

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

ALEXANDRE VIDAL MEDEIROS

A FÍSICA DAS ESTRELAS DE NÊUTRONS E ANÃS BRANCAS

SÃO LUÍS

2022

ALEXANDRE VIDAL MEDEIROS

A FÍSICA DAS ESTRELAS DE NÊUTRONS E ANÃS BRANCAS

Monografia apresentada ao programa de graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física.

São Luís, 28 de julho de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marco Schreck (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Frederico Elias Passos dos Santos
Universidade Federal do Maranhão

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Edivan Dantas de Medeiros e Aldenir de Jesus Vidal Medeiros, pelo apoio incondicional e incentivo sempre prestado na realização da minha formação;

À minha namorada, Beatrice, pela paciência, compreensão e por estar comigo em todos os momentos bons e ruins pelos quais passei até chegar nesse momento;

Ao meu orientador Prof. Dr. Marco Schreck, pela sua orientação, pelas correções e pela confiança em mim depositada em todos esses anos de convívio;

À todos os professores do Grupo de Física teórica de Partículas e Campos da UFMA;

À todos os professores do Departamento de Física da UFMA;

À todos os alunos do Grupo de Física teórica de Partículas e Campos da UFMA com os quais pude conviver durante todo esse tempo;

Aos professores Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho e Prof. Dr. Frederico Elias Passos dos Santos por aceitarem compor a banca examinadora;

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), pelas bolsas de iniciação científica durante a graduação, que possibilitou a dedicação integral ao curso.

RESUMO

A atração gravitacional dentro de uma estrela típica é equilibrada pela pressão térmica causada pelas reações nucleares que ocorrem no seu interior. Quando o combustível nuclear se esgota e não há outra fonte de pressão térmica para equilibrar a gravidade a estrela continua se contraindo, a menos que algum tipo de pressão diferente da pressão térmica seja capaz de equilibrar a gravidade novamente. Os elétrons dentro da matéria estelar constituem um gás de Fermi, e quando a densidade dentro da estrela em contração torna-se suficientemente alta, esse gás de elétrons se torna “degenerado”. Esse gás de Fermi degenerado exerce o que é conhecido como *pressão de degenerescência*, uma vez que elétrons são férmions e respeitam o princípio de Pauli. Acredita-se que as estrelas anãs brancas representem configurações estelares nas quais a atração da gravidade para dentro é equilibrada pela pressão de degenerescência do gás de elétron. Em densidades muito altas, os elétrons são forçados a se combinar com os núcleos para produzir matéria consistindo principalmente de nêutrons. Como os nêutrons também são férmions, um gás de nêutrons também exerce pressão de degenerescência. Uma estrela de nêutrons é uma configuração estelar na qual a gravidade é equilibrada pela pressão de degenerescência de nêutrons. Estudaremos as estruturas dessas estrelas obtendo e solucionando as equações que modelam a dinâmica estelar, complementadas por uma equação de estado que descreve a matéria no interior dos objetos, encontrando limites de massas e outras relações características, que serão comparadas com dados reais de observações astronômicas. Usaremos o sistema algébrico computacional **Mathematica** e programação em Python, apresentando no apêndice os códigos escritos para resolver e traçar os gráficos das equações de interesse.

Palavras-chave: Astrofísica. Estrelas de Nêutrons. Anãs Brancas.

ABSTRACT

The gravitational pull inside a typical star is balanced by the thermal pressure caused by nuclear reactions taking place inside it. When the nuclear fuel runs out and there is no other source of thermal pressure to balance gravity, the star continues to contract unless some kind of pressure other than thermal pressure is able to balance gravity again. The electrons within stellar matter constitute a Fermi gas, and when the density within the contracting star becomes sufficiently high, this electron gas becomes “degenerate”. This degenerate Fermi gas exerts what is known as *degeneracy pressure*, since electrons are fermions and respect the Pauli principle. White dwarf stars are thought to represent stellar configurations in which the inward pull of gravity is balanced by the degeneracy pressure of the electron gas. At very high densities, electrons are forced to combine with nuclei to produce matter consisting mainly of neutrons. As neutrons are also fermions, a neutron gas also exerts degeneracy pressure. A neutron star is a stellar configuration in which gravity is balanced by the degeneracy pressure of neutrons. We will study the structure of these stars by obtaining and solving the equations that model stellar dynamics, complemented by an equation of state that describes the matter inside the objects, finding mass limits and other characteristic relationships, which will be compared with real data from astronomical observations. We will use the **Mathematica** computer algebra system and Python programming, showing in the appendix the codes written to solve and plot the graphs of the equations of interest.

Keywords: Astrophysics. Neutron Stars. White Dwarfs.

Conteúdo

Lista de Figuras	i
Lista de Tabelas	ii
Lista de Símbolos	iii
1 INTRODUÇÃO	1
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	2
2.1 Noções Preliminares	2
2.1.1 O Diagrama HR	2
2.1.2 Anãs Brancas	3
2.1.3 Estrelas de Nêutrons	3
2.2 Modelos Estelares	4
2.2.1 Equilíbrio Hidrostático nas Estrelas	4
2.2.2 Transporte de Energia Dentro das Estrelas	5
2.2.3 Convecção Dentro das Estrelas	6
2.2.4 Equações de Modelos Estelares	8
2.3 Estados Finais do Colapso Estelar	9
2.3.1 Pressão de Degenerescência de um Gás Fermi	10
2.3.2 Estrutura das Anãs Brancas e o Limite de Massa de Chandrasekhar	14
2.3.3 O Gotejamento de Nêutrons e Estrelas de Nêutrons	18
3 SOLUÇÕES	21
3.1 Soluções Para Uma Estrela Anã Branca	21
3.2 Soluções Para Uma Estrela de Nêutrons	23
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	25
4.1 Anãs Brancas	25
4.2 Estrelas de Nêutrons	26
5 CONCLUSÃO	27
REFERÊNCIAS	28
APÊNDICES	29
A Códigos em Python	29
A.1 Solução Numérica da Equação de Lane-Emden	29
A.2 Solução Numérica da Equação de TOV	29
ANEXOS	32
A Tabelas	32
A.1 Anãs Brancas	32
A.2 Estrelas de Nêutrons	32
A.3 Sistemas Binários	32
A.3.1 Estrelas de Nêutrons - Anãs Brancas	32
A.3.2 Estrelas de Nêutrons - Estrelas de Nêutrons	33
B Derivação da Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	33

Lista de Figuras

1	Representação de um diagrama HR, mostrando a localização de algumas estrelas conhecidas.	2
2	Diferença de pressão em uma massa infinitesimal dentro de uma estrela. . .	5
3	Deslocamento vertical de uma gota de gás em uma atmosfera estratificada. .	7
4	Espaço de momento com o momento de Fermi p_F	11
5	Diferentes regiões em um gráfico de densidade-temperatura em que diferentes equações de estado são válidas.	13
6	A variação do raio com a massa para anãs brancas. A curva sólida corresponde à solução completa, onde a curva tracejada é obtida por meio da equação de estado não relativística (2.34). A unidade de raio l_1 usada no eixo vertical é definida na equação (2.57).	16
7	Solução analítica da equação de Lane-Emden para $n = 0$	22
8	Solução analítica da equação de Lane-Emden para $n = 1$	22
9	Solução analítica da equação de Lane-Emden para $n = 5$	22
10	Gráfico P versus r newtoniano para uma estrela de nêutrons.	23
11	Gráfico M versus r newtoniano para uma estrela de nêutrons.	23
12	Gráfico P versus r com correções para uma estrela de nêutrons.	24
13	Gráfico M versus r com correções para uma estrela de nêutrons.	24
14	Gráfico $\theta(\xi)$ versus ξ ; soluções numéricas da equação (3.1).	25
15	Gráfico TOV e mais estrelas de nêutrons, $M(M_\odot)$ versus $R(\text{km})$; solução numérica.	26

