UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA PLENA

Kleverson Yuri Martins Barros

Teorema do Valor Médio e Suas Aplicações

São Luís – MA
2024

Kleverson Yuri Martins Barros

Teorema do Valor Médio e Suas Aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos Cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa.

Curso de Matemática – Licenciatura

Universidade Federal do Maranhão

São Luís – MA
2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Barros, Kleverson Yuri Martins.
Teorema do Valor Médio e Suas Aplicações / Kleverson Yuri Martins Barros. - 2024.
45 f.

Orientador(a): José Santana Campos Costa.
Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, Ufma, 2024.

1. Teorema do Valor Médio. 2. Cálculo. 3. Aplicações. 4. . 5. . I. Costa, José Santana Campos. II. Título.

Kleverson Yuri Martins Barros

Teorema do Valor Médio e Suas Aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos Cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa.

Trabalho APROVADO. São Luís - MA, 19 /09 /2024

Prof. Dr. José Santana Campos Costa
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof. Dr. Valeska Martins de Souza
DEMAT/UFMA
Primeira Examinadora

Prof. Dr. Cleber Araujo Cavalcanti
DEMAT/UFMA
Segundo Examinador

Dedico este trabalho a Deus e aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, todo poderoso, sem ele eu nada seria e até aqui não teria chegado.

Aos meus pais, por terem me dado a oportunidade de chegar até aqui, especialmente à minha amada mãe, Adriana, que acreditou em mim mesmo quando eu duvidava da minha própria capacidade.

Ao meu estimado orientador José Santana Campos Costa, pelos ensinamentos, paciência e conselhos que foram fundamentais para o desenvolvimento deste projeto.

Aos meus familiares, pelo apoio constante. Sei que minha dedicação intensa significou menos tempo para nossos momentos juntos, mas, graças à paciência e compreensão que tiveram, consegui concluir este trabalho.

A todos os professores que fizeram parte dessa jornada. Cada um deles desempenhou um papel crucial no meu desenvolvimento, compartilhando conhecimento, inspirando e desafiando-me a alcançar o melhor de mim mesmo.

“Ainda que minha mente e o meu corpo enfraqueçam, Deus é a minha força, ele é tudo o que eu preciso.”

Salmos 73:26

RESUMO

A importância que o Cálculo tem para a humanidade é irrefutável. Entre os muitos resultados do Cálculo, esta monografia tem por objetivo destacar a importância do Teorema do Valor Médio. Para isso, foi realizada uma revisão bibliográfica que abrangeu uma abordagem histórica sobre o Cálculo, incluindo o conceito de limites, derivadas e o Teorema de Rolle. A importância do Teorema do Valor Médio é reforçada em diversas aplicações, como estudo de funções, a análise de velocidade média e a sua aplicação na demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo. Logo, compreender o Teorema do Valor Médio é essencial, pois serve de base para uma série de outros resultados matemáticos e tem diversas aplicações práticas.

Palavras-chave: Teorema do Valor Médio, Cálculo, Aplicações.

ABSTRACT

The importance of Calculus to humanity is undeniable. Among the many results of Calculus, this monograph aims to highlight the significance of the Mean Value Theorem. To achieve this, a literature review was conducted that included a historical approach to Calculus, encompassing the concepts of limits, derivatives, and Rolle's Theorem. The importance of the Mean Value Theorem is reinforced in various applications, such as the study of functions, the analysis of average velocity, and its role in demonstrating the Fundamental Theorem of Calculus. Therefore, understanding the Mean Value Theorem is essential, as it serves as a foundation for a series of other mathematical results and has numerous practical applications.

Keywords: Mean Value Theorem, Calculus, Applications.

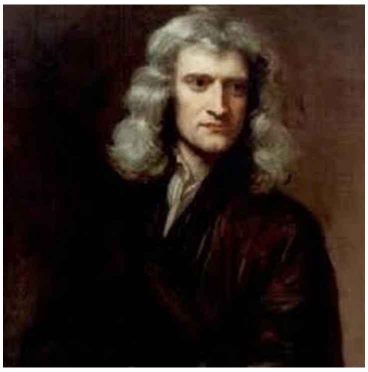
SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Muitos foram os antecessores que de alguma forma lidaram com as ideias do cálculo, mas sua descoberta se atribui principalmente a dois grandes matemáticos do século XVII que foram Isaac Newton (1643–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Vamos falar então do primeiro deles.

Isaac Newton (Figura 1.1) nasceu em Woolsthorp Manor, Reino Unido e em 1661 ingressou em Trynite College (Universidade de Cambridge), lá ele teve como professor Isaac Barrow (1630-1677) grande matemático inglês, que foi quem o ensinou o que havia do Cálculo na época.

Figura 1.1 - Sir Isaac Newton



Fonte: https://abrir.link/WHIdn

A universidade de Cambridge foi fechada em 1665 devido a peste negra, e Newton durante essa época se refugiou na fazenda de sua família, esse refúgio durou dois anos, lá ele faz a maior parte das suas descobertas e é nesse período que nasce o cálculo diferencial e integral. Com o fim da peste em 1667 Newton retorna para Cambridge, aonde ao longo dos anos, mesmo que relutantemente, publica suas obras e elas se tornam de conhecimento do público.

Agora vamos falar de Gottfried Wilhelm Leibniz (Figura 1.2), ele foi um filósofo, jurista, matemático e político alemão de grande influência na sua época. Em 1673 Leibniz viajou para Londres, onde se tornou membro da Royal Society, instituto que reúne cientistas renomados até os dias atuais. Durante sua estadia em Londres, Leibniz teve a oportunidade de entrar em contato com as obras de Isaac Barrow, um dos maiores cientistas da época, o que influenciou significativamente o seu pensamento e desenvolvimento científico.

Figura 1.2 - Gottfried Wilhelm Leibniz

Fonte: https://abrir.link/mwHPG

A contribuição de Leibniz para o Cálculo é diferente da de Newton, mas também é igualmente importante. Por exemplo, a notação de Leibniz era melhor que a de Newton, como podemos observar no seguinte trecho:

> "[...] Introduziu a notação dy para indicar a "menor diferença possível" — ou diferencial — entre valores vizinhos da variável y . Criou também a notação $\int$, um S de *summa* (soma) estilizado, de acordo com a qual $\int d\gamma = y$." (MOL, 2013, p.105)

Como podemos observar, essa é a notação que usamos atualmente.

Gottfried foi acusado de plagiar os trabalhos de Newton, acusação esta que gerou grande discussão no século XVII sobre quem teria lidado com as ideias do Cálculo primeiro. De fato, atualmente reconhece-se que foi Newton o pioneiro na descoberta do Cálculo. Porém Leibniz chegou as suas conclusões por um caminho completamente diferente do de Newton e teve a iniciativa de publicar suas obras primeiro (MOL, 2015).

Após isso, muito matemáticos que lidaram com o Cálculo, como Cauchy e Lagrange, e o desenvolveram até que ele se tornasse como o conhecemos hoje. É indiscutível a importância que o Cálculo teve para o desenvolvimento da humanidade; muitas são as áreas da ciência em que o Cálculo Diferencial e Integral se faz presente. Dentre os muitos resultados do Cálculo, vale destacar o Teorema do Valor Médio. Este teorema nos assegura que se uma função for contínua em $[a, b]$ e for derivável em (a, b), então existirá um c tal que $f'(c) = f(b) - f(a)/b - a$.

Compreender este teorema é fundamental, pois sua conclusão serve como base para demonstrar uma série de outros resultados. Além disso, sua aplicação abrange diversas áreas da ciência.

2 NÚMEROS REAIS E FUNÇÕES

2.1 CONJUNTOS NÚMERICOS

Os primeiros números descobertos pela humanidade foram os números naturais, dessa forma se tem o conjunto:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5...\}.$$

Só os números naturais não foram o suficiente para resolver certos problemas, então surgiu a necessidade de criar um conjunto numérico, conjunto esse que englobasse os números negativos. O nome dado ao conjunto que une os números negativos e positivos é conjunto dos números inteiros, que é denotado da seguinte forma:

$$\mathbb{Z} = \{...-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5...\}.$$

Mais adiante ainda surgiu mais um conjunto que são dos números da forma $\frac{m}{n}$ $, n \neq 0, m, n \in \mathbb{Z}$, são nada mais que as frações e é chamado de conjunto dos números racionais. Denotamos por:

$$\mathbb{Q} = \{x | x = m/n, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}.$$

Mas ainda há números que não podem ser representados na forma $\frac{m}{n}$ $, n \neq 0, m, n \in \mathbb{Z}$, por exemplo: $\sqrt{3} = 1{,}73...$, $e = 718281...$, $\pi = 3{,}14...$, esses números formam o conjunto dos números irracionais denotados por I.

