou seja, $\mathsf{X} - \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\} \supset \mathsf{X}$, o que é contraditório.

Logo, $\mathsf{X} = \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$. ■

Exemplo 2.2.5 Sejam A e B conjuntos quaisquer e X um conjunto com as seguintes propriedades: $\mathsf{X} \subset \mathsf{A}$ e $\mathsf{X} \subset \mathsf{B}$; se $\mathsf{Y} \subset \mathsf{A}$ e $\mathsf{Y} \subset \mathsf{B}$ então $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$. Provar que $\mathsf{X} = \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$.

Prova: Se $\mathsf{X} \subset \mathsf{A}$ e $\mathsf{X} \subset \mathsf{B}$, então, pela propriedade (b.V), tem-se que $\mathsf{X} \cap \mathsf{X} \subset \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$. Logo, $\mathsf{X} \subset \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$. Portanto, $\mathsf{X} \subsetneq \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ ou $\mathsf{X} = \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$.

Suponha que $\mathsf{X} \subsetneq \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$. Então, $\exists\exists\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ tais que

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \notin \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$.

Seja $\mathsf{Y} = \mathsf{X} \cup \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$. Evidentemente, $\mathsf{X} \subset \mathsf{A}$ e $\mathsf{X} \subset \mathsf{B}$. Logo, por hipótese, $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$, ou seja, $\mathsf{X} \cup \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\} \subset \mathsf{X}$, o que é contraditório.

Logo, $\mathsf{X} = \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$. ■

Exemplo 2.2.6 Sejam A e B subconjuntos de um conjunto básico E. Provar que $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \oslash$ se, e somente se $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}^\mathsf{C}$. Provar também que $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{E}$ se, e somente se $\mathsf{A}^\mathsf{C} \subset \mathsf{B}$.

Prova [1ª parte]: Suponha que $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \oslash$. Se $\mathsf{A} \not\subset \mathsf{B}^\mathsf{C}$, então existem $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathsf{A}$ tais que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \notin \mathsf{B}^\mathsf{C}$. Logo, pela proposição 2.2.4, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathsf{B}$. Logo, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$. Portanto, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \neq \oslash$, o que é contraditório. Logo, $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}^\mathsf{C}$.

Por outro lado, suponha que $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}^\mathsf{C}$. Pela propriedade reflexiva da inclusão de conjuntos tem-se que $\mathsf{B} \subset \mathsf{B}$. Logo, pela propriedade (b.V), tem-se que $\mathsf{A} \cap \mathsf{A} \subset \mathsf{B}^\mathsf{C} \cap \mathsf{B}$.

Observe que se $x \in \mathsf{B}^\mathsf{C} \cap \mathsf{B}$, então $x \in \mathsf{B}^\mathsf{C}$ e $x \in \mathsf{B}$. Logo, pela proposição 2.2.4, tem-se que $x \notin \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{B}$, o que é contraditório. Logo, não existe x tal que $x \in \mathsf{B}^\mathsf{C} \cap \mathsf{B}$, ou seja, $\mathsf{B}^\mathsf{C} \cap \mathsf{B} = \oslash$.

Portanto, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \subset \oslash$. E, pela proposição 2.1.1, tem-se que $\oslash \subset \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$.

Logo, pela propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos, conclui-se que $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \oslash$. ■

Prova [2ª parte]: Suponha que $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{E}$. Então, $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})^C = \mathsf{E}^C$. E, pela propriedade (c.IV), tem-se que $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})^C = \mathsf{A}^C \cup \mathsf{B}^C$. Além disso, por definição, $\mathsf{E}^C = \mathsf{E} - \mathsf{E}$.

Se $x \in \mathsf{E} - \mathsf{E}$, então $x \in \mathsf{E}$ e $x \notin \mathsf{E}$, o que é contraditório. Logo não existe x

tal que $x \in \mathsf{E} - \mathsf{E}$. Portanto, $\mathsf{E} - \mathsf{E} = \oslash$.

Logo, tem-se que $\mathsf{A}^\mathsf{C} \cap \mathsf{B}^\mathsf{C} = \oslash$. Segue-se da 1ª parte deste exemplo que $\mathsf{A}^\mathsf{C} \subset (\mathsf{B}^\mathsf{C})^\mathsf{C}$. Logo, pela propriedade (c.I) tem-se que $\mathsf{A}^\mathsf{C} \subset \mathsf{B}$.

Por outro lado, suponha que $\mathsf{A}^\mathsf{C} \subset \mathsf{B}$. Pela propriedade reflexiva da inclusão tem-se que $\mathsf{A} \subset \mathsf{A}$. Logo, pela propriedade (a.V), conclui-se que $\mathsf{A}^C \cup \mathsf{A} \subset \mathsf{B} \cup \mathsf{A}$.

Observe que $\mathsf{A} \subset \mathsf{E}$ e $\mathsf{A}^\mathsf{C} = \mathsf{E} - \mathsf{A} \subset \mathsf{E}$. Logo, pela propriedade (a.v), tem-se que $\mathsf{A} \cup \mathsf{A}^\mathsf{C} \subset \mathsf{E} \cup \mathsf{E}$. Portanto, $\mathsf{A} \cup \mathsf{A}^\mathsf{C} \subset \mathsf{E}$.

Além disso, como $\mathsf{A} \subset \mathsf{E}$, tem-se que se $x \in \mathsf{E}$ ou $x \in \mathsf{E} - \mathsf{A}$.

E, por definição, $\mathsf{E} - \mathsf{A} = \mathsf{A}^\mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{A}^\mathsf{C}$. Portanto, $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{A}^\mathsf{C}$. Logo, $\mathsf{E} \subset \mathsf{A} \cup \mathsf{A}^\mathsf{C}$.

Portanto, pela propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos, tem-se que $\mathsf{A} \cup \mathsf{A}^\mathsf{C} = \mathsf{E}$.

Logo, $\mathsf{E} \subset \mathsf{B} \cup \mathsf{A}$, ou equivalentemente, $\mathsf{E} \subset \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

Por outro lado, $\mathsf{A} \subset \mathsf{E}$ e $\mathsf{B} \subset \mathsf{E}$. Logo, pela propriedade (a.V), tem-se que $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \subset \mathsf{E} \cup \mathsf{E}$. Logo, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \subset \mathsf{E}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que,

$\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{E}$. ■

Exemplo 2.2.7 Sejam A e B subconjuntos de um conjunto básico E. Provar que $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$ se, e somente se $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^\mathsf{C} = \oslash$.

Prova: Suponha $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$. Pela propriedade (c.I), tem-se que $\mathsf{B} = (\mathsf{B}^\mathsf{C})^C$. Logo, $\mathsf{A} \subset (\mathsf{B}^\mathsf{C})^C$. Segue-se, da 1ª parte do exemplo 2.2.6, que $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^\mathsf{C} = \oslash$.

Inversamente, suponha que $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^\mathsf{C} = \oslash$. Então, pela 1ª parte do exemplo 2.2.6, tem-se que $\mathsf{A} \subset (\mathsf{B}^\mathsf{C})^C$. E, pela propriedade (c.I), tem-se que $(\mathsf{B}^\mathsf{C})^C = \mathsf{B}$. Logo, $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$. ■

Exemplo 2.2.8 Mostrar exemplos de conjuntos A, B, e C tais que $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap \mathsf{C} \neq \mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$.

Solução: [1º] Sejam $\mathsf{A} = \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \neq \oslash$ e $\mathsf{C} = \oslash$. Tem-se que,

$(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap \mathsf{C} = \mathsf{C} \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = (\mathsf{C} \cap \mathsf{A}) \cup (\mathsf{C} \cap \mathsf{B}) = \oslash \cup \oslash = \oslash$.

Por outro lado, $\mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{C}) = \mathsf{A} \cap \mathsf{A} = \mathsf{A}$.

[2º] Sejam $\mathsf{A} = \{1, 2\}$, $\mathsf{B} = \{1, 2\}$ e $\mathsf{C} = \{3, 4\}$. Tem-se que

$(A \cup B) \cap C = (\{1,2\} \cup \{1,2\}) \cap \{3,4\} = \{1,2\} \cap \{3,4\} = \emptyset$.

E, $A \cup (B \cap C) = \{1,2\} \cup (\{1,2\} \cap \{3,4\}) = \{1,2\} \cup \emptyset = \{1,2\}$. Portanto, $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.

Exemplo 2.2.9 Sejam A e X subconjuntos de um conjunto básico E. Provar que se $A \cap X = \emptyset$ e $A \cup X = E$, então $X = A^C$.

Prova: Se $A \cap X = \emptyset$, então $X \cap A = \emptyset$. E, pela 1ª parte do exemplo 2.2.6, tem-se que $X \subset A^C$.

Por outro lado, se $A \cup X = E$, então, pela 2ª parte do exemplo 2.2.6, tem-se que $A^C \subset X$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que,

$X = A^C$. ■

Exemplo 2.2.10 Seja A um subconjunto de B. Provar que $B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A$, sendo C um conjunto qualquer. Provar também que se existe um conjunto C satisfazendo esta igualdade, então $A \subset C$.

Prova [1ª parte]: Suponha que $A \subset B$. Se $x \in B \cap (A \cup C)$, então pela propriedade (b.VII), $x \in (B \cap A) \cup (B \cap C)$. Logo, $x \in (B \cap A)$ e $x \in (B \cap C)$.

Se $x \in B \cap C$, então $x \in B \cap C$ ou $x \in A$. Logo, $x \in (B \cap C) \cup A$.

Se $x \in B \cap A$, então, como por hipótese $A \subset B$, tem-se, pela propriedade (b.VI) que $B \cap A = A$. Logo, $x \in A$. Portanto, $x \in A$ ou $x \in B \cap C$, ou equivalentemente, $x \in B \cap C$ ou $x \in A$. Logo, $x \in (B \cap C) \cup A$.

Em ambos os casos, conclui-se que $x \in (B \cap C) \cup A$. Portanto,

$B \cap (C \cup A) \subset (B \cap C) \cup A$.

Por outro lado, se $x \in (B \cap C) \cup A$, então, $A \cup (B \cap C)$ e, pela propriedade (a.VII), $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Logo, $x \in (A \cup B)$ e $x \in (A \cup C)$.

Por hipótese, $A \subset B$. Logo, pela propriedade (a.VI), tem-se que $A \cup B = B$.

Portanto, se $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$, então $x \in B$ e $x \in A \cup C$. Logo, $x \in B \cap (A \cup C)$. Portanto, $(B \cap C) \cup A \subset B \cap (A \cup C)$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que,

$B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A$. ■

Prova [$2^{\underline{a}}$ parte]: Suponha que exista um conjunto C tal que $\mathsf{B} \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{C}) = (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) \cup \mathsf{A}$.

Se $\mathsf{A} \not\subset \mathsf{B}$, então existe $x \in \mathsf{A}$ tal que $x \notin \mathsf{B}$. Logo, se $x \in \mathsf{A}$, então $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$. Portanto, $x \in (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$ ou $x \in \mathsf{A}$. Logo, $x \in (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) \cup \mathsf{A}$.

Por hipótese, $(\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) \cup \mathsf{A} = \mathsf{B} \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{C})$. Portanto, $x \in \mathsf{B} \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{C})$. Logo, $x \in \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{C}$, o que é contraditório, pois $x \notin \mathsf{B}$.

Logo, $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$. ■

Exemplo 2.2.11 Provar que $\mathsf{A} = \mathsf{B}$ se, e somente se $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \cup (\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{B}) = \oslash$.

Prova: Suponha que $\mathsf{A} = \mathsf{B}$. Pela propriedade reflexiva da inclusão de conjuntos tem-se que $\mathsf{B} \subset \mathsf{B}$. Logo, $\mathsf{A} = \mathsf{B} \subset \mathsf{B}$, portanto $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$. Além disso, $\mathsf{B}^{\mathsf{C}} \subset \mathsf{B}^{\mathsf{C}}$. Logo, pela propriedade (b.V) tem-se que $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}^{\mathsf{C}} \subset \mathsf{B} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}$.

Por outro lado, $\mathsf{B} \subset \mathsf{B} = \mathsf{A}$, portanto, $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$. Além disso, $\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \subset \mathsf{A}^{\mathsf{C}}$. Logo, pela propriedade (b.V), tem-se que $\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{B} \subset \mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{A}$.

Portanto, pela propriedade (a.V), tem-se que

$(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \cup (\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{B}) \subset (\mathsf{B} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \cup (\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{A})$.

Observe que se $x \in \mathsf{B} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}$, então $x \in \mathsf{B}$ e $x \in \mathsf{B}^{\mathsf{C}}$. Logo, pela proposição 2.2.4, tem-se que $x \in \mathsf{B}$ e $x \notin \mathsf{B}$, o que é contraditório, pois não existe x tal que $x \in \mathsf{B}$ e $x \notin \mathsf{B}$. Logo, $\mathsf{B} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}} = \oslash$.

E ainda, se $y \in \mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{A}$, então $y \in \mathsf{A}^{\mathsf{C}}$ e $y \in \mathsf{A}$. E pela proposição 2.2.4, tem-se que $y \notin \mathsf{A}$ e $y \in \mathsf{A}$, o que é contraditório, pois não existe y tal que $y \notin \mathsf{A}$ e $y \in \mathsf{A}$. Logo, não existe y tal que $y \in \mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{A}$. Logo, $\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{A} = \oslash$.

Portanto, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \cup (\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{B}) \subset \oslash \cup \oslash$. Logo, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \cup (\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{B}) \subset \oslash$. Portanto, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \cup (\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{B}) \subsetneq \oslash$ ou $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \cup (\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{B}) = \oslash$.

Se $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \cup (\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{B}) \subsetneq \oslash$, então existe $x \in \oslash$ tal que $x \notin (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \cup (\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{B})$, o que é contraditório, pois, por definição, não existe x tal que $x \in \oslash$.

Logo, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \cup (\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{B}) = \oslash$.

Inversamente, suponha que $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \cup (\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{B}) = \oslash$. Pela, propriedade reflexiva da inclusão de conjuntos tem-se que $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \cup (\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{B}) \subset (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \cup (\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{B})$. Logo, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \cup (\mathsf{A}^{\mathsf{C}} \cap \mathsf{B}) \subset \oslash$.

Além disso, pela propriedade reflexiva da inclusão de conjuntos, tem-se que

$(\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \subset (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C$. Logo, pela propriedade (b.V), tem-se que

$(\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap [(\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) \cup (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})] \subset (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap \oslash$. Logo, pela propriedade (b.VII), tem-se que $[(\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap (\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}] \cup [(\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})] \subset (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap \oslash$.

Além disso, se $x \in (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap \oslash$, então $x \in (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C$ e $x \in \oslash$, o que é contraditório, pois não existe x tal que $x \in \oslash$. Logo, não existe x tal que $x \in (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap \oslash$. Logo, $(\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap \oslash = \oslash$.

Logo, $[(\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap (\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C})] \cup [(\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})] \subset \oslash$. Observe que se $x \in (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})$, então $x \in (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C$ e $x \in (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})$. Logo, pela proposição 2.2.4, $x \notin (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})$ e $x \in (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})$, o que é contraditório, pois não existe x tal que $x \in (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})$ e $x \notin (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})$. Logo não existe x tal que $x \in (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})$. Logo, $(\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B}) = \oslash$.

Portanto, tem-se que $[(\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap (\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C})] \cup \oslash \subset \oslash$. Logo,

$(\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C \cap (\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) \subset \oslash$.

Pela, propriedade (c.IV) tem-se que $(\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C = (\mathsf{A^C})^C \cup \mathsf{B}^C$ e, pela propriedade (c.I), tem-se que $(\mathsf{A^C})^C = \mathsf{A}$. Logo, $(\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B})^C = \mathsf{A} \cup \mathsf{B}^C$. Portanto, $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B^C}) \cap (\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) \subset \oslash$.

Segue-se que,

$(\mathsf{A} \cup \mathsf{B^C}) \cap (\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) = (\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{B^C}) = [(\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) \cap \mathsf{A}] \cup [(\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) \cap \mathsf{B^C}] =$

$[\mathsf{A} \cap (\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C})] \cup [\mathsf{A} \cap (\mathsf{B^C} \cap \mathsf{B^C})] = [(\mathsf{A} \cap \mathsf{A}) \cap \mathsf{B^C}] \cup [\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}] = (\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) = (\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C})$.

Logo, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) \subset \oslash$. Portanto, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) \subsetneq \oslash$ ou $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) = \oslash$.

Se $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) \subsetneq \oslash$, então existe $x \in \oslash$ tal que $x \notin (\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C})$, o que é contraditório, pois não existe x tal que $x \in \oslash$.

Logo, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) = \oslash$.

Segue-se do exemplo 2.2.7 que $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$. Além disso, por hipótese,

$(\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C}) \cup (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B}) = \oslash$. Como $\mathsf{A} \cap \mathsf{B^C} = \oslash$, então $\oslash \cup (\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B}) = \oslash$. Logo, $\mathsf{A^C} \cap \mathsf{B} = \oslash$, ou equivalentemente, $\mathsf{B} \cap (\mathsf{A^C} = \oslash$.

Segue-se da 1ª parte do exemplo 2.2.6 que $\mathsf{B} \subset (\mathsf{A^C})^C$. Logo, $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$.

Conclui-se pela propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que,

$\mathsf{A} = \mathsf{B}$. ■

Exemplo 2.2.12 Provar que $(\mathsf{A} - \mathsf{B}) \cup (\mathsf{B} - \mathsf{A}) = (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) - (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})$.

Prova: Tem-se que $(\mathsf{A}-\mathsf{B})\cup(\mathsf{B}-\mathsf{A})=(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}^{\mathsf{C}})\cup(\mathsf{B}\cap\mathsf{A}^{\mathsf{C}})=$

$[(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}^{\mathsf{C}})\cup\mathsf{B}]\cap[(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}^{\mathsf{C}})\cup\mathsf{A}^{\mathsf{C}}]=[\mathsf{B}\cup(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}^{\mathsf{C}})]\cap[\mathsf{A}^{\mathsf{C}}\cup(\mathsf{A}\cap\mathsf{B}^{\mathsf{C}})]=$

$[(\mathsf{B}\cup\mathsf{A})\cap(\mathsf{B}\cup\mathsf{B}^{\mathsf{C}})]\cap[(\mathsf{A}^{\mathsf{C}}\cup\mathsf{A})\cap(\mathsf{A}^{\mathsf{C}}\cup\mathsf{B}^{\mathsf{C}})]$.

Se A e B são subconjuntos de um conjunto básico E. Então, se $x\in\mathsf{E}$ tem-se que $x\in\mathsf{A}$ ou $x\in\mathsf{E}-\mathsf{A}$. Por definição, $\mathsf{E}-\mathsf{A}=\mathsf{A}^{\mathsf{C}}$. Logo, $x\in\mathsf{A}$ ou $x\in\mathsf{A}^{\mathsf{C}}$. Portanto, $x\in\mathsf{A}\cup\mathsf{A}^{\mathsf{C}}$. Logo, $\mathsf{E}\subset\mathsf{A}\cup\mathsf{A}^{\mathsf{C}}$.

Além disso, $\mathsf{A}\subset\mathsf{E}$ e $\mathsf{A}^{\mathsf{C}}=\mathsf{E}-\mathsf{A}\subset\mathsf{E}$. Logo, pela propriedade (a.V), tem-se que $\mathsf{A}\cup\mathsf{A}^{\mathsf{C}}\subset\mathsf{E}\cup\mathsf{E}$. Logo, $\mathsf{A}\cup\mathsf{A}^{\mathsf{C}}\subset\mathsf{E}$. Portanto, pela propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos, conclui-se que $\mathsf{A}\cup\mathsf{A}^{\mathsf{C}}=\mathsf{E}$.

Analogamente, se $y\in\mathsf{E}$, então $y\in\mathsf{B}$ ou $y\in\mathsf{E}-\mathsf{B}$. Por definição, $\mathsf{E}-\mathsf{B}=\mathsf{B}^{\mathsf{C}}$. Logo, $y\in\mathsf{B}$ ou $y\in\mathsf{B}^{\mathsf{C}}$. Portanto, $y\in\mathsf{B}\cup\mathsf{B}^{\mathsf{C}}$. Logo, $\mathsf{E}\subset\mathsf{B}\cup\mathsf{B}^{\mathsf{C}}$.

E, $\mathsf{B}\subset\mathsf{E}$ e $\mathsf{B}^{\mathsf{C}}=\mathsf{E}-\mathsf{B}\subset\mathsf{E}$. Logo, pela propriedade (a.V), tem-se que $\mathsf{B}\cup\mathsf{B}^{\mathsf{C}}\subset\mathsf{E}\cup\mathsf{E}$.

Portanto, $\mathsf{B}\cup\mathsf{B}^{\mathsf{C}}\subset\mathsf{E}$. Logo, pela propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos, conclui-se que $\mathsf{B}\cup\mathsf{B}^{\mathsf{C}}=\mathsf{E}$.

Logo, $[(\mathsf{B}\cup\mathsf{A})\cap(\mathsf{B}\cup\mathsf{B}^{\mathsf{C}})]\cap[(\mathsf{A}^{\mathsf{C}}\cup\mathsf{A})\cap(\mathsf{A}^{\mathsf{C}}\cup\mathsf{B}^{\mathsf{C}})]=$

$[(\mathsf{B}\cup\mathsf{A})\cap\mathsf{E}]\cap[\mathsf{E}\cap(\mathsf{A}^{\mathsf{C}}\cup\mathsf{B}^{\mathsf{C}})]=(\mathsf{B}\cup\mathsf{A})\cap(\mathsf{A}^{\mathsf{C}}\cup\mathsf{B}^{\mathsf{C}})=$

$(\mathsf{A}\cup\mathsf{B})\cap(\mathsf{A}\cap\mathsf{B})^{C}=(\mathsf{A}\cup\mathsf{B})-(\mathsf{A}\cap\mathsf{B})$. ■

Exemplo 2.2.13 Provar que se $(\mathsf{A}-\mathsf{B})\cup(\mathsf{B}-\mathsf{A})=(\mathsf{A}-\mathsf{C})\cup(\mathsf{C}-\mathsf{A})$, então $\mathsf{B}=\mathsf{C}$. Verificar se $\mathsf{A}\cap\mathsf{B}=\mathsf{A}\cap\mathsf{C}$ implica $\mathsf{B}=\mathsf{C}$. Examinar se para um caso análogo, com $\cup$ em vez de $\cap$, a afirmação é válida.

Prova [1ª parte]: Suponha $(\mathsf{A}-\mathsf{B})\cup(\mathsf{B}-\mathsf{A})=(\mathsf{A}-\mathsf{C})\cup(\mathsf{C}-\mathsf{A})$. Se $\mathsf{B}\neq\mathsf{C}$, então, pela propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos, tem-se que que $\mathsf{B}\not\subset\mathsf{C}$ ou $\mathsf{C}\not\subset\mathsf{B}$. Sem perda de generalidade (S.P.G), considere $\mathsf{B}\not\subset\mathsf{C}$. Logo, existe $x\in\mathsf{B}$ tal que $x\notin\mathsf{C}$.

Se $x\in\mathsf{A}$, então $x\in\mathsf{A}\cap\mathsf{B}$. Logo, $x\notin(\mathsf{A}\cup\mathsf{B})-(\mathsf{A}\cap\mathsf{C})$, pois, caso contrário, teríamos que $x\notin\mathsf{A}\cap\mathsf{B}$, o que é contraditório.

Por outro lado, $x\in\mathsf{A}\cup\mathsf{C}$ e $x\notin\mathsf{A}\cap\mathsf{C}$, pois $x\notin\mathsf{C}$. Logo, $x\in(\mathsf{A}\cup\mathsf{C})-(\mathsf{A}\cap\mathsf{C})$. Portanto, $(\mathsf{A}\cup\mathsf{C})-(\mathsf{A}\cap\mathsf{C})\not\subset(\mathsf{A}\cup\mathsf{B})-(\mathsf{A}\cap\mathsf{B})$.

Se $x\notin\mathsf{A}$, então $x\in(\mathsf{A}\cup\mathsf{B}$ e $x\notin\mathsf{A}\cap\mathsf{B}$. Logo, $x\in(\mathsf{A}\cup\mathsf{B})-(\mathsf{A}\cap\mathsf{B})$. Por outro lado, $x \notin \mathsf{A} \cup \mathsf{C}$. Portanto, $x \notin (\mathsf{A} \cup \mathsf{C}) - (\mathsf{A} \cap \mathsf{C})$, pois, caso contrário, teríamos que $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{C}$, o que é contraditório.

Logo, $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) - (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \not\subset (\mathsf{A} \cup \mathsf{C}) - (\mathsf{A} \cap \mathsf{C})$.

Em qualquer dos casos, tem-se $(\mathsf{A} - \mathsf{B}) \cup (\mathsf{B} - \mathsf{A}) \neq (\mathsf{A} - \mathsf{C}) \cup (\mathsf{C} - \mathsf{A})$, o que é contraditório.

Logo, $\mathsf{B} = \mathsf{C}$. ∎

Solução [2ª parte]: Considere $\mathsf{A} = \{1, 2\}$, $\mathsf{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathsf{C} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Observe que $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{1, 2\} = \mathsf{A} \cap \mathsf{C}$, porém $\mathsf{B} \neq \mathsf{C}$. Logo, por contra-exemplo, conclui-se que a afirmação não é válida.

Solução [3ª parte]: Deve-se verificar a afirmação de que se $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{A} \cup \mathsf{C}$, então $\mathsf{B} = \mathsf{C}$.

Seja $\mathsf{A} = \{1, 2, 3\}$, $\mathsf{B} = \{3, 4\}$ e $\mathsf{C} = \{4\}$. Tem-se que

$\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \{1, 2, 3, 4\} = \mathsf{A} \cup \mathsf{C}$, porém $\mathsf{B} \neq \mathsf{C}$. Logo, por contra-exemplo, conclui-se que a afirmação anterior não é válida.

Exemplo 2.3.2 Provar que se $\mathsf{A} \times \mathsf{B} = \mathsf{A} \times \mathsf{C}$, então $\mathsf{B} = \mathsf{C}$.

Prova: Suponha que $\mathsf{A} \times \mathsf{B} = \mathsf{A} \times \mathsf{C}$. Se $(x, y) \in \mathsf{A} \times \mathsf{B}$, então, por definição, $x \in \mathsf{A}$ e $y \in \mathsf{C}$. Logo, $\mathsf{B} \subset \mathsf{C}$.

Por outro lado, se $(v, w) \in \mathsf{A} \times \mathsf{C}$, então $v \in \mathsf{A}$ e $w \in \mathsf{C}$. E, por hipótese, $\mathsf{A} \times \mathsf{C} = \mathsf{A} \times \mathsf{B}$. Logo, $(v, w) \in \mathsf{A} \times \mathsf{B}$, portanto, $v \in \mathsf{A}$ e $w \in \mathsf{B}$. Logo, $\mathsf{C} \subset \mathsf{B}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que,

$\mathsf{B} = \mathsf{C}$. ∎

Exemplo 2.3.3 Provar que as seguintes igualdades são válidas:

[I] $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \times \mathsf{C} = (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) \cup (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$;

[II] $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \times \mathsf{C} = (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) \cap (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$;

[III] $(\mathsf{A} - \mathsf{B}) \times \mathsf{C} = (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) - (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$.

Prova do item [I]: Se $(x, y) \in (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \times \mathsf{C}$, então $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ e $y \in \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A}$ ou $x \in \mathsf{B}$ e $y \in \mathsf{C}$. Se $x \in \mathsf{A}$, então $(x, y) \in \mathsf{A} \times \mathsf{C}$. Se $x \in \mathsf{B}$, então $(x, y) \in \mathsf{B} \times \mathsf{C}$. Logo, $(x, y) \in \mathsf{A} \times \mathsf{C}$ ou $(x, y) \in \mathsf{B} \times \mathsf{C}$. Portanto, $(x, y) \in (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) \cup (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$. Logo, $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \times \mathsf{C} \subset (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) \cup (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$.

Por outro lado, se $(x, y) \in (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) \cup (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$, então $(x, y) \in (\mathsf{A} \times \mathsf{C})$ ou $(x, y) \in (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$.

Se $(x, y) \in (\mathsf{A} \times \mathsf{C})$, então $x \in \mathsf{A}$ e $y \in \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ e $y \in \mathsf{C}$.

Em qualquer dos casos, tem-se que $x \in (\mathsf{A} \cup \mathsf{B})$ e $y \in \mathsf{C}$. Logo, $(x, y) \in (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \times \mathsf{C}$. Portanto, $(\mathsf{A} \times \mathsf{C}) \cup (\mathsf{B} \times \mathsf{C}) \subset (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \times \mathsf{C}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que, $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \times \mathsf{C} = (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) \cup (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$. ■

Prova do item [II]: Se $(x, y) \in (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \times \mathsf{C}$, então $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ e $y \in \mathsf{C}$.

Como $x \in \mathsf{A}$ e $y \in \mathsf{C}$ tem-se que $(x, y) \in \mathsf{A} \times \mathsf{C}$. Por outro lado, $x \in \mathsf{B}$ e $y \in \mathsf{C}$, logo $(x, y) \in \mathsf{B} \times \mathsf{C}$. Portanto, $(x, y) \in \mathsf{A} \times \mathsf{C}$ e $(x, y) \in \mathsf{B} \times \mathsf{C}$. Logo, $(x, y) \in (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) \cap (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$. Portanto, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \times \mathsf{C} \subset (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) \cap (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$.

Por outro lado, se $(x, y) \in (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) \cap (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$, então $(x, y) \in (\mathsf{A} \times \mathsf{C})$ e $(x, y) \in (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$. Logo, $x \in \mathsf{A}$ e $y \in \mathsf{C}$ e $x \in \mathsf{B}$ e $y \in \mathsf{C}$, portanto, $x \in \mathsf{A}$ e $x \in \mathsf{B}$ e $y \in \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ e $y \in \mathsf{C}$. Portanto, $(x, y) \in (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \times \mathsf{C}$. Logo, $(\mathsf{A} \times \mathsf{C}) \cap (\mathsf{B} \times \mathsf{C}) \subset (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \times \mathsf{C}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \times \mathsf{C} = (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) \cap (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$. ■

Prova do item [III]: Se $(x, y) \in (\mathsf{A} - \mathsf{B}) \times \mathsf{C}$, então $(x, y) \in (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^\mathsf{C}) \times \mathsf{C}$. Logo, $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}^\mathsf{C}$ e $y \in \mathsf{C}$.

Como $x \in \mathsf{A}$ e $y \in \mathsf{C}$, tem-se que $(x, y) \in \mathsf{A} \times \mathsf{C}$. Por outro lado, $x \in \mathsf{B}^\mathsf{C}$ e $y \in \mathsf{C}$, logo $(x, y) \in \mathsf{B}^\mathsf{C} \times \mathsf{C}$.

Portanto, $(x, y) \in \mathsf{A} \times \mathsf{C}$ e $(x, y) \in \mathsf{B}^\mathsf{C} \times \mathsf{C}$. Se $(x, y) \in \mathsf{B}^\mathsf{C} \times \mathsf{C}$, então $x \in \mathsf{B}^\mathsf{C}$ e $y \in \mathsf{C}$. Logo, pela proposição 2.2.4, tem-se que $x \notin \mathsf{B}$ e $y \in \mathsf{C}$. Logo, $(x, y) \notin \mathsf{B} \times \mathsf{C}$. Portanto, $(x, y) \in \mathsf{A} \times \mathsf{C}$ e $(x, y) \notin \mathsf{B} \times \mathsf{C}$. Logo, $(x, y) \in (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) - (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$. Portanto, $(\mathsf{A} - \mathsf{B}) \times \mathsf{C} \subset (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) - (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$.

Por outro lado, se $(x, y) \in (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) - (\mathsf{B} - \mathsf{C})$, então $(x, y) \in (\mathsf{A} \times \mathsf{C})$ e $(x, y) \notin (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$.

Como $(x, y) \in (\mathsf{A} \times \mathsf{C})$, então $x \in \mathsf{A}$ e $y \in \mathsf{C}$. Por outro lado, $(x, y) \notin (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$ implica que $x \notin \mathsf{B}$ ou $y \notin \mathsf{C}$.

Tem-se que $y \in \mathsf{C}$. Logo, $x \notin \mathsf{B}$. E, pela proposição 2.2.4, tem-se que $x \in \mathsf{B}^{\mathsf{C}}$.

Logo, $x \in \mathsf{A}$, $x \in \mathsf{B}^{\mathsf{C}}$ e $y \in \mathsf{C}$. Portanto, $x \in \mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}$ e $y \in \mathsf{C}$. Logo, $(x, y) \in (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}^{\mathsf{C}}) \times \mathsf{C}$. Portanto, $(x, y) \in (\mathsf{A} - \mathsf{B}) \times \mathsf{C}$. Logo, $(\mathsf{A} \times \mathsf{C}) - (\mathsf{B} \times \mathsf{C}) \subset (\mathsf{A} - \mathsf{B}) \times \mathsf{C}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que,

$(\mathsf{A} - \mathsf{B}) \times \mathsf{C} = (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) - (\mathsf{B} \times \mathsf{C})$. ■

Exemplo 2.3.4 Provar que se $\mathsf{A} \subset \mathsf{A}'$ e $\mathsf{B} \subset \mathsf{B}'$, então $\mathsf{A} \times \mathsf{B} \subset \mathsf{A}' \times \mathsf{B}'$.

Prova: Se $(x, y) \in \mathsf{A} \times \mathsf{B}$, então $x \in \mathsf{A}$ e $y \in \mathsf{B}$. Logo, $x \in \mathsf{A}'$ e $y \in \mathsf{B}'$, portanto, $(x, y) \in \mathsf{A}' \times \mathsf{B}'$. Logo, $\mathsf{A} \times \mathsf{B} \subset \mathsf{A}' \times \mathsf{B}'$. ■

Exemplo 2.4.10 Seja $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ uma função. Provar que se $\mathsf{X} \subset \mathsf{A}$ e $\mathsf{Y} \subset \mathsf{A}$, então $f(\mathsf{X} - \mathsf{Y}) \supset f(\mathsf{X}) - f(\mathsf{Y})$. Provar que se f for injetiva, então $f(\mathsf{X} - \mathsf{Y}) = f(\mathsf{X}) - f(\mathsf{Y})$, para quaisquer subconjuntos X e Y de A.