Lista de Tabelas

1	Exemplos de anãs brancas.	32
2	Exemplos de estrelas de nêutrons.	32
3	Sistemas binários: estrelas de nêutrons - anãs brancas.	32
4	Sistemas binários: estrelas de nêutrons - estrelas de nêutrons.	33

Lista de Símbolos

1. $M_{\odot}$ Unidade de massa solar.
2. $R_{\odot}$ Unidade de raio solar.
3. $L_{\odot}$ Unidade de luminosidade solar.
4. χ Opacidade da matéria estelar.
5. ε Taxa de geração de energia por unidade de massa por unidade de tempo.
6. M_{Ch} Limite de massa de Chandrasekhar.

1 INTRODUÇÃO

Uma estrela é um objeto astronômico que consiste em um esferoide luminoso de plasma mantido íntegro pela gravidade e pela pressão de radiação [1]. Muitas estrelas são visíveis a olho nu a partir da Terra durante a noite, aparecendo como pontos luminosos fixos no céu devido à sua imensa distância da Terra. O universo observável contém uma estimativa de 1×10^{24} estrelas [2], mas a maioria é invisível a olho nu da Terra, incluindo todas as estrelas fora de nossa galáxia, a Via Láctea.

Durante a maior parte de sua atividade, uma estrela brilha devido à fusão termo-nuclear de hidrogênio em hélio em seu núcleo, liberando energia para o espaço. Quase todos os elementos são criados pela nucleossíntese estelar durante a vida da estrela ou pela nucleossíntese de supernova quando ela explode. No fim de sua vida, uma estrela também pode conter matéria degenerada¹. Os astrônomos podem determinar a massa, idade, composição química e muitas outras propriedades de uma estrela, observando seu movimento no espaço, sua luminosidade e espectro. A massa de uma estrela é o principal fator para sua evolução e destino. Outras características de uma estrela, como diâmetro e temperatura, mudam com o tempo, enquanto o ambiente da estrela afeta sua rotação e movimento. Um gráfico da temperatura de muitas estrelas em relação às suas luminosidades é conhecido como diagrama Hertzsprung-Russell (diagrama HR). Traçar uma determinada estrela nesse diagrama permite que a idade e o estado evolutivo dessa estrela sejam determinados.

Começaremos por quando a estrela já está na sequência principal, durante a fusão que converte hidrogênio em hélio, liberando energia no processo. Nesse caso o que impede a estrela de colapsar sobre si própria é a pressão interna da estrela. Uma estrela com massa superior a 0,4 vezes a do Sol se torna uma gigante vermelha quando o hidrogênio em seu núcleo se esgota e ela começa a fundir elementos mais pesados. Quando o núcleo resulta em ferro, não há mais como extrair energia através da reação de fusão nuclear, e a estrela colapsa com a maior parte de sua massa ejetada em uma supernova [1]. Também há perda de uma parte da sua massa enriquecida com esses elementos mais pesados à medida que a estrela se expande. Enquanto isso, o núcleo se torna um remanescente estelar: uma anã branca, uma estrela de nêutrons ou, se for suficientemente massiva, um buraco negro.

Nos atentaremos no estudo das estruturas de estrelas de nêutrons e anãs brancas, derivando as equações que visam modelar seus interiores e propondo soluções numéricas para cada caso e comparando com resultados prévios encontrados na literatura científica e com dados observacionais.

¹Matéria degenerada é um estado altamente denso de matéria fermiônica em que as partículas devem ocupar altos estados de energia cinética para satisfazer o princípio de exclusão de Pauli. O termo é usado principalmente na astrofísica para se referir a objetos estelares densos em seus estados evolutivos finais, como anãs brancas e estrelas de nêutrons, onde a pressão térmica não é suficiente para evitar o colapso gravitacional e onde a pressão gravitacional é tão extrema que os efeitos da mecânica quântica são significativos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Noções Preliminares

O diagrama HR é uma importante ferramenta para o estudo da evolução estelar, que nos permite analisar sua evolução desde a sequência principal, passando por gigantes ou super gigantes e posteriormente se extinguindo como anãs brancas ou, em casos mais raros, como estrelas de nêutrons e buracos negros, que não podem ser graficados no diagrama HR². As estrelas de nêutrons começam muito quentes, com temperatura superficial em torno de 6×10^5 K a 1×10^6 K, e pelo tamanho reduzido sua luminosidade é muito menor (até um milhão de vezes menor do que a do sol [1]), ficando fora do alcance do gráfico.

2.1.1 O Diagrama HR

O Diagrama de Hertzsprung Russell, conhecido como diagrama HR, foi desenvolvido independentemente pelo dinamarquês Ejnar Hertzsprung (1873-1967), em 1911, e pelo americano Henry Norris Russell (1877-1957), em 1913, como uma relação existente entre a luminosidade de uma estrela e sua temperatura superficial [1].