Finalmente temos o conjunto dos números reais que nada mais é que a união dos números racionais com os irracionais, que é denotado da seguinte maneira:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I.$$

No conjunto dos números reais temos duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação*, que satisfazem alguns axiomas a seguir:

Proposição 2.1 (Fechamento). Se a e $b \in \mathbb{R}$ existe apenas um número real chamado por $a + b$, nomeada soma, e existe somente um número real denotado por ab, chamado produto.

Proposição 2.2 (Comutatividade). Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $a + b = b + a$ e $a . b = b. a$.

Proposição 2.3 (Associatividade). Se a, b e $c \in \mathbb{R}$, então $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a\,.\,(b\,.\,c) = (a\,.\,b)\,.\,c$.

Proposição 2.4 (Distributividade). Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, então $a\,.\,(b + c) = ab + ac$.

Proposição 2.5 (Existência de elementos neutros). Existem 0 e 1 $\in \mathbb{R}$ tais que $a + 0$ e $a\,.\,1 = a$, para $a \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.6 (Existência de simétricos). Todo $a \in \mathbb{R}$ tem um simétrico, denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

Proposição 2.7 (Existência de inversos). Todo $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ tem um inverso, denotado por $1/a$, tal que $a\,.\frac{a}{1} = 1$. Usando 2.1.6 e 2.1.7 podemos definir a subtração e a divisão de números reais.

Proposição 2.8 (Subtração). Se $a, b \in \mathbb{R}$, a diferença entre a e b é definida por

$$a - b = a + (-b).$$

Proposição 2.9 (Divisão). Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, o quociente de a e b é definida por

$$\frac{a}{b} = a\,.\frac{1}{b}.$$

2.2 FUNÇÕES

"As funções surgem quando uma quantidade depende de outra. Por exemplo, a área A de um círculo depende de seu raio r. A lei que relaciona r com A é dada por $A = \pi r^2$, neste caso dizemos que A é uma função de r." (Federson e Planas, 2008, p.17).

Definição 2.1. Agora vamos para a definição rigorosa. Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma função $f: A \to B$ é uma lei que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B. O conjunto A é chamado de domínio de f e é denotado por $D(f)$. B é chamado de contradomínio de f.

Escrevemos: $f: A \to B$

$x \longmapsto f(x).$

Ainda temos o conjunto $Im(f) = \{y \in B \,; y = f(x), x \in A\}$. Esse é o conjunto de todos os valores assumidos pela função, e é chamado de conjunto imagem de f.

2.2.1 Gráficos

Seja f uma função. O gráfico de f é o conjunto de todos os pontos (x, f(x)) de um plano, onde x pertence ao domínio de f.

Dessa forma, sejam $f: A \to B$ uma função e $A, B \subset \mathbb{R}$. O conjunto $G(f) = G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ é chamado de **gráfico** de f. Temos então que o $G(f)$ é o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, quando x percorre o domínio D_f.

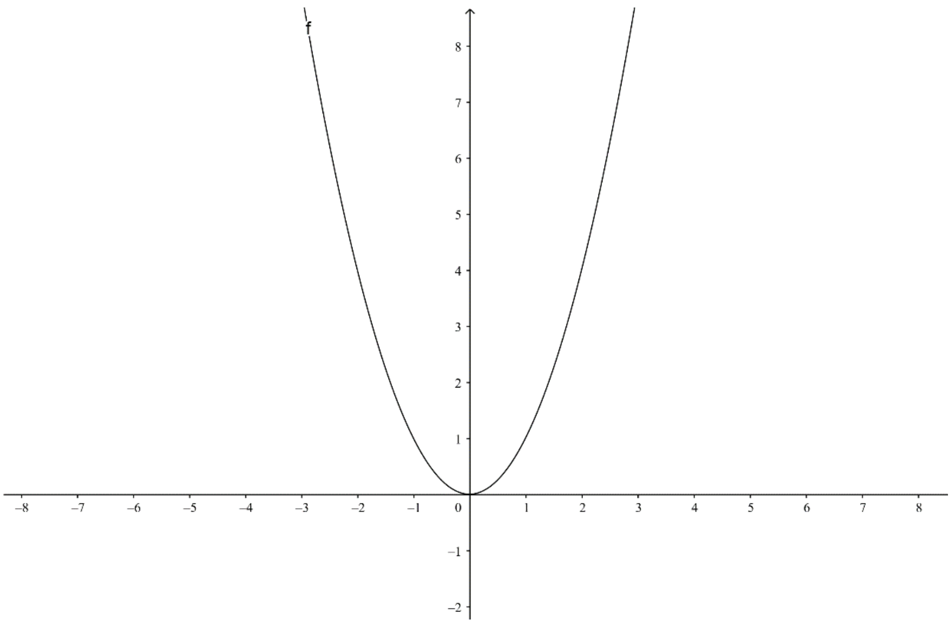
Exemplo 2.1. Um dos exemplos possíveis é o gráfico da função

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x^2)$

Observe a Figura 2.1:

Figura 2.1 – Gráfico da Função $f(x) = x^2$



Fonte: Da autoria

3 LIMITES

Ao estudarmos cálculo, o primeiro conceito que muitas das vezes nos deparamos é o de limites. Muitas são as suas aplicações, e o que ele faz é analisar e descrever o comportamento de funções e seu estudo também é crucial para a definição de derivadas. Dessa forma, iremos revisar alguns conceitos de limites para a sua melhor compreensão deste trabalho.

Definição 3.1. Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número p, exceto o próprio p. Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a p é L e denotamos da seguinte forma

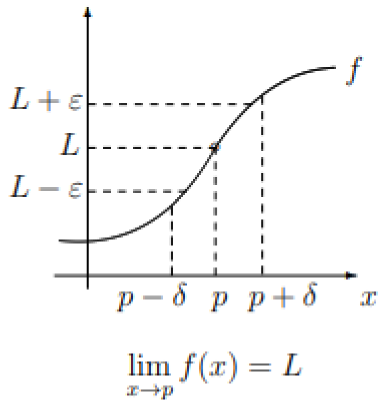
$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Representando essa definição graficamente, temos a Figura 3.1:

Figura 3.1 – Definição de limite



Fonte: Federson e Planas (2008)

3.1 UNICIDADE DO LIMITE

Se $\lim_{x \to p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to p} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Prova: Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim_{x \to p} f(x) = L_1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - p| < \delta_1$.

Como $\lim_{x\to p} f(x) = L_2$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - L_2| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - p| < \delta_1$.

Seja $\delta = \min\{\delta_{1,}\delta_2\}$. Então $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ e $|f(x) - L_2| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - p| < \delta_1$.

Seja x tal que $0 < |x - p| < \delta$. Então, podemos escrever

$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$

Como ε é arbitrário, temos $|L_1 - L_2| = 0$ e, portanto, $L_1 = L_2$.

3.2 PROPRIEDADES DOS LIMITES

Esta subseção exibe algumas propriedades que nos ajudam a resolver desde os limites de funções mais simples, até mesmo os limites de funções mais elaboradas.

Proposição 3.1. Se p, m e n são números reais, então $\lim_{x\to p}(mx + n) = mp + n$.

Prova: Caso 1: $m \neq 0$. De acordo com a definição 3.1, dado $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$, tal que $|(mx + n) - (mp + n)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - p| < \delta$.

Podemos escolher o δ certo examinando a desigualdade que envolve ε. As seguintes desigualdades são equivalentes:

$$|(mx + n) - (mp + n)| < \varepsilon$$
$$|mx - mp| < \varepsilon$$
$$|m||x - p| < \varepsilon$$
$$|x - p| < \frac{\varepsilon}{|m|}.$$

A última desigualdade sugere a escolha do $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$. De fato, se $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$, temos

$|(mx + n) - (mp + n)| = |m||x - p| < |m| \cdot \frac{\varepsilon}{|m|}$ sempre que $0 < |x - p| < \delta$, e, portanto, $\lim_{x\to p}(mx + n) = mp + n$.