Prova [1ª parte]: Se $z \in f(\mathsf{X}) - f(\mathsf{Y})$, então $z \in f(\mathsf{X})$ e $z \notin f(\mathsf{Y})$. Logo existe $x \in \mathsf{X}$ tal que $f(x) = z$ e não existe $y \in \mathsf{Y}$ tal que $f(y) = z$. Logo, existe $c \in \mathsf{X}$ tal que $f(c) = z$ e $c \notin \mathsf{Y}$. Portanto, existe $c \in \mathsf{X} - \mathsf{Y}$ tal que $f(c) = z$. Logo, $z \in f(\mathsf{X} - \mathsf{Y})$. Portanto, $f(\mathsf{X} - \mathsf{Y}) \supset f(\mathsf{X}) - f(\mathsf{Y})$. ■

Prova [2ª parte]: Se $z \in f(\mathsf{X} - \mathsf{Y})$, então existe $x \in \mathsf{X} - \mathsf{Y}$ tal que $f(x) = z$. Logo existe $x \in \mathsf{X}$ e $x \notin \mathsf{Y}$ tal que $f(x) = z$.

Suponha que $z \in f(\mathsf{Z})$, então, por definição, existe $c \in \mathsf{Y}$ tal que $f(c) = z$.

Logo, $f(c) = f(x)$ e pelo fato de f ser injetiva, tem-se que $c = x$. Logo, $x \in \mathsf{Y}$, o que é contraditório. Logo, $z \notin f(\mathsf{Y})$.

Como $x \in \mathsf{X}$ e $f(x) = z$, tem-se que $z \in f(\mathsf{X})$. Logo, $z \in f(\mathsf{X})$ e $z \notin f(\mathsf{Y})$. Portanto, $z \in f(\mathsf{X}) - f(\mathsf{Y})$. Logo, $f(\mathsf{X} - \mathsf{Y}) \subset f(\mathsf{X}) - f(\mathsf{Y})$.

Pela 1ª parte deste exemplo, tem-se que $f(\mathsf{X}) - f(\mathsf{Y}) \subset f(\mathsf{X} - \mathsf{Y})$.

Logo, pela propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos, conclui-se que $f(\mathsf{X} - \mathsf{Y}) = f(\mathsf{X}) - f(\mathsf{Y})$. ■

Exemplo 2.4.11 Provar que a função $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ é injetiva se, e somente se

$f(\mathsf{A} - \mathsf{X}) = f(\mathsf{A}) - f(\mathsf{X})$ para qualquer subconjunto X de A.

Prova: Suponha que a função f é injetiva. Segue da 2ª parte do exemplo 2.4.10 que $f(\mathsf{A} - \mathsf{X}) = f(\mathsf{A}) - f(\mathsf{X})$.

Inversamente, suponha que $f(\mathsf{A}-\mathsf{X}) = f(\mathsf{A}) - f(\mathsf{X})$. Se f não é injetiva, então existem x, $a \in \mathsf{A}$ com $x \neq a$, tais que $f(x) = f(a)$.

Seja $\mathsf{X} = \{x\}$. Como $a \neq x$, tem-se que $a \in \mathsf{A}$ e $a \notin \mathsf{X}$. Logo $a \in \mathsf{A} - \mathsf{X}$, portanto $f(a) \in f(\mathsf{A} - \mathsf{X})$. E, por hipótese, $f(a) = f(x)$. Logo, $f(x) \in f(\mathsf{A} - \mathsf{X})$.

Por outro lado, $x \in \mathsf{X}$, logo $f(x) \in f(\mathsf{X})$. Se $f(x) \in f(\mathsf{A}) - f(\mathsf{X})$, então

$f(x) \in f(\mathsf{A})$ e $f(x) \notin f(\mathsf{X})$, o que é contraditório, pois $f(x) \in f(\mathsf{X})$. Logo,

$f(x) \notin f(\mathsf{A}) - f(\mathsf{X})$. Portanto, $f(\mathsf{A} - \mathsf{X}) \neq f(\mathsf{A}) - f(\mathsf{X})$, o que é contraditório. Logo, f é injetiva. ■

Exemplo 2.5.8 Seja $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ uma função. Provar que $f^{-1}(f(\mathsf{X})) \supset \mathsf{X}$ para qualquer subconjunto X de A. Provar que f é injetiva se, e somente, se $f^{-1}(f(\mathsf{X})) = \mathsf{X}$ para todo subconjunto X de A.

Prova [1ª parte]: Se $x \in \mathsf{X}$, então existe $y \in \mathsf{B}$ tal que $f(x) = y$. Logo, $y \in f(\mathsf{X})$, ou, equivalentemente, $f(x) \in \mathsf{X}$, e portanto, $x \in f^{-1}(f(\mathsf{X}))$. Logo $f^{-1}(f(\mathsf{X})) \supset \mathsf{X}$. ■

Prova [2ª parte]: Suponha que f é injetiva. Se $f^{-1}(f(\mathsf{X})) \not\subset \mathsf{X}$, então existe

$a \in f^{-1}(f(\mathsf{X}))$ tal que $a \notin \mathsf{X}$, ou equivalentemente, existe $f(a) \in f(\mathsf{X})$ tal que $a \notin \mathsf{X}$.

Dado $x \in \mathsf{X}$, tem-se que $x \neq a$, pois $a \notin \mathsf{X}$. Logo existe $y \in \mathsf{B}$ tal que $f(x) = y$. Portanto, $y \in f(\mathsf{X})$, ou equivalentemente, $f(x) \in f(\mathsf{X})$.

Pelo fato de f ser injetiva tem-se que $f(x) \neq f(a)$ para todo $x \in \mathsf{X}$. Logo, $f(a) \notin f(\mathsf{X})$. Portanto, $a \notin f^{-1}(f(\mathsf{X}))$, o que é contraditório. Logo, $f^{-1}(f(\mathsf{X})) \subset \mathsf{X}$.

E, pela 1ª parte deste exemplo tem-se que $\mathsf{X} \subset f^{-1}(f(\mathsf{X}))$. Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que $f^{-1}(f(\mathsf{X})) = \mathsf{X}$.

Reciprocamente, suponha que $f^{-1}(f(\mathsf{X})) = \mathsf{X}$. Se f não é injetiva, então existem a, $x \in \mathsf{A}$, com $a \neq x$, tais que $f(a) = f(x)$.

Seja $\mathsf{X} = a$. Tem-se que $a \in \mathsf{X}$. Logo, existe $y \in \mathsf{B}$ tal que $f(a) = y$. Logo, $y \in f(\mathsf{X})$, ou equivalentemente, $f(a) \in f(\mathsf{X})$. E, como $f(a) = f(x)$, tem-se que $f(x) \in f(\mathsf{X})$.

Logo, $x \in f^{-1}(f(\mathsf{X}))$. Por hipótese, $f^{-1}(f(\mathsf{X})) = \mathsf{X}$, logo $x \in \mathsf{X}$, o que é contraditório, pois $\mathsf{X} = \{a\}$. Logo f é injetiva. ■

Exemplo 2.5.9 Seja $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ uma função. Provar que $f(f^{-1}(\mathsf{Z})) \subset \mathsf{Z}$, para todo subconjunto Z de B. Provar que f é sobrejetiva se, e somente se $f(f^{-1}(\mathsf{Z})) = \mathsf{Z}$, qualquer que seja o subconjunto Z de B.

Prova [1ª parte]: Se $y \in f(f^{-1}(\mathsf{Z}))$, então existe $x \in f^{-1}(\mathsf{Z})$ tal que $f(x) = z$. Logo, $f(x) \in \mathsf{Z}$, ou equivalentemente, $y \in \mathsf{Z}$. Portanto, $f(f^{-1}(\mathsf{Z})) \subset \mathsf{Z}$. ■

Prova [2ª parte]: Suponha que f é sobrejetiva. Então, para todo $w \in \mathsf{Z}$, existe $x \in \mathsf{A}$ tal que $f(x) = w$. Logo, $f(x) \in \mathsf{Z}$ e, portanto, $x \in f^{-1}(\mathsf{Z})$. Logo, existe $y \in \mathsf{B}$ tal que $f(x) = y$. Portanto, $y \in f(f^{-1}(\mathsf{Z}))$, e equivalentemente, $f(x) \in f(f^{-1}(\mathsf{Z}))$. Logo, $w \in f(f^{-1}(\mathsf{Z}))$. Portanto, $\mathsf{Z} \subset f(f^{-1}(\mathsf{Z}))$.

Pela 1ª parte deste, exemplo, tem-se que $f(f^{-1}(\mathsf{Z})) \subset \mathsf{Z}$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que, $f(f^{-1}(\mathsf{Z})) = \mathsf{Z}$.

Reciprocamente, suponha que $f(f^{-1}(\mathsf{Z})) = \mathsf{Z}$. Se $y \in \mathsf{Z}$, então $y \in f(f^{-1}(\mathsf{Z}))$. Logo, existe $x \in f^{-1}(\mathsf{Z})$ tal que $f(x) = y$. Como $f^{-1}(\mathsf{Z}) \subset \mathsf{A}$, tem-se que existe $x \in \mathsf{A}$ tal que $f(x) = y$.

Logo, por definição, f é sobrejetiva. ■

Exemplo 2.6.5 Seja $(\mathsf{A}_\lambda)_{\lambda \in \mathsf{L}}$ uma família de conjuntos com as seguintes propriedades: $\forall \lambda \in \mathsf{L}$, tem-se que $\mathsf{X} \supset \mathsf{A}_\lambda$; se $\mathsf{Y} \supset \mathsf{A}_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$, então $\mathsf{Y} \supset \mathsf{X}$. Provar que $\mathsf{X} = \bigcup\limits_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$.

Prova: Por hipótese, $\mathsf{X} \supset \mathsf{A}_\lambda$, $\forall \lambda \in \mathsf{L}$. Logo, utilizando-se sucessivamente a propriedade (a.V) tem-se $\mathsf{X} \cup \mathsf{X} \cup ... \cup \mathsf{X} \supset \bigcup\limits_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$. Logo, $\mathsf{X} \supset \bigcup\limits_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$. Portanto, $\mathsf{X} \supsetneq \bigcup\limits_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$ ou $\mathsf{X} = \bigcup\limits_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$.

Se $\mathsf{X} \supsetneq \bigcup\limits_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$, então existem $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathsf{X}$ tais que $x_1, x_2, ..., x_m \notin \bigcup\limits_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$.

Seja $\mathsf{Y} = \mathsf{X} - \{x_1, x_2, ..., x_m\}$. Tem-se que $\mathsf{X} - \{x_1, x_2, ..., x_m\} \supset \mathsf{A}_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$. Logo, $\mathsf{Y} \supset \mathsf{X}$, portanto, $\mathsf{X} - \{x_1, x_2, ..., x_m\} \supset \mathsf{X}$, o que é contraditório.

Logo, $\mathsf{X} = \bigcup\limits_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$. ■

Exemplo 2.6.6 Seja $(\mathsf{A}_\lambda)_{\lambda\in\mathsf{L}}$ uma família de conjuntos e X uma conjunto com as seguintes propriedades: $\forall\lambda \in \mathsf{L}$ tem-se que $\mathsf{X} \subset \mathsf{A}_\lambda$; se $\mathsf{Y} \subset \mathsf{A}_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$, então $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$. Provar que $\mathsf{X} = \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$.

Prova: Por hipótese, $\mathsf{X} \subset \mathsf{A}_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$. Logo, utilizando-se sucessivamente a propriedade (b.V), tem-se $\mathsf{X}\cap\mathsf{X}\cap...\cap\mathsf{X} \subset \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$. Logo, $\mathsf{X} \subset \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$. Portanto, $\mathsf{X} \subsetneq \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$ ou $\mathsf{X} = \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$.

Se $\mathsf{X} \subsetneq \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$, então existem $x_1, x_2, ..., x_p \in \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$ tais que $x_1, x_2, ..., x_p \notin \mathsf{X}$.

Seja $\mathsf{Y} = \mathsf{X} \cup \{x_1, x_2, ..., x_p\}$. Tem-se que $\mathsf{X} \cup \{x_1, x_2, ..., x_p\} \subset \mathsf{A}_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$. Logo, $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$, portanto $\mathsf{X} \cup \{x_1, x_2, ..., x_p\} \subset \mathsf{X}$, o que é contraditório, pois $x_1, x_2, ..., x_p \notin \mathsf{X}$.

Logo, $\mathsf{X} = \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$. ■

Exemplo 2.6.7 Denota-se por $\mathbb{P}(\mathsf{A})$ o conjunto de todos os subconjuntos de A. Seja $f : \mathbb{P}(\mathsf{A}) \to \mathbb{P}(\mathsf{A})$ uma função tal que se X e Y são subconjuntos de A tem-se que

$\mathsf{X} \subset \mathsf{Y} \;\Rightarrow\; f(\mathsf{X}) \subset f(\mathsf{Y})$ e $f(f(\mathsf{X})) = \mathsf{X}$. Provar que se X_λ é subconjunto de A para todo $\lambda \in \mathsf{L}$, então $f(\bigcup\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) = \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$ e $f(\bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$.

Prova [1ª parte]: $\mathsf{X}_\lambda \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$. Logo, por hipótese, $f(\bigcup\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) \subset f(\mathsf{X}_\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$. Portanto, $f(\bigcup\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) \subset \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$.

Por outro lado, se $z \in \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$, então $z \in f(\mathsf{X}_\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$. Logo existe $x \in \mathsf{X}_\lambda$ tal que $f(x) = z$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$. Logo, existe $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda$ tal que $f(x) = z$.

Observe que se $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda$, então $x \in \mathsf{X}_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$. Logo, existe $\lambda \in \mathsf{L}$ tal que $x \in \mathsf{X}_\lambda$. Portanto, $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda$. Logo, $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda$.

Portanto, se existe $X \in \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda$ tal que $f(x) = z$, então existe $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda$ tal que $f(x) = z$. Logo, $z \in f(\bigcup\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda)$. Portanto, $\bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda) \subset f(\bigcup\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda)$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que,

$f(\bigcup\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) = \bigcap\limits_{\lambda\in\mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$. ■

Prova [2ª parte]: Pela propriedade (g.II) tem-se que $f(\bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$. E pela 1ª parte deste exemplo tem-se que $\bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda) = f(\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda)$. Logo, $f(\bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) = f(\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda)$.

Por outro lado, pela propriedade (g.I) tem-se que $f(\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$. Logo, conclui-se que $f(\bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{X}_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}} f(\mathsf{X}_\lambda)$. ■

Exemplo 2.6.8 Sejam $(\mathsf{A}_\lambda)_{\lambda\in\mathsf{L}}$ e $(\mathsf{A}_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{M}}$ famílias de conjuntos. E considere as seguintes famílias de conjuntos com índices em $\mathsf{L}\times\mathsf{M}$: $(\mathsf{A}_\lambda\cup\mathsf{B}_\alpha)_{(\lambda,\alpha)\in\mathsf{L}\times\mathsf{M}}$; e $(\mathsf{A}_\lambda\cap\mathsf{B}_\alpha)_{(\lambda,\alpha)\in\mathsf{L}\times\mathsf{M}}$. Provar que $(\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda) \cap (\bigcup_{\alpha\in\mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha) = \bigcup_{(\lambda,\alpha)\in\mathsf{L}\times\mathsf{M}} (\mathsf{A}_\lambda \cap \mathsf{B}_\alpha)$ e $(\bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda) \cup (\bigcap_{\alpha\in\mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha) = \bigcap_{(\lambda,\alpha)\in\mathsf{L}\times\mathsf{M}} (\mathsf{A}_\lambda \cup \mathsf{B}_\alpha)$.

Prova [1ª parte]: Se $x \in (\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda) \cap (\bigcup_{\alpha\in\mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha)$, então $x \in (\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda)$ e $x \in (\bigcup_{\alpha\in\mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha)$.

Logo, existe $\lambda \in \mathsf{L}$ tal que $x \in \mathsf{A}_\lambda$ e existe $\alpha \in \mathsf{M}$ tal que $x \in \mathsf{B}_\alpha$. Portanto, existem $\lambda \in \mathsf{L}$ e $\alpha \in \mathsf{M}$ tais que $x \in \mathsf{A}_\lambda$ e $x \in \mathsf{B}_\alpha$. Logo, existe $(\lambda, \alpha) \in \mathsf{L} \times \mathsf{M}$ tal que

$x \in \mathsf{A}_\alpha \cap \mathsf{B}_\alpha$. Portanto,

$x \in \bigcup_{(\lambda,\alpha)\in\mathsf{L}\times\mathsf{M}} (\mathsf{A}_\lambda \cap \mathsf{B}_\alpha)$. Logo, $(\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda) \cap (\bigcup_{\alpha\in\mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha) \subset \bigcup_{(\lambda,\alpha)\in\mathsf{L}\times\mathsf{M}} (\mathsf{A}_\lambda \cap \mathsf{B}_\alpha)$.

Por outro lado, se $x \in \bigcup_{(\lambda,\alpha)\in\mathsf{L}\times\mathsf{M}} (\mathsf{A}_\lambda \cap \mathsf{B}_\alpha)$, então existe $(\lambda, \alpha) \in \mathsf{L} \times \mathsf{M}$ tal que $x \in \mathsf{A}_\lambda \cap \mathsf{B}_\alpha$. Logo, existem $\lambda \in \mathsf{L}$ e $\alpha \in \mathsf{M}$ tais que $x \in \mathsf{A}_\lambda$ e B_α. Portanto, existe $\lambda \in \mathsf{L}$ tal que $x \in \mathsf{A}_\lambda$ e existe $\alpha \in \mathsf{M}$ tal que $x \in \mathsf{B}_\alpha$. Logo, $x \in \bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda$ e $x \in \bigcup_{\alpha\in\mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha$. Portanto, $x \in (\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda) \cap (\bigcup_{\alpha\in\mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha)$. Logo, $\bigcup_{(\lambda,\alpha)\in\mathsf{L}\times\mathsf{M}} (\mathsf{A}_\lambda \cap \mathsf{B}_\alpha) \subset (\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda) \cap (\bigcup_{\alpha\in\mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha)$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que,

$(\bigcup_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda) \cap (\bigcup_{\alpha\in\mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha) = \bigcup_{(\lambda,\alpha)\in\mathsf{L}\times\mathsf{M}} (\mathsf{A}_\lambda \cap \mathsf{B}_\alpha)$. ■

Prova [2ª parte]: Se $x \in (\bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda) \cup (\bigcap_{\alpha\in\mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha)$, então $x \in (\bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda)$ ou $x \in (\bigcap_{\alpha\in\mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha)$. Logo, $x \in \mathsf{A}_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$ ou $x \in \mathsf{B}_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathsf{M}$. Logo, $x \in \mathsf{A}_\lambda$ ou $x \in \mathsf{B}_\alpha$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$ e $\alpha \in \mathsf{M}$. Logo, $x \in \mathsf{A}_\lambda \cup \mathsf{B}_\alpha$ para todo $(\lambda, \alpha) \in \mathsf{L} \times \mathsf{M}$. Portanto, $x \in \bigcap_{(\lambda,\alpha)\in\mathsf{L}\times\mathsf{M}} (\mathsf{A}_\lambda \cup \mathsf{B}_\alpha)$.

Logo, $(\bigcap_{\lambda\in\mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda) \cup (\bigcap_{\alpha\in\mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha) \subset \bigcap_{(\lambda,\alpha)\in\mathsf{L}\times\mathsf{M}} (\mathsf{A}_\lambda \cup \mathsf{B}_\alpha)$.

Por outro lado, se $x \in \bigcap_{(\lambda,\alpha)\in\mathsf{L}\times\mathsf{M}} (\mathsf{A}_\lambda \cup \mathsf{B}_\alpha)$, então $x \in \mathsf{A}_\lambda \cup \mathsf{B}_\alpha$ para todo

$(\lambda, \alpha) \in \mathsf{L} \times \mathsf{M}$. Portanto, $x \in \mathsf{A}_\lambda$ ou $x \in \mathsf{B}_\alpha$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$ e para todo $\alpha \in \mathsf{M}$. Logo,

$x \in \mathsf{A}_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathsf{L}$ ou $x \in \mathsf{B}_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathsf{M}$. Logo, $x \in \bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\alpha$ ou $x \in \bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha$. Portanto, $x \in (\bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda) \cup (\bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha)$. Logo, $\bigcap_{(\lambda,\alpha) \in \mathsf{L} \times \mathsf{M}} (\mathsf{A}_\lambda \cup \mathsf{B}_\alpha) \subset (\bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda) \cup (\bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha)$.

Segue-se da propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos que,

$$(\bigcap_{\lambda \in \mathsf{L}} \mathsf{A}_\lambda) \cup (\bigcap_{\alpha \in \mathsf{M}} \mathsf{B}_\alpha) = \bigcap_{(\lambda,\alpha) \in \mathsf{L} \times \mathsf{M}} (\mathsf{A}_\lambda \cup \mathsf{B}_\alpha). \qquad \blacksquare$$

Exemplo 2.6.9 Seja $(\mathsf{A}_{ij})_{(i,j)}$ uma família de conjuntos com índices $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Verifique se a igualdade $\bigcup_{j=1}^{\infty}(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij}) = \bigcap_{i=1}^{\infty}(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij})$ é válida.

Solução: Se $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty}(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij})$, então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij}$. Logo, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \mathsf{A}^{ij}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto, $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij})$. Logo, $\bigcup_{j=1}^{\infty}(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij}) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty}(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij})$.

Por outro lado, se $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij})$, então $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \mathsf{A}_{ij}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij}$. Logo, $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty}(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij})$. Portanto, $\bigcap_{j=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij}) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij})$.

Logo, pela propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos, conclui-se que, $\bigcup_{j=1}^{\infty}(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij}) = \bigcap_{j=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathsf{A}_{ij})$.

Portanto, a igualdade é válida.

Exemplo 2.4.12 Sejam A, B e C conjuntos. Denota-se por $\mathbb{F}(\mathsf{A};\mathsf{B})$ o conjunto de todas as funções f tais que $\mathsf{D_f} = \mathsf{A}$ e $\mathsf{CD_f} = \mathsf{B}$. Estabelecer uma função bijetiva entre os conjuntos $\mathbb{F}(\mathsf{A} \times \mathsf{B};\mathsf{C})$ e $\mathbb{F}(\mathsf{A};\mathbb{F}(\mathsf{B};\mathsf{C}))$.

Solução: Se $f \in \mathbb{F}(\mathsf{A};\mathbb{F}(\mathsf{B};\mathsf{C}))$, então, por definição, para todo $a \in \mathsf{A}$ existe $w \in \mathbb{F}(\mathsf{B};\mathsf{C})$ único, tal que $f(a) = w$.

Como $w \in \mathbb{F}(\mathsf{B};\mathsf{C})$, tem-se, por definição, que para todo $b \in \mathsf{B}$, existe $y \in \mathsf{C}$ único, tal que $w(b) = y$.

Isso permite definir uma função $g : \mathbb{F}(\mathsf{A};\mathbb{F}(\mathsf{B};\mathsf{C})) \to \mathbb{F}(\mathsf{A} \times \mathsf{B};\mathsf{C})$ com $g(f) = f^*$ tal que $f^*(a,b) = w(b) = [f(a)](b)$.

Agora deve-se provar que g é bijetiva. Sejam α, $h \in \mathbb{F}(\mathsf{A}; \mathbb{F}(\mathsf{B}; \mathsf{C}))$ tais que $\alpha \neq h$.

Conclui-se, pela definição 2.4.3, que existe $a \in \mathsf{A}$ tal que $\alpha(a) \neq h(a)$. Além disso, existem v e w únicos, em $\mathbb{F}(\mathsf{B}; \mathsf{C})$ tais que $\alpha(a) = v$ e $h(a) = w$. Logo, se $\alpha(a) \neq h(a)$, então $v \neq w$.

Novamente, pela definição 2.4.3, conclui-se que existe $b \in \mathsf{B}$ tal que $v(b) \neq w(b)$. Logo existem $a \in \mathsf{A}$ e $b \in \mathsf{B}$ tais que $[\alpha(a)](b) \neq [h(a)](b)$.

Por outro lado, existem funções α^*, $h^* \in \mathbb{F}(\mathsf{A} \times \mathsf{B}; \mathsf{C})$ tais que

$\alpha^*(a, b) = [\alpha(a)](b)$ e $h^*(a, b) = [h(a)](b)$ para todo $a \in \mathsf{A}$ e para todo $b \in \mathsf{B}$.

Logo, pela definição 2.4.3, tem-se que $\alpha^* \neq h^*$, ou equivalentemente,

$g(\alpha) \neq g(h)$.

Logo, $\alpha \neq h \;\Rightarrow\; g(\alpha) \neq g(h)$. Portanto, por definição, g é injetiva.

Seja $f^* \in \mathbb{F}(\mathsf{A} \times \mathsf{B}; \mathsf{C})$, existe $\alpha \in \mathbb{F}(\mathsf{A}; \mathbb{F}(\mathsf{B}; \mathsf{C}))$ e $a \in \mathsf{A}$ tal que $\alpha(a) = w$, com $w \in \mathbb{F}(\mathsf{B}; \mathsf{C})$. Logo, existe $b \in \mathsf{B}$ tal que $w(b) = y$, com $y \in \mathsf{C}$.

Logo, $w(b) = [f(a)](b) = f^*(a, b)$. Portanto, para todo $f^* \in \mathbb{F}(\mathsf{A} \times \mathsf{B}; \mathsf{C})$ existe $\alpha \in \mathbb{F}(\mathsf{A}; \mathbb{F}(\mathsf{B}; \mathsf{C}))$ tal que $g(\alpha) = f^*$. Logo, por definição, g é sobrejetiva.

Segue-se, da definição 2.4.7, que a função g é bijetiva.

3 AXIOMAS, CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS, CONJUNTOS ENUMERÁVEIS E NÃO-ENUMERÁVEIS

Este capítulo apresenta um estudo sobre conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis como consequência dos axiomas de Peano e dos conceitos de conjuntos finitos e infinitos.

3.1 Axiomas de Peano

Os números naturais podem ser exibidos como números ordinais, ou seja, objetos organizados em uma sequência (ordem) definida. Assim, 1 é o primeiro objeto, 2 é o número natural seguinte, 3 é o objeto que vem após o 2 e assim continua a sequência, com estes objetos organizados em uma ordem pré-definida.

Por outro lado, os números naturais são utilizados como números cardinais, isto é, objetos que representam uma quantidade.

Ambos os aspectos dos números naturais serão tratados neste texto. Iniciaremos com o aspecto ordinal, para, em seguida, obter o aspecto cardinal dos números naturais.

Toda a teoria dos números naturais pode ser deduzida dos três axiomas a seguir, conhecidos como axiomas de Peano.

Seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, uma função tal que a cada $n \in \mathsf{D_s}$ associa o valor $s(n) \in \mathsf{CD_s}$ chamado de sucessor de n.

Tem-se que a função s satisfaz os seguintes axiomas:

Axioma 3.1.1 $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva, isto é, se m, $n \in \mathbb{N}$, então $s(m) = s(n) \;\Rightarrow\; m = n$.

Em outras palavras, isto quer dizer que dois números naturais que têm o mesmo sucessor são iguais.

Axioma 3.1.2 Tem-se que $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) = \{1\}$.

Em palavras isto quer dizer que existe apenas um elemento de $\mathbb{N}$, que não é sucessor de nenhum outro número natural, a saber, o elemento 1.

Axioma 3.1.3 [Princípio da Indução Matemática] Se X é um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $1 \in \mathsf{X}$ e para todo $n \in \mathsf{X}$ tem-se, também, que $s(n) \in \mathsf{X}$, então $\mathsf{X} = \mathbb{N}$.

Proposição 3.1.1 Para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $s(n) \neq n$.

Prova: Seja $\mathsf{X} = \{m \in \mathbb{N}; s(m) \neq m\}$. Com efeito, pelo axioma 3.1.2, tem-se que $s(1) \in s(\mathbb{N})$ e $1 \in \mathbb{N} - s(\mathbb{N})$, isto é, $1 \in \mathbb{N}$ e $1 \notin s(\mathbb{N})$. Logo, $s(1) \neq 1$. Portanto, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $n \in \mathsf{X}$. Então, tem-se que $n \neq s(n)$. E, pelo axioma 3.1.1, s é uma função injetiva. Logo, $s(n) \neq s(s(n))$. Portanto, $s(n) \in \mathsf{X}$..

Segue-se do axioma 3.1.3 que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. ■

Observação 3.1.1 As demonstrações (ou provas) que utilizam o axioma 3.1.3, chamam-se demonstrações por indução.

Também é possível definir objetos indutivamente. As definições por indução baseiam-se na possibilidade de iterar uma função $f : \mathsf{X} \to \mathsf{X}$ um número n de vezes.

Definição 3.1.1 Seja $f \in \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{X})$ e $i : \mathbb{N} \to \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{X})$ uma função definida pela regra $i(n) = f^n$. Se a função $f^n : \mathsf{X} \to \mathsf{X}$ é tal que $f^1 = f$ e $f^{s(n)} = f \circ f^n$, então f^n chama-se a n-ésima iterada da função f.

Observe que se $s(1) = 2$ e $s(2) = 3$, então tem-se que $f^1 = f$,

$f^2 = f^{s(1)} = f \circ f^1 = f \circ f$ e $f^3 = f^{s(2)} = f \circ f^2 = f \circ (f \circ f) = f \circ f \circ f$.

Definiremos agora, por indução, a operação de adição de números naturais.

Definição 3.1.2 [Adição] Sejam m, $n \in \mathbb{N}$ a soma $(m + n) \in \mathbb{N}$ define-se por

$s^n(m) = m + n$.

Portanto, a soma $m + 1$ é obter o sucessor de m, pois $s^1(m) = m + 1 = s(m)$. E de modo geral a soma $m + n$ é iterar n vezes a operação de obter o sucessor de m.

Proposição 3.1.2 Para todo $m \in \mathbb{N}$, tem-se que $s^1(m) = s^m(1)$.

Prova: Seja $\mathsf{X} = \{m \in \mathbb{N}; s^1(m) = s^m(1)\}$. Tem-se que, pela definição 3.1.2, que $s^1(1) = 1 + 1 = s^1(1)$. Logo, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $m \in \mathsf{X}$. Então, tem-se que $s^1(s(m)) = s(m) + 1 = s^1(m) + 1$.

Por hipótese, $m \in \mathsf{X}$. Logo,

$s^1(m) + 1 = s^m(1) + 1 = s(s^m(1)) = s \circ s^m(1) = s^{s(m)}(1)$. Logo, $s(m) \in \mathsf{X}$.

E, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. ■

Definição 3.1.3 Se m, $n \in \mathbb{N}$, então $m + s(n) = s(m + n)$.

Propriedades da adição de números naturais:

(I) Associatividade: Para quaisquer $m, n, p \in \mathbb{N}$, tem-se $m + (n + p) = (m + n) + p$.

Prova: Seja $\mathsf{X} = \{p \in \mathbb{N}; m + (n + p) = (m + n) + p\}$. Pela definição 3.1.3, tem-se que $m + s(n) = s(m + n)$, ou seja, $m + (n + 1) = (m + n) + 1$. Logo, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $p \in \mathsf{X}$. Tem-se, pela definição 3.1.3, que

$m + (n + s(p)) = m + s(n + p) = s(m + (n + p))$.

Por hipótese, $p \in \mathsf{X}$. Portanto, $m + (n + p) = (m + n) + p$. Logo,

$s(m + (n + p)) = s((m + n) + p)$. E, novamente, pela definição 3.1.3, tem-se que

$s((m + n) + p) = (m + n) + s(p)$. Portanto, $s(p) \in \mathsf{X}$.

Segue-se do axioma 3.1.3 que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. ■

(II) Comutatividade: Para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$, tem-se $m + n = n + m$.

Prova: Seja $\mathsf{Y} = \{m \in \mathbb{N}; m + n = n + m\}$. Pela proposição 3.1.2, tem-se que

$s^n(1) = s^1(n)$, ou seja, $1 + n = n + 1$. Logo, $1 \in \mathsf{Y}$.

Suponha que $m \in \mathsf{Y}$. Tem-se que $s(m) + n = (m + 1) + n$. Pela propriedade associativa da adição de números naturais, tem-se que $(m+1)+n = (m+1)+n = m+s^n(1)$. Pela proposição 3.1.2, tem-se que $s^n(1) = s^1(n)$. Logo, $m+s^n(1) = m+s^1(n) = m+(n+1)$. Pela propriedade associativa da adição de números naturais, tem-se

$m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

Por hipótese, $m \in \mathsf{Y}$, logo $m+n = n+m$. Portanto, $(m+n)+1 = (n+m)+1$. E, novamente, pela propriedade associativa da adição, tem-se

$(n + m) + 1 = n + (m + 1) = n + s(m)$. Logo, $s(m) \in \mathsf{Y}$.

Segue-se do axioma 3.1.3 que $\mathsf{Y} = \mathbb{N}$. ■

(III) Lei do Corte: Para quaisquer m, n, $p \in \mathbb{N}$, tem-se que $m + n = m + p \ \Rightarrow\ n = p$.

Prova: Seja $\mathsf{X} = \{m \in \mathbb{N}; m + n = m + p \ \Rightarrow\ n = p\}$. Se $1 + n = 1 + p$, então $s^n(1) = s^p(1)$. E pela proposição 3.1.2, tem-se que $s^n(1) = s^1(n)$ e $s^p(1) = s^1(p)$. Logo,

$s^1(n) = s^1(p)$. Portanto, $s(n) = s(p)$.

Pelo axioma 3.1.1, tem-se que $s(n) = s(p) \Rightarrow n = p$. Logo, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $m \in \mathsf{X}$. Se $s(m) + n = s(m) + p$, então, pela propriedade comutativa da adição, tem-se $n + s(m) = p + s(m)$. E, pela definição 3.1.3, tem-se $s(n + m) = s(p + m)$.

Segue-se do axioma 3.1.1 que $s(n + m) = s(p + m) \Rightarrow n + m = p + m$. E, pela propriedade comutativa, tem-se $m + n = m + p$.

Por hipótese, $m \in \mathsf{X}$. Logo, $m + n = m + p \Rightarrow n = m$. Logo, $s(m) \in \mathsf{X}$.

Segue-se do axioma 3.1.3 que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. ■

Definição 3.1.4 [Aspecto ordinal] Sejam m, $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que m é menor que n e denota-se por $m < n$, quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Por outro lado, diz-se que m é maior que n e denota-se por $m > n$, quando existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + q$.

Utiliza-se a notação $m \leq n$ quando $m < n$ ou $m = n$.

Propriedades da relação de ordem dos números naturais:

(I) Transitividade: Se m, n e p são números naturais tais que, se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.

Prova: Se $m < n$, então, pela definição 3.1.4, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + r$.

Por outro lado, se $n < p$, então, pela definição 3.1.4, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $p = n + s$.