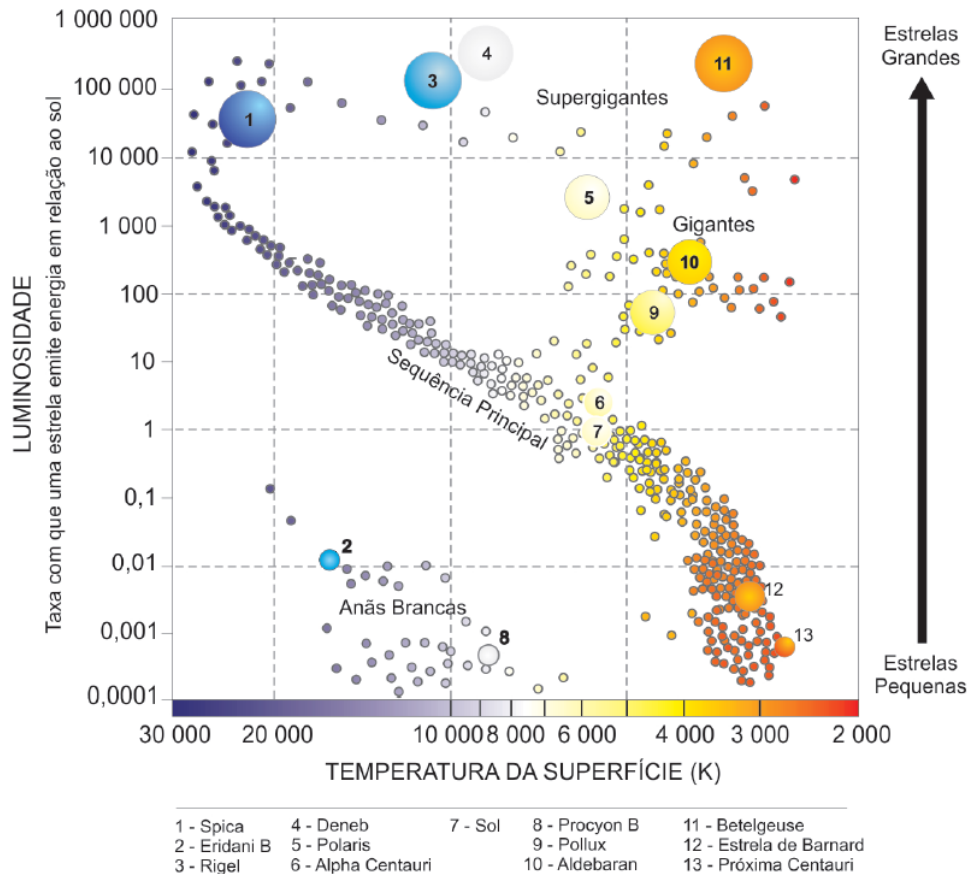


Figura 1: Representação de um diagrama HR, mostrando a localização de algumas estrelas conhecidas.

Estrelas da mesma cor podem ser divididas entre luminosas, as gigantes, e estrelas de baixa luminosidade, as anãs. Assim, o Sol e a estrela Capela têm a mesma classe espectral,

²As estrelas de nêutrons ficariam muito distante de todas as outras, e a representação delas junto com estrelas típicas e anãs brancas distorceriam o gráfico, tirando sua utilidade.

isto é, a mesma cor, mas Capela, uma gigante, é cerca de 100 vezes mais luminosa que o Sol [1]. A Figura 1 (adaptada de [1], p. 242.) é uma representação de um diagrama HR.

2.1.2 Anãs Brancas

As anãs brancas são remanescentes estelares compostos principalmente de matéria degenerada. Uma anã branca é muito densa, com uma massa comparável à do Sol e um volume comparável ao da Terra. Como a energia emitida é energia térmica armazenada, a luminosidade é baixa; não há fusão dentro da anã branca. O nome anã branca foi cunhado por Willem Luyten em 1922.

Anãs brancas são objetos resultantes do processo evolutivo de estrelas de até $4 M_{\odot}$ (4 massas solares). Após se tornarem gigantes vermelhas durante a fase de fusão nuclear de Hélio/Hidrogênio³, elas ejetam sua camada externa, formando uma nebulosa planetária e deixando para trás um núcleo composto praticamente de carbono e oxigênio, que sem o suporte contra o colapso gravitacional oferecido pela fusão nuclear, torna-se extremamente denso, com uma massa típica de $0.6 M_{\odot}$ contida em um volume semelhante ao da Terra.

O colapso gravitacional da anã branca é barrado apenas pela pressão de degenerescência. A maior massa de uma anã branca, além da qual a pressão da matéria degenerada não pode mais suportá-la, é em torno de $1.4 M_{\odot}$ (limite de Chandrasekhar). Na Tabela 1 apresentamos dados reais de algumas estrelas anãs brancas.

Como as anãs brancas esfriam vagarosamente, seriam necessários centenas de bilhões de anos para que uma anã branca esfriasse o suficiente para deixar de ser visível, se transformando em anãs negras. Em 13.7 bilhões de anos (estimativa atual da idade do universo), elas ainda não tiveram tempo suficiente para esfriar a ponto de deixarem de ser visíveis. Até mesmo as primeiras anãs brancas ainda estão visíveis, com luminosidades acima de $3 \times 10^{-5} L_{\odot}$ e temperaturas superficiais efetivas da ordem de 3700 K [1].

2.1.3 Estrelas de Nêutrons

Uma estrela de nêutrons é o núcleo colapsado de uma estrela relativamente grande que antes do colapso teria tido um total de entre 4 e 10 massas solares. As estrelas de nêutrons são as menores e mais densas estrelas até onde sabemos [3]. Embora tenham um raio de 10 km, elas podem ter massas cerca de duas vezes a do Sol. A maioria dos modelos básicos para esses objetos consideram que as estrelas de nêutrons são compostas quase que inteiramente de nêutrons, que são partículas subatômicas sem carga elétrica líquida e com massa pouco maior que a massa dos prótons. Elas são apoiadas contra o colapso gravitacional pela pressão de degenerescência de nêutrons, um fenômeno que acontece devido ao princípio de exclusão de Pauli. Se o remanescente estelar tiver massa maior do que $3.2 M_{\odot}$, a estrela de nêutrons continua a colapsar até formar um buraco negro [4].

As estrelas de nêutrons que podem ser observadas são muito quentes e geralmente têm uma temperatura superficial em torno de 6×10^5 K a 1×10^6 K. A densidade de uma estrela de nêutrons é comparável com a densidade do núcleo atômico, ambas da ordem de 10^{17} kg/m³, existindo em média 1 elétron para cada 200 nêutrons. Seus campos magnéticos são entre 10^8 e 10^{15} vezes mais fortes que o da Terra [1]. À medida que o núcleo da estrela colapsa, sua taxa de rotação aumenta como resultado da conservação do momento angular, portanto, as estrelas de nêutrons recém formadas giram em várias centenas de vezes por segundo. Algumas estrelas de nêutrons emitem feixes de radiação eletromagnética que os tornam detectáveis como pulsares. A descoberta dos pulsares por Jocelyn Bell Burnell em 1967 foi a primeira sugestão observacional de que existem

³Outros elementos são sintetizados conforme a estrela expande, até o ferro

estrelas de nêutrons. A estrela de nêutrons de rotação mais rápida conhecida é a PSR J1748-2446ad, que gira a uma taxa de 716 vezes por segundo ou 43 000 rotações por minuto [5], dando uma velocidade linear na superfície da ordem de 0.24c. Acredita-se que existam cerca de 100 milhões de estrelas de nêutrons na Via Láctea, um número obtido ao estimar o número de estrelas que passaram pela supernova [6]. Na Tabela 2 apresentamos dados reais de algumas estrelas de nêutrons. Cerca de 5% de todas as estrelas de nêutrons conhecidas são membros de um sistema binário [7], com exemplos apresentados na Tabela 3 (estrelas de nêutrons - anãs brancas) e na Tabela 4 (estrelas de nêutrons - estrelas de nêutrons).

2.2 Modelos Estelares

Agora estabeleceremos as equações básicas para a estrutura estelar assumindo que a estrela é esfericamente simétrica [7]. Se a estrela girar rápido o suficiente, haverá algum achatamento na direção do eixo de rotação. Da mesma forma, se uma estrela tem um campo magnético forte, essa pode ser outra razão pela qual ela se desvia da simetria esférica. Essas complicações foram ignoradas no primeiro tratamento de estruturas estelares. Quando olhamos para o nosso próprio sol, descobrimos que a simetria esférica é uma boa aproximação. O achatamento rotacional do sol é desprezível. Embora a coroa solar seja altamente irregular devido à presença de campos magnéticos, eles não são fortes o suficiente para distorcer a simetria esférica abaixo da superfície do sol.