Prova: Caso 2: $m = 0$. Se $m = 0$, então $|(mx + n) - (mp + n)| = 0$ para todos os valores de x.

Logo, tomando qualquer $\delta > 0$, a definição de limite é satisfeita.

Portanto, $\lim_{x\to p}(mx + n) = mp + n$, para quaisquer p, m e n reais.

Da Proposição 3.1, decorre que:

(a) Se c é um número real qualquer, então $\lim_{x \to p} c = c$.

(b) $\lim_{x \to p} x = p$.

Proposição 3.2. Se $\lim_{x \to p} f(x)$ e $\lim_{x \to p} g(x)$ existem, e c é um número real qualquer, então:

(a) $\lim_{x \to p} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) \pm \lim_{x \to p} g(x)$;

(b) $\lim_{x \to p} cf(x) = c \cdot \lim_{x \to p} f(x)$;

(c) $\lim_{x \to p} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to p} f(x) \cdot \lim_{x \to p} g(x)$;

(d) $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p} g(x)}$ desde que $\lim_{x \to p} g(x) \neq 0$;

(e) $\lim_{x \to p} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to p} f(x)\right]^n$ para qualquer inteiro positivo n;

(f) $\lim_{x \to p} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to p} f(x)}$, se $\lim_{x \to p} f(x) > 0$ e n inteiro ou se $\lim_{x \to p} f(x) \leq 0$ e n é um número inteiro positivo ímpar;

(g) $\lim_{x \to p} \ln[f(x)] = \ln\,[\lim_{x \to p} f(x)]$ se $\lim_{x \to p} f(x) > 0$;

(h) $\lim_{x \to p} \cos[f(x)] = \cos\,[\lim_{x \to p} f(x)]$;

(i) $\lim_{x \to p} sen[f(x)] = sen\,[\lim_{x \to p} f(x)]$;

Provaremos o item (a) desta proposição usando sinal positivo.

Prova do item (a): Sejam $\lim_{x \to p} f(x) = L$, $\lim_{x \to p} g(x) = M$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Devemos provar que existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - p| < \delta$.

Como $\lim_{x \to p} f(x) = L$ e ${}^{\varepsilon}/_{2} > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ sempre que $0 < |x - p| < \delta_1$.

Como $\lim_{x \to p} g(x) = M$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - M| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ sempre que $0 < |x - p| < \delta_2$.

Seja δ o menor dos números δ_1, δ_2.

Então $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$ e assim, se $0 < |x - p| < \delta$, temos $|g(x) - M| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ e $|f(x) - L| < {}^{\varepsilon}/_{2}$.

Logo, $\left|\big(f(x) + g(x)\big) - (L + M)\right| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)|$

$$\leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$$
$$< {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2}$$
$$= \varepsilon.$$

Sempre que $0 < |x - p| < \delta$ e desta forma $\lim_{x \to p}\big(f(x) + g(x)\big) = L + M$.

Proposição 3.3 (Teorema do Confronto). Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo p, exceto em $x = p$, e se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} g(x)$$

então,

$$\lim_{x \to p} h(x) = L.$$

Prova: Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim_{x \to p} f(x) = L$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ Sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$. Como $\lim_{x \to p} g(x) = L$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

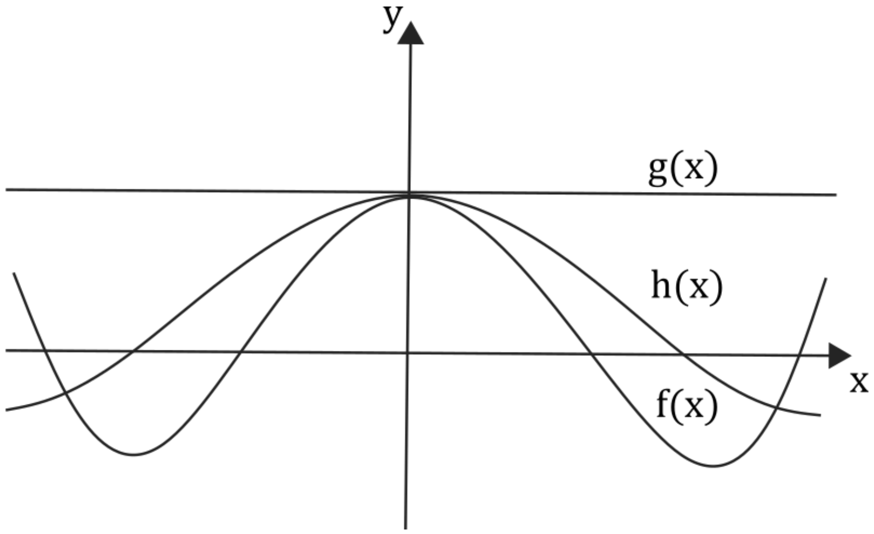
Então, se $0 < |x - p| < \delta$ temos que $|g(x) - L| < \varepsilon$, ou de forma equivalente, $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$ e $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Assim, usando a hipótese, concluímos que, se $0 < |x - p| < \delta$, então,
$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \varepsilon$, isto é,
$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$.

Logo, se $0 < |x - p| < \delta$, temos que $|h(x) - L| < \varepsilon$ e, portanto, $\lim_{x \to p} h(x) = L$.

No gráfico a seguir (Figura 3.2) podemos observar a situação descrita na proposição acima. Esse resultado é conhecido como Teorema do Confronto ou Teorema do Sanduíche.

Figura 3.2 – Teorema do Confronto



Fonte: De autoria própria

Agora iremos ver algumas das propriedades citadas acima, sendo usadas na prática.

Exemplo 3.1. Encontrar $\lim\limits_{x\to 3}(x^3 + 5x + 7)$.

Solução: Dessa forma temos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}(x^3 + 5x + 7) &= \lim_{x\to 3} x^3 + \lim_{x\to 3} 5x + \lim_{x\to 3} 7\\ &= \lim_{x\to 3} x^3 + 5\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 7\\ &= 3^3 + 3\cdot 5 + 7\\ &= 49.\end{aligned}$$

Exemplo 3.2. Encontrar $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-6}{x^2+1}$.

Solução: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-6}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to 2} x^3-6}{\lim_{x\to 2} x^2+1} = \frac{8-6}{4+1} = \frac{2}{5}$.

3.3 LIMITES NO INFINITO

3.3.1 Expressões Indeterminadas

Quando vamos lidar com limites no infinito, podemos acabar nos deparando com algumas expressões indeterminadas. A seguir iremos ver algumas delas, e algumas outras indeterminações que podemos encontrar ao resolver limites.

São elas:

$$0/0,\ \infty/\infty,\ \infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

Exemplo 3.3. Vejamos o caso da indeterminação $0/0$.

Sejam f e g funções tais $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} g(x) = 0$. Dependendo das funções f e g nada pode se afirmar sobre o limite do quociente f/g. Essa divisão pode assumir qualquer valor real ou não existir. Denotamos isso, dizendo que $0/0$ é um símbolo de indeterminação.

Definição 3.2. Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$. Denotamos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L,$$

quando o número L satisfaz à seguinte condição:
Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > A$.

Definição 3.3. Seja f definida em $(-\infty, b)$. Denotamos,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L,$$

se L satisfaz a seguinte condição:
Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $B < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x < B$.

Observação: as propriedades dos limites dadas na proposição 3.2 permanecem as mesmas quando substituímos $x \to p$ por $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

3.4 LIMITES INFINITOS

Definição 3.4. Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo p, exceto no ponto $x = p$. Dizemos que:

$$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty,$$

se para qualquer $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < |x - p| < \delta$.

De modo semelhante, podemos ver que ocorre com uma função f cujos valores decrescem ilimitadamente nas proximidades de um ponto p.

Definição 3.5. Seja f definida em um intervalo aberto contendo p, exceto no ponto $x = p$. Dizemos que:

$$\lim_{x \to p} f(x) = -\infty,$$

se para qualquer $B < 0$, existe $\delta > 0$, tal que $f(x) < B$ sempre que $0 < |x - p| < \delta$.