Logo, $p = n + s = (m + r) + s$, e, pela propriedade associativa da adição, tem-se que $(m + r) + s = m + (r + s)$. Logo, $p = m + (r + s)$. Como $r \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{N}$, tem-se que $(r + s) \in \mathbb{N}$. Logo, por definição, $m < p$. ■

(II) Tricotomia: Para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$, pode ocorrer apenas uma das seguintes alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$.

Prova: Seja $\mathsf{X} = \{n \in \mathbb{N}; m = n \text{ ou } m < n \text{ ou } n < m\}$.

Se $m \neq 1$, então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $1 = m + q$ ou existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = 1 + p$.

Suponha que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $1 = m + q$. Logo, $1 = s^q(m)$. Portanto, $1 \in s(\mathbb{N})$, o que é contraditório, pois, pelo axioma 3.1.2, tem-se que $1 \in \mathbb{N} - s(\mathbb{N})$, ou seja,

$1 \notin s(\mathbb{N})$.

Logo, não existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq m + q$. Portanto, $m \not< 1$.

Logo, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = 1 + p$. E, por definição, $1 < m$. Portanto, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $n \in \mathsf{X}$. Se $m = n$, então $m = n < n + 1$. Portanto, $m < n + 1$.

Se $m < n$, então, segue-se de $n < n + 1$ e da propriedade transitiva da relação de ordem dos números naturais que $m < n + 1$.

Se $n < m$, então, por definição, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$. E, se $p = 1$, então $m = n + 1$.

Por outro lado, se $p > 1$, então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $p = 1 + q$. Logo, $m = n + p = n + (1 + q) = (n + 1) + q$. Portanto, por definição, $n + 1 < m$.

Logo, $(n + 1) = s(n) \in \mathsf{X}$. E, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. ■

(III) Monotonicidade da Adição: Sejam m, $n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$. Tem-se para todo $p \in \mathbb{N}$ que $m + p < n + p$.

Prova: Sejam m, $n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$. Pela definição 3.1.4, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k$.

Logo, $n+p = (m+k)+p = m+(k+p) = m+(k+p) = m+(p+k) = (m+p)+k$. Portanto, $m + p < n + p$. ■

Observe que o aspecto ordinal (definição 3.1.4) também pode ser descrito da seguinte forma: se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = s^p(n)$, então diz-se que n é menor que m e denota-se por $n < m$.

Definição 3.1.5 [Multiplicação] Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$ uma função $f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pela regra $f_m(n) = n + m$. A multiplicação (ou produto) de dois números naturais m, $n \in \mathbb{N}$ quaisquer denota-se por $m \cdot n$ e é definida indutivamente por $m \cdot 1 = m$ e $m \cdot (n + 1) = (f_m)^n(m)$.

Observe que a multiplicação de números naturais está definida a partir de iterações da função f_m, com $m \in \mathbb{N}$. E que, $(f_m)^n(m) = m \cdot n + m$.

Proposição 3.1.3 Para todo $m \in \mathbb{N}$, tem-se que $m \cdot 1 = 1 \cdot m$.

Prova: Seja $\mathsf{X} = \{m \in \mathbb{N}; m \cdot 1 = 1 \cdot m\}$. Tem-se, pela definição 3.1.5, que $1 \cdot 1 = 1 = 1 \cdot 1$.

Logo $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $m \in \mathsf{X}$. Então, tem-se que $s(m) \cdot 1 = s(m) = m+1 = m \cdot 1 + 1 = 1 \cdot m + 1 = (f_1)^m(1) = 1 \cdot (m+1) = 1 \cdot s(m)$. Logo, $s(m) \in \mathsf{X}$. E, pelo axioma 3.1.3, tem-se que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. ■

Proposição 3.1.4 Se $m \in \mathbb{N}$, então $m \cdot 2 = (f_m)^1(m) = f_m(m) = m + m$. E,

$m \cdot 3 = (f_m)^2(m) = (f_m)^1(m) + m = (m+m) + m = m + m + m$.

Propriedades da multiplicação de números naturais:

(I) Distributividade: Para quaisquer m, n, $p \in \mathbb{N}$, tem-se que $(n+p) \cdot m = n \cdot m + p \cdot m$.

Prova: Seja $\mathsf{X} = \{m \in \mathbb{N}; (n+p) \cdot m = n \cdot m + p \cdot m\}$. Segue-se da definição 3.1.5 que $(n+p) \cdot 1 = n + p = n \cdot 1 + p \cdot 1$. Logo, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $m \in \mathsf{X}$. Então, tem-se que $(n+p) \cdot s(m) = (n+p) \cdot (m+1)$. E, pela definição 3.1.5, tem-se $(n+p) \cdot (m+1) = f_{n+p}^m(n+p) = (n+p) \cdot m + (n+p)$.

Por hipótese, $m \in \mathsf{X}$. Logo, $(n+p) \cdot m + (n+p) = (n \cdot m + p \cdot m) + (n+p)$. E utilizando as propriedades da adição, tem-se que $(n \cdot m + p \cdot m) + (n+p) =$

$n \cdot m + [p \cdot m + (n+p)] = n \cdot m + [p \cdot m + (p+n)] = n \cdot m + [(p \cdot m + p) + n] =$

$n \cdot m + [n + (p \cdot m + p)] = (n \cdot m + n) + (p \cdot m + p) = f_n^m(n) + f_p^m(p) =$

$n \cdot (m+1) + p \cdot (m+1) = n \cdot s(m) + p \cdot s(m)$. Logo, $s(m) \in \mathsf{X}$.

Segue-se do axioma 3.1.3 que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. ■

(II) Comutatividade: Para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $m \cdot n = n \cdot m$.

Prova: Seja $\mathsf{Y} = \{n \in \mathbb{N}; m \cdot n = n \cdot m\}$. Pela proposição 3.1.3, tem-se que $m \cdot 1 = 1 \cdot m$. Logo, $1 \in \mathsf{Y}$.

Suponha que $n \in \mathsf{Y}$. Então, tem-se que $m \cdot s(n) = m \cdot (n+1) =$

$(f_m)^n(m) = m \cdot n + m = m \cdot n + m \cdot 1 = m \cdot n + 1 \cdot m$.

Por hipótese, $n \in \mathsf{Y}$. Logo, $m \cdot n + 1 \cdot m = n \cdot m + 1 \cdot m$. E, pela propriedade distributiva da multiplicação, tem-se que $n \cdot m + 1 \cdot m = (n+1) \cdot m = s(n) \cdot m$.

Portanto, $s(n) \in \mathsf{Y}$. E, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{Y} = \mathbb{N}$. ■

(III) Associatividade: Para quaisquer m, n, $p \in \mathbb{N}$, tem-se que $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$.

Prova: Seja $\mathsf{X} = \{p \in \mathbb{N}; m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p\}$. Segue-se da definição 3.1.5 que

$m \cdot (n \cdot 1) = m \cdot n = (m \cdot n) \cdot 1$. Logo, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $p \in \mathsf{X}$. Então, tem-se que $m \cdot [n \cdot s(p)] = m \cdot [n \cdot (p+1)]$. E utilizando as propriedades distributiva e comutativa da multiplicação, tem-se que

$m \cdot [n \cdot (p+1)] = m \cdot [(p+1) \cdot n] = m \cdot (p \cdot n + 1 \cdot n) = m \cdot (n \cdot p + n) =$

$(n \cdot p + n) \cdot m = (n \cdot p) \cdot m + n \cdot m = m \cdot (n \cdot p) + m \cdot n.$

Por hipótese, $p \in \mathsf{X}$. Logo, $m \cdot (n \cdot p) + m \cdot n =$

$(m \cdot n) \cdot p + m \cdot n = p \cdot (m \cdot n) + 1 \cdot (m \cdot n) = (p+1) \cdot (m \cdot n) = s(p) \cdot (m \cdot n) = (m \cdot n) \cdot s(p).$

Logo, $s(p) \in \mathsf{X}$. E, portanto, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. ■

(IV) Lei do Corte: Para quaisquer m, n, $p \in \mathbb{N}$, tem-se que se $m \cdot p = n \cdot p$, então $m = n$.

Prova: Seja $\mathsf{Y} = \{p \in \mathbb{N}; m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n\}$. Segue-se da definição 3.1.5 que se $m \cdot 1 = n \cdot 1$, então $m = n$. Logo, $1 \in \mathsf{Y}$.

Suponha que $p \in \mathsf{Y}$. Se $m \cdot s(p) = n \cdot s(p)$, então $m \cdot (p+1) = n \cdot (p+1)$. E, pelas propriedades comutativa e distributiva da multiplicação tem-se que, se

$m \cdot (p+1) = n \cdot (p+1)$, então $(p+1) \cdot m = (p+1) \cdot n$. Logo, $p \cdot m + 1 \cdot m = p \cdot n + 1 \cdot n$. Portanto, $m \cdot p + m = n \cdot p + n$.

Por hipótese, $p \in \mathsf{Y}$. Logo, se $m \cdot p = n \cdot p$, então, pela lei do corte da adição, tem-se que $m \cdot p + m = n \cdot p + n \Rightarrow m = n$.

Portanto, $s(p) \in \mathsf{Y}$. E, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{Y} = \mathbb{N}$. ■

(V) Monotonicidade: Para quaisquer m, n, $p \in \mathbb{N}$. Tem-se que se $m < n$, então $m \cdot p < n \cdot p$.

Prova: Seja $\mathsf{X} = p \in \mathbb{N}; m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$. Segue-se da definição 3.1.5, que se $m < n$, então $m = m \cdot 1 < n = n \cdot 1$, isto é, $m \cdot 1 < n \cdot 1$. Logo, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $p \in \mathsf{X}$. Se $m < n$, então, pela definição 3.1.4, tem-se que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k$.

Logo, $n \cdot s(p) = (m+k) \cdot s(p)$. E, pela propriedade distributiva da multiplicação, tem-se que $(m+k) \cdot s(p) = m \cdot s(p) + k \cdot s(p)$.

Como $k \in \mathbb{N}$ e $s(p) = n + 1 \in \mathbb{N}$, então $(k \cdot s(p)) \in \mathbb{N}$. Logo, pela definição 3.1.4, tem-se que $m \cdot s(p) < n \cdot s(p)$.

Portanto, $s(p) \in \mathbb{N}$. E, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. ■

3.2 Princípio da Boa Ordenação (P.B.O) e Outros Teoremas Importantes

Definição 3.2.1 Seja X um subconjunto de $\mathbb{N}$. Diz-se que $k \in \mathsf{X}$ é menor elemento (ou elemento mínimo) de X se $k \leq n$ para todo $n \in \mathsf{X}$.

Denota-se o menor elemento de um conjunto numérico ou com a relação ordinal estabelecida, X, por $\min \mathsf{X}$.

Definição 3.2.2 Seja X um subconjunto de $\mathbb{N}$. Diz-se que $q \in \mathsf{X}$ é o maior elemento (ou elemento máximo) de X se $n \leq q$ para todo $n \in \mathsf{X}$.

Denota-se o maior elemento de um conjunto numérico ou com a relação ordinal estabelecida, X, por $\max \mathsf{X}$.

Exemplo 3.2.1 Seja $\mathsf{Y} = \{2, 4, ..., 20\}$. Tem-se, por definição que $\min \mathsf{Y} = 2$ e $\max \mathsf{Y} = 20$.

Proposição 3.2.1 O menor elemento de um conjunto $\mathsf{X} \subset \mathbb{N}$ é único.

Prova: Sejam p, $q \in \mathsf{X}$, tais que $p \leq n$ e $q \leq n$ para todo $n \in \mathsf{X}$. Logo, tem-se $p \leq q$ e $q \leq p$.

Se $p < q$, então, pela tricotomia, tem-se que $p \neq q$ e $q \not< p$, o que é contraditório, pois $q \leq p$.

Logo, $p = q$. ■

Proposição 3.2.2 O maior elemento de um conjunto $\mathsf{X} \subset \mathbb{N}$ é único.

Prova: Sejam r, $s \in \mathsf{X}$ tais que $n \leq r$ e $n \leq s$ para todo $n \in \mathsf{X}$. Logo, tem-se que $s \leq r$ e $r \leq s$.

Se $s < r$, então, pela tricotomia, tem-se que $r \neq s$ e $r \not< s$, o que é contraditório, pois $r \leq s$.

Logo, $s = r$. ■

Teorema 3.2.1 [P.B.O] Todo subconjunto não-vazio A de $\mathbb{N}$ possui um elemento mínimo.

Prova: Seja $I_n = \{p \in \mathbb{N}; 1 \leq p \leq n\}$ e $\mathsf{X} = \{n \in \mathbb{N}; I_n \subset \mathbb{N} - \mathsf{A}\}$. Se $1 \in \mathsf{A}$, então $1 = min\ \mathsf{A}$.

Se $1 \notin \mathsf{A}$, então $1 \in \mathsf{X}$. E, por outro lado, $\mathsf{X} \neq \mathbb{N}$ pois, $\mathsf{X} \subset \mathbb{N} - \mathsf{A}$ e $\mathsf{A} \neq \oslash$.

Assim, X satisfaz a primeira hipótese do axioma 3.1.3. Porém não cumpre sua conclusão.

Logo, deve existir algum $n \in \mathsf{X}$ tal que $s(n) \notin \mathsf{X}$. Portanto, $s(n) \in \mathsf{A}$ e $s(n)$ é o menor elemento de A. ■

Teorema 3.2.2 [Segundo Princípio da Indução Matemática] Sejam

$I_m = \{p \in \mathbb{N}; 1 \leq p \leq m\}$ e X um subconjunto de $\mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, se $I_m \subset \mathsf{X}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ com $m < n$ implicar que $n \in \mathsf{X}$, então $\mathsf{X} = \mathbb{N}$.

Prova: Seja $\mathsf{Y} = \mathbb{N} - \mathsf{X}$. Deve-se provar que $\mathsf{Y} = \oslash$.

Suponha que $\mathsf{Y} \neq \oslash$, então, pelo Teorema 3.2.1, conclui-se que existe $r \in \mathsf{Y}$ tal que r é o elemento mínimo de Y.

Logo, para todo $m < r$, natural, tem-se que $m \in \mathsf{X}$. Logo, $r \in \mathsf{X}$, o que é uma contradição, pois $r \notin \mathsf{X}$.

Logo, $\mathsf{Y} = \oslash$ e $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. ■

Definição 3.2.3 Um número $p \in \mathbb{N}$ chama-se primo quando $p \neq 1$ e não existem m, $n \in \mathbb{N}$, com $n < p$ e $m < p$, tais que $p = m.n$.

O teorema a seguir, chamado de Teorema Fundamental da Aritmética, pode ser provado utilizando o Segundo Princípio da Indução Matemática.

Teorema 3.2.3 Todo número natural $n > 1$ é primo ou é um produto de fatores primos.

Prova: Vamos utilizar o teorema 3.2.2. Suponha que todo $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ tal que $m < n$ possa ser decomposto como produto de fatores primos ou m seja um número primo.

Caso n seja primo, então, pelo teorema 3.2.2, a prova está completa.

Caso $n = p.q$, com $p < n$ e $q < n$ naturais, então, pela hipótese inicial, p e q são primos ou podem ser decompostos como produto de fatores primos. Portanto, n também é um produto fatores primos.

Segue-se do teorema 3.2.2 que todo $n > 1$ natural é primo ou é produto de fatores primos. ■

Exemplo 3.2.2 [Função n-ésima potência de números naturais] Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função definida indutivamente por $f(1) = a$ e $f(n+1) = a \cdot f(n)$.

Observe que, neste caso, temos uma iteração da multiplicação por a, de modo que f satisfaz $f(2) = f(1+1) = a \cdot f(1) = a \cdot a$ que denota-se por a^2,

$f(3) = f(2+1) = a \cdot f(2) = a \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a = a^3$. E de modo geral, $f(n)$ denota-se por a^n.

Exemplo 3.2.3 [Função fatorial de n] Seja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função definida indutivamente por $\varphi(1) = 1$ e $\varphi(n+1) = (n+1) \cdot \varphi(n)$.

Deste modo, $\varphi(2) = 2 \cdot \varphi(1) = 2 \cdot 1$ que denota-se por $2!$,

$\varphi(3) = 3 \cdot \varphi(2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$. E, genericamente, $\varphi(n) = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$, que denota-se por $n!$.

Exemplo 3.2.4 [Função média aritmética dos dois valores anteriores] $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ uma função definida indutivamente por $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}$ e $f(n+2) = \dfrac{f(n) + f(n+1)}{2}$.

3.3 Conjuntos Finitos e Infinitos

Definição 3.3.1 Seja $I_n = \{p \in \mathbb{N}; 1 \leq p \leq n\}$. Um conjunto X é dito finito quando $\mathsf{X} = \oslash$ ou quando, para algum $n \in \mathbb{N}$ existe uma função bijetiva $\varphi : I_n \to \mathsf{X}$.

A partir da definição 3.3.1, já é possível introduzir o aspecto cardinal dos números naturais. Caso $\mathsf{X} = \oslash$, diz-se que o número (quantidade) de elementos de X é zero. Caso exista a bijeção $\varphi : I_n \to \mathsf{X}$, então diz-se que n é a quantidade de elementos de X e denota-se por $\#\mathsf{X} = n$.

Proposição 3.3.1 Cada conjunto I_n é finito e possui n elementos.

Prova: Seja $\mathsf{Y} = \{n \in \mathbb{N};\ \exists\ \varphi_n : I_n \to I_n \text{ bijetiva }\}$. Para $n = 1$, defina uma função $\varphi_1 : I_1 \to I_1$, tal que $\varphi_1(1) = 1$. Tem-se que φ_1 é sobrejetiva, pois $\varphi_1(I_1) = \{1\} = \mathsf{CD}_{\varphi_1}$. E pelo fato de D_{φ_1} ser um conjunto unitário (possui apenas um elemento), tem-se que φ_1 é injetiva. Logo, φ_1 é bijetiva. Portanto, $1 \in \mathsf{Y}$.

Suponha que $n \in \mathsf{Y}$. Logo, existe uma função bijetiva $\varphi_n : I_n \to I_n$. A função

$\varphi_{n+1} : I_n \cup \{(n+1)\} \to I_n \cup \{(n+1)\}$ definida por

$$\varphi_{n+1}(m) = \begin{cases} \varphi_n(m) & \text{se} \quad m \in I_n \\ n+1 & \text{se} \quad m \in \{(n+1)\} \end{cases},$$

permanece sendo bijetiva, pois $n+1 \neq m$ e $\varphi_{n+1}(n+1) \neq \varphi_{n+1}(m)$ para todo $m \in I_n$, sendo, portanto, injetiva. E, $\varphi_{n+1}(I_n \cup \{(n+1)\}) = I_n \cup \{(n+1)\}$, sendo, portanto, sobrejetiva. Logo, $(n+1) = s(n) \in \mathsf{Y}$.

Segue-se do axioma 3.1.3 que $\mathsf{Y} = \mathbb{N}$.

Portanto, pela definição 3.3.1, conclui-se que I_n é finito para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, n é o número de elementos de I_n. ■

Proposição 3.3.2 Sejam X e Y conjuntos e $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função bijetiva. Um desses conjuntos é finito se, e somente se, o outro é.

Prova: Suponha que X é um conjuntos finito. Certamente, $\mathsf{X} \neq \oslash$ pois X é o domínio da função f. Logo, pela definição 3.3.1, existe uma bijeção $\varphi : I_n \to \mathsf{X}$.

Como f e φ são funções bijetivas, então, pelo corolário 2.5.1, a função composta $f \circ \varphi : I_n \to \mathsf{Y}$ também é uma bijeção. Assim, pela definição 3.3.1, Y é uma conjunto finito.

Reciprocamente, suponha que Y é um conjunto finito. Tem-se que $\mathsf{Y} = \oslash$ pois Y é o contradomínio da função f.

Logo, pela definição 3.3.1, existe uma bijeção $\psi : I_m \to \mathsf{Y}$.

Por outro lado, f é bijetiva, logo, pelo corolário 2.5.2, possui uma inversa $f^{-1} : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ e, pelo mesmo corolário conclui-se que f^{-1} é bijetiva já que, reciprocamente, f^{-1} também possui inversa, a saber, a função f.

Logo, pelo corolário 2.5.1, a função composta $f^{-1} \circ \psi : I_m \to \mathsf{X}$ também será bijetiva. Logo, pela definição 3.3.1, conclui-se que X é um conjunto finito. ■

Observação 3.3.1 Uma bijeção $\varphi : I_n \to \mathsf{X}$ é utilizada para incluir o carácter cardinal e significa uma contagem dos elementos de conjuntos finitos, considerando $\varphi(1) = x_1$, $\varphi(2) = x_2$, ..., $\varphi(n) = x_n$, temos $\mathsf{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ como uma representação ordinal para um conjunto finito X qualquer.

Teorema 3.3.1 Seja A um subconjunto de I_n. Se existir uma bijeção $f : I_n \to \mathsf{A}$, então $\mathsf{A} = I_n$.

Prova: Sejam A um subconjunto de de I_n e

$\mathsf{Y} = \{n \in \mathbb{N};$ se existe uma função bijetiva $f : I_n \to \mathsf{A}$, então $\mathsf{A} = I_n\}$.

Para $n = 1$, tem-se $I_1 = \{1\}$. Como, $\mathsf{A} = I_n$, então $\mathsf{A} = \oslash$ ou $\mathsf{A} = \{1\} = I_1$. E, por hipótese, existe uma função f tal que $\mathsf{CD_f} = \mathsf{A}$. Logo, $\mathsf{A} \neq \oslash$. Portanto, $\mathsf{A} = I_1$. E, conclui-se que $1 \in \mathsf{Y}$.

Suponha que $n \in \mathsf{Y}$. Seja $f : I_{n+1} \to \mathsf{A}$ uma função bijetiva e defina

$f(n+1) = a$.

Neste caso a restrição $f|I_n : I_n \to \mathsf{A} - \{a\}$ é bijetiva. E se $\mathsf{A} - \{a\} \subset I_n$, então, pela hipótese de que $n \in \mathsf{Y}$, conclui-se que $\mathsf{A} - \{a\} = I_n$ e que $a = n+1$. Logo, $\mathsf{A} = I_{n+1}$.

Por outro lado se $\mathsf{A} - a \not\subset I^n$, então tem-se que $(n+1) \in \mathsf{A} - a$. Neste caso existe $p \in I^n$ tal que $f(p) = n+1$. Logo, pode-se definir uma função bijetiva $\psi : I_{n+1} \to \mathsf{A}$ tal que

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq p \text{ e } x \neq n+1 \\ a & \text{se} \quad x = p \\ n+1 & \text{se} \quad x = n+1 \end{cases} .$$

.

Portanto, a restrição $\psi|I_n : I_n \to \mathsf{A} - \{(n+1)\}$ será uma bijeção tal que $\mathsf{A} - \{(n+1)\} \subset I_n$.

Logo, pela hipótese de que $n \in \mathsf{Y}$, conclui-se que $\mathsf{A} - \{(n+1)\} = I_n$. Portanto, $\mathsf{A} = I_{n+1}$.

Logo, $n+1 = s(n) \in \mathsf{Y}$. E, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{Y} = \mathbb{N}$. ■

Corolário 3.3.1 Se existem duas funções bijetivas $\varphi : I_n \to \mathsf{X}$ e $\psi : I_m \to \mathsf{X}$, então, tem-se que $m = n$.

Prova: Por hipótese, $\varphi : I_n \to \mathsf{X}$ é bijetiva, logo, pelo corolário 2.5.2, φ possui uma inversa $\varphi^{-1} : \mathsf{X} \to I_n$. E, além disso, conclui-se pelo corolário 2.5.2, que φ^{-1} é bijetiva, já que φ^{-1} também possui inversa, a saber, a função φ.

Portanto, tem-se que as funções $\psi : I_m \to \mathsf{X}$ e $\varphi^{-1} : \mathsf{X} \to I_n$ são bijetivas. Logo, pelo corolário 2.5.1, a função composta $\varphi^{-1} \circ \varphi : I_m \to I_n$ também é bijetiva.

Se $n \leq m$, então $I_n \subset I_m$. Logo, pelo teorema 3.3.1, conclui-se que $I_n = I_m$. Portanto, $m = n$.

Se $m < n$, então $I_m \subset I_n$. E, pelo fato de $\varphi^{-1} \circ \varphi$ ser bijetiva, tem-se pelo corolário 2.5.2 que $\varphi^{-1} \circ \varphi$ possui uma inversa $(\varphi^{-1} \circ \varphi)^{-1} : I_n \to I_m$. Além disso, como $(\varphi^{-1} \circ \varphi)^{-1}$, possui inversa, a saber, a própria função $\varphi^{-1} \circ \varphi$, conclui-se, pelo corolário 2.5.2 que $(\varphi^{-1} \circ \varphi)^{-1}$ é bijetiva. Logo, pelo teorema 3.3.1, conclui-se que $I_m = I_n$. Portanto, $m = n$. ∎

A afirmação apresentada no corolário 3.3.1 também pode ser provada sem o uso do teorema 3.3.1. É o que faremos na proposição a seguir.

Proposição 3.3.3 Se existe uma função bijetiva $f : I_m \to I_n$, então $m = n$. Consequentemente, se existem duas funções bijetivas, $\psi : I_n \to \mathsf{X}$ e $\varphi : I_m \to \mathsf{X}$, então $m = n$.

Prova [1ª parte]: Seja $f : I_m \to I_n$ uma função bijetiva. Tem-se, pela definição 3.3.1, que I_n é finito e que $\#I_n = m$.

Por outro lado, é possível definir uma função bijetiva $\alpha : I_n \to I_n$ tal que $\alpha(n) = n$ para todo $n \in \mathsf{D}_\alpha$.

Dados p, $q \in I_n$ tais que $\alpha(p) = \alpha(q)$, tem-se que $\alpha(p) = p$ e $\alpha(q) = q$. Logo, $p = q$, portanto α é injetiva.

Como $\mathsf{CD}_\alpha = \mathsf{D}_\alpha = I_n$, tem-se que se $x \in \mathsf{CD}_\alpha$ então $x \in \mathsf{D}_\alpha$ e $\alpha(x) = x$. Portanto, α é sobrejetiva.

Logo, por definição, α é bijetiva. E, pela definição 3.3.1, conclui-se que I_n é finito e $\#I_n = n$.

Portanto, $m = n$. ∎

Prova [2ª parte]: Sejam $\psi : I_n \to \mathsf{X}$ e $\varphi : I_m \to \mathsf{X}$ funções bijetivas. Tem-se, pelo corolário 2.5.2, que ψ possui uma inversa $\psi^{-1} : \mathsf{X} \to I_n$. Além disso, ψ^{-1} possui inversa, a saber, a própria função ψ. Logo, pelo corolário 2.5.2, conclui-se que ψ^{-1} é bijetiva.

Segue-se do corolário 2.5.1 que a função composta $\psi^{-1} \circ \varphi : I_m \to I_n$ é bijetiva. Logo, pela 1ª parte desta proposição, conclui-se que $m = n$. ∎

Corolário 3.3.2 Não existe uma função bijetiva $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ de um conjunto finito X sobre uma parte própria $\mathsf{Y} \subsetneq \mathsf{X}$.

Prova: Seja X um conjunto finito não-vazio. Tem-se, pela definição 3.3.1 que existe uma função bijetiva $g : I_n \to \mathsf{X}$. Logo, pela proposição 2.5.2, conclui-se que g possui uma inversa $g^{-1} : \mathsf{X} \to I_n$ que também é bijetiva.

Seja Y um subconjunto próprio de X, ou seja, $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$ e $\mathsf{Y} \neq \mathsf{X}$. Defina o conjunto $\mathsf{A} = g^{-1}(\mathsf{Y})$.

Observe que, do fato de g^{-1} ser bijetiva, conclui-se que g^{-1} é sobrejetiva. Logo, por definição, $g^{-1}(\mathsf{X}) = I_n$. E como, $\mathsf{Y} \subsetneq \mathsf{X}$, tem-se $g^{-1}(\mathsf{Y}) \neq I_n$. Logo, $\mathsf{A} \subset I_n$ e $\mathsf{A} \neq I_n$.

Pelo fato de g^{-1} ser bijetiva, tem-se que a restrição $g^{-1}|\mathsf{Y} : \mathsf{Y} \to \mathsf{A}$ também é bijetiva.

Por hipótese, a função $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ é bijetiva. Logo, pelo corolário 2.5.1, a função composta $(g^{-1}|\mathsf{Y}) \circ f : \mathsf{X} \to \mathsf{A}$ é bijetiva.

Novamente, utilizando-se o fato de g ser uma função bijetiva, conclui-se, pelo corolário 2.5.1 que a função composta $(g^{-1}|\mathsf{Y}) \circ f \circ g : I_n \to \mathsf{A}$ também é bijetiva, o que é contraditório, pois $\mathsf{A} \subset I_n$ e $\mathsf{A} = I_n$. E, pela contra-positiva do teorema 3.3.1 não existem funções bijetivas de I_n em A. ■

Teorema 3.3.2 Se X é um conjunto finito, então todo subconjunto $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$ é finito. Além disso, o número de elementos de Y não excede o de X e só é igual quando $\mathsf{Y} = \mathsf{X}$.

Prova [1ª parte]: Seja Y um subconjunto de X. Se $\mathsf{X} = \oslash$, então $\mathsf{Y} \subset \oslash$. E pela proposição 2.1.1, tem-se que $\oslash \subset \mathsf{Y}$. Logo, pela propriedade anti-simétrica da inclusão, conclui-se que $\mathsf{Y} = \oslash$. Logo, pela definição 3.3.1, Y é finito.

Se $\mathsf{X} \neq \oslash$, então, pela definição 3.3.1, existe uma função bijetiva $g : I_n \to \mathsf{X}$. E, pelo corolário 2.5.2, tem-se que g possui uma inversa $g^{-1} : \mathsf{X} \to I_n$ que também é bijetiva.

Seja $I_m = g^{-1}(\mathsf{Y})$. Observe que, do fato de g^{-1} ser bijetiva, conclui-se que g^{-1} é sobrejetiva. Logo, por definição, $g^{-1}(\mathsf{X}) = I_n$. E como, por hipótese $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$, tem-se que $I_m = g^{-1}(\mathsf{Y}) \subset g^{-1}(\mathsf{X}) = I_n$. Portanto, $I_m \subset I_n$.

Pelo fato de g^{-1} ser bijetiva tem-se que a restrição $g^{-1}|\mathsf{Y} : \mathsf{Y} \to I_m$ também é bijetiva. E, pelo corolário 2.5.2, conclui-se que $g^{-1}|\mathsf{Y}$ possui uma inversa

$(g^{-1}|\mathsf{Y})^{-1} : I_m \to \mathsf{Y}$ que também é bijetiva.

Logo, pela definição 3.3.1, tem-se que Y é finito. ■

Prova [2ª parte]: Tem-se que $I_m \subset I_n$. Logo, $I_m \subsetneq I_n$ ou $I_m = I_n$.

Se $I_m \subsetneq I_n$, então existe $p \in I_n$ tal que $p \notin I_m$, ou seja, $p \leq n$ e $m < p$. Se $p = n$, então $m < p = n$, isto é, $m < n$. Por outro lado, se $p < n$, então pela propriedade transitiva da relação de ordem conclui-se que $m < n$. Logo, em qualquer dos casos conclui-se que $m < n$.

Obteve-se que as funções $g : I_n \to \mathsf{X}$ e $(g^{-1}|\mathsf{Y})^{-1} : I_m \to \mathsf{Y}$ são bijetivas. Logo, pela definição 3.3.1, X e Y são conjuntos finitos com $\#\mathsf{X} = n$ e $\#\mathsf{Y} = m$. Logo, $\#\mathsf{Y} < \#\mathsf{X}$.

Se $I_m = I_n$, então $m = n$. Além disso, como $\#\mathsf{X} = n$ e $\#\mathsf{Y} = m$, conclui-se que $\#\mathsf{Y} = \#\mathsf{X}$.

E, pelo fato de $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$ e $\#\mathsf{Y} = \#\mathsf{X}$, conclui-se que $\mathsf{Y} = \mathsf{X}$. ■

Observação 3.3.2 O teorema 3.3.2 também pode ser provado utilizando-se o axioma 3.1.3, isto é, o Princípio da Indução Matemática, e considerando, S.P.G, apenas o caso $\mathsf{X} = I_n$. É o que faremos a seguir.

[Outra prova do teorema 3.3.2]

Prova: Considere $\mathsf{X} = I_n$ e $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$. Para $n = 1$ há apenas duas possibilidades: $\mathsf{Y} = \oslash$ ou $\mathsf{Y} = \{1\}$, validando assim as afirmações do teorema, para $n = 1$.

Suponha que o teorema 3.3.2 seja válido para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$. Considere $\mathsf{X} = I_{k+1}$ e $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$.

Se $\mathsf{Y} \subset I_k$, então, pela hipótese de indução, tem-se que Y é finito e $\#\mathsf{Y} \leq k$. E, $k < k + 1$, portanto, pela propriedade transitiva da relação de ordem, conclui-se que $\#\mathsf{Y} < k + 1 = \#\mathsf{X}$.

Se $\mathsf{Y} \not\subset I_k$, então $(k+1) \in \mathsf{Y}$. Logo, $\mathsf{Y} - \{(n+1)\} \subset I_k$. Portanto, sempre que $\mathsf{Y} - \{(k+1)\} \neq \oslash$ pode-se definir uma função bijetiva $\psi : I_p \to \mathsf{Y} - \{(k+1)\}$ certamente com $p \leq k$, pois $\mathsf{Y} - \{(k+1)\} \subset I_k$.

Defina uma função bijetiva $g : I_{P+1} \to \mathsf{Y}$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{se} \quad x \neq p+1 \\ k+1 & \text{se} \quad x = p+1 \end{cases}.$$

. Logo, pela definição 3.3.1, conclui-se que Y é finito e $\#\mathsf{Y} = p + 1$.

De $p\mathsf{Y}k$, tem-se que $p < k$ ou $p = k$. Caso $p < k$, conclui-se, pela monotonicidade da adição que $p + 1 < k + 1$, portanto $\#\mathsf{Y} < k + 1$. Por outro lado se $p = k$, então $s(p) = s(k)$, isto é, $p + 1 = k + 1$, portanto, $\#\mathsf{Y} = k + 1$. Logo, $\#\mathsf{Y} \leq k + 1 = \#\mathsf{X}$.

Para concluir deve-se mostrar que $\mathsf{Y} \subset I_{k+1}$ tem-se que se $\#\mathsf{Y} = k + 1$, então $\mathsf{Y} = I_{k+1}$.