2.2.1 Equilíbrio Hidrostático nas Estrelas

Seja M_r a massa dentro do raio r de uma estrela. Então a massa dentro do raio $r + dr$ deve ser $M_r + dM_r$, o que significa que dM_r é a massa da casca esférica entre os raios r e $r + dr$. Se ρ é a densidade no raio r , então a massa dessa casca é $\rho \cdot 4\pi r^2 dr$, ou seja,

$$dM_r = 4\pi r^2 \rho dr, \quad (2.1)$$

do qual

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (2.2)$$

Esta é a primeira de nossas equações de estrutura estelar.

Vamos agora considerar uma pequena porção da concha entre r e $r + dr$. Se dA é a área transversal deste pequeno elemento, as forças exercidas pela pressão atuando em suas superfícies interna e externa são PdA e $-(P + dP)dA$, onde P e $P + dP$ são respectivamente as pressões nos raios r e $r + dr$, como na Figura 2. Portanto, a força resultante da pressão é $-dPdA$, que deve ser balanceada pela gravidade em condições de equilíbrio. O campo gravitacional em r é causado pela massa M_r dentro de r e é igual a $-GM_r/r^2$. Como a massa do elemento pequeno em consideração é $\rho dr dA$, a condição de equilíbrio de força para ele é

$$-dPdA - \frac{GM_r}{r^2} \rho dr dA = 0, \quad (2.3)$$

do qual

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho. \quad (2.4)$$

Esta é a segunda das equações da estrutura estelar.

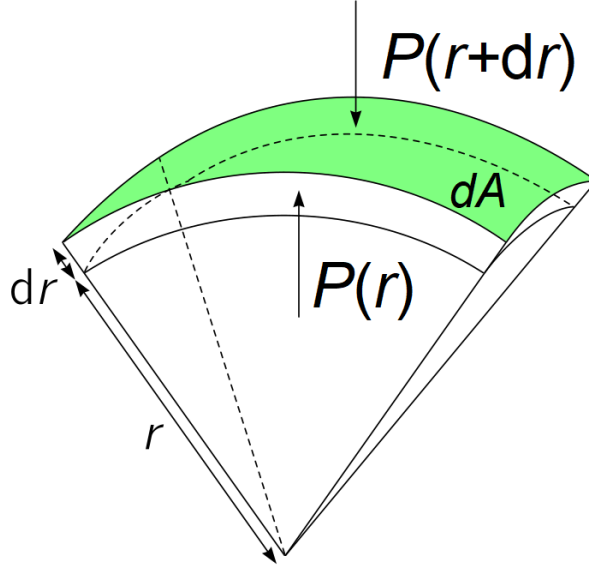


Figura 2: Diferença de pressão em uma massa infinitesimal dentro de uma estrela.

Olhando (2.2) e (2.4) vemos que elas envolvem três funções variáveis da coordenada radial r : M_r , ρ e P . Certamente duas equações não são suficientes para resolver três funções variáveis. A seguir veremos que em estrelas densas como anãs brancas e estrelas de nêutrons a pressão se torna uma função apenas da densidade [7]. Nesses casos, o número de variáveis independentes torna-se duas em vez de três, e as equações acima (2.2) e (2.4) podem ser resolvidas para encontrar a estrutura estelar. Em estrelas típicas, no entanto, o material estelar se comporta muito bem como um gás perfeito [1], e a pressão é uma função da densidade e da temperatura, tendo a forma $P \propto \rho T$. Em tal situação, precisamos de equações adicionais para geração de energia (devemos considerar a fusão nuclear) para resolver a estrutura estelar.

2.2.2 Transporte de Energia Dentro das Estrelas

A energia gerada pelas reações nucleares na região central de uma estrela é transportada para o exterior [7]. Agora temos que derivar equações que descrevem esse processo. Seja L_r a quantidade total de fluxo de energia por unidade de tempo que flui para fora através de uma superfície esférica de raio r dentro da estrela (a superfície esférica sendo centralizada no centro da estrela). Esperamos que L_r seja igual à luminosidade L da estrela no raio externo $r = R$ da estrela. Se $L_r + dL_r$ é o fluxo de energia externa no raio $r + dr$, então dL_r é a entrada adicional ao fluxo de energia produzido pelo invólucro esférico entre r e $r + dr$. Se ε é a taxa de geração de energia por unidade de massa por unidade de tempo (presumivelmente por reações nucleares) [7], deveríamos ter

$$dL_r = 4\pi r^2 dr \cdot \rho \varepsilon, \quad (2.5)$$

do qual

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon. \quad (2.6)$$

Após (2.2) e (2.4), esta é a terceira das importantes equações da estrutura estelar.

O fluxo de energia é impulsionado pelo gradiente de temperatura dentro da estrela. Precisamos de uma equação para isso também. Sabemos que existem três modos importantes de transferência de calor na natureza: condução, convecção e radiação. Embora

a condução seja importante em estrelas compactas como as anãs brancas, ela se mostra sem importância no interior das estrelas normais. Agora, vamos considerar uma região no interior de uma estrela onde o calor é transportado para o exterior apenas por transferência radiativa. Uma expressão (obtida em (2.78) de [7]) para o fluxo de energia por unidade de área por transferência radiativa é

$$F = -\frac{c}{\chi\rho} \frac{d}{dz} \left(\frac{a_B}{3} T^4 \right), \quad (2.7)$$

onde χ é a opacidade da matéria estelar, $a_B = 7.566 \times 10^{-16} \text{ Jm}^{-3}\text{K}^{-4}$ e z é a coordenada do eixo z na direção vertical que foi usada para deduzir a equação acima. Substituindo z por r , o fluxo de energia L_r através da superfície esférica do raio r é dado por

$$L_r = 4\pi r^2 F = -4\pi r^2 \frac{c}{\chi\rho} \frac{d}{dr} \left(\frac{a_B}{3} T^4 \right), \quad (2.8)$$

do qual

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4a_B c} \frac{\chi\rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}. \quad (2.9)$$

Esta é a quarta equação da estrutura estelar se o fluxo de calor for realizado por transferência radiativa. Precisamos substituir (2.9) por uma equação diferente se o fluxo de calor for transportado por convecção. Derivaremos essa equação alternativa a seguir.

2.2.3 Convecção Dentro das Estrelas

Na transferência radiativa, a energia é transportada sem nenhum movimento material. Já a convecção envolve movimentos para cima e para baixo⁴ do gás. Gotas quentes de gás se movem para cima e as gotas frias de gás se movem para baixo, transportando calor.

Suponha que tenhamos um gás perfeito em equilíbrio hidrostático dentro de uma estrela. Agora, consideramos uma gota de gás que foi deslocada verticalmente para cima, como mostra a Figura 3 (adaptada de [7], p. 68.). Inicialmente, a bolha de gás tinha a mesma densidade ρ e a mesma pressão P dos arredores. A densidade e a pressão externas do gás na nova posição da bolha são ρ' e P' . Sabemos que os desequilíbrios de pressão em um gás são rapidamente removidos por ondas acústicas, mas a troca de calor entre diferentes partes do gás leva mais tempo. Portanto consideramos que a bolha foi deslocada *adiabaticamente* e tenha a mesma pressão P' dos arredores em sua nova posição. Seja ρ^* sua densidade na nova posição.