3.5 CONTINUIDADE

Ao nos deparar com a definição de $\lim_{x \to p} f(x)$ analisamos o comportamento da função f para valores próximos de p, porém eram valores diferentes de p. O $\lim_{x \to p} f(x)$ pode existir mesmo que f não seja definida em p. Pode ocorrer também da função ser definida em p e seu $\lim_{x \to p} f(x)$ existir, mas seu limite ser diferente de $f(p)$. Quando a função estiver definida em p e $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ diremos que essa função é contínua.

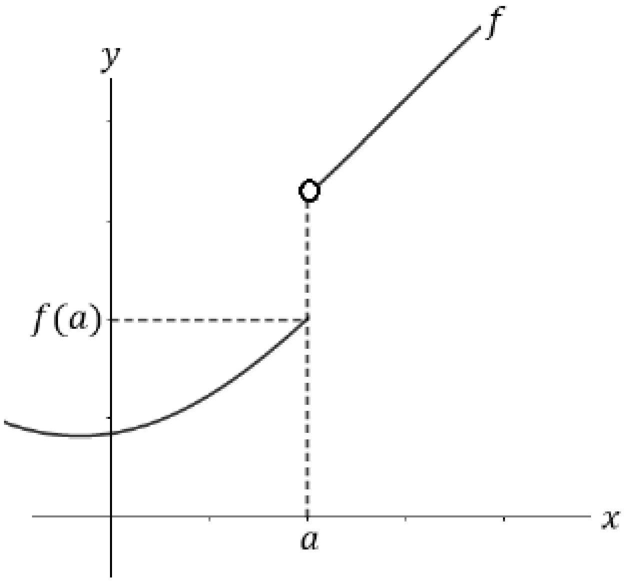
Definição 3.6. Uma função f é contínua no ponto p, quando é definida em p e o seu limite existir e for igual a $f(p)$, ou seja, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

3.5.1 Descontinuidade

Quando uma função não é contínua em um ponto ou em um intervalo, dizemos que ela é descontínua.

Exemplo 3.4. Um dos exemplos de descontinuidade é quando a função tem um ‘salto’ na sua representação. A seguir iremos ver a Figura 3.3 que exemplifica essa situação:

Figura 3.3 – Função Descontínua



Fonte: https://abrir.link/YJGwD

Essa função não contém o ponto a, o que faz ela não ser contínua em a.

4 DERIVADA

As ideias com as quais iremos lidar agora foram apresentadas por Newton e Leibniz no século XVIII.

4.1 A RETA TANGENTE

Vamos determinar a inclinação de uma curva qualquer e, em seguida, calcular a equação da reta tangente à curva em um ponto específico.

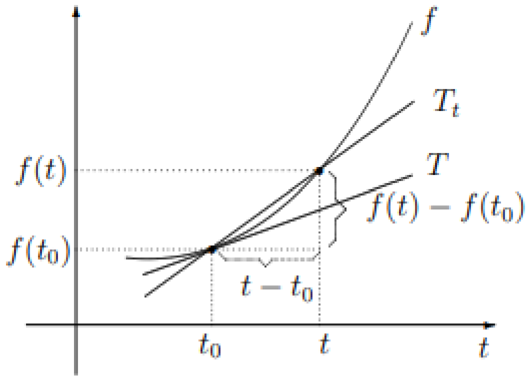
Seja f uma curva, como na Figura 4.1.

Sejam $(t_0, f(t_0))$ e $(t, f(t))$ dois pontos distintos da curva f.

Seja T_t a reta secante que passa pelos pontos $(t_0, f(t_0))$ e $(t, f(t))$.

Seja o coeficiente angular da reta $T_t = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$.

Figura 4.1 – A Reta Tangente



Fonte: Federson e Planas (2008)

Suponhamos agora que, mantendo $(t_0, f(t_0))$ fixo. O ponto $(t, f(t))$ se mova em direção a $(t_0, f(t_0))$. Diante disto, a inclinação da reta secante T_t variará. À medida que $(t, f(t))$ vai se aproximando cada vez mais de $(t_0, f(t_0))$, a inclinação da secante varia cada vez menos. Tendendo assim para um valor limite constante.

Esse valor limite é chamado de inclinação da reta tangente à curva no ponto $(t_0, f(t_0))$, ou também inclinação da curva em $(t_0, f(t_0))$.

Definição 4.1. Dada uma curva f, seja $P = (t_0, f(t_0))$ um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto P é dada por:

$m(t_0) = \lim\limits_{(t,f(t))\to(t,f(t_0))} \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$,

quando o limite existe.

Fazendo $t = t_0 + \Delta$ podemos escrever o limite dado logo acima da seguinte forma: $m(t_0) = \lim\limits_{\Delta_x\to 0} \frac{f(t_0+\Delta_x)-f(t_0)}{\Delta_x}$.

Conhecendo a inclinação da reta tangente à curva no ponto P, podemos encontrar a equação da reta tangente à curva em P.

4.1.1 Equação da Reta Tangente

Se a função f é contínua em t_0, então a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P = (t_0, f(t_0))$ é:

(a) A reta que passa por P tendo inclinação

$m(t_0) = \lim\limits_{\Delta_x\to 0} \frac{f(t_0+\Delta_x)-f(t_0)}{\Delta_x}$, se este limite existir. Nesse caso, temos a equação

$y - f(t_0) = m(x - t_0)$.

(b) A reta $x = t_0$ se $\lim\limits_{\Delta_x\to 0} \frac{f(t_0+\Delta_x)-f(t_0)}{\Delta_x}$ for infinito.

4.2 VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Acredito que velocidade e aceleração são conceitos que todos nós temos conhecimento. Quando estamos dirigindo um carro, podemos calcular a distância que percorremos em um determinado período. O velocímetro indica a velocidade em cada momento. Se pressionarmos o acelerador ou o freio, notamos que a velocidade varia, ou seja, sentimos a aceleração (Flemming e Gonçalves, 2006).

Nesta seção iremos ver como os conceitos de velocidade e aceleração podem ser trabalhados através de limites.

4.2.1 Velocidade

Suponhamos que um corpo se mova em linha reta e que $s = (t)$ representa o espaço percorrido pelo móvel até o instante t. Então, no intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$, o corpo sofre um deslocamento $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

Definimos velocidade média nesse intervalo de tempo como o quociente $v_m = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$, ou seja, a velocidade média é o quociente do espaço percorrido pelo tempo gasto em percorrê-lo.

Para obtermos a velocidade instantânea do corpo no instante t, calculamos a sua velocidade média em instantes de tempo Δt cada vez menores. A velocidade instantânea, ou velocidade no instante t, é o limite das velocidades médias quando Δt se aproxima de zero, então temos,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

4.2.2 Aceleração

O conceito de aceleração é introduzido de maneira parecida com o conceito de velocidade. A aceleração média no intervalo de tempo de t até $t + \Delta t$ é dada por:

$$a_m = \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}.$$

Para chegarmos à aceleração do corpo no instante t, tomamos a sua aceleração média em intervalos de tempo Δt cada vez menores. A aceleração instantânea é o limite

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = v'.$$

4.4 A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$, tal que seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por:

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta t}$, se este limite existir.

Obtemos assim uma nova função f', que chamamos de derivada de f.

Dizemos que uma função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos do seu domínio.

Notação. Seja $y = f(x)$, onde f é uma função derivável. Podemos escrever, alternativamente,

$f'(x) = y' = {dy}/{dx} = {d}/{dx}(y) = {df}/{dx} = Df(x) = D_x f(x)$,

para denotar a derivada de y ou de f em relação à variável x.

O símbolo ${}^{dy}/_{dx}$ não é uma divisão; trata-se apenas de uma notação.

4.5 CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DERIVÁVEIS

Teorema 4.1. Toda função derivável num ponto x_1 é contínua nesse ponto.

Prova. Seja f uma função derivável em x_1. Vamos provar que f é contínua em x_1. Basicamente vamos provar que as condições da definição 3.6 são válidas. Ou seja, $f(x_1)$ existe, $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$ também existe e $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$.

Por hipótese, f é derivável em x_1. Logo, $f'(x_1)$ existe e pela fórmula

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

concluímos que $f(x_1)$ deve existir para que o limite tenha significado.