Pode-se utilizar o corolário 3.3.2, para concluir que não pode haver uma função bijetiva de I_{k+1} sobre $\mathsf{Y} \subsetneq I_{k+1}$. Logo, $\mathsf{Y} = I_{k+1} = \mathsf{X}$ e as afirmações do teorema são válidas que $n = k + 1$.

Segue-se do axioma 3.1.3 que o teorema 3.3.2 é válido para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Corolário 3.3.3 Seja $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função injetiva. Se Y for finito, então X também será finito. Além disso, o número de elementos de X não excede o de Y.

Prova: Se $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ é uma função injetiva, então a função $f : \mathsf{X} \to f(\mathsf{X})$, com $f(\mathsf{X}) \subset \mathsf{Y}$ é bijetiva.

Pelo fato de Y ser um conjunto finito e $f(\mathsf{X})$ ser subconjunto de Y, conclui-se, pelo teorema 3.3.2 que $f(\mathsf{X})$ é finito. Logo, pela definição 3.3.1, tem-se que existe uma função bijetiva $g : I_n \to f(\mathsf{X})$.

Como $f : \mathsf{X} \to f(\mathsf{X})$ é bijetora, tem-se pelo corolário 2.5.2 que f possui uma inversa $f_{-1} : f(\mathsf{X}) \to \mathsf{X}$. Por outro lado, f^{-1} possui um inversa, a saber, a função $f : \mathsf{X} \to f(\mathsf{X})$. Logo, pelo corolário 2.5.2, a função $f^{-1} : f(\mathsf{X}) \to \mathsf{X}$ é bijetiva.

Segue-se do corolário 2.5.1 que a função composta $f^{-1} \circ g : I_n \to \mathsf{X}$ também é bijetiva. Portanto, pela definição 3.3.1, tem-se X é finito e que $\#\mathsf{X} = n$. Como, $f(\mathsf{X})$ é finito e $\#f(\mathsf{X}) = n$. Então, $\#\mathsf{X} = \#f(\mathsf{X})$.

Novamente, utilizando o fato de Y ser finito e $f(\mathsf{X})$ ser subconjunto de Y, conclui-se, pela $2^{\underline{a}}$ parte do teorema 3.3.2, que $\#f(\mathsf{X}) \leq \#\mathsf{Y}$. Portanto, tem-se que $\#\mathsf{X} \leq \#\mathsf{Y}$. ■

Corolário 3.3.4 Seja $g : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função sobrejetiva. Se X for finito, então Y também será finito. Além disso, o número de elementos de Y não excede o de X.

Prova: Se $g : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ é uma função sobrejetiva, então, pela definição 2.4.6, tem-se que $\forall y \in \mathsf{Y}$, $\exists x \in \mathsf{X}$ tal que $g(x) = y$.

Pode-se definir uma função $\psi : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ tal que $\psi(y) = x$, pois o fato de g ser sobrejetiva permite definir uma função ψ.

Por outro lado, $\mathsf{CD}_\psi \subset \mathsf{C_g}$. Portanto, é possível definir a função composta $g \circ \psi : \mathsf{Y} \to \mathsf{Y}$ tal que $g(\psi(y)) = y$ para todo $y \in \mathsf{Y}$. Logo, pela definição 2.5.5, a função g é uma inversa à esquerda para a função ψ. Logo, pela proposição 2.5.9, conclui-se que a função $\psi : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ é injetiva.

Se X for um conjunto finito, então, pelo corolário 3.3.3, conclui-se que Y é finito e que $\#\mathsf{Y} \leq \#\mathsf{X}$. ■

Definição 3.3.2 Um conjunto X é dito infinito quando $\mathsf{X} \neq \oslash$ e não existe uma função bijetiva $\psi : I_n \to \mathsf{X}$, seja qual for o $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.3.1 O conjunto $\mathbb{N}$ (dos números naturais) é infinito.

Prova: Seja $f : I_n \to \mathbb{N}$ uma função e suponha definidos $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n) \in \mathbb{N}$. Se $k \in I_n \subset \mathbb{N}$, então $k \in \mathbb{N}$ e como $f(k) \in \mathbb{N}$, tem-se pela definição 3.1.2 que $(k + f(k)) \in \mathbb{N}$, para todo $k \in I_n$.

Defina $\alpha = (1 + f(1)) + (2 + f(2)) + ... + (n + f(n))$. Tem-se, pela definição 3.1.2 que $\alpha \in \mathbb{N}$. Observe que $\alpha > f(k)$ para todo $k \in I_n$. Logo, $\alpha \neq f(k)$ para todo $k \in I_n$. Logo, $\alpha \in \mathbb{N} - f(I_n)$, isto é, $f(I_n) \neq \mathbb{N}$. Logo, f não é sobrejetiva. Portanto, f não é bijetiva, seja qual for o $n \in \mathbb{N}$, e pela definição 3.3.2, conclui-se que $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito. ■

Observação 3.3.3 As afirmações provadas anteriormente nos corolários 3.3.2, 3.3.3 e 3.3.4, para conjuntos finitos, terão, portanto, suas respectivas contra-positivas a seguir já provadas para conjuntos infinitos.

Corolário 3.3.2 [Contra-positiva] Se um conjunto X admite uma função bijetiva sobre uma parte própria $\mathsf{Y} \subsetneq \mathsf{X}$, então X é infinito.

Corolário 3.3.3 [Contra-positiva] Seja $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função injetiva. Se X for um conjunto infinito, então Y também será infinito.

Corolário 3.3.4 [Contra-positiva] Seja $g : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função sobrejetiva. Se Y for um conjunto infinito, então X também será infinito.

Definição 3.3.3 [Conjunto limitado] Um subconjunto X de $\mathbb{N}$, não vazio, chama-se limitado quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geqslant n$ seja qual for o $n \in \mathsf{X}$.

Teorema 3.3.3 Seja X um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$. As seguintes afirmações são equivalentes: (a) X é finito; (b) X é limitado; (c) X possui um elemento máximo.

Prova [1ª parte (a) $\Rightarrow$ (b)]: Se X é um conjunto finito não-vazio, então, pela definição 3.3.1, tem-se que existe uma função bijetiva $\varphi : I_n \to \mathsf{X}$.

Seja $\varphi(1) = x_1$; $\varphi(2) = x_2$, ..., $\varphi(n) = x_n$. Tem-se assim, $\mathsf{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Escolha $p = x_1 + x_2 + ... + x_n$. Como $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{N}$, tem-se pela definição 3.1.2 que

$p \in \mathbb{N}$. Além disso, pela definição 3.1.4, conclui-se que $p > x_i$, para todo $i \in I_n$. Logo, $p > x$, seja qual for o $x \in \mathsf{X}$. Logo, pela definição 3.3.3, conclui-se que X é um conjunto limitado.

Prova [$2^{\underline{a}}$ parte (b) $\Rightarrow$ (c)]: Suponha que $\mathsf{X} \subset \mathbb{N}$ é um conjunto limitado e seja $\mathsf{A} = \{p \in \mathbb{N}; p \geq n\ \forall n \in \mathsf{X}\}$. Pela definição 3.3.3, tem-se que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geq n$ para todo $n \in \mathsf{X}$, portanto, $p \in \mathsf{A}$ e $\mathsf{A} \neq \oslash$.

Logo, pelo P.B.O (teorema 3.2.1), tem-se que A possui um menor elemento p_0.

Como $p_0 \in \mathsf{A}$ tem-se que $p_0 \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $p_0 > n$ para todo $n \in \mathsf{X}$ ou existe $n \in \mathsf{X}$ tal que $p_0 = n$.

Suponha que $p_0 > n$ para todo $n \in \mathsf{X}$. Tem-se que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$ e $\mathsf{X} \neq \oslash$, deste modo, se $1 \in \mathsf{X}$, tem-se $p_0 > 1$. Se $1 \notin \mathsf{X}$, então $p_0 > min\mathsf{X} > 1$. Logo, em ambos os casos tem-se $p_0 > 1$. E, pela definição 3.1.4, tem-se que existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $p_0 = 1 + p_1 = p_1 + 1$.

Caso existe algum $n \in \mathsf{X}$ tal que $n > p_1$, então tem-se, pela monotonicidade da adição, que $n + 1 > p_1 + 1$. Logo, $n + 1 > p_0$. E $p_0 \in \mathbb{N}$, portanto, $n + 1 > n \geq p_0$, como $n \in \mathsf{X}$, o que é contraditório, já que $p_0 > n$.

Logo, $p_1 \geq n$, para todo $n \in \mathsf{X}$. Isto significa que $p_1 \in \mathsf{A}$, sendo $p_1 < p_0$, o que é contraditório, pois p_0 é o menor elemento de A.

Logo, existe $n \in \mathsf{X}$ tal que $p_0 = n$. Logo, $p_0 \in \mathsf{X}$ e p_0 é o maior elemento de X já que $p_0 \in \mathsf{A}$, ou seja, $p_0 \geq n$ para todo $n \in \mathsf{X}$.

Prova [$3^{\underline{a}}$ parte (c) $\Rightarrow$ (a)]: Suponha que X possui um elemento máximo. Por hipótese, $\mathsf{X} \subset \mathbb{N}$ e $\mathsf{X} \subset \oslash$. Logo, pelo teorema 3.2.1 (Princípio da Boa Ordenação) X possui um elemento mínimo.

Portanto, é possível definir uma função bijetiva $\varphi : I_m \to \mathsf{X}$ tal que

$\varphi(1) = min\mathsf{X}$, $\varphi(1) < \varphi(2) < ... < \varphi(m)$ e $\varphi(m) = máx\,\mathsf{X}$.

Logo, pela definição 3.1.1, X é um conjunto finito. ■

Definição 3.3.4 [Conjunto ilimitado] Seja X um subconjunto não-vazio de $\mathbb{N}$. Diz-se que X é ilimitado se para todo $p \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathsf{X}$ tal que $n > p$.

Teorema 3.3.4 Se X e Y são conjunto finitos disjuntos, tais que $\#\mathsf{X} = m$ e $\#\mathsf{Y} = n$, então $\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}$ é finito e $\#\mathsf{X} \cup \mathsf{Y} = m + n$.

Prova: Tem-se, pela definição 3.3.1 que existem função bijetoras $\varphi : I_m \to \mathsf{X}$ e $\psi : I_n \to \mathsf{Y}$.

Defina a função $g : I_{m+n} \to \mathsf{X} \cup \mathsf{Y}$, tal que $g(x) = \varphi(x)$ para $1 \leq x \leq m$ e $g(m+i) = \psi(i)$ para $1 \leq i \leq n$.

Por hipótese, X e Y são disjuntos, logo, pela definição 2.2.3, tem-se que

$\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} = \oslash$. Portanto, não existe p, $q \in I_{m+n}$ com $p \neq q$ tais que $\varphi(p) = \psi(q)$. Logo, $g(p) \neq g(q)$, e por definição, conclui-se que g é injetiva.

As funções φ e ψ são bijetivas; e portanto, sobrejetivas. Logo, $\forall w \in \mathsf{X}$ existe $x \in I_m$ tal que $\varphi(x) = w$ e $\forall y \in \mathsf{Y}$ existe $i \in I_n$ tal que $\varphi(i) = y$. Logo, $\forall \alpha \in \mathsf{X} \cup \mathsf{Y}$ existe tal que $x \in I_m$ ou $i \in I_n$ tal que $g(x) = \varphi(x) = \alpha$ ou $g(m+i) = \psi(i) = \alpha$. Logo, $\forall \alpha \in \mathsf{X} \cup \mathsf{Y}$, existe $p \in I_{m+n}$ tal que $g(p) = \alpha$. Portanto, pela definição 2.4.6, conclui-se que g é sobrejetiva.

Portanto, pela definição 2.4.7, tem-se que g é bijetiva. E, pela definição 3.3.1, conclui-se que $\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}$ é um conjunto finito e $\#\mathsf{X} \cup \mathsf{Y} = m + n$. ■

Corolário 3.3.5 Se $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, ..., \mathsf{X}_k$ são conjunto finitos, dois a dois disjuntos, tais que $\#\mathsf{X}_1 = m_1$, $\#\mathsf{X}_2 = m_2$, ..., $\#\mathsf{X}_k = m_k$, então $\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_k$ é finito e

$\#\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_k = m_1 + m_2 + ... + m_k$

Prova: Por hipótese, X_1 e X_2 são conjunto finitos disjuntos, com $\#\mathsf{X}_1 = m_1$ e $\#\mathsf{X}_2 = m_2$. Logo, pelo teorema 3.3.4, $\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2$ é finito e $\#\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 = m_1 + m_2$.

Tem-se que $\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2$ e X_3 são disjunto, pois, por hipótese, $\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_3 = \oslash$ e $\mathsf{X}_2 \cup \mathsf{X}_3 = \oslash$. Além disso, $\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2$ e X_3 são finitos, com $\#\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 = m_1 + m_2$ e

$\#\mathsf{X}_3 = m_3$. Logo, pelo teorema 3.3.4, conclui-se que $(\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2) \cup \mathsf{X}_3 = \mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup \mathsf{X}_3$ é finito e $\#\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup \mathsf{X}_3 = m_1 + m_2 + m_3$.

Utilizando-se, de modo análogo, o teorema 3.3.4, sucessivamente, conclui-se que $\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_{k-1}$ é finito e $\#\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_{k-1} = m_1 + m_2 + ... + m_{k-1}$.

Tem-se que $\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_{k-1}$ e X_k são disjuntos, pois por hipótese, tem-se $\mathsf{X}_1 \cap \mathsf{X}_k = \oslash$, $\mathsf{X}_2 \cap \mathsf{X}_k = \oslash$, ..., $\mathsf{X}_{k-1} \cap \mathsf{X}_k = \oslash$. Além disso, $\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_{k-1}$ e X_k são finitos, com $\#\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_(k-1) = m_1 + m_2 + ... + m_{k-1}$ e $\#\mathsf{X}_k = m_k$. Logo, pelo teorema 3.3.4, conclui-se que

$(\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_{k-1}) \cup \mathsf{X}_k = \mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_{k-1} \cup \mathsf{X}_k$ é finito e $\#\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_{k-1} \cup \mathsf{X}_k = (m_1 + m_2 + ... + m_{k-1}) + m_k = m_1 + m_2 + ... + m_{k-1} + m_k$. ■

Corolário 3.3.6 Se Y_1, Y_2, ..., Y_k são conjuntos finitos (não necessariamente disjuntos), tais que $\#\mathsf{Y}_1 = m_1$, $\#\mathsf{Y}_2 = m_2$, ..., $\#\mathsf{Y}_k = m_k$, então $\mathsf{Y}_1 \cup \mathsf{Y}_2 \cup ... \cup \mathsf{Y}_k$ é finito e $\#\mathsf{Y}_1 \cup \mathsf{Y}_2 \cup ... \cup \mathsf{Y}_k \leq m_1 + m_2 + ... + m_k$.

Prova: Defina $\mathsf{X}_1 = \{(x, i); x \in \mathsf{Y}_i\}$ para $i = 1, 2, ..., k$. Dessa forma, tem-se que os conjuntos $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, ..., \mathsf{X}_k$ são dois a dois disjuntos, com $\#\mathsf{X}_1 = m_1$, $\#\mathsf{X}_2 = m_2$, ...,$\#\mathsf{X}_k = m_k$.

Segue-se da corolário 3.3.5 que $\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_k$ é finito e

$\#\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_k = m_1 + m_2 + ... + m_k$.

Defina a função $\psi : \mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_k \to \mathsf{Y}_1 \cup \mathsf{Y}_2 \cup ... \cup \mathsf{Y}_k$, pela regra $\psi((x, i)) = x$.

A função ψ, assim definida, é sobrejetiva, pois dado $\alpha \in \mathsf{Y}_1 \cup \mathsf{Y}_2 \cup ... \cup \mathsf{Y}_k$, tem-se que $\alpha \in \mathsf{Y}_i$ para algum $i = 1, 2, ..., k$. Logo, existe o par ordenado $(x, i) \in \mathsf{X}_i$ e $\psi((x, i)) = x$.

Segue-se do corolário 3.3.4 que o conjunto $\mathsf{Y}_1 \cup \mathsf{Y}_2 \cup ... \cup \mathsf{Y}_k$ é finito e o número de elementos de $\mathsf{Y}_1 \cup \mathsf{Y}_2 \cup ... \cup \mathsf{Y}_k$ não excede o de $\mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_k$, isto é,

$\#\mathsf{Y}_1 \cup \mathsf{Y}_2 \cup ... \cup \mathsf{Y}_k \leq \mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_k = m_1 + m_2 + ... + m_k$. ■

Corolário 3.3.7 Se X_1, X_2, ..., X_k são conjuntos finitos tais que $\#\mathsf{X}_1 = m_1$, $\#\mathsf{X}_2 = m_2$, ..., $\#\mathsf{X}_k = m_k$, então o produto cartesiano $\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times ... \times \mathsf{X}_k$ é um conjunto finito e $\#\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times ... \times \mathsf{X}_k = m_1.m_2...m_k$.

Prova: Utilizaremos o Princípio da Indução Matemática (axioma 3.1.3).

Seja $k = 2$. Por hipótese, X_1 e X_2 são finitos, com $\#\mathsf{X}_1 = m_1$ e $\#\mathsf{X}_2 = m_2$. Logo, pela definição 3.3.1, conclui-se que existem funções bijetivas $\varphi_1 : I_{m_1} \to \mathsf{X}_1$ e $\varphi_2 : I_{m_2} \to \mathsf{X}_2$.

Defina as funções $\psi_i : I_{m_1} \to \mathsf{X}_1 \times \{y_i\}$, para $1 \leq i \leq m_2$ e $y_i \in \mathsf{X}_2$, tais que $\psi_i(n) = (\varphi_1(n), y_i)$. Deste modo, construímos as funções bijetivas, $\psi_1 : I_{m_1} \to \mathsf{X}_1 \times \{y_1\}$, $\psi_2 : I_{m_1} \to \mathsf{X}_1 \times \{y_2\}$, ..., $\psi_{m_2} : I_{m_1} \to \mathsf{X}_1 \times \{y_{m_2}\}$.

Segue-se da definição 3.3.1 que os conjuntos $\mathsf{X}_i \times \{y_i\}$, com $1 \leq i \leq m_2$ são finitos e $\#\mathsf{X}_i \times y_i = m_i$ para todo $i \in I_{m_2}$.

Além disso, definidos dessa forma, esses conjuntos são dois a dois disjuntos. Logo, pelo corolário 3.3.5, tem-se que $(\mathsf{X}_1 \times \{y_1\}) \cup (\mathsf{X}_1 \times \{y_2\}) \cup ... \cup (\mathsf{X}_1 \times \{y_{m_2}\}) = \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2$ é finito e $\#\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 = m_1 + m_1 + ... + m_1 = m_1.m_2$.

Suponha que as afirmações deste corolário sejam válida para algum $k \in \mathbb{N}$.

Então, tem-se que os conjuntos $\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times ... \times \mathsf{X}_k = \mathsf{A}$ e $\mathsf{X}_{\mathsf{k+1}}$ são finitos, com

$\#\mathsf{A} = m_1.m_2...m_k$ e $\#\mathsf{X}_{k+1} = m_{k+1}$.

Portanto, pela definição 3.3.1, conclui-se que existem funções bijetivas

$f : I_{m_1.m_2...m_k} \to \mathsf{A}$ e $g : I_{m_{k+1}} \to \mathsf{X}_{\mathsf{k+1}}$.

Pode-se, novamente, definir funções bijetivas $\alpha_i : I_{m_1.m_2...m_k} \to \mathsf{A} \times z_i$ para $1 \leq i \leq m_{k+1}$ e $z_i \in \mathsf{X}_{k+1}$ tais que $\alpha_i(n) = (f(n), z_i)$.

Segue-se da definição 3.3.1 que os conjuntos $\mathsf{A} \times z_i$, com $i \leq i \leq m_{k+1}$, são finitos.

Além disso, definidos desta forma, esses conjuntos são dois a dois disjuntos. Logo, pelo corolário 3.3.5, conclui-se que $(\mathsf{A} \times z_1) \cup (\mathsf{A} \times z_2) \cup ... \cup (\mathsf{A} \times z_{m_{k+1}}) =$

$\mathsf{A} \times \mathsf{X}_{\mathsf{k+1}} = (\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times ... \times \mathsf{X}_{\mathsf{k}}) \times \mathsf{X}_{\mathsf{k+1}} = \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times ... \times \mathsf{X}_{\mathsf{k+1}}$ é um conjunto finito e $\#\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times ... \times \mathsf{X}_{\mathsf{k+1}} = m_1.m_2...m_k + m_1.m_2...m_k + ... + m_1.m_2...m_k =$

$(m_1.m_2...m_k).m_{k+1} = m_1.m_2...m_{k+1}$.

Portanto, as afirmações são válidas para $k+1$. E, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que são válidas para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

Corolário 3.3.8 Se X e Y são conjuntos finitos tais que $\#\mathsf{X} = m$ e $\#\mathsf{Y} = n$, então o conjunto $\mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ [de todas as funções $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$] é finito e $\#\mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y}) = n^m$.

Prova: Por hipótese, X é finito e $\#\mathsf{X} = m$. Logo, pela definição 3.3.1, tem-se que existe um função bijetiva $\varphi : I_m \to \mathsf{X}$.

Pode-se definir uma função $g : \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y}) \to \mathbb{F}(I_m;\mathsf{Y})$ que a cada função

$f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$, com $f \in \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ associa a composta $f \circ g : I_m \to \mathsf{Y}$.

Sejam f_1, $f_2 \in \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ funções tais que $f_1 \neq f_2$. Por definição, tem-se que existe $x \in \mathsf{X}$ tal que $f_1(x) \neq f_2(x)$. Por outro lado a função $\varphi : I_m \to \mathsf{X}$ é bijetiva e, em particular, é sobrejetiva. Logo, para todo $x \in \mathsf{X}$ existe $n \in I_m$ tal que $\varphi(n) = x$. Logo, conclui-se que existe $n \in I_m$ tal que $f_1(\varphi(n)) \neq f_2(\varphi(n))$. Logo, por definição a função g é injetiva.

Seja $\alpha \in \mathbb{F}(I_m;\mathsf{Y})$. Tem-se que X e Y são conjuntos não-vazios, logo, pode-se definir uma função $h : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ tal que $\alpha = h \circ \varphi : I_m \to \mathsf{Y}$. Logo, por definição a função g é sobrejetiva. E, pela definição 2.4.7, conclui-se que g é uma função bijetiva.

Para concluir, observe que $\mathbb{F}(I_m; \mathsf{Y}) = \mathsf{Y} \times \mathsf{Y} \times ... \times \mathsf{Y}$ (m fatores) pois, pela definição 2.6.2, tem-se que o produto cartesiano $\mathsf{Y} \times \mathsf{Y} \times ... \times \mathsf{Y}$ (com m fatores) é o conjunto das funções $\alpha : \{1, 2, ..., m\} = I_n \to \mathsf{Y} \cup \mathsf{Y} \cup ... \cup \mathsf{Y} = \mathsf{Y}$.

Por hipótese, Y é finito e $\#\mathsf{Y} = n$. Logo, pelo corolário 3.3.7, conclui-se que $\mathsf{Y} \times \mathsf{Y} \times ... \times \mathsf{Y}$ (m fatores) é finito e $\#\mathsf{Y} \times \mathsf{Y} \times ... \times \mathsf{Y} = n.n...n = n^m$. ■

Observação 3.3.4 O axioma a seguir, conhecido como Princípio Fundamental da Enumeração ou Princípio da Multiplicação é uma ferramenta útil para a resolução de diversos problemas.

Axioma 3.3.1 Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$.

3.4 Conjuntos Enumeráveis

Definição 3.4.1 Um conjunto X chama-se enumerável quando é finito ou quando existe uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$. Neste último caso, diz-se que X é infinito enumerável.

As funções bijetoras $f : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$ chamam-se de enumeração dos elementos de X.

Exemplo 3.4.1 Seja $f : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$ uma função bijetiva definida por $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, ..., $f(n) = x_n$, ... Pode-se representar por $\mathsf{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.

Exemplo 3.4.2 O conjunto $\mathbb{P}$ (dos números pares) é infinito enumerável.

Prova: Defina a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$, pela regra $f(n) = 2.n$. Deve-se mostrar que f é bijetiva.

Sejam m, $n \in \mathbb{N}$ tais que $f(m) = f(n)$ tem-se, então que $2.m = 2.n$. Pela propriedade comutativa da multiplicação, tem-se que $m.2 = n.2$ e pela propriedade da lei do corte da multiplicação, tem-se que $m = n$. Logo, por definição, f é uma função injetiva.

Seja $y \in \mathbb{P}$. Tem-se que y é par, isto é, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $y = 2.q = f(q)$. Logo, por definição, f é sobrejetiva.

Portanto, pela definição 2.4.7, f é bijetiva. E, pela definição 3.4.1, conclui-se que o conjunto $\mathbb{P}$ é infinito enumerável. ■

Exemplo 3.4.3 O conjunto $\mathbb{I}-\{1\}$ (dos números impares, exceto 1) é infinito enumerável.

Prova: Defina a função $h : \mathbb{N} \to \mathbb{I} - \{1\}$, pela regra $h(n) = 2.n + 1$. Devemos mostrar que h é bijetiva.

Sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $h(n_1) = h(n_2)$. Tem-se, então que $2 \cdot n_1 + 1 = 2 \cdot n_2 + 1$. E utilizando-se as propriedades comutativa e lei do corte da adição, tem-se

$1 + 2 \cdot n_1 = 1 + 2 \cdot n_2$ e, portanto $2 \cdot n_1 = 2 \cdot n_2$. Pela lei do corte da multiplicação, obtém-se $n_1 = n_2$. Logo, pela definição 2.4.5, conclui-se que a função h é injetiva.

Seja $y \in \mathbb{I} - \{1\}$. Tem-se que y é impar, isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$y = 2 \cdot k + 1 = h(k)$. Logo, pela definição 2.4.6, tem-se que é sobrejetiva.

Portanto, pela definição 2.4.7, h é bijetiva. E, pela definição 3.4.1, conclui-se que o conjunto $\mathbb{I} - \{1\}$ é infinito enumerável. ■

Observação 3.4.1 É possível provar que $\mathbb{I}$ (o conjunto dos números impares) é infinito enumerável.

Basta, definir $h(n) = 2 \cdot n - 1$ e provar que a função $h : \mathbb{N} \to \mathbb{I}$ é bijetiva. Não faremos isso aqui, pois no capítulo 2, estamos supondo que a operação de subtração não está definida.

Também pode-se provar que $\mathbb{Z}$ (o conjunto dos números inteiros) é infinito enumerável.

Basta definir

$$\psi(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x \in \mathbb{Z}^+ \\ -2x+1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Z}^-_* \end{cases}$$

e provar que a função $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ é bijetiva. Neste caso, é possível concluir que a inversa $\psi^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ é bijetiva. Não faremos aqui, pois é necessário utilizar propriedades dos números inteiros, que também supõe-se não definidas no capítulo 2.

Teorema 3.4.1 Todo conjunto infinito X contém um subconjunto infinito enumerável.

Prova: Escolha a cada subconjunto não-vazio $\mathsf{A_i} \subset \mathsf{X}$, um elemento $x_i \in \mathsf{A_i}$. Defina uma função $f : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$, pela seguinte regra $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, ..., $f(n) = x_n$. Seja $\mathsf{A_{n+1}} = \mathsf{X} - \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$ e defina $f(n+1) = x_{n+1}$, com $x_{n+1} \in \mathsf{A_{n+1}}$. Observe que $\mathsf{A_{n+1}}$ é não-vazio, pois X é infinito.

Pode-se afirmar que a função $f : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$, definida deste modo, é injetiva.

De fato, dados n, $(n+1) \in \mathbb{N}$, tem-se, pela proposição 3.1.1 que

$n+1 = s(n) \neq n$, isto é, $n \neq n+1$. Além disso, tem-se que $f(n) \in \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$ enquanto $f(n+1) \in \mathsf{X} - \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$. Logo, $f(n) \neq f(n+1)$ e, por definição, f é injetiva.

Deste modo, se restringirmos o contradomínio da função f para $f(\mathbb{N}) \subset \mathsf{X}$, teremos uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$.

Portanto, pela definição 3.4.1, conclui-se que o subconjunto $f(\mathbb{N})$ de X é infinito enumerável. ■

Corolário 3.4.1 Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma função bijetiva $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$, de X sobre uma parte própria $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$.

Prova: Suponha que X seja um conjunto infinito. Segue-se do teorema 3.4.1 que X contém um subconjunto infinito enumerável $\mathsf{Y} = \{y_1, y_2, ..., y_n, ...\}$. Seja

$\mathsf{W} = (\mathsf{X} - \mathsf{Y}) \cup \{y_3, y_5, y_7, ..., y_{2n+1}\}$. Evidentemente, W é subconjunto próprio de X, pois

$\mathsf{W} = \mathsf{X} - \{y_1, y_2, y_4, ..., y_{2n}, ...\}$.

Defina a função $\psi : \mathsf{X} \to \mathsf{W}$, pela seguinte regra, $\psi(x) = x$ se $x \in \mathsf{X} - \mathsf{Y}$ e $\psi(y_n) = y_{2n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Dados x_1, $x_2 \in \mathsf{X} - \mathsf{Y}$ tais que $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, tem-se que $x_1 = x_2$. E dados y_p, $y_q \in \mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$ tais que $\psi(y_p) = \psi(y_q)$, então tem-se que $y_{2p+1} = y_{2q+1}$, isto só é possível se $2 \cdot p + 1 = 2 \cdot q + 1$. E utilizando a propriedade comutativa da adição tem-se que $1 + 2 \cdot p = 1 + 2 \cdot q$. Pela lei do corte da adição, obtém-se $2 \cdot p = 2 \cdot q$. E pelas propriedades comutativa e lei do corte da multiplicação, conclui-se que $p = q$. Logo, tem-se que $y_p = y_q$.

Se existem $x \in \mathsf{X} - \mathsf{Y}$ e $y_k \in \mathsf{Y}$. Evidentemente, tem-se que $x \neq y_k$. Suponha que $\psi(x) = \psi(y_k)$. Então, obtém-se que $x = y_{k+1} \in \mathsf{Y}$, o que é contraditório, pois $x \notin \mathsf{Y}$. Logo, $\psi(x) \neq \psi(y_k)$. Portanto, por definição, a função ψ é injetiva.

Dado $w \in \mathsf{W}$. Por definição, tem-se que $w \in \mathsf{X} - \mathsf{Y}$ ou

$w \in \{y_3, y_5, y_7, ..., y_{2n+1}, ...\}$.

Se $w \in \mathsf{X} - \mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$, então $w \in \mathsf{D}_\psi$ e $\psi(w) = w$. Se $w \in \{y_2, y_5, y_7, ..., y_{2n+1}, ...\}$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $w = y_{2r+1}$. Além disso, $y_r \in \mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$, pois $r \in \mathbb{N}$. Então, $y_r \in \mathsf{D}_\psi$ e $\psi(y_r) = y_{2r+1}$. Portanto, por definição, a função ψ é sobrejetiva.

Pela definição 2.4.7, conclui-se que a função $\psi : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ é bijetiva, sendo Y um subconjunto próprio de X.

Reciprocamente, suponha que exista uma função $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$, com $\mathsf{Y} \subsetneq \mathsf{X}$. Então, pela contra-positiva do corolário 3.3.2, conclui-se que X é um conjunto infinito. ■

Teorema 3.4.2 Todo subconjunto $\mathsf{X} \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Prova: Seja X um subconjunto de $\mathbb{N}$. Caso X seja finito. Então, pela definição 3.4.1, tem-se que X é enumerável.

Caso X seja infinito. Então, pode-se definir uma função $\psi : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$ de modo que $\psi(1) = \min \mathsf{X}$ e $\psi(1) < \psi(2) < ... < \psi(n)$.

Para completar a definição, por indução, da função ψ, seja

$\mathsf{B}_n = \mathsf{X} - \{\psi(1), \psi(2), ..., \psi(n)\}$, escolha $\psi(n+1) = \min \mathsf{B}_n$.

Dado n, $(n+1) \in \mathbb{N}$ tem-se, pela proposição 3.1.1, que $n+1 = s(n) \neq n$. Além disso, $\psi(n) < \psi(n+1)$, ou seja, $\psi(n) \neq \psi(n+1)$. Portanto, por definição, ψ é uma função injetiva.

Suponha que $\psi(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{X}$. Então, existe $x \in \mathsf{X} - f(\mathbb{N})$. Portanto, $x \in \mathsf{B}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $x > \psi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, tem-se, pela definição 3.3.3 que o conjunto $\psi(\mathbb{N})$ é limitado. Logo, pelo teorema 3.3.3, o conjunto $\psi(\mathbb{N})$ é finito, o que é contraditório, pois $\psi(\mathbb{N})$ é infinito.

Logo, $\psi(\mathbb{N}) = \mathsf{X}$. E, por definição, ψ é sobrejetiva.

Portanto, pela definição 2.4.7, ψ é bijetiva. Logo, pela definição 3.4.1, conclui-se que X é infinito enumerável.

Portanto, em ambos os casos, tem-se que o conjunto X é enumerável. ■

Corolário 3.4.2 Um subconjunto, de um conjunto enumerável, é enumerável. Ou, equivalentemente, se uma função $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ é injetiva e Y é um conjunto enumerável, então X é enumerável.

Prova: Seja Y um conjunto enumerável e X um subconjunto de Y.

Suponha que Y é um conjunto finito. Pode-se definir uma função $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ tal que $f(x) = x$. Tem-se que f é injetiva, pois dados x_1, $x_2 \in \mathsf{X}$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. Logo, pelo corolário 3.3.3, conclui-se que X é um conjunto finito. Portanto, pela definição 3.4.1, tem-se que X é enumerável.

Caso Y seja infinito enumerável, então, tem-se, pela definição 3.4.1, que existe uma função bijetiva $h : \mathbb{N} \to \mathsf{Y}$. E, pelo corolário 2.5.2, conclui-se que h possui uma inversa $h^{-1} : \mathsf{Y} \to \mathbb{N}$.

Por outro lado h^{-1} também possui uma inversa, a saber, a função $h : \mathbb{N} \to \mathsf{Y}$. Logo, pelo corolário 2.5.2, conclui-se que $h^{-1} : \mathsf{Y} \to \mathbb{N}$ é uma função bijetiva.

Evidentemente, a restrição $h^{-1}|\mathsf{X} : \mathsf{X} \to \mathbb{N}$ (sendo X um subconjunto de Y), é injetiva. Portanto, a função $h^{-1}|\mathsf{X} : \mathsf{X} \to h^{-1}(\mathsf{X})$ como $h^{-1}(\mathsf{X}) \subset \mathbb{N}$, será bijetiva.