Se $\rho^* < \rho'$, a bolha deslocada ficará flutuante e continuará se movendo para cima, além da posição inicial, tornando o sistema instável e dando origem a convecção. Por outro lado, se $\rho^* > \rho'$, a bolha tentará retornar à sua posição original para que o sistema fique estável e não haja convecção. Portanto, a convecção é da natureza de uma instabilidade no sistema [7]. Para encontrar a condição de instabilidade convectiva, precisamos determinar se ρ^* é maior ou menor que a densidade circundante ρ' .

Partindo do pressuposto de que a bolha foi deslocada adiabaticamente, e usando uma equação típica de um curso de termodinâmica, que relaciona a densidade, a pressão inicial, a pressão final, segue-se que

$$\rho^* = \rho \left(\frac{P'}{P} \right)^{1/\gamma}, \quad (2.10)$$

⁴Nesse caso, para baixo significa a direção radial no sentido do centro, e para cima é a direção radial se afastando do centro.

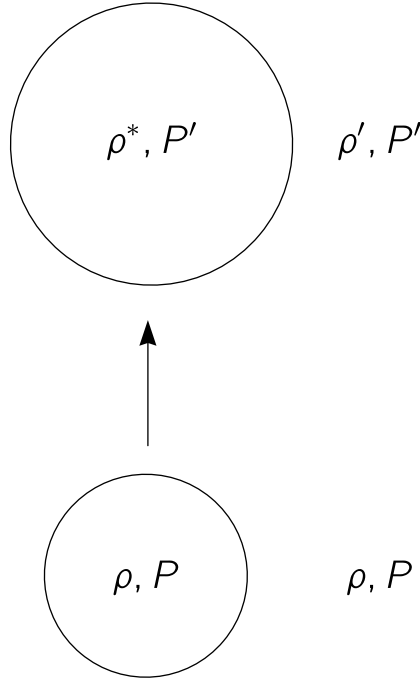


Figura 3: Deslocamento vertical de uma gota de gás em uma atmosfera estratificada.

onde o γ é o coeficiente de expansão adiabática. Se dP/dr é o gradiente de pressão na atmosfera, podemos substituir

$$P' = P + \frac{dP}{dr} \Delta r \quad (2.11)$$

e fazer uma expansão binomial mantendo os termos na ordem linear em Δr [7]. Isto dá

$$\rho^* = \rho + \frac{\rho}{\gamma P} \frac{dP}{dr} \Delta r. \quad (2.12)$$

Por outro lado,

$$\rho' = \rho + \frac{d\rho}{dr} \Delta r. \quad (2.13)$$

Usando $\rho = P/\bar{R}T$ (obtido a partir da lei dos gases ideais, fazendo $\bar{R} = R/M$, onde⁵), obtemos

$$\rho' = \rho + \frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} \Delta r - \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dr} \Delta r. \quad (2.14)$$

Aqui $d\rho/dr$ e dT/dr são os gradientes de densidade e temperatura na atmosfera [7]. De (2.12) e (2.14),

$$\rho^* - \rho' = \left[- \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} + \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dr} \right] \Delta r. \quad (2.15)$$

Tendo em mente que dT/dr e dP/dr são negativos, a atmosfera é estável se

$$\left| \frac{dT}{dr} \right| < \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \left| \frac{dP}{dr} \right|. \quad (2.16)$$

⁵Aqui $\bar{R}$ é o R_{espec} do material, e M é a massa molar, definida como a massa de uma amostra, medida em quilogramas, dividida pela quantidade de substância nessa amostra, medida em mols.

Esta é a *condição de estabilidade de Schwarzschild* [8]. Se o gradiente de temperatura da atmosfera for mais acentuado que o valor crítico $(1 - 1/\gamma)(T/P)|dP/dr|$, a atmosfera é instável à convecção.

A convecção é um mecanismo extremamente eficiente para o transporte de energia. O gradiente de temperatura deve ser apenas um pouco mais inclinado que o gradiente crítico para conduzir o fluxo de energia estelar típico. Com boa aproximação podemos tomar

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (2.17)$$

dentro da zona de convecção. Para fazer cálculos mais precisos, é necessário o auxílio da *teoria do comprimento da mistura*, desenvolvida por Biermann (1948) e Vitense (1953) (como exemplo, no capítulo 7 de [9]), fora do escopo deste trabalho.

Ao construir o modelo de uma estrela, é preciso proceder da seguinte maneira [7]. Primeiro, assume-se que não há convecção e o transporte térmico é inteiramente devido ao transporte radiativo descrito por (2.9). Depois de calcular a distribuição de temperatura com base nessa suposição, o próximo passo é verificar se o gradiente de temperatura obtido dessa maneira satisfaz a condição de estabilidade de Schwarzschild (2.16). Se estiver satisfeita, pode-se considerar que o fluxo de calor é realmente transportado por transporte radiativo e o gradiente de temperatura é dado por (2.9). Por outro lado, se a condição de estabilidade (2.16) não for satisfeita em algumas regiões, o fluxo de calor é transportado principalmente por convecção nessas regiões e é necessário repetir o cálculo usando (2.17) em vez de (2.9).

2.2.4 Equações de Modelos Estelares

Já derivamos todas as equações necessárias para a construção de modelos estelares. Para maior precisão é necessário levar em consideração a ionização parcial, especialmente nas camadas externas da estrela, e também deve incluir a pressão de radiação, que se torna importante para estrelas mais massivas. Finalmente, quando a densidade é muito alta, o gás de elétrons *se degenera*, ou seja, obedece à distribuição de Fermi-Dirac em vez da distribuição clássica de Maxwell. Isso dá origem ao que é chamado de *pressão de degenerescência* que desempenha um papel crucial no equilíbrio da gravidade quando o combustível nuclear se esgota em uma estrela. Isso será discutido adiante.

Vamos agora escrever todas as equações para a estrutura estelar em um só lugar:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (2.18)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho, \quad (2.19)$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon, \quad (2.20)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4a_B c} \frac{\chi \rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}; \quad (2.21a)$$

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}. \quad (2.21b)$$

Em uma estrela típica, a convecção pode ocorrer em uma certa faixa de raio, enquanto o calor é transportado por transferência radiativa em outras regiões. Assim, para o mesmo

modelo estelar, pode ser necessário usar uma forma de (2.21) em algumas regiões e outra forma em outras. Uma vez que a equação de estado $P(\rho, T, X_i)$, a opacidade $\chi(\rho, T, X_i)$ e a taxa de geração de energia nuclear $\varepsilon(\rho, T, X_i)$ são dadas, as equações acima envolvem quatro funções independentes de r : ρ , T , M_r e L_r [7]. O número de equações independentes também é quatro. Uma vez que existem quatro equações envolvendo quatro variáveis, com uma condição de contorno para cada variável, este é claramente um problema matematicamente bem colocado.

Assim passaremos para o estudo das estruturas das anãs brancas e posteriormente faremos as considerações necessárias para estrelas de nêutrons.

2.3 Estados Finais do Colapso Estelar

Vimos na seção anterior que a atração gravitacional dentro de uma estrela típica é equilibrada pela pressão térmica causada pelas reações termonucleares que ocorrem no interior estelar. Eventualmente, no entanto, o combustível nuclear da estrela está esgotado e não há mais nenhuma fonte de pressão térmica para equilibrar a gravidade. Tal estrela continua se contraindo, a menos que algum tipo de pressão diferente da pressão térmica seja capaz de equilibrar a gravidade novamente [7]. O objetivo desta seção é discutir as possíveis configurações finais de estrelas que não possuem combustível nuclear.