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] &= \lim_{x \to x_1} \left[(x - x_1) \cdot \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right] \\ &= \lim_{x \to x_1} (x - x_1) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \\ &= 0 \cdot f'(x_1). \end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] = 0$.

Temos então,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_1} f(x) &= \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1) + f(x_1)] \\ &= \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] + \lim_{x \to x_1} f(x_1) \\ &= f(x_1). \end{aligned}$$

Temos então que todas as condições para a continuidade foram satisfeitas, então f é contínua x_1.

4.5 REGRAS DE DERIVAÇÃO

As regras de derivação nos permitem calcular derivadas sem o uso da definição. As seguintes regras são aplicáveis para a derivação:

4.5.1 A derivada de uma constante

Se p é uma constante e $f(x) = p$ para todo x, então $f'(x) = 0$.

4.5.2 Regra da potência

Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

4.5.3 Derivada do produto de uma constante por uma função

Sejam f uma função, p uma constante e g a função definida por $g(x) = pf(x)$. Se $f'(x)$ existe, então $g'(x) = pf'(x)$.

4.5.4 Derivada de uma soma

Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$. A seção 4.5.4 é válida para um número finito de funções, ou seja, a derivada da soma de um número finito de funções é igual à soma de suas derivadas, se existirem.

4.5.5 Derivada de um produto

Sejam f e g funções e h a função definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

4.5.6 Derivada de um quociente

Sejam f e g funções e h a função definida por $h(x) = f(x)/g(x)$, onde $g(x) \neq 0$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então:

$$h'(x) = g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)/[g(x)]^2.$$

4.6 MÁXIMOS E MÍNIMOS

Definição 4.2. Seja f uma função, $(a, b) \subset D(f)$ e $c \in (a, b)$. Dizemos que:

(1) $f(c)$ é um ponto de máximo local de f em (a, b) se $f(x) \leq f(c)$ para todo x em (a, b).

(2) $f(c)$ é um ponto de mínimo local de f em (a, b) se $f(x) \geq f(c)$ para todo x em (a, b).

Definição 4.3. Seja f uma função, $(a, b) \subset D(f)$ e $c \in D(f)$. Dizemos que o valor:

(1) $f(c)$ é máximo global de f ou que c é um ponto de máximo global de f se, para todo x em $D(f)$, $f(x) \leq f(c)$.

(2) Se, para todo x em $D(f)$, $f(x) \geq f(c)$, então dizemos que $f(c)$ é o valor mínimo global de f ou que c é um ponto de mínimo global de f.

Os valores máximos e mínimos de uma função f são chamados de pontos extremos de f.

Teorema 4.2 (de Weierstrass ou do Valor Extremo). Seja I um intervalo fechado e $I \in D_f$. Se f for contínua, então existirão $c_1, c_2 \in I$ tais que:

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2), \forall\, x \in I.$$

O que o Teorema de Weiertrass nos diz é que $f(c_1)$ é um valor mínimo de f no intervalo I e $f(c_2)$ é um valor máximo em I. O teorema nos garante que se f for contínua em um intervalo fechado e limitado, então f assumirá os valores máximo e mínimo neste intervalo.

Proposição 4.1. Seja I um intervalo aberto e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $c \in I$ for um ponto de extremo (máximo ou mínimo) de f, então $f'(c) = 0$.

5 O TEOREMA DO VALOR MÉDIO

O Teorema do Valor Médio (TVM) é um dos mais importantes enunciados da matemática devido ao fato seu desfecho ser usado na demonstração de diversos outros teoremas e resultados. Sua aplicação também se estende para as mais diversas áreas da ciência aplicada.

Nesta seção iremos esmiuçar este importante teorema, mas antes se faz necessário falar de outro resultado fundamental, que é o Teorema de Rolle, pois vamos usá-lo para provar o TVM.

5.1 TEOREMA DE ROLLE

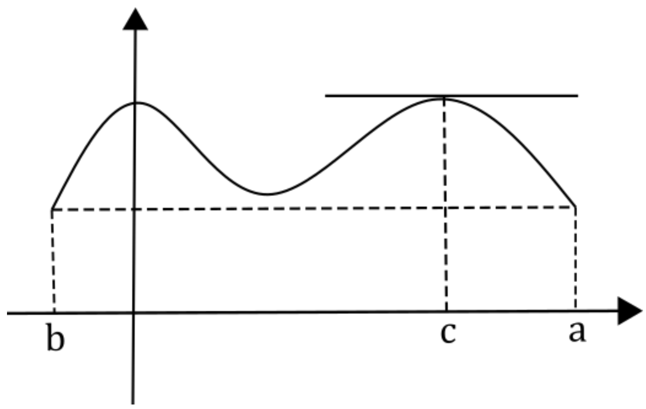
Teorema 5.1 (Teorema de Rolle). Seja uma função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisfaça as seguintes condições:

(a) Se f for contínua $[a, b]$;
(b) Se f for derivável em (a, b);
(c) $f(a) = f(b)$.

Então existirá pelo menos um c no intervalo aberto (a, b), aonde $f'(c) = 0$.

A Figura 5.1 exemplifica este teorema.

Figura 5.1 – Teorema de Rolle



Fonte: De autoria própria

Ou seja, se a função cumprir todos os requisitos, o teorema de rolle nos diz que a função tem pelo menos um ponto no intervalo $[a, b]$ onde a derivada desse ponto será igual a zero.

Prova. Se f for constante em $[a, b]$ então $f'(x) = 0$. Logo pode ser tomado qualquer número c. Suponhamos agora que f não é constante. Como f é contínua, pelo teorema 4.2, existem c_1 e c_2 tais que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$, para todo $x \in [a, b]$. Como f não é constante, $f(c_1) \neq f(c_2)$, logo c_1 ou c_2 pertence ao intervalo $[a, b]$ e como são pontos extremos, $f'(c_1) = 0$ ou $f'(c_2) = 0$. Portanto; existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Exemplo 5.1. Verifique se as hipóteses do Teorema de Rolle são satisfeitas para a função $f(x) = -x^2 + 5x$ no intervalo $(0,5)$.

Solução: Vamos verificar então se todas as hipóteses são satisfeitas.

(1) Contínua no intervalo [0,5]. Sim, é contínua pois a função polinomial é contínua para qualquer valor de x;

(2) Derivável no intervalo $(0,5)$. Sim, pois toda função polinomial é derivável;

(3) $f(a) = f(b)$. $f(0) = f(5)$, portanto satisfaz a condição.

Como $f(x)$ cumpre todos os requisitos, então deverá existir um c tal que $f'(c) = 0$.

Vamos encontrar a derivada de $f(x)$.

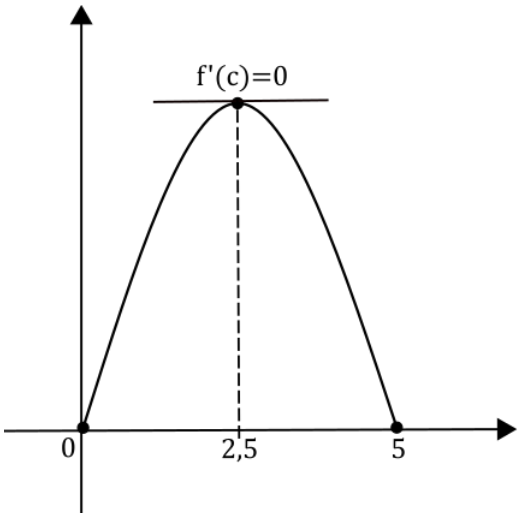
$$\begin{aligned} f'(x) &= -x^2 + 5x \\ &= -2x + 5 \end{aligned}$$

Substituindo c em $f'(x)$:

$$\begin{aligned} -2c + 5 &= 0 \\ -c &= {}^{-5}/_{2} \\ c &= {}^{5}/_{2} \\ c &= 2{,}5 \end{aligned}$$

Então $f(2{,}5)$ em $-2c + 5$ deverá ser 0. Vamos então observar o comportamento da função no gráfico a seguir.

Figura 5.2 – Gráfico de $f(x) = -x^2 + 5x$



x	f(x) = $-x^2+5x$
0	0
1	4
2	6
2,5	6,25
3	6
4	4
5	0

Fonte: De autoria própria

5.2 O TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Teorema 5.2 (Teorema do Valor Médio). Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

(1) f contínua em $[a, b]$;

(2) f derivável em (a, b).