Pelo teorema 3.4.2, conclui-se que o conjunto $h^{-1}(\mathsf{X})$ é enumerável.

Caso $h^{-1}(\mathsf{X})$ seja um conjunto finito, tem-se que $h^{-1}(\mathsf{X}) \neq \emptyset$, pois $h^{-1}(\mathsf{X})$ é contradomínio de uma função. Logo, pela definição 3.3.1, tem-se que existe para algum $k \in \mathbb{N}$, uma função bijetiva $\alpha : I_k \to h^{-1}(\mathsf{X})$.

Por outro lado, a função $h^{-1}|\mathsf{X} : \mathsf{X} \to h^{-1}(\mathsf{X})$ é bijetiva, logo, utilizando-se o corolário 2.5.2, conclui-se que $h^{-1}|\mathsf{X}$ possui uma inversa $(h^{-1}|\mathsf{X})^{-1} : h^{-1}(\mathsf{X}) \to \mathsf{X}$, que também é bijetiva, já que também possui um inversa, a saber, a função $h^{-1}|\mathsf{X}$.

Segue-se do corolário 2.5.1 que a função composta $(h^{-1}|\mathsf{X})^{-1} \circ \alpha : I_k \to \mathsf{X}$ também é bijetiva. E, pela definição 3.3.1, tem-se que X é finito. Logo, pela definição 3.4.1, conclui-se que X é enumerável.

Caso $h^{-1}(\mathsf{X})$ seja infinito enumerável, então, pela definição 3.4.1, tem-se que existe uma função bijetiva $\psi : \mathbb{N} \to h^{-1}(\mathsf{X})$. E, pelo corolário 2.5.2, conclui-se que a função composta $(h^{-1}|\mathsf{X})^{-1} \circ \psi : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$ também é bijetiva. Logo, pela definição 3.4.1, tem-se que X é um conjunto infinito enumerável.

Portanto, em qualquer dos casos, tem-se que X é enumerável. ■

Definição 3.4.2 Sejam X e Y subconjuntos não-vazios de $\mathbb{N}$. Uma função $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ chama-se crescente quando, dados m, $n \in \mathsf{X}$, com $m < n$, tem-se $f(m) < f(n)$.

Em outras palavras, para que f seja crescente, deve-se ter que $f(m) < f(n)$, sempre que $m < n$, sendo que m, $n \in \mathsf{X}$.

Corolário 3.4.3 Para todo subconjunto infinito X de $\mathbb{N}$, existe uma função bijetiva crescente $f : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$.

Prova: Seja X um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Pode-se definir uma função $f : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$, tal que $f(1) = \min \mathsf{X}$ e $f(1) < f(2) < ... < f(n)$.

Para completar a definição por indução, seja $\mathsf{Y}_n = \mathsf{X} - \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$. Defina $f(n+1) = min\mathsf{Y}_n$.

Dados n, $(n+1) \in \mathbb{N}$, evidentemente com $n < n+1$, tem-se que $f(n) < f(n+1)$. Logo, pela definição 3.4.2, conclui-se que f é uma função crescente. Além disso, como $n < n+1$, então $n \neq n+1$, e se $f(n) < f(n+1)$, então $f(n) \neq f(n+1)$. Logo, por definição, f é injetiva.

Além disso, tem-se que $f(\mathbb{N}) \subset \mathsf{X}$. Logo, $f(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{X}$ ou $f(\mathbb{N}) = \mathsf{X}$.

Se $f(\mathbb{N}) \subsetneq \mathsf{X}$, então existe $x \in \mathsf{X} - f(\mathbb{N})$. Logo, $x \in \mathsf{Y}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, pela definição 3.3.3, tem-se que o conjunto $f(\mathbb{N})$ é limitado. E, pelo teorema 3.3.3, conclui-se que o conjunto $f(\mathbb{N})$ é finito, o que é contraditório, pois a função $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ é bijetiva e pela definição 3.4.1, tem-se que $f(\mathbb{N})$ é infinito enumerável. Em particular, $f(\mathbb{N})$ é infinito.

Logo $f(\mathbb{N}) = \mathsf{X}$, e, por definição, f é sobrejetiva. Portanto, pela definição 2.4.7, a função f é bijetiva.

Logo, a função $f : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$ é bijetiva e crescente. ■

Teorema 3.4.3 Seja X um conjunto enumerável. Se $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ é sobrejetiva, então o conjunto Y é enumerável.

Prova: Seja $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função sobrejetiva. Segue-se da proposição 2.5.10 que f possui uma inversa à direita, ou seja, uma função $g : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ tal que a composta $f \circ g : \mathsf{Y} \to \mathsf{Y}$ fica definida pela regra $f \circ g(y) = y$.

Pela definição 2.5.5, tem-se que a função f é uma inversa à esquerda para a função g. Logo, pela proposição 2.5.9, conclui-se que $g : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ é uma função injetiva.

Além disso, por hipótese, X é um conjunto enumerável. Logo, pelo corolário 3.4.2, tem-se que Y é um conjunto enumerável. ■

Definição 3.4.3 Sejam a, $b \in \mathbb{N}$. Se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = b \cdot k$, então diz-se que b divide a e denota-se por $b|a$.

Exemplo 3.4.4 O conjunto dos números primos é infinito enumerável.

Prova: Suponha que o conjunto dos números primos é finito. Representaremos este conjunto por $\mathsf{P} = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$.

Seja $p_n = \max \mathsf{P}$, isto é, p_n é o maior número primo.

Defina $w = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Tem-se, pelo Teorema Fundamental da Aritmética (teorema 3.2.3) que w é um produto de fatores primos. Logo, pela definição 3.4.3, conclui-se que algum número primo p divide w.

Além disso $p \in \mathsf{P}$, pois estamos supondo que o conjunto dos números primos é finito.

Deste modo, $p|w$ e $p|p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$, ou seja, $p|(p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1)$ e $p|(p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n)$.

Logo, $w = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$ ou $p = 1$.

Se $w = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$, então $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$. Logo,

$s(p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n) = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$, o que é contraditório, pois pela proposição 3.1.1, tem-se que $s(n) \neq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $p = 1$, então, pela definição 3.2.3, tem-se que p não é um número primo, o que é contraditório, pois p é primo.

Portanto, o conjunto dos números primos é infinito. Além disso, pela definição 3.2.3, tem-se que o conjunto dos números primos é subconjunto de $\mathbb{N}$. Logo, pelo teorema 3.4.2, conclui-se que este conjunto é enumerável.

Portanto, o conjunto dos números primos é infinito enumerável. ■

Proposição 3.4.1 A decomposição de um número natural $n > 1$, como produto de fatores primos é única, exceto, pela ordem dos fatores.

Prova: Sejam $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$ e $n = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_r$ decomposição de n como produto de fatores primos, tais que $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n$ e $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_r$, com $k < r$.

Tem-se, portanto que $q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_r = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$. Logo, pela definição 3.4.3, conclui-se que $p_1|q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_r$. Em [[ALE], p.118, prova-se que existe um índice m, com $1 \leq m \leq r$ tal que $p_1 = q_m$. Logo, $q_1 \leq p_1$.

Da equação $q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_r = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$, conclui-se, pela definição 3.4.3 que

$q_1|p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$. Logo, existe um índice s, com $1 \leq s \leq k$ tal que $q_1 = p_s$. Logo, $q_1 \geq p_1$.

Se $q_1 < p_1$, então, pela propriedade da tricotomia da relação de ordem, tem-se que $q_1 \neq p_1$ e $p_1 \not< q_1$, o que é contraditório.

Logo $p_1 = q_1$. E conclui-se, pelas propriedades comutativa e lei do corte da multiplicação que $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_r \;\Rightarrow\; (p_2 \cdot ... \cdot p_k) \cdot p_1 = (q_2 \cdot ... \cdot q_k) \cdot q_1 \;\Rightarrow$

$p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_k = q_2 \cdot q_3 \cdot ... \cdot q_r$.

Utilizando-se os mesmos procedimentos anteriores conclui-se que $p_2 = q_2$ e, portanto, $p_3 \cdot p_4 \cdot ... \cdot p_k = q_3 \cdot q_4 \cdot ... \cdot q_r$. E, assim segue-se repetindo esses procedimentos.

Pelo fato de ter-se $k < r$, chega-se necessariamente a seguinte igualdade:

$1 = q_{k+1} \cdot q_{k+1} \cdot ... \cdot q_r$. Logo, pela definição 3.4.3, conclui-se que cada q_j, com $k+1 \leq j \leq r$, divide 1, o que é contraditório, pois cada q_j, com $k+1 \leq j \leq r$ é primo, portanto $q_j > 1$, para $j = k+1$, $k+2$, ..., r. Logo, q_{k+1}, q_{k+2}, ..., $q_r > 1$.

Portanto, $r = k$ e tem-se $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, ..., $p_k = q_k$. Isto é, as decomposição em fatores primos de n são idênticas. Logo, a decomposição em fatores primos

é única. ■

Teorema 3.4.4 Se X e Y são conjuntos enumeráveis, então o produto cartesiano $\mathsf{X} \times \mathsf{Y}$ é enumerável.

Prova: Se X e Y são conjuntos enumeráveis, então, pela definição 3.4.1, tem-se que X é finito ou X é infinito enumerável e que Y é finito ou Y é infinito enumerável.

Caso X e Y sejam finitos, então, tem-se que $\mathsf{X} \neq \oslash$ e $\mathsf{Y} \neq \oslash$, pois caso contrário, não existiria $x \in \mathsf{X}$ e $y \in \mathsf{Y}$ satisfazendo a definição de $\mathsf{X} \times \mathsf{Y}$. Logo, pela definição 3.3.1, conclui-se que existem funções bijetivas, $\varphi_1 : I_m \to \mathsf{X}$ e $\varphi_2 : I_n \to \mathsf{Y}$.

Pela corolário 2.5.2, conclui-se que existem as funções inversas bijetivas,

$\varphi_1^{-1} : \mathsf{X} \to I_m$ e $\varphi_2^{-1} : \mathsf{Y} \to I_n$.

Caso X seja infinito enumerável e Y seja finito, então tem-se, pela definição 3.4.1, que existe uma função bijetiva $\alpha_1 : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$. E, pela definição 3.3.1, conclui-se que existe uma função bijetiva $\alpha_2 : I_n \to \mathsf{Y}$.

Segue-se do corolário 2.5.2 que existem as funções inversas bijetivas

$\alpha_1^{-1} : \mathsf{X} \to \mathbb{N}$ e $\alpha_2^{-1} : \mathsf{Y} \to I_n$.

Caso X seja finito e Y seja infinito enumerável, então tem-se, pela definição 3.3.1 que existe uma função bijetiva $\lambda_1 : I_m \to \mathsf{X}$. E, pela definição 3.4.1, conclui-se que existe uma função bijetiva $\lambda_2 : \mathbb{N} \to \mathsf{Y}$.

Pelo corolário 2.5.1, conclui-se existem funções inversas bijetivas $\lambda_1^{-1} : \mathsf{X} \to I_m$ e $\lambda_2^{-1} : \mathsf{Y} \to \mathbb{N}$.

Caso X e Y sejam conjuntos infinitos enumeráveis, então tem-se, pela definição 3.4.1 que existem funções bijetivas $\theta_1 : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$ e $\theta_2 : \mathbb{N} \to \mathsf{Y}$.

Logo, pelo corolário 2.5.2, tem-se que existem funções inversas bijetivas

$\theta_1^{-1} : \mathsf{X} \to \mathbb{N}$ e $\theta_2^{-1} : \mathsf{Y} \to \mathbb{N}$.

Em qualquer dos casos, conclui-se que existem funções injetivas $h_1 : \mathsf{X} \to \mathbb{N}$ e $h_2 : \mathsf{Y} \to \mathbb{N}$, pois I_n e I_m são subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Defina a função $f : \mathsf{X} \times \mathsf{Y} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pela regra $f(x, y) = (h_1(x), h_2(y))$. Evidentemente, a função f, assim definida, é injetiva, pois dados

(x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathsf{X} \times \mathsf{Y}$ tais que $f(x_1, y_2) = f(x_2, y_2)$, tem-se que

$(h_1(x_1), h_2(y_1)) = (h_1(x_2), h_2(y_2))$. Logo, $h_1(x_1) = h_2(x_2)$ e $h_2(y_1) = h_2(y_2)$. E, pelo fato de h_1 e h_2 serem funções injetivas, tem-se que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Logo, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Portanto, pela definição 2.4.5, conclui-se que f é injetiva.

Defina a função $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pela regra $h(m, n) = p_1^m \cdot p_2^n$, sendo p_1 e p_2 números primos quaisquer.

Pela proposição 3.4.1, tem-se que a decomposição em fatores primos é única. Logo, dados (m_1, n_1), $(m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tais que $(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2)$, tem-se

$h(m_1, n_1) = p_1^{m_1} \cdot p_2^{n_1} \neq p_1^{m_2} \cdot p_2^{n_2} = h(m_2, n_2)$. Logo, por definição, a função g é injetiva.

Pela propriedade reflexiva da inclusão de conjuntos tem-se que $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$. Logo, pelo teorema 3.4.2, $\mathbb{N}$ é enumerável. Portanto, pelo corolário 3.4.2, conclui-se que o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

E, pelo fato de a função $f : \mathsf{X} \times \mathsf{Y} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ser injetiva e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ser enumerável, conclui-se, pelo corolário 3.4.2, que $\mathsf{X} \times \mathsf{Y}$ é enumerável. ■

Corolário 3.4.4 Se X_1, X_2, ..., X_n, ... são conjuntos enumeráveis, então a reunião $\mathsf{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathsf{X}_k$ é enumerável.

Prova: Seja X_n enumerável, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tem-se, portanto, que X_n é finito ou X_n é infinito enumerável.

Se X_n for finito, então, pela definição 3.3.1, tem-se que $\mathsf{X} = \oslash$ ou existe uma função bijetiva $\alpha_n : I_{m_n} \to \mathsf{X}_n$.

Se X_n for infinito enumerável, então, pela definição 3.4.1, conclui-se que existe uma função bijetiva $\lambda_n : \mathbb{N} \to \mathsf{X}_n$.

Suponha $\mathsf{X}_n \neq \oslash$ para $n = 1, 2, ..., s$ e $\mathsf{X}_n = \oslash$ para $n = (s+1), (s+2), ...$ Em qualquer dos casos anteriores pode-se definir uma função sobrejetiva $g_n : \mathbb{N} \to \mathsf{X}_n$, com $1 \leq n \leq s$.

Seja $\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{s} \mathsf{X}_n$ uma função definida pela regra

$$\alpha(n,m) = \begin{cases} g_n(m) & \text{se} \quad 1 \leq n \leq s \\ g_1(m) & \text{se} \quad s < n \end{cases}.$$

Observe que a função α assim definida é sobrejetiva, pois, dado $x \in \bigcup_{n=1}^{s} \mathsf{X}_n$, tem-se que existe $n \in I_s$ tal que $x \in \mathsf{X}_n$. E, pelo fato da função $g_n : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$ ser sobrejetiva, tem-se, por definição que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x = g_n^m$. Logo, existem $n \in \mathbb{N}$ (pois $I_s \subset \mathbb{N}$) e $m \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha(m,n) = y$. Portanto, por definição, α é sobrejetiva.

Por outro lado, tem-se, pela propriedade reflexiva da inclusão de conjuntos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$. Logo, pelo teorema 3.4.2, $\mathbb{N}$ é um conjunto enumerável. E, pelo teorema 3.4.4, conclui-se que o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Segue-se do teorema 3.4.3, que o conjunto $\bigcup_{n=1}^{s} \mathsf{X}_n$ é enumerável. E como, $\mathsf{X}_n = \oslash$ para $n > s$, tem-se que $\bigcup_{n=1}^{s} \mathsf{X}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n$. Portanto, o conjunto $\bigcup_{n=1}^{s} \mathsf{X}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n$ é enumerável. ■

Corolário 3.4.5 Se $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, ..., \mathsf{X}_{s(k)}$ são conjuntos enumeráveis, então o produto cartesiano $\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times, ..., \times \mathsf{X}_{s(k)}$ é enumerável.

Prova: Por hipótese, X_1 e X_2 são enumeráveis, logo, pelo teorema 3.4.4, conclui-se que $\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2$ é um conjunto enumerável.

Tem-se, portanto, que $\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2$ e X_3 são conjuntos enumeráveis. Logo, pelo teorema 3.4.4, conclui-se que $(\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2) \times \mathsf{X}_3 = \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times \mathsf{X}_3$ é um conjunto enumerável.

Repetindo-se esse procedimento sucessivamente, obtém-se que o conjunto

$\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times, ..., \times \mathsf{X}_k$ é enumerável.

Portanto, $\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times, ..., \times \mathsf{X}_k$ e $\mathsf{X}_{s(k)}$ são conjuntos enumeráveis. Logo, pelo teorema 3.4.4, obtém-se que $(\mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times, ..., \times \mathsf{X}_k) \times \mathsf{X}_{s(k)} = \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times, ..., \times \mathsf{X}_{s(k)}$ é um conjunto enumerável. ■

3.5 Conjuntos Não-enumeráveis

Não há uma definição formal, para número cardinal. No entanto, pode-se compreender por número cardinal uma espécie de quantidade de elementos de um conjunto, no caso de conjuntos finitos. Ou ainda, a densidade de distribuição ao longo da reta ordinal dos elementos de conjuntos numéricos, ou conjuntos que podem assumir uma relação ordinal, no caso dos conjuntos infinitos.

Definição 3.5.1 Dois conjuntos X e Y têm o mesmo número cardinal quando existe uma função bijetora $h : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$.

Isso é denotado, em símbolos, por $card(\mathsf{X}) = card(\mathsf{Y})$.

Assim dois conjuntos finitos têm o mesmo número cardinal quando possuem a mesma quantidade de elementos.

Exemplo 3.5.1 Seja X uma conjunto finito, não-vazio. Tem-se, pela definição 3.3.1, que existe uma função bijetiva $\alpha : I_n \to \mathsf{X}$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Conclui-se, pela definição 3.5.1 que $card(I_n) = card(\mathsf{X})$.

Como I_n e X são conjuntos finitos, isto significa que $\#\mathsf{X} = \#I_n$, ou seja, $\#\mathsf{X} = n$.

Proposição 3.5.1 Seja X um conjunto infinito enumerável, tem-se $card(\mathsf{X}) = card(\mathsf{Y})$ se, e somente se, Y for um conjunto infinito enumerável.

Prova: Seja X um conjunto infinito enumerável. E Suponha que $card(\mathsf{X}) = card(\mathsf{Y})$. Então, pela definição 3.5.1, tem-se que existe uma função bijetiva $\alpha : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$.

Por outro lado, pela definição 3.4.1, tem-se que existe uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$. Logo, pelo corolário 2.5.1, conclui-se que a função composta $\alpha \circ f : \mathbb{N} \to \mathsf{Y}$ também é bijetiva.

Logo, pela definição 3.4.1, tem-se que o conjunto Y é infinito enumerável.

Reciprocamente, suponha que Y é infinito enumerável. Então, tem-se, pela definição 3.4.1, que existe uma função bijetiva $h : \mathbb{N} \to \mathsf{Y}$.

Por hipótese, X é infinito enumerável. Logo, pela definição 3.4.1, conclui-se que existe uma função bijetiva $\varphi : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$.

Pelo corolário 2.5.2, tem-se que φ possui uma inversa $\varphi^{-1} : \mathsf{X} \to \mathbb{N}$ e que φ^{-1}

é bijetiva.

Logo, pelo corolário 2.5.1, a função composta $h \circ \varphi^{-1} : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ também é bijetiva. E, pela definição 3.5.1, conclui-se que $card(\mathsf{X}) = card(\mathsf{Y})$. ■

Definição 3.5.2 Dados os conjuntos X e Y, diz-se que $card(\mathsf{X}) < card(\mathsf{Y})$ se existirem apenas funções injetivas $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ e não existir uma função sobrejetiva $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$.

O teorema a seguir permite concluir que o número cardinal de um conjunto infinito enumerável é o menor dos números cardinais de conjuntos infinitos.

Ou, em outras palavras, os conjuntos infinitos enumeráveis possuem a menor "densidade" que conjuntos infinitos possam ter.

Proposição 3.5.2 Para todo conjunto infinito X, tem-se $card(\mathbb{N}) \leq card(\mathsf{X})$.

Prova: Seja X um conjunto infinito. A cada subconjunto não-vazio $\mathsf{A_i} \subset \mathsf{X}$, escolha uma elemento x_i. E defina uma função $f : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$, pela regra $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, ..., $f(n) = x_n$.

Seja $\mathsf{A_{n+1}} = \mathsf{X} - \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$. Defina $f(n+1) = x_{n+1}$, com

$x_{n+1} \in \mathsf{A_{n+1}}$.

Caso exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathsf{A_{n+1}} = \oslash$, então a função $f : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$ é sobrejetiva, já que nesse caso, tem-se $f(\mathbb{N}) = \mathsf{X}$.

Por outro lado, dados n, $n+1 \in \mathbb{N}$, tem-se pela proposição 3.1.1 que

$n + 1 = s(n) \neq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. E, tem-se que $f(n) \in \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$ enquanto $f(n+1) \in \mathsf{X} - \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$. Logo, $f(n) \neq f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. E, por definição a função f é injetiva.

Portanto, pela definição 2.4.7, a função $f : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$ é bijetiva. E, pela definição 2.5.1, conclui-se que $card(\mathbb{N}) = card(\mathsf{X})$.

Caso $\mathsf{A_n} \neq \oslash$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tem-se, então que $f(\mathbb{N}) \neq \mathsf{X}$. Logo nenhuma função f, definida deste modo é sobrejetiva. No entanto, como no caso anterior f é injetiva.

Assim, neste caso, conclui-se pela definição 3.5.2 que $card(\mathbb{N}) < card(\mathsf{X})$.

Logo, em qualquer dos casos, tem-se $card(\mathbb{N}) \leq card(\mathsf{X})$. ■

Teorema 3.5.1 [Teorema de Cantor] Sejam X um conjunto qualquer não-vazio e Y um conjunto contendo pelo menos dois elementos. Nenhuma função $\varphi : \mathsf{X} \to \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ é sobrejetiva.

Prova: Seja $\varphi : \mathsf{X} \to \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ uma função definida pela regra $\varphi(x) = f_x$, sendo que $f \in \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$.

Defina uma função $h \in \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$, escolhendo $h(x) \neq f_x(x)$, para todo $x \in \mathsf{X}$.

Isto significa que a função $h \neq f_x$, em pelo menos um $x \in \mathsf{X}$. Seja qual for a função $f_x \in \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$.

Observe que no caso em que Y possui apenas 1 elemento, tem-se $h(x) = f_x(x)$ para todo $x \in \mathsf{X}$. Neste caso, não é possível definir uma função $h \in \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ tal que $h \neq f_x$ para todo X.

Por hipótese, Y possui pelo menos dois elementos. Logo, $h \notin \varphi(\mathsf{X})$. Portanto, $\varphi(\mathsf{X}) \neq \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ e, por definição, nenhuma função φ, assim definida é sobrejetiva. ■

O modo como a função $h \in \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ foi definida para demonstrar o teorema 3.5.1, chama-se método da diagonal, de Cantor. E pode ser compreendido mais facilmente na demonstração (ou prova) de um caso particular desse teorema, quando $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. É o que faremos a seguir.

Teorema 3.5.2 [Teorema de Cantor, caso particular] Seja Y um conjunto contendo pelo menos dois elementos. Tem-se que nenhuma função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{F}(\mathbb{N};\mathsf{Y})$ é sobrejetiva.

Prova: Seja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{F}(\mathbb{N};\mathsf{Y})$ uma função definida pela regra, $\varphi(1) = f_1$, $\varphi(2) = f_2$, ..., $\varphi(n) = f_n$, ... sendo que $f_n \in \mathbb{F}(\mathbb{N};\mathsf{Y})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Defina $f_n \in \mathbb{F}(\mathbb{N};\mathsf{Y})$, por $f_n(1) = y_{n1}$, $f_n(2) = y_{n2}$, ..., $f_n(n) = y_{nn}$, ...

Obtém-se assim, as sequências:

$$\begin{array}{ccc}
f_1 & = & (y_{11}, y_{12}, ..., y_{1n}, ...) \\
f_2 & = & (y_{21}, y_{22}, ..., y_{2n}, ...) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
f_n & = & (y_{n1}, y_{n2}, ..., y_{nn}, ...) \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Observe que é possível definir uma função $h \in \mathbb{F}(\mathbb{N};\mathsf{Y})$ tal que $h(n) \neq f_n(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, escolha $h \neq f_n$ para pelo menos um $n \in \mathbb{N}$, mais especificamente,

$$\begin{array}{ccccc} h(1) & \neq & y_{11} & = & f_1(1) \\ h(2) & \neq & y_{22} & = & f_2(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(n) & \neq & y_{nn} & = & f_n(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Logo $h \notin \varphi(\mathbb{N})$. E, portanto, $\varphi(\mathbb{N}) \neq \mathbb{F}(\mathbb{N}; \mathsf{Y})$ e, por definição, a função φ não é sobrejetiva. ■

Observação 3.5.1 Um conjunto Y é dito não-enumerável se não cumpre a definição 3.4.1, ou seja, se Y não é finito e não existe uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathsf{Y}$.

Corolário 3.5.1 Se X_1, X_2, ..., X_n, ... são conjuntos infinitos enumeráveis, então o produto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n$ não é enumerável.

Prova: De fato, observe que, pela definição 2.6.8, tem-se que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n = \mathbb{F}(\{1, 2, ..., n\}; \bigcup_{n=1}^{\infty}) = \mathbb{F}(\mathbb{N}; \bigcup_{n=1}^{\infty}).$$

Evidentemente, $\prod_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n = \mathsf{X}_1 \times \mathsf{X}_2 \times ... \times \mathsf{X}_n$ não é finito, pois, por hipótese, $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, ..., \mathsf{X}_n$ são conjuntos infinitos.

E, pelo teorema 3.5.2, conclui-se que nenhuma função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{F}(\mathbb{N}; \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n)$ é sobrejetiva. Logo, não há funções bijetivas $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{F}(\mathbb{N}; \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n)$. E, portanto, o conjunto $\prod_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n = \mathbb{F}(\mathbb{N}; \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n)$ não é enumerável.

Exemplo 3.5.1 O conjunto de todas as listas infinitas enumeráveis formadas apenas pelos algarismos 0 e 1 (as funções $f_k : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$):

$$\left.\begin{array}{ccc} f_1 & = & (0, 0, 0, 0, ...) \\ f_2 & = & (1, 1, 0, 0, ...) \\ f_3 & = & (0, 1, 0, 1, ...) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right. \text{não é enumerável.}$$

3.6 Exemplos de Resultados Adicionais

Exemplo 3.1.2 Provar que, considerando-se os axiomas 3.1.1 e 3.1.2, o axioma [I] seguinte equivale ao axioma 3.1.3.

[I] Para todo subconjunto não-vazio $\mathsf{A} \subset \mathbb{N}$, tem-se $\mathsf{A} - s(\mathsf{A}) \neq \oslash$.

Prova: Seja A um subconjunto não-vazio. E suponha que $\mathsf{A} - s(\mathsf{A}) = \oslash$. Então, tem-se que $1 \notin \mathsf{A}$, pois, pelo axioma 3.1.2, $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) = \{1\}$. Logo, $\mathsf{A} - s(\mathsf{A}) \neq \oslash$, implica que $1 \in \mathsf{A}$.

Suponha que existe $n \in \mathsf{A}$ tal que $s(n) \notin \mathsf{A}$. Então, $s(n) \in \mathbb{N} - \mathsf{A}$. E, além disso $s(n) \notin s(\mathbb{N} - \mathsf{A})$, pois $n \in \mathsf{A}$, portanto $s(n) \in s(\mathsf{A})$.

Por outro lado, pela proposição 3.1.1, tem-se que $s(n) \neq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. E, pelo axioma 3.1.1, obtém-se $s(s(n)) \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $s(\mathbb{N} - \mathsf{A}) \neq s(\mathsf{A})$, pois $s(n) \in s(\mathsf{A})$ e $s(n) \notin s(\mathbb{N} - \mathsf{A})$.

Portanto, $s(n) \in (\mathbb{N} - \mathsf{A}) - s(\mathbb{N} - \mathsf{A})$, o que é contraditório, pois $\mathbb{N} - \mathsf{A} \subset \mathbb{N}$ e, pelo axioma 3.1.2, tem-se $\mathbb{N} - s(\mathbb{N}) = \{1\}$ e, pelo mesmo axioma tem-se que $s(n) \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, $s(n) \in \mathsf{A}$. Portanto, $n \in \mathsf{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. E como $\mathsf{A} \subset \mathbb{N}$, conclui-se que $\mathsf{A} = \mathbb{N}$.

Portanto, o axioma [I] é equivalente ao axioma 3.1.3, pois $\mathsf{A} \subset \mathbb{N}$, $1 \in \mathsf{A}$ e supondo que $n \in \mathsf{A}$, conclui-se que $s(n) \in \mathsf{A}$ e $\mathsf{A} = \mathbb{N}$. ■

Exemplo 3.1.3 Dados a, $b \in \mathbb{N}$, provar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \cdot a > b$.

Prova: Por hipótese, a, $b \in \mathbb{N}$. Logo, pela propriedade da tricotomia da relação de ordem, tem-se que apenas uma das alternativas ocorre: $a = b$, $a < b$ ou $b < a$.

Se $a = b$, escolha $m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$. Segue-se da definição 3.1.4 que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = 1 + k$. Logo, utilizando-se as propriedades da multiplicação e da adição de números naturais obtém-se $m \cdot a = (1 + k) \cdot b$. Logo, $m \cdot a = 1 \cdot b + k \cdot b$. Portanto, $m \cdot a = b + b \cdot k$. E, $(b \cdot k) \in \mathbb{N}$, logo, pela definição 3.1.4, conclui-se que $m \cdot a > b$.

Se $a < b$, escolha $m \in \mathbb{N}$, com $m = b + 1$. Tem-se que $a \in \mathbb{N}$, portanto $a \geq 1$. Logo, pelas propriedades da relação de ordem dos números naturais, tem-se $a \cdot m \geq 1 \cdot (b + 1)$. Logo, $m \cdot a \geq b + 1$.

Por outro lado, pela definição 3.1.4, tem-se que $b+1 > b$, pois $b+1 = b+q$, com $q \in \mathbb{N}$, implica, por meio das propriedades da adição, que $q = 1$.

Logo, pela propriedade transitiva da relação de ordem dos números naturais, conclui-se que $m \cdot a > b$.

Se $b < a$, escolha $m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$. Segue-se da definição 3.1.4 que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + p$ e existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = 1 + k$.

E, utilizando-se as propriedades da adição e da multiplicação de números naturais que $m \cdot a = (1+k) \cdot (b+p)$. Logo, $m \cdot a = 1 \cdot (b+p) + k \cdot (b+p)$. Portanto, $m \cdot a = (b+p) + (k \cdot b + k \cdot p) = b + [p + (k \cdot b + k \cdot p)]$.

Evidentemente, $[p + (k \cdot b + k \cdot p)] \in \mathbb{N}$. Logo, pela definição 3.1.4, conclui-se que $m \cdot a > b$.

Logo, em qualquer dos casos, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \cdot a > b$. $\blacksquare$

Exemplo 3.2.5 Seja $a \in \mathbb{N}$. Se X é um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $a \in \mathsf{X}$ e, além disso, $n \in \mathsf{X} \Rightarrow (n+1) \in \mathsf{X}$, então X contém todos os números naturais $n \geq a$.

Prova: Seja $\mathsf{Y} = (\mathbb{N} - \{1, 2, ..., p\}) - \mathsf{X}$, com $s(p) = a$. Suponha que $\mathsf{Y} \neq \oslash$.

Então, pelo P.B.O (teorema 3.2.1), tem-se que existe $(q+1) \in \mathsf{Y}$ tal que $(q+1) = \min \mathsf{Y}$.

Por hipótese, $a \in \mathsf{X}$ e $a = \min \mathsf{X}$. Suponha que $n \in \mathsf{X}$, com $a \leq n \leq q$. Segue-se da hipótese que $(q+1) \in \mathsf{X}$, o que é contraditório, pois $(q+1) \in \mathsf{Y}$, ou seja, $(q+1) \notin \mathsf{X}$.

Logo, $\mathsf{Y} = \oslash$ e $\mathsf{X} = \mathbb{N} - \{1, 2, ..., p\}$. $\blacksquare$

Exemplo 3.2.6 Um elemento $a \in \mathbb{N}$ chama-se antecessor de $b \in \mathbb{N}$ quando tem-se $a < b$ e não existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $a < c < b$. Provar que, com exceção do 1, todo número natural possui um antecessor.

Prova: Pelo axioma 3.1.2, tem-se que $1 \notin s(\mathbb{N})$. Logo, $1 \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $1 \neq n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 = n+1$. Logo, por definição, $n \not< 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. E, pela propriedade da tricotomia da relação de ordem dos números naturais, conclui-se que $1 = n$ ou $1 < n$. Logo, $1 \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, 1 não possui antecessor, pois pela definição 3.2.1, tem-se que $1 = \min \mathbb{N}$.

Seja $\mathsf{X} = \{m \in \mathbb{N};\ m > 1 \text{ e } m \text{ possui um antecessor}\}$. Tem-se que $s(1) = 2$.

Logo, $1 + 1 = 2$. Portanto, pela definição 3.1.4, $1 < 2$. Além disso, pelo exemplo 2.1.4, conclui-se que não existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $1 < c < 2$. Logo, $2 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $m \in \mathsf{X}$. Evidentemente, $m + 1 = m + 1$. Logo, pela definição 3.4.1, tem-se que $m < m + 1$. E, pelo exemplo 2.1.4, conclui-se que não existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $m < c < m + 1$. Logo, $(m + 1) \in \mathsf{X}$.

Segue-se do exemplo 3.2.5 que $\mathsf{X} = \mathbb{N} - \{1\}$. ■

Exemplo 3.2.7 Suponha definida a operação de subtração em $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$, demonstrar os seguintes fatos:

(a) $2 \cdot (1 + 2 + ... + n) = n \cdot (n + 1)$;

Prova: Seja $\mathsf{X} = \{n \in \mathbb{N};\ 2 \cdot (1 + 2 + ... + n) = n \cdot (n + 1)\}$. Para $n = 1$, tem-se $2 \cdot 1 = 2 = 1 + 1 = 1 \cdot (1 + 1)$. Logo, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $n \in \mathsf{X}$. Então, tem-se que $2 \cdot [1 + 2 + ... + n + (n + 1)] =$

$2 \cdot (1 + 2 + ... + n) + 2 \cdot (n + 1) = n \cdot (n + 1) + 2 \cdot (n + 1) = (n^2 + n) + (2 \cdot n + 2) =$

$n^2 + 3 \cdot n + 2 = (n + 1)(n + 2) = (n + 1)[(n + 1) + 1]$. Logo, $n + 1 = s(n) \in \mathsf{X}$.