Temos que fazer uso de uma propriedade muito importante de férmions de spin $1/2$. Em uma unidade de volume h^3 no espaço de momento não pode haver mais do que dois férmions (um com spin para cima e outro com spin para baixo). Os elétrons dentro da matéria estelar constituem um gás de Fermi, e quando a densidade dentro da estrela em contração torna-se suficientemente alta, esse gás de elétron se torna “degenerado” [6]. Isso significa que o limite teórico de duas partículas por célula unitária do espaço de fase está quase atingido. Esse gás de Fermi degenerado exerce o que é conhecido como *pressão de degenerescência*. Acredita-se que as estrelas anãs brancas representem configurações estelares nas quais a atração da gravidade para dentro é equilibrada pela pressão de degenerescência do gás do elétron. A estrutura das anãs brancas é discutida na seção 2.3.2, onde derivamos o famoso resultado de que uma configuração de anã branca só é possível se a massa da estrela for menor que o limite de massa de Chandrasekhar de cerca de $1,4 M_\odot$.

Em densidades muito altas, os elétrons são forçados a se combinar com os núcleos para produzir matéria consistindo principalmente de nêutrons [7]. Como os nêutrons também são férmions, um gás de nêutrons também exerce pressão de degenerescência. Uma estrela de nêutrons é uma configuração estelar na qual a gravidade é equilibrada pela pressão de degenerescência de nêutrons. Como a equação do estado da matéria nas densidades muito altas que prevalecem dentro das estrelas de nêutrons não é conhecida com precisão, a estrutura das estrelas de nêutrons não é compreendida tão bem quanto a estrutura das anãs brancas [6]. As estrelas de nêutrons também têm um limite superior de massa, como as anãs brancas. Mas esse limite de massa não é conhecido com muita precisão devido às incertezas em nosso conhecimento da equação de estado. A maioria dos cálculos abrangentes sugere que este limite de massa não é muito maior do que $2 M_\odot$.

A massa inicial de uma estrela não tem necessariamente que ser menor que o limite de massa das anãs brancas ou estrelas de nêutrons para que a estrela termine em uma dessas configurações [3]. Uma estrela pode perder uma parte considerável de sua massa durante as fases finais da evolução na forma de um vento constante durante a fase de gigante vermelha, ou através de mecanismos de ejeção mais drásticos, como o derramamento da

camada externa como uma nebulosa planetária ou uma explosão de supernova. A partir de estudos estatísticos de vários tipos de estrelas, infere-se que estrelas menos massivas do que cerca de $4 M_{\odot}$ eventualmente se tornam anãs brancas, enquanto estrelas com massas iniciais na faixa de $4 M_{\odot}$ a $10 M_{\odot}$ terminam como estrelas de nêutrons, normalmente após sofrer uma explosão de supernova [7]. Estrelas com massas iniciais superiores a $10 M_{\odot}$ provavelmente⁶ não podem perder massa suficiente para se tornarem anãs brancas ou estrelas de nêutrons. Elas se contraem até que a atração gravitacional seja tão forte que nem mesmo a luz possa escapar se tornando um *buraco negro*.

2.3.1 Pressão de Degenerescência de um Gás Fermi

A pressão em um gás surge dos movimentos aleatórios das partículas que constituem o gás. Se $4\pi f(p)p^2 dp$ é o número de partículas com momento entre p e $p + dp$ (assumindo que a função de distribuição $f(p)$ seja isotrópica, e a discussão da função de distribuição será feita adiante), enquanto v é a velocidade de uma partícula com momento p , então a pressão P do gás é dada por uma expressão padrão na teoria cinética

$$P = \frac{1}{3} \int v p f(p) 4\pi p^2 dp. \quad (2.22)$$

Para um gás comum, ao substituir a distribuição Maxwelliana em (2.22), a pressão é dada por $nk_B T$, onde n é o número de partículas por unidade de volume. A pressão do material estelar contendo diferentes tipos de partículas é dada por

$$P = \frac{k_B}{\mu m_H} \rho T, \quad (2.23)$$

onde μ é o peso molecular médio, m_H é a massa do átomo de hidrogênio e k_B é a constante de Boltzmann [7].

Essa pressão, que surge dos movimentos térmicos das partículas, deve ir a zero em $T = 0$, desde que a física clássica seja válida. No entanto, quando um gás de férmions é comprimido a uma densidade muito alta, muitas das partículas são forçadas a permanecer em estados de momento diferente de zero mesmo em $T = 0$, dando origem à pressão de degenerescência [6].

Quando a matéria estelar é comprimida, os elétrons degeneram muito antes dos prótons e outros núcleos. A razão por trás disso é que se a energia cinética $p^2/2m$ for igualmente particionada entre diferentes tipos de partículas, espera-se que os elétrons mais leves tenham momentos menores. Consequentemente, eles ocupam um volume muito menor do espaço do momento e, consequentemente, sua densidade numérica nesta região do espaço do momento é maior do que a densidade numérica correspondente das partículas mais pesadas. Em uma densidade que faz os elétrons degenerarem, as partículas mais pesadas ainda permanecem não degeneradas (sua ocupação do espaço de fase permanece bem abaixo do limite teórico) [3]. Os elétrons que ocupam o volume V do espaço real e têm momentos na faixa d^3p no espaço do momento têm estados $2V d^3p/h^3$ no espaço de fase disponíveis para eles (dois sendo devido aos dois estados de spin), como exemplificado na Figura 4. Se considerarmos a casca esférica entre p e $p + dp$, então o número de estados por unidade de volume dentro desta casca é $8\pi p^2 dp/h^3$. As ocupações desses estados

⁶Em 2010 foi publicado um artigo [10] que indica que um tipo de estrela de nêutrons foi gerada a partir de uma estrela com cerca de $40 M_{\odot}$. Novos estudos são necessários para maior compreensão sobre o limite superior de massa para formação de estrelas de nêutrons.

são fornecidas pela estatística de Fermi-Dirac. Para simplificar, podemos negligenciar os efeitos da temperatura finita e assumir que todos os estados abaixo do momento de Fermi p_F estão ocupados, enquanto todos os estados acima de p_F estão desocupados [7]. Então, a densidade numérica n_e de elétrons é

$$n_e = \int_0^{p_F} \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3. \quad (2.24)$$

Se todos os estados entre p e $p + dp$ estiverem ocupados, então $8\pi p^2 dp / h^3$ deve ser igual a $4\pi f(p) p^2 dp$, implicando que $f(p)$ em (2.22) deve ser $2/h^3$ se $p < p_F$ e 0 se $p > p_F$. Consequentemente

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} v p^3 dp. \quad (2.25)$$

Agora usamos a expressão relativística de que o momento de uma partícula é dado por $p = m\gamma(v)v$, onde $\gamma(v)$ é o fator de Lorentz. Então

$$v = \frac{p}{m_e \gamma(v)} = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}}, \quad (2.26)$$

em que E é a energia relativística total de um elétron com massa m_e .