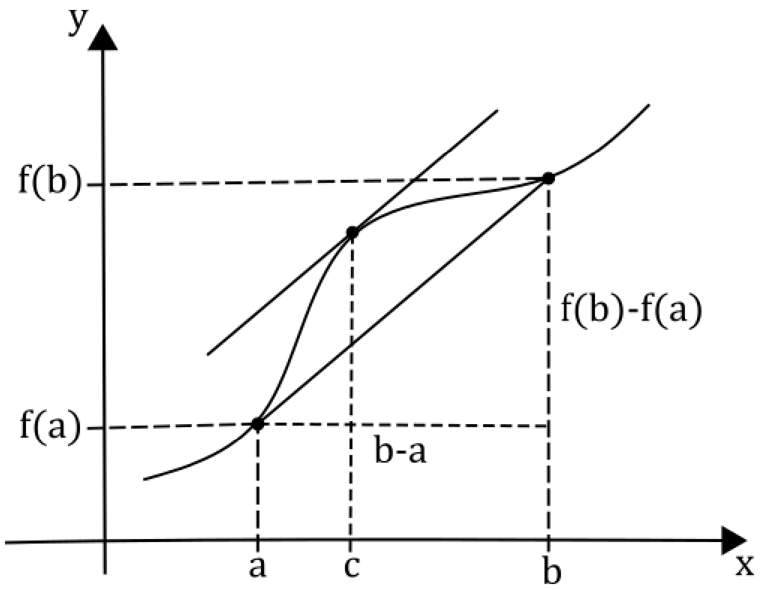
Então existe pelo menos um número $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

O que o TVM nos diz é que se uma função for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b), o teorema nos garante que vai existir pelo menos um número c, que pertence ao intervalo, cuja sua inclinação da reta tangente ao gráfico vai ser paralela à reta que liga "os extremos do gráfico" (a, b), ou seja, suas inclinações serão iguais.

Observe a Figura 5.3 abaixo:

Figura 5.3 – Teorema do Valor Médio



Fonte: De autoria própria

Prova. A equação da reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dada por

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Definamos

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Para aplicarmos o Teorema 5.1 (Teorema de Rolle) a h devemos verificar as hipóteses.

(1) h é contínua em $[a, b]$ pois é soma da função contínua f e um polinômio de grau 1.

(2) Analogamente, $h(x)$ é diferenciável em (a, b).

(3) $h(a) = h(b) = 0$.

Logo, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

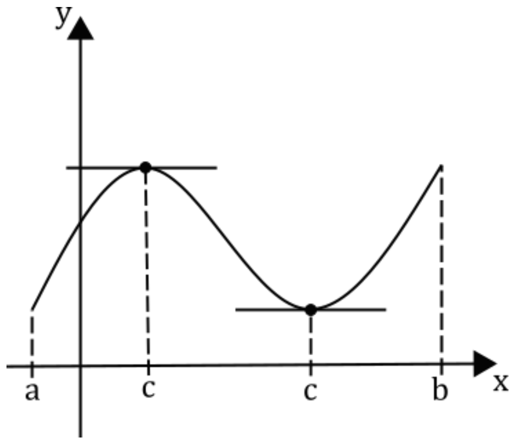
$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

dessa forma o TVM está demonstrado.

Após observarmos o TVM, podemos concluir que ele é uma generalização do Teorema de Rolle sem a condição $f(a) = f(b)$, ou seja, é uma variação onde as alturas não precisam ser iguais.

É importante destacarmos que o número $c \in (a, b)$ pode não ser único, logo, pode existir mais de um $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, como mostra a Figura 5.4.

Figura 5.4 – Função com mais de um c



Fonte: De autoria própria

6 APLICAÇÕES DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO

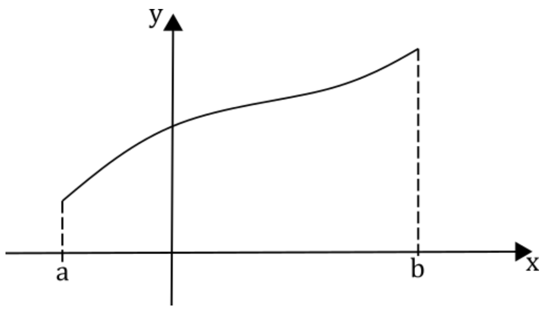
A conclusão que o Teorema do Valor Médio nos traz é muito interessante, esse teorema é útil para várias aplicações, incluindo a demonstração de outros teoremas e na análise no comportamento das funções. A seguir iremos ver algumas dessas aplicabilidades.

6.1 APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE CÁLCULO

6.1.1 Estudo de Crescimento e Decrescimento de Funções

Definição 6.1. Uma função f é crescente (Figura 6.1) no intervalo $[a, b]$ se à medida que x aumenta, $f(x)$ também. Ou à medida que x diminui, $f(x)$ diminui da mesma forma.

Figura 6.1 – Função Crescente



Fonte: De autoria própria

Corolário 6.1. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável no intervalo (a, b). Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será crescente em $[a, b]$.

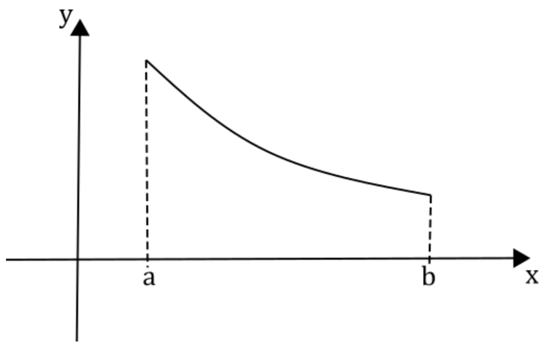
Prova: Queremos demonstrar que se $x_1 < x_2$ então $f(x_1)$ será menor que $f(x_2)$. Pelo TVM aplicado a f em $[x_1, x_2]$, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ devemos ter que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Dessa forma f é crescente.

Definição 6.2. Uma função f é decrescente (Figura 6.2) no intervalo $[a, b]$ se, ao aumentar o valor de x dentro desse intervalo, o valor de $f(x)$ diminui, e se x diminui, $f(x)$ aumenta.

Figura 6.2 – Função Decrescente



Fonte: De autoria própria

Corolário 6.2. Dada uma f constante no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b). Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f será decrescente em $[a, b]$.

Prova: Análoga a demonstração anterior.

Exemplo 6.1. Determine o intervalo no qual a função a seguir é crescente ou decrescente.

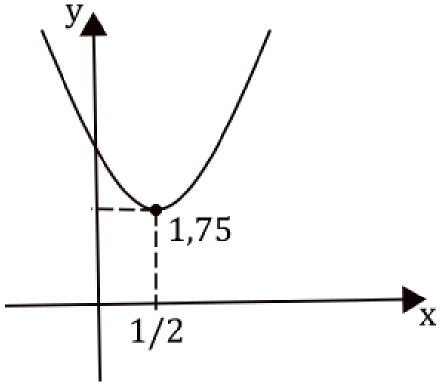
(1) $f(x) = x^2 - x + 2$.

Solução: Vamos derivar a função e analisar quais os números x tais que $f'(x) > 0$ e quais os números x tais que $f'(x) < 0$.

Temos $f'(x) = 2x - 1$. Então, para $2x - 1 > 0$ ou $x > 1/2$ a função é crescente. Para $2x - 1 < 0$ ou $x < 1/2$ a função é decrescente.

Representado essa função graficamente, temos a Figura 6.3.

Figura 6.3 – Gráfico de $f(x) = x^2 - x + 2$

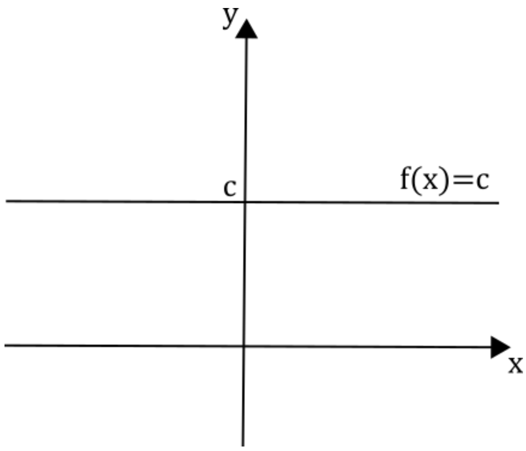


Fonte: De autoria própria

6.1.2 Função Constante

Definição 6.3. Uma função f é constante se existe um número real c tal que $f(x) = c$ para todo x no domínio da função. Como mostra a Figura 6.4.