Segue-se do axioma 3.1.3 que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. ■

(b) $1 + 3 + 5 + ... + (2 \cdot n + 1) = (n + 1)^2$;

Prova: Seja $\mathsf{X} = \{m \in \mathbb{N};\ 1 + 3 + 5 + ... + (2 \cdot m + 1) = (m + 1)^2\}$. Para $m = 1$, tem-se $1 + 3 = 4 = 2 \cdot 2 = (1 + 1) \cdot (1 + 1) = (1 + 1)^2$. Logo, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $m \in \mathsf{X}$. Então, tem-se que $1+3+5+...+(2 \cdot m+1)+[2 \cdot (m+1)+1] = (m + 1)^2 + [2 \cdot (m + 1) + 1] = (m^2 + 2 \cdot m + 1) + (2 \cdot m + 3) = m^2 + 4 \cdot m + 4 = (m + 2)^2 = [(m + 1) + 1]^2$. Logo, $m + 1 = s(m) \in \mathsf{X}$.

Segue-se do axioma 3.1.3 que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. ■

(c) $(a - 1)(1 + a + ... + a^n) = a^{n+1} - 1$, seja quais forem a, $n \in \mathbb{N}$;

Prova: Seja $\mathsf{Y} = \{n \in \mathbb{N};\ (a - 1)(1 + a + ... + a^n) = a^{n+1} - 1\}$. Para $n = 1$, tem-se, tem-se $(a - 1)(1 + a) = a + a^2 - 1 - a = a^2 - 1 = a^{1+1} - 1$. Logo, $1 \in \mathsf{Y}$.

Suponha que $n \in \mathsf{Y}$. Então, tem-se que $(a - 1) \cdot (1 + a + ... + a^n + a^{n+1}) = (a-1) \cdot (1+a+...+a^n)+(a-1) \cdot a^{n+1}) = (a^{n+1}-1)+(a-1) \cdot a^{n+1} = a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1} = a^{n+2} - 1 = a^{(n+1)+1} - 1$. Logo, $(n + 1) = s(n) \in \mathsf{Y}$.

Segue-se do axioma 3.1.3 que $\mathsf{Y} = \mathbb{N}$. ■

(d) $n \geq 4 \;\Rightarrow\; n! > 2^n$.

Prova: Seja $\mathsf{X} = \{n \in \mathbb{N}; n \geq 4; n! > 2^n\}$. Para $n = 4$, tem-se que

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 = 2^4$. Logo, $4 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $n \in \mathsf{X}$. Então, tem-se que $(n+1)! = (n+1) \cdot n! > (n+1) \cdot 2^n$.

Observe que se $n \geq 4$, então $n \geq 2^2$. Logo, $n + 1 \geq 2^2 + 1$. Portanto, $(n+1) \cdot 2^n \geq (2^2 + 1) \cdot 2^n$.

E, pela transitividade da relação de ordem dos números naturais, tem-se que $(n+1)! > (2^2+1) \cdot 2^n = 2^{n+2} + 2^n > 2^{n+2} = 2 \cdot 2^{n+1} > 2^{n+1}$. Portanto, $(n+1)! > 2^{n+1}$. Logo, $(n+1) = s(n) \in \mathsf{X}$.

Segue-se do exemplo 3.2.5 que $\mathsf{X} = \mathbb{N} - \{1, 2, 3\}$. ■

Exemplo 3.2.8 Usar o Segundo Princípio da Indução para demonstrar a unicidade da decomposição de um número natural em fatores primos.

Prova: Sejam $m \in \mathbb{N}$,

$\mathsf{X} = \{n \in \mathbb{N};\; m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_r \Rightarrow n = r$ e $p_k = q_j$ para $1 \leq k, j \leq n\}$, onde p_k e q_j são números primos.

Suponha que $I_n \subset \mathsf{X}$. E seja $s \in \mathbb{N}$ tal que sua decomposição em fatores primos seja $s = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$.

Escolha $t = s \cdot p_{n+1}$, sendo p_{n+1} um número primo. Portanto,

$t = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot p_{n+1}$. E suponha que t possui outra decomposição em fatores primos, $t = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_r$.

Logo, $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot p_{n+1} = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_r$. E, pela propriedade da tricotomia da relação de ordem, tem-se que apenas uma das alternativas é válida: $n = r$, $n < r$ ou $r < n$.

Se $n = r$, então, pela hipótese de indução, conclui-se $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_r$. Logo, pela propriedades da multiplicação de números naturais, tem-se que

$p_{n+1} \cdot (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n) = 1 \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_r)$. Portanto, $p_{n+1} = 1$, o que é contraditório, pois p_{n+1} é um número primo.

Se $n < r$, então, pela definição 3.1.4, tem-se que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$r = n + q$. Logo, pela hipótese de indução tem-se que $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$.

Portanto, pelas propriedades da multiplicação, obtém-se que $p_{n+1} = q_{n+1} \cdot q_{n+2} \cdot \ldots \cdot q_r$. Caso $r = n+1$, então $p_{n+1} = q_{n+1}$ e, portanto, $(n+1) = s(n) \in \mathsf{X}$.

Caso $r > n+1$, então $p_{n+1} = q_{n+1} \cdot (q_{n+2} \cdot \ldots \cdot q_r)$, com $q_{n+1} > 1$, portanto, p_{n+1} não é primo, o que é contraditório, pois p_{n+1} é um número primo.

Se $r < n$, então, pela hipótese de indução, conclui-se que $r \in \mathsf{X}$. Logo, $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_r$.

E, pela propriedade da multiplicação de números naturais, tem-se que

$(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r)(p_{r+1} \cdot p_{r+2} \cdot \ldots \cdot p_n \cdot p_{n+1}) = (q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_r).1$. Logo, $p_r \cdot p_{r+1} \cdot \ldots \cdot p_n \cdot p_{n+1} = 1$, o que é contraditório, pois p_k, com $r \leq k \leq n+1$ é primo, logo $p_k > 1$ para todo k. Logo, $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot p_{n+1} > 1$.

Portanto, conclui-se que $(n+1) \in \mathsf{X}$. Logo, pelo Segundo Princípio da Indução (teorema 3.2.2), conclui-se que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. ■

Exemplo 3.3.2 Seja X um conjunto com n elementos. Usar a indução para provar que o conjunto das funções bijetoras (ou permutações) $f : \mathsf{X} \to \mathsf{X}$ tem $n!$ elementos.

Prova: Seja $\mathsf{Y} = \{n \in \mathbb{N};\ \text{se } \#\mathsf{X} = n, \text{ então } \#\{f \in \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{X}); f \text{ é bijetora}\} = n!\}$. Para $n = 1$, tem-se que $\#\mathsf{X} = 1$. Considere $\mathsf{X} = \{x\}$, pode-se definir apenas uma função $f : \{x\} \to \{x\}$ que necessariamente define-se e pela regra $f(x) = x$. Logo, $f(\{x\}) = \{x\}$, portanto f é sobrejetora. E, pelo fato de $\mathsf{D_f}$ ser um conjunto unitário, tem-se que f é injetora.

E, pela definição 2.4.7, f é bijetora. E, $\#\{f \in \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{X}); f \text{é bijetora}\} = 1 = 1!$.

Suponha que $n \in \mathsf{Y}$. Considere, $\#\mathsf{X} = n$. Pode-se denotar $\mathsf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Seja $g \in \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{X})$ uma função bijetora. E admita a extensão $g_1 : \mathsf{X} \cup \{x_{n+1}\} \to \mathsf{X} \cup \{x_{n+1}\}$, sendo previamente fixados $g_1(x_1)$, $g_1(x_2)$, ..., $g_1(x_n)$, tais que se $x_k \neq x_j$, então

$g_1(x_k) \neq g_1(x_j)$.

Observe que há $(n+1)$ maneiras de definir $g_1(x_{n+1})$, supondo $g_1(x_1)$, $g_1(x_2)$, ..., $g_1(x_n)$, para que a função g_1 seja bijetora (pois $\#\mathsf{X} \cup \{x_{n+1}\} = n+1$).

Pela hipótese de indução, conclui-se que há $n!$ maneiras de definir uma função $g : \mathsf{X} \to \mathsf{X}$ quando $\#\mathsf{X} = n$. Logo, pelo axioma 3.3.1 há $(n+1) \cdot n!$ maneiras de definir uma função bijetora $g_1 : \mathsf{X} \cup \{x_{n+1}\} \to \mathsf{X} \cup \{x_{n+1}\}$.

Portanto, $\#\{f \in \mathbb{F}(\mathsf{X} \cup \{x_{n+1}\}; \mathsf{X} \cup \{x_{n+1}\}); f \text{ é bijetora}\} = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$.

Logo, $(n+1) = s(n) \in \mathsf{Y}$. E, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{Y} = \mathbb{N}$. ■

Exemplo 3.3.3 Sejam X e Y conjuntos finitos. Suponha definida a operação de subtração em $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$.

(a) Provar que $card(\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) + card(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) = card(\mathsf{X}) + card(\mathsf{Y})$.

Prova: (Note que, pelo fato de X e Y, $\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}$ e $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}$ serem, evidentemente, conjuntos finitos, essa igualdade tem o mesmo significado que $\#\mathsf{X} \cup \mathsf{Y} + \#\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} = \#\mathsf{X} + \#\mathsf{Y}$).

Utilizando-se o fato de que $(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) \subset (\mathsf{X} \cup \mathsf{Y})$, tem-se $\mathsf{X} \cup \mathsf{Y} = (\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) \cup (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})$.

Portanto, $card(\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) = card((\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) \cup (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}))$. Logo, pelo teorema 3.3.4,

$card(\mathsf{X}) + card(\mathsf{Y}) = card(\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) + card(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})$. ■

Também pode-se provar a afirmação do exemplo 3.3.3 (a), utilizando resultados provados anteriormente. É o que faremos a seguir:

[Outra prova do exemplo 3.3.3 (a)]

Prova: Sejam X e Y conjuntos finitos. Evidentemente $(\mathsf{X} - \mathsf{Y}) \subset \mathsf{X}$, $(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) \subset \mathsf{X}$ e $(\mathsf{Y} - \mathsf{X}) \subset \mathsf{Y}$, logo, pelo teorema 3.3.2, conclui-se que os conjuntos $(\mathsf{X} - \mathsf{Y})$, $(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})$ e $(\mathsf{Y} - \mathsf{X})$ são finitos. E pela definição 3.3.1, conclui-se que $(\mathsf{X} - \mathsf{Y}) = \oslash$ ou existe uma função bijetiva $f : I_m \to (\mathsf{X} - \mathsf{Y})$; $(\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) = \oslash$ ou existe uma função bijetiva $g : I_r \to (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})$; $(\mathsf{Y} - \mathsf{X}) = \oslash$ ou existe uma função bijetiva $h : I_s \to (\mathsf{Y} - \mathsf{X})$.

Logo, por definição, $card(\mathsf{X} - \mathsf{Y}) = m$, onde $m = 0$ se $(\mathsf{X} - \mathsf{Y}) = \oslash$;

$card(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) = r$, sendo $r = 0$ se $(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) = \oslash$; e $card(\mathsf{Y} - \mathsf{X}) = s$, onde $s = 0$ se $(\mathsf{Y} - \mathsf{X}) = \oslash$.

Tem-se, por definição que $(\mathsf{X} - \mathsf{Y}) \cap (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) = \oslash$, isto é, os conjuntos $(\mathsf{X} - \mathsf{Y})$ e $(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})$ são disjuntos. Logo, pelo teorema 3.3.4, tem-se que

$card((\mathsf{X} - \mathsf{Y}) \cup (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})) = \#(\mathsf{X} - \mathsf{Y}) \cup (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) = m + r$.

Por definição, $(\mathsf{Y} - \mathsf{X}) \cap (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) = \oslash$, ou seja, os conjuntos $(\mathsf{Y} - \mathsf{X})$ e $(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})$ são disjuntos. Logo, pelo teorema 3.3.4, conclui-se que $(\mathsf{Y} - \mathsf{X}) \cup (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})$ é finito e $card((\mathsf{Y} - \mathsf{X}) \cup (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})) = s + r$.

Tem-se que $\mathsf{X} \cup \mathsf{Y} = (\mathsf{X} - \mathsf{Y}) \cup [(\mathsf{Y} - \mathsf{X}) \cup (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})]$. Além disso,

$(\mathsf{X} - \mathsf{Y}) \cap [(\mathsf{Y} - \mathsf{X}) \cup (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})] = \oslash$, isto é, os conjuntos $(\mathsf{X} - \mathsf{Y})$ e $(\mathsf{Y} - \mathsf{X}) \cup (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})$ são disjuntos. Logo, pelo teorema 3.3.4, conclui-se que

$card(\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) = card((\mathsf{X} - \mathsf{Y}) \cup [(\mathsf{Y} - \mathsf{X}) \cup (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})]) = m + (s + r)$.

Logo, $card(\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) + card(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) = [m + (s + r)] + r =$

$m + [(s + r) + r] = m + [r + (s + r)] = (m + r) + (s + r) =$

$card((\mathsf{X} - \mathsf{Y}) \cup (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})) + card((\mathsf{Y} - \mathsf{X}) \cup (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})) = card(\mathsf{X}) + card(\mathsf{Y}).$ ■

(b) Determinar a fórmula correspondente para três conjuntos finitos.

Solução: Sejam X, Y e S conjuntos finitos. Segue-se do item (a) deste exemplo que $card((\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) \cup \mathsf{S}) + card((\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) \cap \mathsf{S}) = card(\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) + card(\mathsf{S}) =$

$(card(\mathsf{X}) + card(\mathsf{Y}) - card(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})) + card(\mathsf{S}) = card(\mathsf{X}) + card(\mathsf{Y}) + card(\mathsf{S}) - card(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}).$

Portanto,

$card(\mathsf{X} \cup \mathsf{Y} \cup \mathsf{S}) + card((\mathsf{X} \cap \mathsf{S}) \cup (\mathsf{Y} \cap \mathsf{S})) = card(\mathsf{X}) + card(\mathsf{Y}) + card(\mathsf{S}) - card(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}).$
Logo,

$card(\mathsf{X} \cup \mathsf{Y} \cup \mathsf{S}) + [card(\mathsf{X} \cap \mathsf{S}) + card(\mathsf{Y} \cap \mathsf{S}) - card((\mathsf{X} \cap \mathsf{S}) \cap (\mathsf{Y} \cap \mathsf{S}))] =$

$card(\mathsf{X}) + card(\mathsf{Y}) + card(\mathsf{S}) - card(\mathsf{X} \cap \mathsf{X}).$

Portanto, $card(\mathsf{X} \cup \mathsf{Y} \cup \mathsf{S}) - card(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} \cap \mathsf{S}) =$

$card(\mathsf{X}) + card(\mathsf{Y}) + card(\mathsf{S}) - card(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) - card(\mathsf{X} \cap \mathsf{S}) - card(\mathsf{Y} \cap \mathsf{S}).$

(c) Determinar a fórmula correspondente, para quatro conjuntos finitos.

Solução: Sejam Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 conjuntos finitos. Segue-se dos itens (a) e (b) deste exemplo que $card(\mathsf{Y}_1 \cup \mathsf{Y}_2 \cup (\mathsf{Y}_3 \cup \mathsf{Y}_4)) - card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_2 \cap (\mathsf{Y}_3 \cup \mathsf{Y}_4)) = card(\mathsf{Y}_1) + card(\mathsf{Y}_2) + card(\mathsf{Y}_3 \cup \mathsf{Y}_4) - card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_2) - card(\mathsf{Y}_1 \cap (\mathsf{Y}_3 \cup \mathsf{Y}_4)) - card(\mathsf{Y}_2 \cap (\mathsf{Y}_3 \cup \mathsf{Y}_4))$. Portanto, $card(\mathsf{Y}_1 \cup \mathsf{Y}_2 \cup \mathsf{Y}_3 \cup \mathsf{Y}_4) - card((\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_3) \cup (\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_4)) = card(\mathsf{Y}_1) + card(\mathsf{Y}_2) + [card(\mathsf{Y}_3) + card(\mathsf{Y}_4) - card(\mathsf{Y}_3 \cap \mathsf{Y}_4)] - card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_2) - card((\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_3) \cup (\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_4)) -$

$card((\mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_3) \cup (\mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_4)) = card(\mathsf{Y}_1) + card(\mathsf{Y}_2) + card(\mathsf{Y}_3) + card(\mathsf{Y}_4) -$

$card(\mathsf{Y}_3 \cap \mathsf{Y}_4) - card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_2) - [card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_3) + card((\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_4)) - card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_3) \cap \mathsf{Y}_4] - [card(\mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_3) + card(\mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_4) - card(\mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_3 \cap \mathsf{Y}_4)]$. Logo, $card(\mathsf{Y}_1 \cup \mathsf{Y}_2 \cup \mathsf{Y}_3 \cup \mathsf{Y}_4) - [card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_3) + card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_4) - card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_3 \cap \mathsf{Y}_4)] = card(\mathsf{Y}_1) + card(\mathsf{Y}_2) + card(\mathsf{Y}_3) + card(\mathsf{Y}_4) - card(\mathsf{Y}_3 \cap \mathsf{Y}_4) - card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_2) - card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_3) - card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_4) + card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_3 \cap \mathsf{Y}_4) + card(\mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_3 \cap \mathsf{Y}_4)$.

Portanto, $card(\mathsf{Y}_1 \cup \mathsf{Y}_2 \cup \mathsf{Y}_3 \cup \mathsf{Y}_4) + card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_3 \cap \mathsf{Y}_4) = card(\mathsf{Y}_1) + card(\mathsf{Y}_2) + card(\mathsf{Y}_3) + card(\mathsf{Y}_4) - card(\mathsf{Y}_3 \cap \mathsf{Y}_4) - card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_2) - card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_3) - card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_4) - card(\mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_3) - card(\mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_4) + card(\mathsf{Y}_1 \cap \mathsf{Y}_3 \cap \mathsf{Y}_4) + card(\mathsf{Y}_2 \cap \mathsf{Y}_3 \cap \mathsf{Y}_4) +$

$card(\mathsf{Y_1} \cap \mathsf{Y_2} \cap \mathsf{Y_3}) + card(\mathsf{Y_1} \cap \mathsf{Y_2} \cap \mathsf{Y_4})$.

(d) Generalize a fórmula para n conjuntos finitos.

Solução: Sejam $\mathsf{Y_1}$, $\mathsf{Y_2}$, ..., $\mathsf{Y_n}$ conjuntos finitos. Considerando os itens (a), (b) e (c) deste exemplo, deduz-se que uma generalização da fórmula é:

$$card(\mathsf{Y_1} \cup \mathsf{Y_2} \cup ... \cup \mathsf{Y_n}) =$$

$$(-1)^{1-1}\sum_{k=1}^{n} card(\mathsf{Y_k}) + (-1)^{2-1}\sum_{k_1<k_2=2}^{n} card(\mathsf{Y_{k_1}} \cap \mathsf{Y_{k_2}}) + ...+$$

$$(-1)^{n-1}\sum_{k_1<k_2<...<k_{n-1}=n-1}^{n} card(\mathsf{Y_{k_1}} \cap \mathsf{Y_{k_2}} \cap ... \cap \mathsf{Y_{k_{n-1}}})+$$

$$(-1)^{n}\sum_{k_1<k_2<...<k_n=n}^{n} card(\mathsf{Y_{k_1}} \cap \mathsf{Y_{k_2}} \cap ... \cap \mathsf{Y_{k_n}})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Para $n = 1$, tem-se

$card(\mathsf{Y_1}) = (-1)^{1-1}\sum_{k=1}^{1} card(\mathsf{Y_k}) = (-1)^0.card(\mathsf{Y_1}) = 1.card(\mathsf{Y_1}) = \mathsf{Y_1}$. Logo, a igualdade (ou equação) é válida para $n = 1$.

Suponha que a fórmula seja válida para $n \in \mathbb{N}$. Tem-se pelo item (a) deste exemplo que $card((\mathsf{Y_1} \cup \mathsf{Y_2} \cup ... \cup \mathsf{Y_n}) \cup \mathsf{Y_{n+1}}) =$

$card(\mathsf{Y_1} \cup \mathsf{Y_2} \cup ... \cup \mathsf{Y_n}) + card(\mathsf{Y_{n+1}}) - card((\mathsf{Y_1} \cup \mathsf{Y_2} \cup ... \cup \mathsf{Y_n}) \cap \mathsf{Y_{n+1}})$. Portanto, $card(\mathsf{Y_1} \cup \mathsf{Y_2} \cup ... \cup \mathsf{Y_n} \cup \mathsf{Y_{n+1}}) =$

$card(\mathsf{Y_1} \cup \mathsf{Y_2} \cup ... \cup \mathsf{Y_n}) + card(\mathsf{Y_{n+1}}) - card((\mathsf{Y_1} \cap \mathsf{Y_{n+1}}) \cup (\mathsf{Y_2} \cap \mathsf{Y_{n+1}}) \cup ... \cup (\mathsf{Y_n} \cap \mathsf{Y_{n+1}}))$.

Seja $(\mathsf{Y_j} \cap \mathsf{Y_{n+1}}) = \mathsf{K_j}$ para $1 \leq j \leq n$. Utilizando-se a hipótese de indução, tem-se que $card((\mathsf{Y_1} \cap \mathsf{Y_{n+1}}) \cup (\mathsf{Y_2} \cap \mathsf{Y_{n+1}}) \cup ... \cup (\mathsf{Y_n} \cap \mathsf{Y_{n+1}})) = card(\mathsf{K_1} \cap \mathsf{K_2} \cap ... \cap \mathsf{K_n}) =$

$$(-1)^{1-1}\sum_{j=1}^{n} card(\mathsf{K_j}) + (-1)^{2-1}\sum_{j_1<j_2=2}^{n} card(\mathsf{K_{j_1}} \cap \mathsf{K_{j_2}}) + ...+$$

$$(-1)^{n-1}\sum_{j_1<j_2<...<j_{n-1}=n-1}^{n} card(\mathsf{K_{j_1}} \cap \mathsf{K_{j_2}} \cap ... \cap \mathsf{K_{j_{n-1}}})+$$

$$(-1)^{n}\sum_{j_1<j_2<...<j_n=n}^{n} card(\mathsf{K_{j_1}} \cap \mathsf{K_{j_2}} \cap ... \cap \mathsf{K_{j_n}}) = (-1)^{1-1}\sum_{j=1}^{n} card(\mathsf{Y_j} \cap \mathsf{Y_{n+1}})+$$

$$(-1)^{2-1}\sum_{j_1<j_2=2}^{n} card(\mathsf{Y_{j_1}} \cap \mathsf{Y_{j_2}} \cap \mathsf{Y_{n+1}}) + ...+$$

$$(-1)^{n-1} \sum_{j_1<j_2<...<j_{n-1}=n-1}^{n} card(\mathsf{Y_{j_1}} \cap \mathsf{Y_{j_2}} \cap ... \cap \mathsf{Y_{j_{n-1}}} \cap \mathsf{Y_{n+1}})+$$

$$(-1)^{n} \sum_{j_1<j_2<...<j_n=n}^{n} card(\mathsf{Y_{j_1}} \cap \mathsf{Y_{j_2}} \cap ... \cap \mathsf{Y_{j_n}} \cap \mathsf{Y_{n+1}})$$

.

Por outro lado, pela hipótese de indução tem-se que

$card(\mathsf{Y_1} \cap \mathsf{Y_2} \cap ... \cap \mathsf{Y_n}) =$

$$(-1)^{1-1} \sum_{j=1}^{n} card(\mathsf{Y_j}) + (-1)^{2-1} \sum_{j_1<j_2=2}^{n} card(\mathsf{Y_{j_1}} \cap \mathsf{Y_{j_2}}) + ...+$$

$$(-1)^{n-1} \sum_{j_1<j_2<...<j_{n-1}=n-1}^{n} card(\mathsf{Y_{j_1}} \cap \mathsf{Y_{j_2}} \cap ... \cap \mathsf{Y_{j_{n-1}}})+$$

$$(-1)^{n} \sum_{j_1<j_2<...<j_n=n}^{n} card(\mathsf{Y_{j_1}} \cap \mathsf{Y_{j_2}} \cap ... \cap \mathsf{Y_{j_h}})$$

.

Portanto,

$$card(\mathsf{Y_1} \cup \mathsf{Y_2} \cup ... \cup \mathsf{Y_{n+1}}) = [(-1)^{1-1} \sum_{j=1}^{n} card(\mathsf{Y_j})+$$

$$(-1)^{2-1} \sum_{j_1<j_2=2}^{n} (\mathsf{Y_{j_1}} \cap \mathsf{Y_{j_2}}) + ...+$$

$$(-1)^{n-1} \sum_{j_1<j_2<...<j_{n-1}=n-1}^{n} card(\mathsf{Y_{j_1}} \cap \mathsf{Y_{j_2}} \cap ... \cap \mathsf{Y_{j_{n-1}}})+$$

$$(-1)^{n} \sum_{j_1<j_2<...<j_n=n}^{n} card(\mathsf{Y_{j_1}} \cap \mathsf{Y_{j_2}} \cap ... \cap \mathsf{Y_{j_n}})] + card(\mathsf{Y_{n+1}})-$$

$$(-1)^{1-1} \sum_{j=1}^{n} card(\mathsf{Y_j} \cap \mathsf{Y_{n+1}}) + (-1)^{2-1} \sum_{j_1<j_2=2}^{n} card(\mathsf{Y_{j_1}} \cap \mathsf{Y_{j_2}} \cap \mathsf{Y_{n+1}}) + ...+$$

$$(-1)^{n-1} \sum_{j_1<j_2<...<j_{n-1}=n-1}^{n} card(\mathsf{Y_{j_1}} \cap \mathsf{Y_{j_2}} \cap ... \cap \mathsf{Y_{j_{n-1}}} \cap \mathsf{Y_{n+1}})+$$

$$(-1)^{n} \sum_{j_1<j_2<...<j_n=n}^{n} card(\mathsf{Y_{j_1}} \cap \mathsf{Y_{j_2}} \cap ... \cap \mathsf{Y_{j_n}} \cap \mathsf{Y_{n+1}})]$$

. Logo,

$$card(\mathsf{Y_1} \cup \mathsf{Y_2} \cup ... \cup \mathsf{Y_{n+1}}) = (-1)^{1-1} \sum_{j=1}^{n+1} card(\mathsf{Y_j})+$$

$$(-1)^{2-1}\sum_{j_1<j_2=2}^{n+1} card(\mathsf{Y}_{\mathsf{j}_1}\cap\mathsf{Y}_{\mathsf{j}_2})+(-1)^{3-1}\sum_{j_1<j_2<j_3=3}^{n+1} card(\mathsf{Y}_{\mathsf{j}_1}\cap\mathsf{Y}_{\mathsf{j}_2}\cap\mathsf{Y}_{\mathsf{j}_3})+...+$$

$$(-1)^{n-1}\sum_{j_1<j_2<...<j_{n-1}=n-1}^{n+1} card(\mathsf{Y}_{\mathsf{j}_1}\cap\mathsf{Y}_{\mathsf{j}_2}\cap...\cap\mathsf{Y}_{\mathsf{n-1}})+$$

$$(-1)^{n}\sum_{j_1<j_2<...<j_n=n}^{n+1} card(\mathsf{Y}_{\mathsf{j}_1}\cap\mathsf{Y}_{\mathsf{j}_2}\cap...\cap\mathsf{Y}_{\mathsf{j}_n})+$$

$$(-1)^{n+1}\sum_{j_1<j_2<...<j_{n+1}=n+1}^{n+1} card(\mathsf{Y}_{\mathsf{j}_1}\cap\mathsf{Y}_{\mathsf{j}_2}\cap...\cap\mathsf{Y}_{\mathsf{j}_{n+1}})$$

.

Logo, a equação é válida para $n+1=s(n)\in\mathbb{N}$. E, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que essa igualdade é válida para todo $n\in\mathbb{N}$. ■

Exemplo 3.3.4 Seja X um conjunto finito. Provar que uma função $f:\mathsf{X}\to\mathsf{X}$ é injetiva se, e somente se, f é sobrejetiva (e, portanto, bijetiva).

Prova: Seja X um conjunto finito e $f:\mathsf{X}\to\mathsf{X}$ uma função injetiva. Logo, a função $f:\mathsf{X}\to f(\mathsf{X})$ é bijetiva e $f(\mathsf{X})\subset\mathsf{X}$. Além disso, pelo teorema 3.3.2, tem-se que $f(\mathsf{X})$ é finito e $card(f(\mathsf{X}))\le card(\mathsf{X})$.

Por outro lado, pelo fato de $f:\mathsf{X}\to f(\mathsf{X})$ ser bijetiva, conclui-se pela definição 3.5.1 que $card(f(\mathsf{X}))=card(\mathsf{X})$. Portanto, pelo teorema 3.3.2, tem-se que $f(\mathsf{X})=\mathsf{X}$.

Logo, por definição, f é sobrejetiva.

Reciprocamente, sejam X um conjunto finito e $f:\mathsf{X}\to\mathsf{X}$ uma função sobrejetiva.

Suponha que a função f não seja injetiva. Então, tem-se que existem

m_1, $m_2\in\mathsf{X}$ com $m_1\neq m_2$ tais que $f(m_1)=f(m_1)$.

Caso a restrição $f|\mathsf{X}-\{m_2\}:\mathsf{X}-\{m_2\}\to\mathsf{X}$ seja injetiva, tem-se pela definição 2.4.7 que a função $f|\mathsf{X}-\{m_2\}$ é bijetiva.

Por outro lado, pelo teorema 3.3.2, tem-se que $\mathsf{X}-\{m_1\}$ é finito e

$card(\mathsf{X}-\{m_2\})<card(\mathsf{X})$, pois $\mathsf{X}-\{m_2\}\subsetneq\mathsf{X}$. E, pelo fato de $f(\mathsf{X}-\{m_2\})$ ser bijetiva, tem-se, pela definição 3.5.1 que $card(\mathsf{X}-\{m_2\})=card(\mathsf{X})$, o que é contraditório.

Caso a função $f|\mathsf{X}-\{m_2\}$ não seja injetora, repita o procedimento anterior até obter uma restrição para a função f, a função $f|\mathsf{Y}:\mathsf{Y}\to\mathsf{X}$, com $\mathsf{Y}\subsetneq\mathsf{X}$ tal que a função $f|\mathsf{Y}$ seja injetiva. Portanto, pela definição 2.4.7, conclui-se que $f|\mathsf{Y}$ será uma função bijetiva.

Pelo teorema 3.3.2, tem-se que Y é finito e $card(\mathsf{Y}) < card(\mathsf{X})$, pois $\mathsf{Y} \subsetneq \mathsf{X}$. Além disso, pelo fato de $f|\mathsf{Y}$ ser bijetiva, tem-se, pela definição 3.5.1 que

$card(\mathsf{Y}) = card(\mathsf{X})$, o que é contraditório.

Logo, a função $f : \mathsf{X} \to \mathsf{X}$ é injetiva. ∎

Exemplo 3.3.5 Formular matematicamente e demonstrar o seguinte fato (conhecido como "o princípio das gavetas "). Se $m < n$, então, de qualquer modo como se guardem n objetos em m gavetas, haverá sempre uma gaveta, pelo menos, que conterá mais de um objeto.

Solução: Sejam X e Y conjuntos finitos e $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função sobrejetiva. Se $card(\mathsf{Y}) < card(\mathsf{X})$, então a função f não pode ser injetiva.

Prova: Sejam X e Y conjuntos finitos e $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função sobrejetiva. Deverá existir um subconjunto $\mathsf{A} \subset \mathsf{X}$ tal que a restrição $f|\mathsf{A} : \mathsf{A} \to \mathsf{Y}$ é bijetiva.

Logo, se $x \in \mathsf{X} - \mathsf{A}$, tem-se que $f(x) = (f|A)(p) = y$ para algum $p \in \mathsf{A}$. Evidentemente, $x \neq p$. Logo, a função f não é injetiva. ∎

Exemplo 3.3.6 Seja X um conjunto com n elementos. Determinar o número de funções injetivas $f : I_p \to \mathsf{X}$.

Prova: Por hipótese, X é finito e $card(\mathsf{X}) = n$. E se $f : I_p \to \mathsf{X}$ é uma função injetiva, tem-se, pelo corolário 3.3.3, que $card(I_p) \leq card(\mathsf{X})$. Logo, $p \leq \mathsf{X}$.

Observe que há n maneiras de definir $f(1) = x_i$, pois $i \in I_n$ e $x_i \in \mathsf{X}$. Escolha $f(1) = x_{k_1}$. Para definir $f(2) = x_j$ tem-se $(n-1)$ opções pois $j \in I_n - \{k_1\}$.

Defina $f(2) = x_{k_2}$. E repetindo-se sucessivamente o mesmo procedimento, tem-se que para definir $f(p)$, suponha já definidos $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(p-1)$, há $[n-(p-1)]$ modos distintos.

Segue-se do axioma 3.3.1 que há

$$n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot [n-(p-1)] = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot [n-(p-1)] \cdot (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ modos}$$

de definir o conjunto $f(I_p) = \{f(1), f(2), ..., f(p)\} = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$.

Observe, porém que o axioma 3.3.1 considera as permutações dos elementos. Logo, (como em [MOR], p.27) tem-se que um conjunto com p elementos possui $p!$ permutações possíveis.

Deste modo, para remover repetições na contagem dos modos de definir o conjunto $f(I_p)$, deve-se multiplicar $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ por $\dfrac{1}{p!}$.

Logo, há $\dfrac{n!}{(n-p)!} \cdot \dfrac{1}{p!} = \dfrac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$ funções injetoras possíveis.

Exemplo 3.3.7 Quantos subconjuntos com p elementos possui um conjunto X, sabendo-se que X tem n elementos ?

Solução: Vamos construir um subconjunto $\mathsf{A} \subset \mathsf{X}$ escolhendo p elementos (distintos) do conjunto X.

Para escolher um elemento $y_1 \in \mathsf{X}$, há n modos distintos, pois, por hipótese, $card(\mathsf{X}) = n$.

Supondo fixo y_1 em A, para escolher um elemento $y_2 \in \mathsf{X}$, com $y_2 \neq y_1$, há $(n-1)$ modos distintos.