Ao usar (2.25) e (2.26), obtemos

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4 c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}} dp, \quad (2.27)$$

que é a pressão devido ao gás de elétrons degenerado [6].

Nosso objetivo é derivar uma equação de estado conectando a pressão e a densidade. Prótons e outros núcleos mais pesados presentes no material estelar contribuem para a

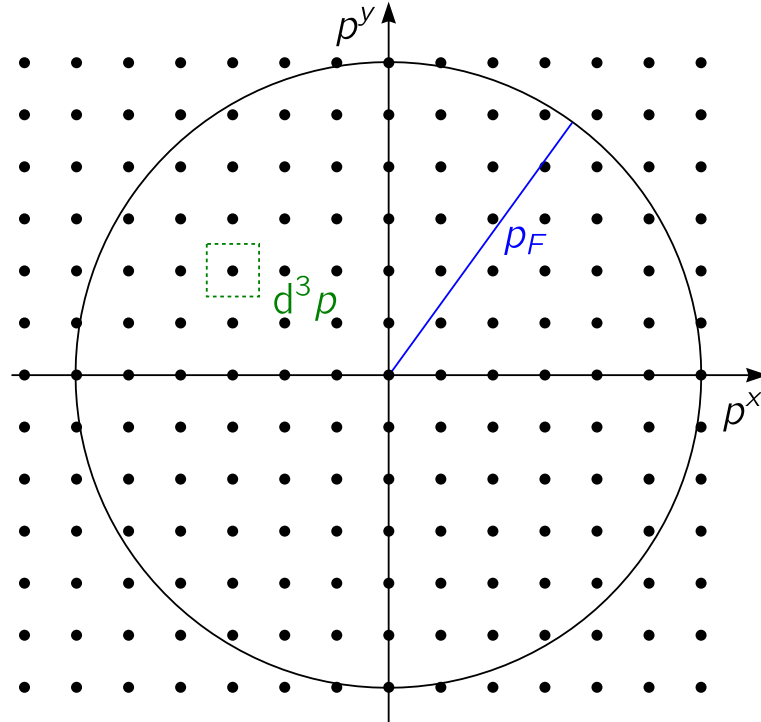


Figura 4: Espaço de momento com o momento de Fermi p_F .

densidade, mas não para a pressão, porque eles não são degenerados. Vamos primeiro descobrir a relação entre a densidade ρ e a densidade numérica de elétrons n_e . Se X for a fração de massa de hidrogênio, então a densidade numérica dos átomos de hidrogênio (que são ionizados e não existem mais na forma atômica) é $X\rho/m_H$ [7]. Esses átomos contribuem com $X\rho/m_H$ elétrons por unidade de volume. Um átomo de hélio tem massa atômica⁷ 4 e contribui com 2 elétrons, ou seja, o número de elétrons contribuídos é de 0,5 por unidade de massa atômica. Também para átomos mais pesados, o número de elétrons contribuídos é geralmente muito próximo de 0,5 por unidade de massa atômica. Em outras palavras, para hélio e átomos mais pesados que o hélio, o número de elétrons é a metade do número de núcleons [3]. Em uma unidade de volume de matéria estelar, esses átomos fornecem uma massa $(1 - X)\rho$, que corresponde a $(1 - X)\rho/m_H$ núcleons. Existem $(1 - X)\rho/2m_H$ elétrons correspondentes. Portanto, a densidade do número de elétrons é dada por

$$n_e = \frac{X\rho}{m_H} + \frac{(1 - X)\rho}{2m_H} = \frac{\rho}{2m_H}(1 + X). \quad (2.28)$$

Nós escrevemos isso na forma

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_H}, \quad (2.29)$$

onde μ_e é o peso molecular médio dos elétrons dado por

$$\mu_e = \frac{2}{1 + X}. \quad (2.30)$$

De (2.24) e (2.29), segue-se que o momento de Fermi p_F é dado por

$$p_F = \left(\frac{3h^3\rho}{8\pi\mu_e m_H} \right)^{1/3}. \quad (2.31)$$

Ao avaliar a integral (2.27) com esta expressão de p_F , obtemos a equação de estado relacionando P e ρ . Aqui, vamos considerar apenas os dois casos extremos, em que os elétrons são não relativísticos e ultra-relativísticos, respectivamente [7].

Quando os elétrons são não relativísticos, podemos escrever

$$\sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} \approx m_e c^2 \quad (2.32)$$

de modo que (2.27) dá

$$P = \frac{8\pi}{15h^3 m_e} p_F^5. \quad (2.33)$$

Ao substituir de (2.31), temos

$$P = K_1 \rho^{5/3}, \quad (2.34)$$

onde K_1 é dado por

$$K_1 = \frac{3^{2/3}}{20\pi^{2/3}} \frac{h^2}{m_e m_H^{5/3} \mu_e^{5/3}} = \frac{1,00 \times 10^7}{\mu_e^{5/3}} \quad (2.35)$$

se usarmos unidades SI. A equação de estado não relativística acima para elétrons degenerados foi derivada por Fowler (1926) [11], que foi a primeira pessoa a perceber que a

⁷A unidade da massa atômica, simbolizada por u, é igual a 1.66054×10^{-24} g. É obtida tomando 1/12 da massa de um átomo de carbono 12, que tem 6 prótons, 6 nêutrons e 6 elétrons. Assim, 1 u é aproximadamente a massa de um próton ou de um nêutron.

gravidade dentro de uma anã branca deve ser equilibrada pela pressão de degenerescência de elétrons.

Quando os elétrons são ultra-relativísticos, podemos escrever

$$\sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} \approx pc \quad (2.36)$$

de modo que (2.27) dá

$$P = \frac{2\pi c}{3h^3} p_F^4. \quad (2.37)$$

Ao substituir de (2.31), temos

$$P = K_2 \rho^{4/3}, \quad (2.38)$$

onde K_2 é dado por

$$K_2 = \frac{3^{1/3}}{8\pi^{1/3}} \frac{hc}{m_H^{4/3} \mu_e^{4/3}} = \frac{1,24 \times 10^{10}}{\mu_e^{4/3}} \quad (2.39)$$

se usarmos unidades SI.

Temos agora (2.34) e (2.38) fornecendo os dois limites extremos da equação de estado da matéria estelar degenerada, enquanto a equação de estado do gás ideal é dada por (2.23). É importante saber qual equação de estado deve ser usada em cada caso [6]. Para uma combinação particular de ρ e T , uma das expressões (2.23), (2.34) ou (2.38) seria a mais apropriada.