Figura 6.4 – Função Constante



Fonte: De autoria própria

Corolário 6.3. Se f for contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será uma função constante.

Prova: Seja $x_0 \in [a, b]$ um ponto fixo. Para todo $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, pelo TVM existe um c que pertence ao intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

Como $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, temos que $f'(x_0) = 0$, logo

$$f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0),$$

para todo $x \in [a, b]$. Portanto, f é constante.

Corolário 6.4. Se tivermos uma situação em que $f'(x) = g'(x)\ \forall\ x$ no intervalo (a, b). Então, f e g diferem por uma constante, isto é, existe um número real p, tal que

$$f(x) = g(x) + p;$$

para todo $x \in (a, b)$.

Prova: Denotemos a função $h(x) = f(x) - g(x)$. Então, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, para todo x em (a, b). Logo, pelo Corolário 5.3, $h(x) = p$ para todo x em $[a, b]$ e alguma constante p real, ou seja,

$f(x) - g(x) = p$, que é equivalente a $f(x) = g(x) + p$.

6.2 APLICAÇÃO EM CINEMÁTICA

6.2.1 Velocidade Média

Quando estamos dirigindo um automóvel vai ter momentos em que é preciso frear ou até mesmo aumentar a velocidade, dessa forma, durante o percurso podemos atingir diferentes variações da nossa velocidade instantânea.

Já sabemos que, se $x = f(t)$ for a função da posição pelo tempo do movimento de um objeto sobre o eixo x, então $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ será a velocidade média entre os instantes $t = a$ e $t = b$. O TVM tem uma aplicação muito interessante na velocidade média, ele nos garante que vai existir pelo menos um instante $c \in (a, b)$ aonde a velocidade média é igual a velocidade instantânea em $t = c$, ou seja, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Isso quer dizer que se em uma viagem a velocidade média for igual a $100\ km/h$, então, em algum momento, o velocímetro marcou $100\ km/h$.

Exemplo 6.2. Um certo motociclista está pilotando em uma via reta que tem o limite de velocidade de $90\ \boldsymbol{km/h}$. Se o motociclista, a partir do repouso, percorreu $20\ \boldsymbol{km}$ em 10 minutos, calcule a velocidade média e diga se esse motociclista poderia pegar uma multa por exceder o limite de velocidade da rodovia.

Solução: Note que 10 minutos equivale a $1/6\ h$. Vamos calcular a velocidade média:

$$\frac{20-0}{\frac{1}{6}-0} = 120\ km/h$$

o Teorema do Valor Médio assegura que, em algum momento durante o percurso de $20\ km$, o piloto atingiu $120\ km/h$. Dessa forma, ele pode ter recebido uma multa por excesso de velocidade.

Exemplo 6.3. Um objeto é abandonado da altura de $200\ m$ e esta altura, em função do tempo, é dada pela equação $s(t) = -5t^2 + 200$. Determine a velocidade média do objeto nos primeiros dois segundos e, logo em seguida, determine o instante no qual a velocidade instantânea se iguala a velocidade média.

Solução: Primeiramente vamos determinar a velocidade média do objeto. Como observado no enunciado temos: $s(0) = 200$ e $s(2) = -5 \cdot 4 + 200 \Longrightarrow s(2) = 180\ m$. Substituindo na fórmula

$$\frac{s(2)-s(0)}{2-0} = \frac{180-200}{2} = -10\ m/s.$$

Como $s(t) = -5t^2 + 200$ é uma função contínua em $[0,2]$ e diferenciável em $(0,2)$, pois é uma função polinomial, então podemos aplicar o TVM.

$$s'(c) = \frac{s(2)-s(0)}{2-0}$$
$$-10c = -10$$
$$c = 1.$$

Ou seja, em $c = 1\ segundo$ é quando a velocidade média se iguala a velocidade instantânea.

6.3 TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) é um dos pilares da matemática, sua importância já é evidenciada no seu próprio nome. Foi esse resultado que que fez Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz serem reconhecidos como os criadores do Cálculo.

O que o TFC faz é estabelecer uma relação entre dois conceitos centrais do cálculo: a diferenciação e a integração. Ele mostra que a integração e a diferenciação são operações inversas e nos diz que a integral é a antiderivada no ponto maior menos a antiderivada no ponto menor.

Há uma aplicação muito interessante do TVM na demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo. No entanto, antes de abordamos esta aplicação, precisamos introduzir alguns conceitos.

Dada uma função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, nosso objetivo nesse primeiro momento é calcular a área embaixo do gráfico de f.

Definição 6.4. Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Uma partição do intervalo $[a, b]$ é um conjunto do tipo:

$$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 \dots t_n = b\}.$$

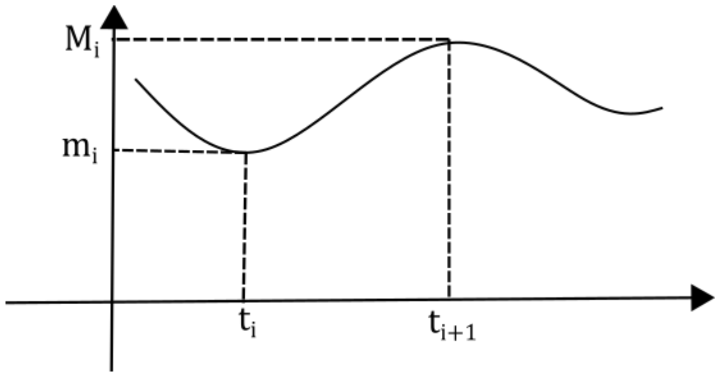
Definição 6.5. Para cada i de uma partição definimos:

(1) $M_i = \sup \{f(x);\ t_i \leq x \leq t_{i+1}\}$ vai ser o maior dos valores nesse subintervalo, e o chamamos de supremo.

(2) $m_i = \inf \{f(x);\ t_i \leq x \leq t_{i+1}\}$ vai ser o menor dos valores nesse subintervalo, e o chamamos de ínfimo.

Assim como exemplifica a Figura 6.5.

Figura 6.5 – Supremo e Ínfimo

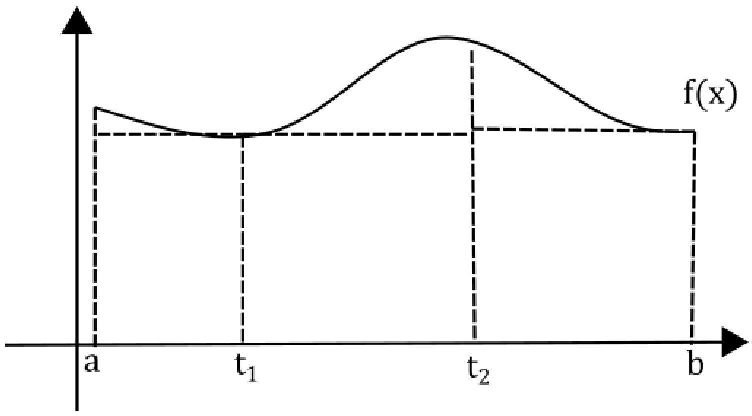


Fonte: De autoria própria

Definição 6.6. Vamos definir alguns somatórios para as seguintes situações:

(1) Observe a Figura 6.6 a seguir:

Figura 6.6 – Aproximação por falta

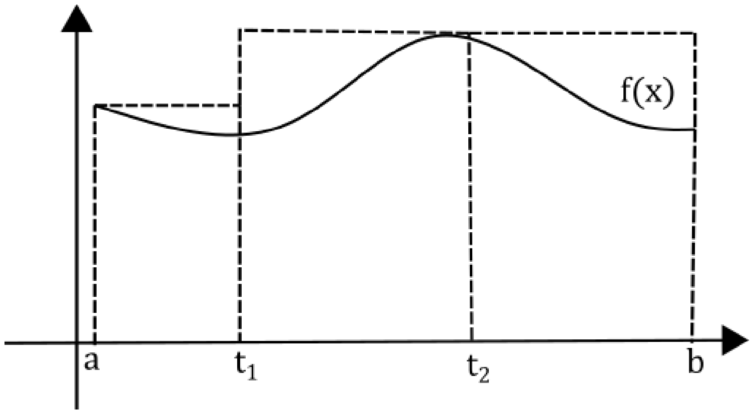


Fonte: De autoria própria

Vamos definir $s(f) = \sum_{i=0}^{n} m_i|t_{i+1} - t_i|$, ou seja, $s(f)$ é a soma de todas as áreas desses retângulos formados pelas distâncias $|t_{i+1} - t_i|$ vezes os ínfimos que eles atingem em seus intervalos. Fazendo assim uma aproximação por falta do gráfico embaixo de f.