Repetindo-se sucessivamente o mesmo procedimento, tem-se que para escolher um elemento $y_p \in \mathsf{X}$ supondo fixos os elementos y_1, y_2, ..., y_p em A, há $[n-(p+1)]$ modos distintos.

Segue-se do axioma 3.3.1 que há $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot [n-(p+1)]$ modos de obter um conjunto A tal que $card(\mathsf{A}) = p$.

Note, porém que o axioma 3.3.1 considera as permutações do conjunto

$\{y_1, y_2, ..., y_p\}$ como conjuntos distintos. E há $p!$ permutações possíveis ([MOR], p.27).

Logo, é necessário multiplicar $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot [n-(p+1)]$ por $\dfrac{1}{p!}$ para remover conjuntos repetidos da contagem.

Portanto, X admite $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot [n-(p+1)] \cdot \dfrac{1}{p!} =$

$\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot [n-(p+1)]}{p!} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot [n-(p+1)]}{p!} . \dfrac{(n-p)!}{(n-p)!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ subconjuntos com p elementos.

Exemplo 3.3.8 Provar que se A tem n elementos, então $\mathbb{P}(\mathsf{A})$ tem 2^n elementos.

Prova: Deve-se considerar a quantidade de subconjuntos de A, respectivamente com 0, 1, 2, ..., n elementos.

Tem-se, pelo exemplo 3.3.7, que a quantidade de subconjuntos (distintos), do conjunto A, com p elementos é $\dfrac{n!}{p!\cdot(n-p)!}$, que denota-se por C_n^p ou $\dbinom{n}{p}$.

Segue-se do Princípio da Adição ([MOR], p.18) que, neste texto, é o teorema 3.3.4 que $card(\mathbb{P}(\mathsf{A})) = \mathsf{C}_n^0 + \mathsf{C}_n^1 + \mathsf{C}_n^2 + ... + \mathsf{C}_n^n = \dfrac{n!}{0!\cdot(n-0)!} + \dfrac{n!}{1!\cdot(n-1)!} + \dfrac{n!}{2!\cdot(n-2)} +$ $... + \dfrac{n!}{n!\cdot(n-n)!} = \dbinom{n}{0} + \dbinom{n}{1} + \dbinom{n}{2} + ... + \dbinom{n}{n} =$

$$\binom{n}{0}\cdot 1^{n-0}\cdot 1^0 + \binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot 1^1 + \binom{n}{2}\cdot 1^{n-2}\cdot 1^2 + ... + \binom{n}{n}\cdot 1^{n-n}\cdot 1^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\cdot 1^{n-j}\cdot 1^j.$$

Segue-se do teorema do Binômio ([ALE], p.55) que

$$\sum_{j=0}^{n}\cdot\binom{n}{j}1^{n-j}\cdot 1^j = (1+1)^n = 2^n.$$

Logo, $card(\mathbb{P}(\mathsf{A})) = 2^n$. ■

Exemplo 3.3.9 Definir uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto dos elementos $f^{-1}(n)$ seja infinito.

Solução: Sejam p_1, p_2, ..., p_n números primos e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função definida pela regra $f(p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot ... \cdot p_k^{n_k}) = n_1$ e $f(x) = 1$ se x não é da forma $p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot ... \cdot p_k^{n_k}$.

A função f assim definida é sobrejetora, pois $\forall n_1 \in \mathbb{N}$ existe $x = p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot...\cdot p_k^{n_k}$, $x \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = n_1$.

Evidentemente, o conjunto $\{(p_1^1\cdot p_2^{n_2}\cdot...\cdot p_k^{n_k}), (p_1^2\cdot p_2^{n_2}\cdot...\cdot p_k^{n_k}), ..., p_1^r\cdot p_2^{n_2}\cdot...\cdot p_k^{n_k}, ...\}$ é infinito e é subconjunto de $f^{-1}(\mathbb{N})$. Logo, $f^{-1}(\mathbb{N})$ é infinito.

Exemplo 3.3.10 Provar que se X é um conjunto infinito, então $\mathbb{P}(\mathsf{X})$ também é infinito.

Prova: Seja X um conjunto infinito e $f : \mathsf{X} \to \mathbb{P}(\mathsf{X})$ uma função definida pela regra $f(x) = \{x\}$.

Dados x, $y \in \mathsf{X}$, tais que $f(x) = f(y)$. Então, tem-se que $\{x\} = \{y\}$. Logo, $x = y$. E pela definição 2.4.5, tem-se que a função f é injetiva.

Portanto, pela contra-positiva do corolário 3.3.3, conclui-se que

$\mathbb{P}(\mathsf{X})$ é infinito. ■

Exemplo 3.4.5 Provar que se X é um conjunto infinito enumerável, então o conjunto das partes finitas de X também é (infinito) enumerável.

Prova: Observe que o conjunto das partes finitas de X, denotado por $\mathsf{F}(\mathsf{X})$ é um subconjunto de $\mathbb{P}(\mathsf{X})$.

Além disso,

$$\mathsf{F}(\mathsf{X}) = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} \{\mathsf{A}; \mathsf{A} \subset \{x_1, x_2, ..., x_i\}\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\mathsf{A}; \mathsf{A} \subset \{x_1, x_2, ..., x_i\}\}, \text{ para todo } x_i \in \mathsf{X}.$$

Para qualquer $i \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_i\}$ é finito. Logo, pelo exemplo 3.3.7, conclui-se que $card(\mathbb{P}(\{x_1, x_2, ..., x_i\})) = 2^i$, ou seja,

$\mathbb{P}(\{x_1, x_2, ..., x_i\}) = \{\mathsf{A}; \mathsf{A} \subset \{x_1, x_2, ..., x_i\}\}$ é finito, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Logo, pela definição 3.4.1, o conjunto $\{\mathsf{A}; \mathsf{A} \subset \{x_1, x_2, ..., x_i\}\}$ é enumerável para todo $i \in \mathbb{N}$.

Segue-se do corolário 3.4.4 que o conjunto $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\mathsf{A}; \mathsf{A} \subset \{x_1, x_2, ..., x_i\}\} = \mathsf{F}(\mathsf{X})$ é (infinito) enumerável. ■

Exemplo 3.3.11 Seja $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ uma função. Um subconjunto $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$ denomina-se estável relativamente a f quando $f(\mathsf{Y}) \subset \mathsf{Y}$. Provar que um conjunto X é finito se, e somente se, existe uma função $f : \mathsf{X} \to \mathsf{X}$ que só possui os subconjuntos estáveis $\oslash$ e X.

Prova: Por hipótese, X é um conjunto finito não-vazio, que denotaremos por

$\mathsf{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Defina uma função $f : \mathsf{X} \to \mathsf{X}$, pela regra $f(x_1) = x_n$ e $f(x_i) = x_{i-1}$, para $2 \leq i \leq n$.

Seja A um subconjuntos de X. Se existe $x_n \in \mathsf{X}$ tal que $x_n \in \mathsf{A}$, então

$$x_n = \begin{cases} f^{(k-\alpha)}(x_\alpha) & \text{se} \quad n \geq \alpha \\ f^{(k-\alpha+n)}(x_\alpha) & \text{se} \quad k < \alpha \end{cases}.$$

Portanto, $f^{k-\alpha(mod\ n)}(x_\alpha) \in \mathsf{X}$, com $1 \leq \alpha \leq n$. Logo, $f(\mathsf{A}) = \mathsf{A}$ e $\mathsf{A} = \mathsf{X}$.

Se $\mathsf{A} = \oslash$, então $f(\oslash) = \oslash$. Em particular, $f(\oslash) \subset \oslash$.

Reciprocamente, seja $\mathsf{Y} = \{x_n, f(x_n), f^2(x_n), ..., f^n(x_n), ...\} = \mathsf{X}$.

Se não existir $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $f^\alpha(x_n) = x_n$, então $\mathsf{Y} - \{x_n\}$ é estável em relação a f, pois $f(\mathsf{Y} - \{x_n\}) \subset \mathsf{Y} - \{x_n\}$.

Por hipótese, $\mathsf{X} = \mathsf{Y} - \{x_n\}$. Logo, $x_n \notin \mathsf{X}$, o que é contraditório.

Se existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $f^\alpha(x_n) = x_n$, pode-se definir uma função $\lambda : I_\alpha \to \mathsf{Y}$, pela regra

$$\lambda(p) = \begin{cases} f^p(x_n) & \text{se} \quad p \neq \alpha \\ f^\alpha(x_n) & \text{se} \quad p = \alpha \end{cases}.$$

Dados p_1, $p_2 \in I_\alpha$, com $\lambda(p_1) = \lambda(p_2)$, então $f^{p_1}(x_n) = f^{p_2}(x_n)$. Logo, $n - p_1 = n - p_2$. Portanto, $p_1 = p_2$. E, pela definição 2.4.5, conclui-se que a função λ é injetiva.

Além disso, a hipótese de que existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $f^\alpha(x_n) = x_n$ permite concluir que para todo $y = f^p(x_n) \in \mathsf{Y}$, existe $p \in I_\alpha$ tal que $\lambda(p) = y$. Logo, pela definição 2.4.6, conclui-se que λ é uma função sobrejetiva. Logo, pela definição 2.4.7, conclui-se que λ é bijetiva.

Segue-se da definição 3.3.1 que Y é um conjunto finito. E, como, por hipótese, $\mathsf{X} = \mathsf{Y}$, conclui-se que X é finito. ■

Exemplo 3.1.4 Seja $f : \mathsf{X} \to \mathsf{X}$ uma função injetiva tal que $f(\mathsf{X}) \neq \mathsf{X}$. Se $x \in \mathsf{X} - f(\mathsf{X})$, provar que os elementos x, $f(x)$, $f(f(x))$, ... são dois a dois distintos.

Prova: Seja $\mathsf{Y} = \{n \in \mathbb{N}; x \neq f^p(x) \text{ e } f^p(x) \neq f^{n+p}(x)\}$. Por hipótese, $x \in \mathsf{X} - f(\mathsf{X})$. Logo, $x \neq f^p(x)$, $\forall p \in \mathbb{N}$. E, pelo fato de f ser injetiva, tem-se que

$x \neq f^p(x) \Rightarrow f(x) \neq f(f^p(x))$. Portanto, $f(x) \neq f^{1+p}(x)$. Logo, $1 \in \mathsf{Y}$.

Suponha que $n \in \mathsf{Y}$. Então, tem-se que $f^n(x) \neq f^{n+p}(x)$. E pelo fato de f ser injetiva, obtém-se que $f(f^n(x)) \neq f(f^{n+p}(x))$. Logo, $f^{n+1}(x) \neq f^{(n+1)+p}(x)$. Portanto, $n + 1 = s(n) \in \mathsf{Y}$. E, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{Y} = \mathbb{N}$. ■

Exemplo 3.3.12 Sejam X um conjunto infinito e Y um conjunto finito. Mostrar que existe uma função sobrejetiva $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ e uma função injetiva $g : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$.

Prova: Sejam A_j, $j \in \mathbb{N}$, partições do conjunto X isto é, $\mathsf{A}_j \in \mathsf{F}(\mathsf{X})$. Deste modo, tem-se que se $j \neq k$, então $\mathsf{A}_j \cap \mathsf{A}_k = \emptyset$.

Por hipótese, Y é finito (não-vazio). Logo, pela definição 3.3.1, conclui-se que existe uma função bijetiva $h : I_n \to \mathsf{Y}$. Em particular, h é uma função sobrejetiva.

Defina uma função $\alpha : \mathsf{X} \to I_n$, pela regra

$$\alpha(x) = \begin{cases} j & \text{se} \quad x \in \mathsf{A}_j \text{ e } 1 \leq j \leq n \\ 1 & \text{se} \quad x \in \mathsf{A}_j \text{ e } n < j \end{cases}.$$

Pelo exemplo 3.4.5, tem-se que $\mathsf{F}(\mathsf{X})$ é infinito. Logo, $\mathsf{A}_k \in \mathsf{F}(\mathsf{X})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, para todo $k \in I_n$, existe $x \in \mathsf{A}_j \subset \mathsf{X}$ tal que $f(x) = k$. Logo, por definição, α é uma função sobrejetiva.

Logo, pela proposição 2.5.3, conclui-se que a função composta $h \circ \alpha : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$

também é sobrejetiva.

Defina uma função $w : I_n \to \mathsf{X}$, pela regra $w(j) = x_j$, com $x_j \in \mathsf{A}_j$.

A função w assim definida é injetiva, pois, dados m_1, $m_2 \in I_n$, tais que $m_1 \neq m_2$, tem-se que $w(m_1) \in \mathsf{A}_{m_1}$ e $w(m_2) \in \mathsf{A}_{m_2}$. E, como $\mathsf{A}_{m_1} \cap \mathsf{A}_{m_2} = \oslash$, tem-se, necessariamente, $w(m_1) \neq w(m_2)$.

Por outro lado, a função $h : I_n \to \mathsf{Y}$ é bijetiva. Logo, pelo corolário 2.5.2, conclui-se que h, possui uma inversa $h^{-1} : \mathsf{Y} \to I_n$, que também é bijetiva. Em particular, h^{-1} é uma função injetiva.

Logo, pela proposição 2.5.2, conclui-se que a função composta $w \circ h^{-1} : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ também é injetiva. ■

Exemplo 3.4.6 (a) Provar que se o conjunto X é finito e Y é um conjunto enumerável, então $\mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ é enumerável.

Prova: Seja X um conjunto finito, que denotaremos por $\mathsf{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Defina uma função $\alpha : \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y}) \to \mathsf{Y}^n$, pela regra $\alpha(f) = (f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n))$.

Dadas as funções f_1, $f_2 \in \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ tais que $f_1 \neq f_2$, tem-se que

$\alpha(f_1) = (f_1(x_1), f_1(x_2), ..., f_1(x_n)) \neq (f_2(x_1), f_2(x_2), ..., f_2(x_n)) = \alpha(f_2)$, pois caso contrário teríamos que $f_1(x_k) = f_2(x_k)$ para todo $k \in I_m$, o que é contraditório, pois nesse caso $f_1 = f_2$. Logo, por definição α é uma função injetiva.

Dado $w = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathsf{Y}^n$, existe uma função $h : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ tal que

$\alpha(h) = (h(x_1), h(x_2), ..., h(x_n)) = (y_1, y_2, ..., y_n)$, pois caso contrário $h \notin \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$. Logo, por definição α é sobrejetiva.

Segue-se da definição 2.4.7 que a função h é bijetiva. Logo, pelo corolário 2.5.2, conclui-se que α admite uma inversa $\alpha^{-1} : \mathsf{Y}^n \to \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ e que α^{-1} também é bijetiva.

Por hipótese, Y é enumerável (e não-vazio). Logo, pelo corolário 3.4.5, o conjunto $\mathsf{Y} \times \mathsf{Y} \times ... \times \mathsf{Y} = \mathsf{Y}^n$ é enumerável. Desse modo, pela definição 3.4.1, tem-se que Y^n é finito ou existe uma função bijetiva $\psi : \mathbb{N} \to \mathsf{Y}^n$.

Se Y^n é finito (não-vazio), então existe uma função bijetiva $\varphi : I_m \to \mathsf{Y}^n$. E, pelo corolário 2.5.1, conclui-se que a função composta $\alpha^{-1} \circ \varphi : I_m \to \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ também é bijetiva.

Logo, pela definição 3.3.1, tem-se que o conjunto $\mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ é finito. E, pela definição 3.4.1, conclui-se que $\mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ é enumerável.

Se existe uma função bijetiva $\psi : \mathbb{N} \to \mathsf{Y}^n$, então, pelo corolário 2.5.1, conclui-se que a função composta $\alpha^{-1} \circ \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$ é bijetiva.

Portanto, pela definição 3.4.1, conclui-se que o conjunto $\mathbb{F}(\mathsf{X};\mathsf{Y})$

é enumerável. ■

(b) Para cada função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, seja $\mathsf{A}_f = \{n \in \mathbb{N}; f(n) \neq 1\}$. Provar que o conjunto das funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que A_f é finito é um conjunto enumerável.

Prova: Seja $f \in \mathbb{F}(\mathbb{N};\mathbb{N})$. Por hipótese, o conjunto $\mathsf{A}_f = \{n \in \mathbb{N}; f(n) \neq 1\}$ é finito.

Por outro lado, pela propriedade reflexiva da inclusão de conjuntos tem-se que $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$. Logo, pelo teorema 3.4.2, conclui-se que o conjunto $\mathbb{N}$ é enumerável.

Logo, pelo item (a) deste exemplo, tem-se que o conjunto $\mathbb{F}(\mathsf{A}_f;\mathbb{N})$ é enumerável. ■

Exemplo 3.2.5 Obter uma decomposição $\mathbb{N} = \mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2 \cup ... \cup \mathsf{X}_n \cup ...$ tal que os conjuntos X_1, X_2, ..., X_n, ... sejam infinitos e dois a dois disjuntos.

Solução: Pelo teorema 3.2.3, tem-se que todo número natural $n > 1$, possui uma decomposição em fatores primos. Além disso, pela proposição 3.4.1, tem-se que essa decomposição é única.

Desse modo, sejam p_1, p_2, ..., p_n, ... números primos e $m_k \in \mathbb{N}$. Defina $\mathsf{X}_1 = \{n \in \mathbb{N}; n = p_1^{m_1}\} \cup \{1\}\}$, $\mathsf{X}_2 = \{n \in \mathbb{N}; n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2}\}$, ...,

$\mathsf{X}_n = \{n \in \mathbb{N}; n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_n^{m_n}\}$, ...

A unicidade da decomposição de números naturais em fatores primos garante que X_1, X_2, ..., X_n, ... são dois a dois disjuntos. Além disso, esses conjuntos são infinitos, pois, $m_k \in \mathbb{N}$. E, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathsf{X}_i = \mathbb{N}$.

Exemplo 3.1.5 Defina uma função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, indutivamente, por $f(1,n) = 2 \cdot n - 1$ e $f(m+1,n) = 2^m \cdot (2 \cdot n - 1)$. Prove que λ é uma função bijetiva.

Prova: Seja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, uma função definida indutivamente por $f(1,n) = 2 \cdot n - 1$ e $f(m+1,n) = 2^m \cdot (2 \cdot n - 1)$.

Dado $y \in \mathbb{N}$, se y for par, então existem m, $n \in \mathbb{N}$ tais que

$y = 2^{m-1} \cdot (2 \cdot n - 1) = f(m,n)$. Se y for impar, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$y = 2 \cdot n - 1 = f(1, n)$. Logo, pela definição 2.4.6, conclui-se que a função f é sobrejetiva.

Seja $\mathsf{X} = \{k \in \mathbb{N}; (k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e f é injetiva$\}$. Para $k = 1$, tem-se

$f(k, n) = 2 \cdot n - 1$ e dados n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $f(1, n_1) = f(1, n_2)$, então $2 \cdot n_1 - 1 = 2 \cdot n_2 - 1$. Portanto, $n_1 = n_2$. E, pela definição 2.4.5, conclui-se que f é injetiva. Logo, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $k = m + 1 \in \mathsf{X}$. Então, dados n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$f(k + 1, n_1) = f(k + 1, n_2)$, tem-se que $2^k \cdot (2 \cdot n_1 - 1) = 2^k \cdot (2 \cdot n_2 - 1)$. Logo,

$2^{m+1} \cdot (2 \cdot n_1 - 1) = 2^m \cdot (2 \cdot n_2 - 1)$. Portanto, $2 \cdot 2^m \cdot (2 \cdot n_1 - 1) = 2 \cdot 2^m \cdot (2 \cdot n_2 - 1)$. Logo, $2^m \cdot (2 \cdot n_1 - 1) = 2^m \cdot (2 \cdot n_2 - 1)$, ou seja, $f(m + 1, n_1) = f(m + 1, n_2)$.

Por hipótese, para $k = m + 1$ a função f é injetiva.

Logo, conclui-se que $(m + 1, n_1) = (m + 1, n_2)$, ou seja, $n_1 = n_2$. Portanto, pela definição 2.4.5, f é injetiva e $k + 1 = s(k) \in \mathsf{X}$.

Segue-se do axioma 3.1.3 que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$, ou seja, a função é injetiva para todo $k \in \mathbb{N}$.

Segue-se da definição 2.4.7 que a função f é bijetiva. ■

Exemplo 3.4.7 Seja X um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Prove que existe uma única função bijetiva crescente $f : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$.

Prova: Por hipótese, X é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Logo, pelo corolário 3.4.3, conclui-se que existe uma função bijetiva crescente $f : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$.

Suponha que $\alpha : \mathbb{N} \to \mathsf{X}$ seja outra função bijetiva crescente. Evidentemente α é tal que $\alpha(1) = \min \mathsf{X}$ e $\alpha(1) < \alpha(2) < ... < \alpha(n)$. E se $\mathsf{W} = \mathsf{X} - \{\alpha(1), \alpha(2), ..., \alpha(n)\}$, tem-se que $\alpha(n + 1) = \min \mathsf{W}$.

Seja $\mathsf{Y} = \{n \in \mathbb{N}; \alpha(n) = f(n)\}$. Para $n = 1$, tem-se que $f(1) = \min \mathsf{X} = \alpha(1)$. Logo, $1 \in \mathsf{Y}$.

Suponha que $n \in \mathsf{Y}$. Caso $\alpha(n + 1) < f(n + 1)$, então existe $p \in \mathbb{N}$ com $p > n+1$, tal que $f(p) = \min \mathsf{W} = \alpha(n+1)$. Logo, $f(p) < f(n+1)$, o que é contraditório, pois f é uma função crescente.

Caso $f(n + 1) < \alpha(n + 1)$, então existe $k \in \mathbb{N}$ com $k > n + 1$ tal que

$\alpha(k) = f(n + 1)$, pois, por hipótese, α é bijetiva. Logo, $\alpha(k) < \alpha(n + 1)$, o que é contraditório, pois $n + 1 < k$ e α é crescente.

Logo, pela propriedade da tricotomia, da relação de ordem, conclui-se que $f(n+1) = \alpha(n+1)$. Portanto, $n+1 = s(n) \in \mathsf{Y}$. Logo, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{Y} = \mathbb{N}$. Logo, $\alpha = f$. ■

Exemplo 3.5.2 Provar que todo conjunto infinito se decompõe como reunião de uma infinidade enumerável de conjuntos infinitos, dois a dois disjuntos.

Prova: Tem-se, pelo exemplo 3.2.5 que existem subconjuntos infinitos X_1, X_2, ..., X_n, ..., de $\mathbb{N}$, dois a dois disjuntos tais que $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{X}_j = \mathbb{N}$.

Seja Y um conjunto infinito. Se Y é enumerável, então, pela definição 3.4.1, conclui-se que existe uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathsf{Y}$.

Em particular, f é sobrejetiva, logo $f(\mathbb{N}) = \mathsf{X}$. Portanto, $f(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{X}_j) = \mathsf{Y}$. E, pela propriedade (g.I), tem-se que $f(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{X}_j) = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} f(\mathsf{X}_j)$. Logo, $\mathsf{Y} = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} f(\mathsf{X}_j)$. Portanto, $\mathsf{Y} = f(\mathsf{X}_1) \cup f(\mathsf{X}_2) \cup ... \cup f(\mathsf{X}_n) \cup ....$

A função f é bijetiva. Logo, a função $f|\mathsf{X}_j : \mathsf{X}_j \to f(\mathsf{X}_j)$ é bijetiva para todo $j \in \mathbb{N}$.

Logo, como os conjuntos X_1, X_2, ..., X_n, ... são dois a dois disjuntos, conclui-se que os conjuntos $f(\mathsf{X}_1)$, $f(\mathsf{X}_2)$, ..., $f(\mathsf{X}_n)$, ..., também são dois a dois disjuntos.

Além disso, em particular a função $f|\mathsf{X}_j : \mathsf{X}_j \to f(\mathsf{X}_j)$ é injetiva para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, pela contra-positiva do corolário 3.3.3, conclui-se que os conjuntos $f(\mathsf{X}_1)$, $f(\mathsf{X}_2)$, ..., $f(\mathsf{X}_n)$, ... são infinitos. Logo a decomposição $\mathsf{Y} = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} f(\mathsf{X}_j)$ satisfaz as afirmações do enunciado.

Se Y é um conjunto infinito não-enumerável, então, pela proposição 3.5.2, conclui-se que $card(\mathbb{N}) < card(\mathsf{X})$. Logo, pela definição 3.5.2, conclui-se que existe uma função injetiva $g : \mathbb{N} \to \mathsf{Y}$, ou seja, $\mathsf{Y} - g(\mathbb{N}) \neq \oslash$.

Logo, $\mathsf{Y} = g(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{X}_j) \cup (\mathsf{Y} - g(\mathbb{N}))$, sendo $(\mathsf{Y} - g(\mathbb{N}))$ infinito, pois Y é infinito. E disjunto em relação a $g(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{X}_j)$, isto é, $g(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathsf{X}_j) \cap (\mathsf{Y} - g(\mathbb{N})) = \oslash$.

Portanto, $\mathsf{Y} = (g(\mathsf{X}_1) \cup g(\mathsf{X}_2) \cup ... \cup g(\mathsf{X}_n) \cup ...) \cup (\mathsf{Y} - g(\mathbb{N}))$ é uma decomposição de Y em conjuntos infinitos dois a dois disjuntos, pois g é uma função injetiva e os conjuntos X_1, X_2, ..., X_n, ... são infinitos e dois a dois disjuntos. ■

Exemplo 3.4.8 Sejam $f : \mathsf{A} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathsf{A} \to \mathbb{N}$ funções. Definir a soma $f + g : \mathsf{A} \to \mathbb{N}$, o produto $f \cdot g : \mathsf{A} \to \mathbb{N}$ e atribuir significado a afirmação $f \leq g$.

Solução: Sejam $f : \mathsf{A} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathsf{A} \to \mathbb{N}$ funções definidas, respectivamente por, $f(x) = y$ e $g(x) = w$.

Definimos a função $f+g : \mathsf{A} \to \mathbb{N}$ pela regra $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = y+w$.

Pode-se definir a função $f \cdot g : \mathsf{A} \to \mathbb{N}$ pela regra $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = y \cdot w$.

Diz-se que $f \leq g$ se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \mathsf{A}$.

Defina também a função $f - g : \mathsf{A} \to \mathbb{N}$, por $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = y - w$, sempre que $(n - k) \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

(a) Seja ξ_{X}, a função característica de $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{A}$. Provar que $\xi_{\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}} = \xi_{\mathsf{X}} \cdot \xi_{\mathsf{Y}}$.

Prova: Seja X um subconjunto do conjunto básico A. Chama-se função característica de X, e denota-se por ξ_{X} a função $\xi_{\mathsf{X}} : \mathsf{A} \to \{0,1\}$ definida pela regra

$$\xi_{\mathsf{X}}(x) = \begin{cases} 1 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X} \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X}^{\mathsf{C}} \end{cases}.$$

Portanto, a função $\xi_{\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}} : \mathsf{A} \to \{0,1\}$, sendo $(\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) \subset \mathsf{A}$ e A um conjunto básico e definida por:

$$\xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}(x) = \begin{cases} 1 & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y})^{C} \end{cases} = \begin{cases} 1 & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{X}^{\mathsf{C}} \cup \mathsf{Y}^{\mathsf{C}}) \end{cases} =$$

$$\begin{cases} 1 & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X}^{\mathsf{C}} \text{ e } x \notin \mathsf{Y}^{\mathsf{C}} \\ 0 & ,\text{se} \quad x \notin \mathsf{X}^{\mathsf{C}} \text{ e } x \in \mathsf{Y}^{\mathsf{C}} \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X}^{\mathsf{C}} \text{ e } x \in \mathsf{Y}^{\mathsf{C}} \end{cases} = \begin{cases} 1 & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X}^{\mathsf{C}} \text{ e } x \in \mathsf{Y} \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X} \text{ e } x \in \mathsf{Y}^{\mathsf{C}} \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X}^{\mathsf{C}} \text{ e } x \in \mathsf{Y}^{\mathsf{C}} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} 1 \cdot 1 & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) \\ 0 \cdot 1 & ,\text{se} \quad x \notin \mathsf{X} \text{ e } x \in \mathsf{Y} \\ 1 \cdot 0 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X} \text{ e } x \notin \mathsf{Y} \\ 0 \cdot 0 & ,\text{se} \quad x \notin \mathsf{X} \text{ e } x \notin \mathsf{Y} \end{cases} = \begin{cases} \xi_{\mathsf{X}}(x) \cdot \xi_{\mathsf{Y}}(x) & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}) \\ \xi_{\mathsf{X}}(x) \cdot \xi_{\mathsf{Y}}(x) & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{Y} - \mathsf{X} \\ \xi_{\mathsf{X}}(x) \cdot \xi_{\mathsf{Y}}(x) & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X} - \mathsf{Y} \\ \xi_{\mathsf{X}}(x) \cdot \xi_{\mathsf{Y}}(x) & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{X} \cup \mathsf{Y})^{\mathsf{C}} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \xi_{\mathsf{X}}(x) \cdot \xi_{\mathsf{Y}}(x) & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) \\ \xi_{\mathsf{X}}(x) \cdot \xi_{\mathsf{Y}}(x) & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{X} \cup \mathsf{Y})^{\mathsf{C}} \end{cases} = \xi_{\mathsf{X}}(x) \cdot \xi_{\mathsf{Y}}(x),\ \forall x \in \mathsf{A}.$$

Logo, por definição, conclui-se que $\xi_{\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}} = \xi_{\mathsf{X}} \cdot \xi_{\mathsf{Y}}$. ■

(b) Provar que $\xi_{\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}} = \xi_{\mathsf{X}} + \xi_{\mathsf{Y}} - \xi_{\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}}$.

Prova: A função $\xi_{\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}} : \mathsf{A} \to \{0,1\}$, sendo $(\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}) \subset \mathsf{A}$, é definida por

$$\xi_{\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } \; x \in (\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}) \\ 0 & \text{, se } \; x \in (\mathsf{X}\cup\mathsf{Y})^C \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{, se } \; x \in (\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}) \\ 0 & \text{, se } \; x \in \mathsf{X^C}\cap\mathsf{Y^C} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{, se } \; x \in (\mathsf{X}-\mathsf{Y}) \\ 1 & \text{, se } \; x \in (\mathsf{Y}-\mathsf{X}) \\ 1 & \text{, se } \; x \in (\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}) \\ 0 & \text{, se } \; x \in (\mathsf{X^C}\cap\mathsf{Y^C}) \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{, se } \; x \in (\mathsf{X}-\mathsf{Y})-(\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}) \\ 1 & \text{, se } \; x \in (\mathsf{Y}-\mathsf{X})-(\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}) \\ 1 & \text{, se } \; x \in \mathsf{X}\cap\mathsf{Y}\cap(\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}) \\ 0 & \text{, se } \; x \in (\mathsf{X^C}\cap\mathsf{Y^C})-(\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}) \end{cases} =$$

$$\begin{cases} 1+0-0 & \text{, se } \; x \in \mathsf{X} \text{ e } x \in \mathsf{Y^C} \text{ e } x \in (\mathsf{X}\cap\mathsf{Y})^C \\ 0+1-0 & \text{, se } \; x \in \mathsf{X^C} \text{ e } x \in \mathsf{Y} \text{ e } x \in (\mathsf{X}\cap\mathsf{Y})^C \\ 1+1-1 & \text{, se } \; x \in \mathsf{X} \text{ e } x \in \mathsf{Y} \text{ e } x \in (\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}) \\ 0+0+0 & \text{, se } \; x \in \mathsf{X^C} \text{ e } x \in \mathsf{Y^C} \text{ e } x \in (\mathsf{X}\cap\mathsf{Y})^C \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \xi_{\mathsf{X}}(x)+\xi_{\mathsf{Y}}(x)-\xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}(x) & \text{, se } \; x \in \mathsf{X} \text{ e } x \in \mathsf{Y^C} \text{ e } x \in (\mathsf{X}\cap\mathsf{Y})^C \\ \xi_{\mathsf{X}}(x)+\xi_{\mathsf{Y}}(x)-\xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}(x) & \text{, se } \; x \in \mathsf{X^C} \text{ e } x \in \mathsf{Y} \text{ e } x \in (\mathsf{X}\cap\mathsf{Y})^C \\ \xi_{\mathsf{X}}(x)+\xi_{\mathsf{Y}}(x)-\xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}(x) & \text{, se } \; x \in \mathsf{X} \text{ e } x \in \mathsf{Y} \text{ e } x \in (\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}) \\ \xi_{\mathsf{X}}(x)+\xi_{\mathsf{Y}}(x)-\xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}(x) & \text{, se } \; x \in \mathsf{X^C} \text{ e } x \in \mathsf{Y^C} \text{ e } x \in (\mathsf{X}\cap\mathsf{Y})^C \end{cases} =$$

$\xi_{\mathsf{X}}(x)+\xi_{\mathsf{Y}}(x)-\xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}(x)$, $\forall x \in \mathsf{A}$. Portanto, por definição, tem-se que $\xi_{\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}} = \xi_{\mathsf{X}}+\xi_{\mathsf{Y}}-\xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}$. ■

(c) Provar que $\xi_{\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}} = \xi_{\mathsf{X}}+\xi_{\mathsf{Y}}$ se, e somente se $\mathsf{X}\cap\mathsf{Y} = \oslash$.

Prova: Suponha que $\xi_{\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}} = \xi_{\mathsf{X}}+\xi_{\mathsf{Y}}$. Então, para todo $x \in \mathsf{A}$, tem-se

$\xi_{\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}}(x) = \xi_{\mathsf{X}}(x)+\xi_{\mathsf{Y}}(x)$.

Por outro lado, pelo item (b) deste exemplo, tem-se que

$\xi_{\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}}(x) = \xi_{\mathsf{X}}(x)+\xi_{\mathsf{Y}}(x)-\xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}(x)$ para todo $x \in \mathsf{A}$.

Logo, $\xi_{\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}}(x)-\xi_{\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}}(x) = \xi_{\mathsf{X}}(x)+\xi_{\mathsf{Y}}(x)-(\xi_{\mathsf{X}}(x)+\xi_{\mathsf{Y}}(x)-\xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}(x))$. Portanto, $0 = \xi_{\mathsf{X}}(x)+\xi_{\mathsf{Y}}(x)-\xi_{\mathsf{X}}(x)-\xi_{\mathsf{Y}}(x)+\xi_{\mathsf{Y}}(x)-\xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}(x)$. Logo, $\xi_{\mathsf{Y}}(x)-\xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}(x) = 0$, para todo $x \in \mathsf{A}$.