(2) De forma análoga a definição interior vamos fazer outra aproximação, mas agora utilizando os supremos de cada intervalo, ou seja, $S(f) = \sum_{i=0}^{n} M_i|t_{i+1} - t_i|$. Dessa forma $S(f)$ irá ser uma aproximação por sobra.

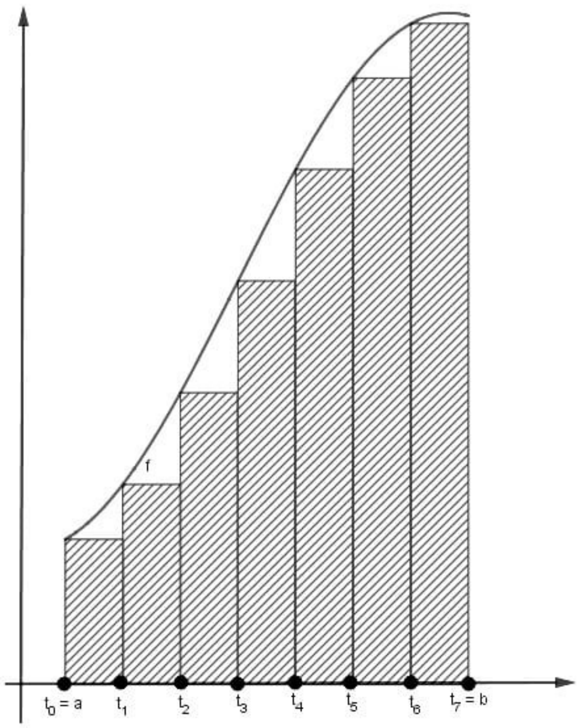
Figura 6.7 – Aproximação por sobra



Fonte: De autoria própria

Observação: Note que essa aproximação da área fica melhor quando menor forem os intervalos da partição.

Figura 6.8 – Aproximação por falta com mais intervalos



Fonte: Teorema Fundamental do Cálculo em Análise Real – GeoGebra

Definição 6.7. Dizemos que uma função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável se:

$$\lim_{|t_{i+1}-t_i|} s(f) = \lim_{|t_{i+1}-t_i|} S(f).$$

Notação. $\lim_{|t_{i+1}-t_i|} s(f) = \lim_{|t_{i+1}-t_i|} S(f) = \int_a^b f(x)dx.$

Definição 6.8. Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Dizemos que uma função $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ é primitiva de f se $F'(x) = f(x)$.

Observação: Note que $\int_a^b f(x)dx = F(x) + C$.

Teorema 6.1 (Teorema Fundamental do Cálculo). Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Prova: Seja uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 \dots t_n = b\}$. Note que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} F(t_{i+1}) - F(t_i)$$

$(F(t_1) - F(a)) + (F(t_2) - F(t_1)) + (F(t_3) - F(t_2)) + \cdots + (F(b) - F(t_{n-1})) =$
$F(b) - F(a)$.

Aplicando o Teorema do Valor Médio, existe $c_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} F(t_{i+1}) - F(t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} F'(c_i)(t_{i+1} - t_i)$$

Seja m_i e M_i o inf e sup de $F'(x) = f(x)$ em $[t_i, t_{i+1}]$.

Assim $m_i \leq F'(c_i) \leq M_i$. O que implica:

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i\,(t_{i+1} - t_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} F'(c_i)(t_{i+1} - t_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,(t_{i+1} - t_i)$$

$$s(F') \leq \sum_{i=0}^{n-1} F'(c_i)(t_{i+1} - t_i) \leq S(F') \Rightarrow s(F') \leq F(b) - F(a) \leq S(F')$$

Como $f = F'$ é integrável,

$$\lim_{|t_{i+1}-t_i|} s(F') = \lim_{|t_{i+1}-t_i|} S(F') = \int_a^b F'(x)$$

Pelo Teorema do Confronto:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)$$

dessa forma o teorema está demonstrado.

Relembrando o que o Teorema do Valor Médio nos diz é que seja uma função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), vai existir um $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, e multiplicando ambos os lados dessa equação por $(b - a)$ obtemos:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Quando somamos todas as bases dos nossos retângulos que foram formados a partir da partição que fizemos no intervalo, muitos dos valores se cancelam e é por isso que temos:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} F(t_{i+1}) - F(t_i)$$

A partir disso enfrentamos um problema: nosso objetivo é calcular a área embaixo do gráfico de f utilizando uma figura que a área já sabemos calcular, que é o retângulo, cuja área é dada pela base vezes a altura. A base já está definida, mas altura não. É aqui que o TVM entra, pois ele nos garante a existência de um ponto c tal que a derivada desse ponto é igual a inclinação média da função no intervalo considerado, ou seja, é a altura que precisamos para calcular a área dos retângulos. Dessa forma, aplicaremos o teorema em todos os intervalos das partições que fizemos do conjunto e, assim, obteremos a somatória da área de todos os retângulos:

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(t_{i+1}) - F(t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} F'(c_i)(t_{i+1} - t_i)$$

que é o necessário para continuar a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A importância do Cálculo para o desenvolvimento da humanidade é inegável, diante disso, escolhemos um de seus tópicos mais importantes para abordar durante este trabalho, que foi o Teorema do Valor Médio. O TVM, como demonstrado ao longo da pesquisa, é uma ferramenta matemática fundamental com aplicação em diversas áreas. Dessa forma, fizemos uma pequena abordagem histórica sobre o cálculo e definimos os conceitos de limites, derivadas e do Teorema de Rolle, que são essenciais para explicar e demonstrar o TVM.

Algumas aplicações foram abordadas, como o estudo do crescimento, decrescimento e constância das funções, a aplicação do teorema na velocidade média, e da relação do TVM com o Teorema Fundamental do Cálculo, em todos esses tópicos, o Teorema do Valor Médio é essencial para a demonstração. Durante o curso de Cálculo, muitas vezes não damos a devida importância a este teorema, mas entendê-lo nos dá uma ferramenta poderosa para analisar o comportamento de funções e desenvolver métodos para resolver problemas matemáticos complexos.

Por fim, fica evidente que o Teorema do Valor Médio não é apenas uma teoria abstrata, mas um conceito que, ao ser aplicado, traz uma compreensão mais profunda e soluções para problemas de diversas áreas de pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**: Funções, limite, derivação e integração. 6. ed. rev. Florianópolis: Pearson, 2006. 448 p. v. 6.

FEDERSON, Márcia; PLANAS, Gabriela. **Cálculo I**: Notas de aula. 1. ed. aum. [*S. l.*: *s. n.*], 2008. 186 p. v. 1.

Guidorizzi, Hamilton Luiz **Um curso de cálculo**, vol. 1 / Hamilton Luiz Guidorizzi. - 5.ed. - [Reimpr.]. - Rio de Janeiro: LTC, 2013. 380p.

Mol, Rogério Santos M717i **Introdução à história da matemática** / Rogério S. Mol. – Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. 1 38 p.

ISAAC Newton. [*S. l.*], 1 dez. 2006. Disponível em: https://abrir.link/WHIdn. Acesso em: 10 set. 2024.

LIMITES. [*S. l.*], 1 jan. 2020. Disponível em: https://abrir.link/WHIdn. Acesso em: 10 set. 2024.

ESQUINCALHA, Agnaldo; LACERDA, Greice; SANTOS, Thays; LUZ, Vinicíus. **Teorema Fundamental do Cálculo em Análise Real**. [*S. l.*], 22 jun. 2019. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ypmrgfph. Acesso em: 10 set. 2024.