Portanto, por definição, $x \in (\mathsf{X}\cap\mathsf{X})^C$ para todo $x \in \mathsf{A}$, sendo $(\mathsf{X}\cap\mathsf{Y})$ um subconjunto de X. Logo, $(\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}) = \oslash$.

Reciprocamente, suponha que $\mathsf{X}\cap\mathsf{Y} = \oslash$. A função $\xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}} : \mathsf{A} \to \{0,1\}$, sendo $(\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}) \subset \mathsf{A}$, onde A é um conjunto básico, define-se por

$$\xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}(x) = \begin{cases} 1 & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}) \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{X}\cap\mathsf{Y})^C \end{cases}.$$

Logo, como $\mathsf{X}\cap\mathsf{X} = \oslash$ e $\mathsf{X}\cap\mathsf{Y} \subset \mathsf{A}$, conclui-se que $x \in (\mathsf{X}\cap\mathsf{Y})^C$ para todo $x \in \mathsf{A}$. Portanto, $\xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}(x) = 0$, para todo $x \in \mathsf{A}$.

Pelo item (b) deste exemplo, tem-se que

$\xi_{\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}}(x) = \xi_{\mathsf{X}}(x) + \xi_{\mathsf{Y}}(x) - \xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}(x) = \xi_{\mathsf{X}}(x) + \xi_{\mathsf{Y}}(x) - 0 = \xi_{\mathsf{X}}(x) + \xi_{\mathsf{Y}}(x)$, para todo $x \in \mathsf{A}$. Logo, por definição, conclui-se que $\xi_{\mathsf{X}\cup\mathsf{Y}} = \xi_{\mathsf{X}} + \xi_{\mathsf{Y}}$. ■

(d) Provar que $\mathsf{X} \subset \mathsf{Y}$ se, e somente se $\xi_{\mathsf{X}} \leq \xi_{\mathsf{Y}}$.

Prova: Suponha que $\mathsf{X} \subset \mathsf{Y}$. Tem-se que a função $\xi_{\mathsf{Y}} : \mathsf{A} \to \{1, 0\}$ é definida pela regra

$$\xi_{\mathsf{Y}}(x) = \begin{cases} 1 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{Y} \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{Y}^{\mathsf{C}} \end{cases} = \begin{cases} 1 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X}\cap\mathsf{Y} \\ 1 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{Y}-\mathsf{X} \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{Y}^{\mathsf{C}} \end{cases}.$$

Por outro lado, se $\mathsf{X} \subset \mathsf{Y}$, então, pela propriedade (b.VI), tem-se que $\mathsf{X} = \mathsf{X}\cap\mathsf{Y}$.

Logo, $$\xi_{\mathsf{X}}(x) = \xi_{\mathsf{X}\cap\mathsf{Y}}(x) = \begin{cases} 1 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X}\cap\mathsf{Y} \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{X}\cap\mathsf{Y})^C \end{cases} = \begin{cases} 1 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X}\cap\mathsf{Y} \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{Y}-\mathsf{X} \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{Y}^{\mathsf{C}} \end{cases}.$$

Portanto, se $x \in (\mathsf{X}\cap\mathsf{Y})$, então $\xi_{\mathsf{X}}(x) = 1 = \xi_{\mathsf{Y}}(x)$.

Se $x \in (\mathsf{Y}-\mathsf{X})$, então $\xi_{\mathsf{X}}(x) = 0 < 1 = \xi_{\mathsf{Y}}(x)$. E se $x \in \mathsf{Y}^{\mathsf{C}}$, tem-se que $\xi_{\mathsf{X}}(x) = 0 = \xi_{\mathsf{Y}}(x)$.

Logo, $\xi_{\mathsf{X}}(x) \leq \xi_{\mathsf{Y}}(x)$ para todo $x \in \mathsf{A}$. Logo, por definição, conclui-se que $\xi_{\mathsf{X}} \leq \xi_{\mathsf{Y}}$.

Reciprocamente, suponha que $\xi_{\mathsf{X}} \leq \xi_{\mathsf{Y}}$. Se $\mathsf{X} \not\subset \mathsf{Y}$, então existe $x_1 \in \mathsf{X}$ tal que $x_1 \notin \mathsf{Y}$.

Neste caso, tem-se que $\xi_{\mathsf{X}}(x_1) = 1 > \xi_{\mathsf{Y}}(x_1) = 0$. O que é contraditório, pois $\xi_{\mathsf{X}} \leq \xi_{\mathsf{Y}}$, ou seja, para todo $x \in \mathsf{A}$ tem-se $\xi_{\mathsf{X}}(x) \leq \xi_{\mathsf{Y}}(x)$, sendo, X e Y subconjuntos do conjunto básico A.

Logo, $\mathsf{X} \subset \mathsf{Y}$. ■

(e) Provar que $\xi_{\mathsf{A}-\mathsf{X}} = 1 - \xi_{\mathsf{X}}$.

Prova: A função $\xi_{\mathsf{A}-\mathsf{X}} : \mathsf{A} \to \{0, 1\}$ é definida pela regra

$$\xi_{\mathsf{A}-\mathsf{X}}(x) = \begin{cases} 1 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{A}-\mathsf{X} \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in (\mathsf{A}-\mathsf{X})^C \end{cases} = \begin{cases} 1 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X}^{\mathsf{C}} \\ 0 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X} \end{cases},$$

sendo X um subconjunto do conjunto básico A.

Segue-se que $\xi_{\mathsf{A}-\mathsf{X}}(x) + \xi_{\mathsf{X}}(x) = \begin{cases} 0+1 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X} \\ 1+0 & ,\text{se} \quad x \in \mathsf{X}^{\mathsf{C}} \end{cases} = 1$, para todo $x \in \mathsf{A}$

Logo, $\xi_{\mathsf{A}-\mathsf{X}}(x)+\xi_{\mathsf{X}}(x) = 1$. E, portanto, $\xi_{\mathsf{A}-\mathsf{X}}(x) = 1-\xi_{\mathsf{X}}(x)$, para todo $x \in \mathsf{A}$. E denota-se isto por $\xi_{\mathsf{A}-\mathsf{X}} = 1 - \xi_{\mathsf{X}}$. ■

Exemplo 3.5.3 Provar que o conjunto das sequências crescentes $(n_1 < n_2 < n_3 < ...)$ de números naturais não é enumerável.

Prova: Seja $\mathsf{A} = \{f \in \mathbb{F}(\mathsf{X};\mathbb{N}); f$ é estritamente crescente $\}$, com $\mathsf{X} \subset \mathbb{N}$. E defina uma função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathsf{A}$ tal que $\varphi(n) = f_n$, para cada função $f \in \mathsf{A}$.

Construa a função $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de modo que $f_n(1) = n_{n1}$, $f_n(2) = n_{n2}$, ..., $f_n(n) = n_{nn}$, ... para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por hipótese, f_n é estritamente crescente, ou seja, dados m, $n \in \mathbb{N}$, com $m < n$, então tem-se que $f(m) < f(n)$.

Deste modo, obtém-se as sequências crescentes

$$\begin{array}{ccl} f_1 & = & (n_{11}, n_{12}, ..., n_{1n}, ...) \\ f_2 & = & (n_{21}, n_{22}, ..., n_{2n}, ...) \\ \vdots & \vdots & \qquad \vdots \\ f_n & = & (n_{n1}, n_{n2}, ..., n_{nn}, ...) \\ \vdots & \vdots & \qquad \vdots \end{array}$$

Observe que para todo $n \in \mathbb{N}$ pode-se definir uma função $h_n \in \mathsf{A}$ tal que $h_n(m) = f_n(m+1)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Logo, $h_n \neq f_n$, com h_n, $f_n \in \mathsf{A}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $h_n \notin \varphi(\mathbb{N})$. Logo, a função φ não pode ser sobrejetiva. No entanto, evidentemente, pode ser injetiva, pois dados n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, então $f_{n_1} = f_{n_2}$, portanto $n_1 = n_2$.

Como o conjunto A é infinito, e não há função bijetiva $\varphi : \mathsf{A} \to \mathbb{N}$, conclui-se, pela definição 3.4.1, que o conjunto A não é enumerável. ■

Exemplo 3.1.6 Suponha que os pares $(\mathbb{N}, s)$, $(\mathbb{N}', s')$, constituídos, por um conjunto e uma função, satisfazem os axiomas de Peano. Provar que existe uma única função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ tal que $f(1) = 1'$ e $f(s(n)) = s'(f(n))$.

Prova: Por hipótese, pelo axioma 3.1.1, a função $s' : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}'$ é injetiva e pelo axioma 3.1.2, tem-se que $\mathbb{N}' - s(\mathbb{N}') = \{1'\}$.

Defina a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$, indutivamente, por $f(1) = 1'$ e

$f(n+1) = f(s(n)) = s'((n-1)') = s'(f(n))$.

A função f definida deste modo é sobrejetiva, pois

$f(\mathbb{N}) = s'(\mathbb{N}') \cup \{f(1)\} = s'(\mathbb{N}') \cup \{1'\}$. Logo, $\mathbb{N}' - f(\mathbb{N}') = \oslash$, ou seja, $f(\mathbb{N}') = \mathbb{N}'$.

E, pelo fato de a função s' ser injetiva, conclui-se que f é injetiva, pois $1' \neq n'$ para todo $n' \in \mathbb{N}$ e, portanto $f(1) \neq f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Segue-se da definição 2.4.7, que a função f é bijetiva.

Suponha que exista outra função bijetiva, a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$, tal que

$g(1) = 1'$ e $g(s(n)) = s'(n')$. E seja $\mathsf{X} = \{n \in \mathbb{N}; g(n) = f(n)\}$.

Para $n = 1$, tem-se que $g(1) = 1' = f(1)$. Logo, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $n \in \mathsf{X}$. Segue-se que

$g(s(n+1)) = g(n+2) = (n+2)' = f(n+2) = f((n+1)+1) = f(s(n+1))$.

Logo, $(n+1) = s(n) \in \mathsf{X}$. E, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. Portanto, $g(n) = f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, por definição, tem-se que $g = f$. ∎

(a) Provar que $m < n$ se, e somente se $f(m) < f(n)$;

Prova: Sejam m, $n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$. Então, pela definição 3.1.4, tem-se que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Logo, $f(n) = f(m+p) = (m+p)' = m' + p' = f(m') + p'$.

A definição 3.1.4 também é válida para o par $(\mathbb{N}', s')$ pois decorrem dos axiomas de Peano. Portanto, como $p' \in \mathbb{N}'$, conclui-se que $f(m) < f(n)$.

Reciprocamente, suponha que $f(m) < f(n)$. Então, $m' = f(m) < f(n) = n'$, ou seja, $m' < n'$. Logo, pela definição análoga a 3.1.4, para o par $(\mathbb{N}', s')$, conclui-se que existe $k' \in \mathbb{N}$ tal que $n' = m' + k' = (m+k)'$. Logo, $f(n) = n' = (m+k)' = f(m+k)$. E, pelo fato de a função f ser injetiva, conclui-se que $n = m + k$.

Portanto, pela definição 3.4.1, tem-se que $m < n$. ∎

(b) Provar que $f(m+n) = f(m) + f(n)$;

Prova: Tem-se que $f(m+n) = (m+n)' = m' + n' = f(m) + f(n)$. ■

(c) Provar que $f(m.n) = f(m).f(n)$.

Prova: Tem-se que $f(m.n) = (m.n)' = m'.n' = f(m).f(n)$. ■

Exemplo 3.1.7 Seja A_1, A_2, ..., A_n, ... uma sequência de conjuntos. E considere $\lim sup\ \mathsf{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=n}^{\infty}\mathsf{A}_i)$ e $\lim inf\ \mathsf{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{i=n}^{\infty}\mathsf{A}_i)$.

(a) Provar que $\lim sup\ \mathsf{A}_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A_n para uma infinidade de valores de n.

Prova: Seja $\mathsf{X} = \{k \in \mathbb{N}; \bigcap_{n=1}^{k}(\bigcup_{i=k}^{k}\mathsf{A}_i) = \mathsf{A}_k\}$. Para $k=1$, tem-se que $\bigcap_{n=1}^{1}(\bigcup_{i=n}^{1}\mathsf{A}_i) = \mathsf{A}_1$. Logo, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $k \in \mathsf{X}$. Segue-se que $\bigcap_{n=1}^{k+1}(\bigcup_{i=n}^{k+1}\mathsf{A}_i) = [\bigcap_{n=1}^{k}(\bigcup_{i=n}^{k+1}\mathsf{A}_i)] \cap (\bigcup_{i=k+1}^{k+1}\mathsf{A}_i) = [\bigcap_{n=1}^{k}(\bigcup_{i=n}^{k+1}\mathsf{A}_i)] \cap \mathsf{A}_{k+1} = \{\bigcap_{n=1}^{k}[(\mathsf{A}_n \cup \mathsf{A}_{n+1} \cup ... \cup \mathsf{A}_k) \cup \mathsf{A}_{k+1}]\} \cap \mathsf{A}_{k+1} =$
$\{[(\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup ... \cup \mathsf{A}_k) \cup \mathsf{A}_{k+1}] \cap [(\mathsf{A}_2 \cup \mathsf{A}_3 \cup ... \cup \mathsf{A}_k) \cup \mathsf{A}_{k+1}] \cap ... \cap [(\mathsf{A}_k) \cup \mathsf{A}_{k+1}]\} \cap \mathsf{A}_{k+1} =$
$\{[(\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup ... \cup \mathsf{A}_k) \cap (\mathsf{A}_2 \cup \mathsf{A}_3 \cup ... \cup \mathsf{A}_k) \cap ... \cap (\mathsf{A}_k) \cup \mathsf{A}_{k+1}] \cup \mathsf{A}_{k+1}\} \cap \mathsf{A}_{k+1} =$
$\{[\bigcap_{n=1}^{k}(\mathsf{A}_n \cup \mathsf{A}_{n+1} \cup ... \cup \mathsf{A}_k)] \cup \mathsf{A}_{k+1}\} \cap \mathsf{A}_{k+1} = \{[\bigcap_{n=1}^{k}(\bigcup_{i=n}^{k}\mathsf{A}_i)] \cup \mathsf{A}_{k+1}\} \cap \mathsf{A}_{k+1}$. Pela hipótese de indução, $k \in \mathsf{X}$. Logo, $\bigcap_{n=1}^{k}(\bigcup_{i=n}^{k}\mathsf{A}_i) = \mathsf{A}_k$. Portanto, $\{[\bigcap_{n=1}^{k}(\bigcup_{i=n}^{k}\mathsf{A}_i)] \cup \mathsf{A}_{k+1}\} \cap \mathsf{A}_{k+1} =$
$\{\mathsf{A}_k \cup \mathsf{A}_{k+1}\} \cap \mathsf{A}_{k+1} = (\mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1}) \cup (\mathsf{A}_{k+1} \cap \mathsf{A}_{k+1}) = (\mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1}) \cup \mathsf{A}_{k+1}$.

Evidentemente, $\mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1} \subset \mathsf{A}_{k+1}$, logo $(\mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1}) \cup \mathsf{A}_{k+1} = \mathsf{A}_{k+1}$. Portanto, $k+1 = s(k) \in \mathsf{X}$.

Logo, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$. Portanto, se um elemento $p \in \lim sup\ \mathsf{A}_n$, então $p \in \mathsf{A}_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

(b) Provar que $\lim inf\ \mathsf{A}_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem a todo A_n, exceto para um número finito de valores de n.

Prova: Suponha que $\mathsf{A}_i = \oslash$ para $1 \leq i \leq m$ e que $\mathsf{A}_i \neq \oslash$ para $m \leq i$.

Seja $\mathsf{Y} = \{k \in \mathbb{N}; k \geq m$ e $\bigcup_{n=m}^{k}(\bigcap_{i=n}^{k}\mathsf{A}_i) = \mathsf{A}_k\}$. Para $k = m$, tem-se que $\bigcup_{n=m}^{m}(\bigcap_{i=n}^{m}\mathsf{A}_i) = (\bigcap_{i=m}^{m}\mathsf{A}_i) = \mathsf{A}_m$. Logo, $m \in \mathsf{Y}$.

Suponha que $k \in \mathsf{Y}$, com $k > m$. Segue-se que $\bigcup_{n=m}^{k+1}(\bigcap_{i=n}^{k+1} \mathsf{A}_i) =$

$[\bigcup_{n=m}^{k}(\bigcap_{i=n}^{k+1} \mathsf{A}_i)] \cup (\bigcup_{i=k+1}^{k+1} \mathsf{A}_i) = [\bigcup_{n=m}^{k}(\bigcap_{i=n}^{k+1} \mathsf{A}_i)] \cup \mathsf{A}_{k+1} = \{\bigcup_{n=m}^{k}[(\bigcap_{i=n}^{k} \mathsf{A}_i) \cap \mathsf{A}_{k+1}]\} \cup \mathsf{A}_{k+1} =$

$\{\bigcup_{n=m}^{k}[(\mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}_{n+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_k) \cap \mathsf{A}_{k+1}]\} \cup \mathsf{A}_{k+1} =$

$\{[(\mathsf{A}_m \cap \mathsf{A}_{m+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_k) \cap \mathsf{A}_{k+1}] \cup [(\mathsf{A}_{m+1} \cap \mathsf{A}_{m+2} \cap ... \cap \mathsf{A}_k) \cap \mathsf{A}_{k+1}] \cup ... \cup [(\mathsf{A}_k) \cap \mathsf{A}_{k+1}]\} \cup \mathsf{A}_{k+1} =$

$\{[(\mathsf{A}_m \cap \mathsf{A}_{m+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_k) \cup (\mathsf{A}_{m+1} \cap \mathsf{A}_{m+2} \cap ... \cap \mathsf{A}_k) \cup ... \cup (\mathsf{A}_k)] \cap \mathsf{A}_{k+1}\} \cup \mathsf{A}_{k+1} =$

$\{[\bigcup_{n=m}^{k}(\mathsf{A}_m \cap \mathsf{A}_{m+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_k)] \cap \mathsf{A}_{k+1}\} \cup \mathsf{A}_{k+1} = \{[\bigcup_{n=m}^{k}(\bigcap_{i=n}^{k} \mathsf{A}_i)] \cap \mathsf{A}_{k+1}\} \cup \mathsf{A}_{k+1}$. Por hipótese, $k \in \mathsf{Y}$. Logo, $\bigcup_{n=m}^{k}(\bigcap_{i=n}^{k} \mathsf{A}_i) = \mathsf{A}_k$. Portanto, tem-se que

$\{[\bigcup_{n=m}^{k}(\bigcap_{i=n}^{k} \mathsf{A}_i)] \cap \mathsf{A}_{k+1}\} \cup \mathsf{A}_{k+1} = \{\mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1}\} \cup \mathsf{A}_{k+1}$.

Evidentemente, $\mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1} \subset \mathsf{A}_{k+1}$. Logo, $(\mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1}) \cup \mathsf{A}_{k+1} = \mathsf{A}_{k+1}$. Portanto, $k+1 = s(k) \in \mathsf{Y}$. E, pelo exemplo 3.2.5, conclui-se que $\mathsf{Y} = \mathbb{N} - \{1, 2, ..., (m-1)\}$.

Logo, para todo $n \in \mathbb{N} - \{1, 2, ..., (m-1)\}$, tem-se $\lim inf\ \mathsf{A}_n = \mathsf{A}_n$. ∎

(c) Provar que $\lim inf\ \mathsf{A}_n \subset \lim sup\ \mathsf{A}_n$.

Prova: Suponha que $\mathsf{A}_i = \oslash$ para $1 \leq i < m$ e que $\mathsf{A}_i \neq \oslash$ para $m \leq i$.

Se $n \in \{1, 2, ..., (m-1)\}$, então, tem-se que

$\lim inf\ \mathsf{A}_n = \bigcup_{n=1}^{m-1}(\bigcap_{i=n}^{m-1} \mathsf{A}_i) = \bigcup_{n=1}^{m-1}(\bigcap_{i=n}^{m-1} \oslash) = \bigcup_{n=1}^{m-1} \oslash = \oslash$. E, pela proposição 2.1.1, conclui-se que $\oslash \subset \lim sup\ \mathsf{A}_n$, ou seja, $\lim inf\ \mathsf{A}_n \subset \lim sup\ \mathsf{A}_n$.

Se $n \in \mathbb{N} - \{1, 2, ..., (m-1)\}$, então pelo item (b) deste exemplo tem-se que $\lim inf\ \mathsf{A}_n = \mathsf{A}_n$. E, $\lim sup\ \mathsf{A}_n = \mathsf{A}_n$. Pela propriedade reflexiva da inclusão de conjuntos, tem-se que $\mathsf{A}_n \subset \mathsf{A}_n$. Logo, $\lim inf\ \mathsf{A}_n \subset \lim sup\ \mathsf{A}_n$.

Em qualquer dos casos conclui-se que $\lim inf\ \mathsf{A}_n \subset \lim sup\ \mathsf{A}_n$. ∎

(d) Provar que se $\mathsf{A}_n \subset \mathsf{A}_{n+1}$, para todo n, então $\lim inf\ \mathsf{A}_n = \lim sup\ \mathsf{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}$.

Prova: Tem-se que $\lim inf \mathsf{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{i=n}^{\infty} \mathsf{A}_i)$. E seja

$\mathsf{Y} = \{k \in \mathbb{N}; se \mathsf{A}_k \subset \mathsf{A}_{k+1}, \forall\ k \in \mathbb{N},$ então $\bigcap_{j=n}^{k} = \mathsf{A}_n\}$. Para $k = n$, tem-se $\bigcap_{j=n}^{n} \mathsf{A}_j = \mathsf{A}_n$, logo $n \in \mathsf{Y}$. Para $k = n+1$, tem-se que $\bigcap_{j=n}^{k+1} \mathsf{A}_j = \mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}_{n+1}$. E se $\mathsf{A}_k \subset \mathsf{A}_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}_{n+1} = \mathsf{A}_n$. Logo, $(n+1) \in \mathsf{Y}$.

Suponha que $k \in \mathsf{Y}$, com $k > n+1$. Então, tem-se que

$$\bigcap_{j=n}^{k+1} \mathsf{A}_j = \mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}_{n+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1} = (\mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}_{n+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_{k-1}) \cap (\mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1}).$$

Como $\mathsf{A}_n \subset \mathsf{A}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, conclui-se que $\mathsf{A}_k \subset \mathsf{A}_{k+1} = \mathsf{A}_k$.

Portanto, $(\mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}_{n+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_{k-1}) \cap (\mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1}) =$

$$(\mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}_{n+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_{k-1}) \cap \mathsf{A}_k = \mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}_{n+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_k = \bigcap_{j=n}^{k} \mathsf{A}_n = \mathsf{A}_n.$$

Logo, $k+1 = s(k) \in \mathsf{Y}$. E, pelo exemplo 3.2.5, conclui-se que

$\mathsf{Y} = \mathbb{N} - \{1, 2, ..., (n-1)\}$.

Portanto, $\bigcap_{j=n}^{\infty} \mathsf{A}_n = \mathsf{A}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\lim inf \mathsf{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathsf{A}_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n$.

Por outro lado, tem-se que $\lim sup \mathsf{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{i=n}^{\infty} \mathsf{A}_i)$.

Seja $\mathsf{X} = \{m \in \mathbb{N};$ se $\mathsf{A}_k \subset \mathsf{A}_{k+1}, \forall\, n \in \mathbb{N},$ então $\bigcap_{n=1}^{m} (\bigcup_{i=n}^{m} \mathsf{A}_i) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathsf{A}_n\}$.

Para $m = 1$, tem-se $\bigcap_{n=1}^{1} (\bigcup_{i=n}^{1} \mathsf{A}_i) = \bigcup_{i=1}^{1} \mathsf{A}_i$. Logo, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $m \in \mathsf{X}$. Então, tem-se que

$$\bigcap_{n=1}^{m+1} (\bigcup_{i=n}^{m+1} \mathsf{A}_i) = \bigcap_{n=1}^{m+1} (\mathsf{A}_n \cup \mathsf{A}_{n+1} \cup ... \cup \mathsf{A}_{m+1}).$$

Por hipótese, $\mathsf{A}_k \subset \mathsf{A}_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $\mathsf{A}_k \cup \mathsf{A}_{k+1} = \mathsf{A}_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $(\mathsf{A}_n \cup \mathsf{A}_{n+1} \cup ... \cup \mathsf{A}_{m+1}) = \mathsf{A}_{m+1}$.

Logo, $\bigcap_{n=1}^{m+1} \mathsf{A}_{m+1} = \mathsf{A}_{m+1} = \bigcup_{i=1}^{m+1} \mathsf{A}_i$. Portanto, $m+1 = s(m) \in \mathsf{X}$. E, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$.

Portanto, $\lim sup\ \mathsf{A}_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathsf{A}_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n = \lim inf\ \mathsf{A}_n$. ■

(e) Provar que se $\mathsf{A}_n \supset \mathsf{A}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim inf\ \mathsf{A}_n = \lim sup\ \mathsf{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n$.

Prova: Tem-se que $\lim inf\ \mathsf{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcap_{i=n}^{\infty} \mathsf{A}_n)$. Seja

$\mathsf{Y} = \{k \in \mathbb{N};\ \text{se } \mathsf{A}_p \supset \mathsf{A}_{p+1},\ \text{para todo } p \in \mathbb{N},\ \text{então } \bigcup_{n=1}^{k}(\bigcap_{i=n}^{k} \mathsf{A}_n) = \bigcap_{n=1}^{k} \mathsf{A}_n\}$. Para $k = 1$, tem-se que $\bigcup_{n=1}^{1}(\bigcap_{i=n}^{1} \mathsf{A}_n) = \bigcap_{i=1}^{1} \mathsf{A}_n$. Logo, $1 \in \mathsf{Y}$.

Suponha que $k \in \mathsf{Y}$. Então, tem-se que

$$\bigcup_{n=1}^{k+1}(\bigcap_{i=n}^{k+1} \mathsf{A}_n) = \bigcup_{n=1}^{k+1}(\mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}_{n+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1}).$$

Por hipótese, $\mathsf{A}_p \supset \mathsf{A}_{p+1}$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Logo,

$$(\mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}_{n+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1}) = \mathsf{A}_{k+1}.$$

Portanto,

$$\bigcup_{n=1}^{k+1}(\mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}_{n+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1}) = \bigcup_{n=1}^{k+1} \mathsf{A}_{k+1} = \mathsf{A}_{k+1} = \mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap ... \cap \mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1} = \bigcap_{n=1}^{k+1} \mathsf{A}_n.$$

Logo, $(k+1) = s(k) \in \mathsf{X}$. E, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$.

Portanto, $\lim inf\ \mathsf{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{i=n}^{\infty} \mathsf{A}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n$.

Por outro lado, $\lim sup\ \mathsf{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=n}^{\infty} \mathsf{A}_i)$. Seja

$\mathsf{X} = \{m \in \mathbb{N};\ \text{se } \mathsf{A}_p \supset \mathsf{A}_{p+1},\ \text{para todo} p \in \mathbb{N},\ \text{então } \bigcap_{n=1}^{m}(\bigcup_{i=n}^{m} \mathsf{A}_i) = \bigcap_{n=1}^{m} \mathsf{A}_n\}$. Para $m = 1$, tem-se que $\bigcap_{n=1}^{1}(\bigcup_{i=n}^{1} \mathsf{A}_i) = \bigcup_{i=1}^{1} \mathsf{A}_i = \mathsf{A}_1 = \bigcap_{n=1}^{1} \mathsf{A}_n$. Logo, $1 \in \mathsf{X}$.

Suponha que $m \in \mathsf{X}$. Então, tem-se que

$$\bigcap_{n=1}^{m+1}(\bigcup_{i=n}^{m+1} \mathsf{A}_i) = \bigcap_{n=1}^{m+1}(\mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}_{n+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_m \cap \mathsf{A}_{m+1}).$$

Por hipótese, $\mathsf{A}_p \supset \mathsf{A}_{p+1}$, para todo $p \in \mathbb{N}$. Logo,

$$(\mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}_{n+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_m \cap \mathsf{A}_{m+1}) = \mathsf{A}_n.$$

Portanto, $\bigcap_{n=1}^{m+1}(\mathsf{A}_n \cap \mathsf{A}_{n+1} \cap ... \cap \mathsf{A}_m \cap \mathsf{A}_{m+1}) = \bigcap_{n=1}^{m+1} \mathsf{A}_n$.

Logo, $m + 1 = s(m) \in \mathsf{X}$. E, pelo axioma 3.1.3, conclui-se que $\mathsf{X} = \mathbb{N}$.

Portanto, $\lim sup\ \mathsf{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=n}^{\infty} \mathsf{A}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n = \lim inf\ \mathsf{A}_n$. ■

(f) Dê exemplo de uma sequência (A_n) tal que $\lim sup\ \mathsf{A}_n \neq \lim inf\ \mathsf{A}_n$.

Solução: Seja $\mathsf{A}_n = \begin{cases} \{2\} & ,\text{se } \ n \text{ é um número primo;} \\ \{1\} & ,\text{se } \ n \text{ é um número composto} \end{cases}$.

Tem-se que,

$\lim inf\ \mathsf{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{i=n}^{\infty}\mathsf{A}_i) = (\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathsf{A}_i)\cup(\bigcap_{i=2}^{\infty}\mathsf{A}_i)\cup...\cup(\bigcap_{i=n}^{\infty}\mathsf{A}_i)\cup... = \oslash\cup\oslash\cup...\cup\oslash\cup... = \oslash.$

E $\lim sup\ \mathsf{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=n}^{\infty}\mathsf{A}_i) =$

$(\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathsf{A}_i)\cap(\bigcup_{i=2}^{\infty}\mathsf{A}_i)\cap...\cap(\bigcup_{i=n}^{\infty}\mathsf{A}_i)\cap... =$

$(\{2\}\cup\{1\})\cap(\{2\}\cup\{1\})\cap...\cap(\{2\}\cup\{1\})\cap... = \{1,2\}\cap\{1,2\}\cap...\cap\{1,2\}\cap... = \{1,2\}.$

Portanto, $\lim sup\ \mathsf{A}_n \neq \lim inf\ \mathsf{A}_n$.

(g) Dê exemplo de uma sequência para a qual os dois limites coincidem mas $\mathsf{A}_m \not\subset \mathsf{A}_n$ quaisquer que sejam m e n.

Solução: Seja $\mathsf{A}_p = \{p\}$, sendo p um número primo. E seja $\mathsf{A}_m = \{m\}$, sendo m um número composto. Evidentemente, $\mathsf{A}_m \not\subset \mathsf{A}_p$. No entanto,

$\lim inf\ \mathsf{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{i=n}^{\infty}\mathsf{A}_i) = (\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathsf{A}_i)\cup(\bigcap_{i=2}^{\infty}\mathsf{A}_i)\cup...\cup(\bigcap_{i=n}^{\infty}\mathsf{A}_i)\cup... = \oslash\cup\oslash\cup...\cup\oslash\cup... = \oslash.$

E,

$\lim sup\ \mathsf{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=n}^{\infty}\mathsf{A}_i) = (\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathsf{A}_i)\cap(\bigcup_{i=2}^{\infty}\mathsf{A}_i)\cap...\cap(\bigcup_{i=n}^{\infty}\mathsf{A}_i)\cap... =$

$\mathbb{N}\cap(\mathbb{N}-\{1\})\cap(\mathbb{N}-\{1,2\})\cap...\cap(\mathbb{N}-\{1,2,...,k\})\cap... = \oslash.$

Logo, $\lim sup\ \mathsf{A}_n = \lim inf\ \mathsf{A}_n = \oslash$.

Exemplo 3.5.4 [Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder] Dados os conjuntos A e B, suponha que existem funções injetivas $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ e $g : \mathsf{B} \to \mathsf{A}$. Provar que existe uma função bijetiva $h : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$.

Prova: Sejam $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ e $g : \mathsf{B} \to \mathsf{A}$, funções injetivas. Então, tem-se que a função $f : \mathsf{A} \to f(\mathsf{A})$ é bijetiva. Logo, pela definição 3.5.1, tem-se que $card(\mathsf{A}) = card(f(\mathsf{A}))$. E, pelo fato de $f(\mathsf{A}) \subset \mathsf{B}$, tem-se que $card(f(\mathsf{A})) \leq card(\mathsf{B})$. Logo, conclui-se que $card(\mathsf{A}) \leq card(\mathsf{B})$.

Por outro lado, tem-se que a função $g : \mathsf{B} \to g(\mathsf{B})$ é bijetiva. Portanto, pela definição 3.5.1, conclui-se que $card(\mathsf{B}) = card(g(\mathsf{B}))$. Pelo fato de $g(\mathsf{B})$ ser subconjunto de A, conclui-se que $card(g(\mathsf{B})) \leq card(\mathsf{A})$. Logo, conclui-se que $card(\mathsf{B}) \leq card(\mathsf{A})$.

Segue-se da propriedade da tricotomia da relação de ordem que

$card(\mathsf{A}) = card(\mathsf{B})$. Logo, pela definição 3.5.1, conclui-se que existe uma função bijetiva $\alpha : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$. ■

4 CONCLUSÕES

Este texto constitui um trabalho de conclusão de curso (TCC). Por isso, buscou-se cumprir todas as orientações e normas para sua realização, bem como para o desenvolvimento do corpo teórico do texto, objetivando a clareza ao expor os conteúdos e a didática.

A verificação da validade de todos os resultados que necessitavam de prova foi realizada, sempre citando definições, axiomas, teoremas, proposições, etc, utilizados no processo. Utilizou-se apenas conceitos previamente expostos no texto, exceto em alguns dos exemplos de resultados adicionais, onde citou-se o Teorema do Binômio (de Newton), as permutações entre elementos de um conjunto e o Princípio da Adição, da área de Análise Combinatória.

Ao escrever este texto, levou-se sempre em consideração a possibilidade de que algum leitor o utilizasse como material de estudo, para o conteúdo. Por isso, reunimos no texto, os conceitos mais conhecidos, para um estudo sobre conjuntos e funções e introdutórios para Análise.

Pelos motivos expostos, considera-se que os objetivos iniciais e a proposta do texto, de apresentar uma abordagem teórica didática sobre o conteúdo, foi alcançada.

REFERÊNCIAS

[ALE] ALENCAR FILHO, Edgar de. Teoria elementar dos números. São Paulo: Nobel, 1991. Hygino

[DOM] DOMINGUES, H.; Iezzy, Gelson. Álgebra moderna: volume único. 4 ed. reform. São Paulo: Atual, 2003.

[GON] GONÇALVES, Adilson. Introdução à algebra. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[LIM] LIMA, Elon Lages. Curso de análise volume 1. 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.

[MOR] MORGADO, A. *et al.* Análise combinatória e probabilidade. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.