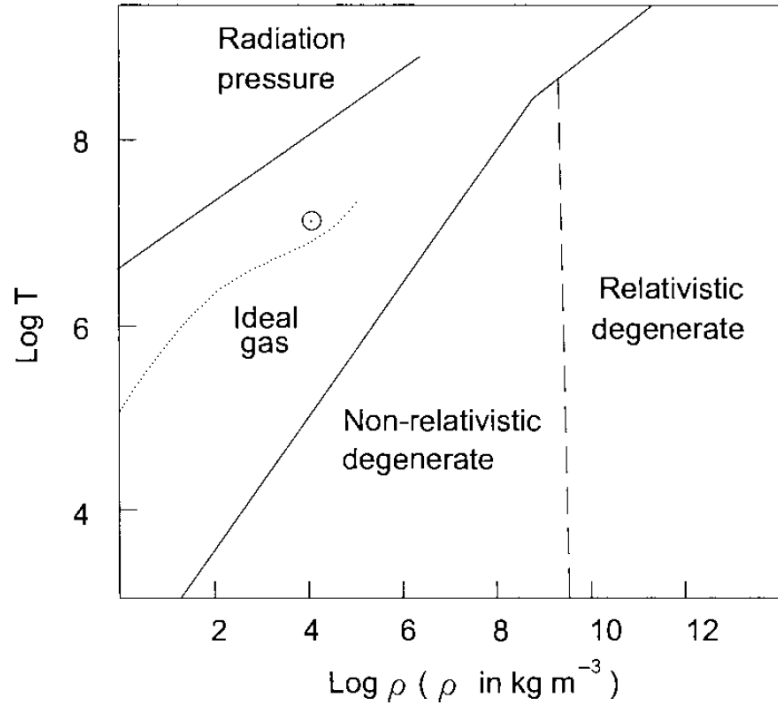


Figura 5: Diferentes regiões em um gráfico de densidade-temperatura em que diferentes equações de estado são válidas.

Em outras palavras, se fizermos um diagrama plotando T versus ρ , regimes onde diferentes expressões de pressão devem ser usadas corresponderiam a diferentes regiões neste diagrama. Em uma fronteira entre duas dessas regiões no gráfico T versus ρ , as duas expressões diferentes para a pressão válida nos dois lados da fronteira devem fornecer o mesmo valor [7]. A Figura 5 (adaptada de [12], p. 130) mostra o diagrama assim

construído, indicando as regiões de validade da equação de estado dos gases ideais (2.23), da equação de estado degenerada não relativística (2.34) e da equação de estado ultra-relativística (2.38). A radiação de corpo negro na temperatura T exerce a pressão de $(1/3)a_B T^4$ e isso também deve ser incluído em um tratamento completo. A Figura 5 também indica a região onde a pressão de radiação será a pressão dominante. A linha pontilhada corresponde à variação da temperatura e densidade dentro do Sol, indicando que a equação de estado do gás ideal é completamente adequada para lidar com estrelas como o Sol.

2.3.2 Estrutura das Anãs Brancas e o Limite de Massa de Chandrasekhar

Encontramos a equação de estado da matéria degenerada que relaciona pressão com densidade. Suponha que agora queiramos calcular a estrutura de uma estrela inteiramente feita de matéria degenerada. As equações (2.18) e (2.19) sozinhas são suficientes para formular o problema completamente se P for conhecido como uma função de ρ sozinho. Das três variáveis desconhecidas ρ , P e M_r que aparecem nessas duas equações, uma não é mais independente e as outras duas podem ser obtidas resolvendo essas duas equações. As duas equações restantes da estrutura estelar, (2.20) e (2.21), tornam-se redundantes [3]. Construir o modelo de uma estrela feita de matéria degenerada é, portanto, um problema matematicamente mais simples do que o problema de construir o modelo de uma estrela típica. Podemos combinar (2.18) e (2.19) em uma única equação, eliminando M_r :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho. \quad (2.40)$$

Dada uma equação de estado da forma $P(\rho)$, podemos integrar facilmente (2.40) [7].

As duas equações de estado limitantes (2.34) e (2.38) são ambas da forma

$$P = K \rho^{(1+\frac{1}{n})} \quad (2.41)$$

com n igual a $3/2$ e 3 respectivamente para os casos não relativísticos e ultra-relativísticos. Uma relação como (2.41) entre densidade e pressão é chamada de relação politrópica⁸. Agora escrevemos a densidade dentro da estrela na forma

$$\rho = \rho_c \theta^n, \quad (2.42)$$

onde ρ_c é a densidade no centro da estrela e θ é uma nova variável adimensional que vale 1 no centro. Substituindo (2.42) em (2.41), obtemos

$$P = K \rho_c^{\frac{n+1}{n}} \theta^{n+1}. \quad (2.43)$$

Também introduzimos outra variável adimensional ξ através de

$$r = a \xi, \quad (2.44)$$

onde a , definido como

$$a := \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} \right]^{1/2}, \quad (2.45)$$

⁸Politrópica significa muitas formas. Isso significa que uma expressão politrópica representa muitas formas diferentes, e não apenas um caso específico.

tem a dimensão do comprimento. Ao usar (2.42), (2.43), (2.44) e (2.45), a equação da estrutura básica (2.40) se reduz a

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n, \quad (2.46)$$

que é conhecida como a equação de Lane-Emden (Homer Lane, 1869; Emden, 1907). Se o material dentro de uma estrela satisfaz a relação politrópica, a estrutura da estrela pode ser encontrada resolvendo a equação de Lane-Emden [6]. Dado a natureza da equação, duas condições iniciais são necessárias para o prosseguimento da análise dessa equação. As condições são

$$\theta(\xi = 0) = 1 \quad (2.47)$$

e

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=0} = 0. \quad (2.48)$$

Precisamos agora resolver a equação de Lane-Emden (2.46) sujeita às duas condições iniciais (2.47) e (2.48). É possível encontrar soluções analíticas se n tiver os valores 0, 1 ou 5. Resolver a equação de Lane-Emden numericamente para outros valores de n é bastante simples. Se n for menor que 5, então θ cai para zero para um valor finito de ξ , que denotamos por ξ_1 . A interpretação disso é que esse valor corresponde à superfície da estrela, onde a densidade e a pressão dadas por (2.42) e (2.43) têm que ir a zero.

É possível tirar conclusões importantes sem realmente resolver a equação de Lane-Emden [7]. Começaremos supondo que um dado grupo de estrelas feitas de matéria satisfaz a equação de estado politrópica (2.41) com um valor particular de n . Diferentes estrelas neste grupo terão diferentes valores de ρ_c . Esperamos que uma estrela com um valor particular de ρ_c tenha um valor particular de raio R e um valor particular de massa M . Agora queremos descobrir como ρ_c , R e M estão relacionados entre si entre as estrelas do nosso grupo. Se ξ_1 é o valor de ξ onde θ vai para zero, então o raio físico da estrela é dado por

$$R = a\xi_1. \quad (2.49)$$

Olhando para a expressão de a dada por (2.45), concluímos que

$$R \propto \rho_c^{\frac{1-n}{2n}}, \quad (2.50)$$

uma vez que todas as outras quantidades que aparecem na expressão de R são as mesmas para todos os membros de nosso grupo de estrelas [7]. A massa da estrela é dada por

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi. \quad (2.51)$$

Novamente, a integral $\int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi$ vai ser a mesma (para cada n) para todos os membros em nosso grupo de estrelas. Observando a dependência de a em ρ_c , encontramos

$$M \propto \left(\rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \right)^3 \rho_c, \quad (2.52)$$

ou seja,

$$M \propto \rho_c^{\frac{3-n}{2n}}. \quad (2.53)$$

Notamos que $n = 3/2$ substituído em (2.41) dá a equação de estado não relativística (2.34). Ao colocar $n = 3/2$ em (2.50) e (2.53), obtemos

$$R \propto \rho_c^{-1/6}, \quad M \propto \rho_c^{1/2}, \quad (2.54)$$

que se combinam para dar

$$R \propto M^{-1/3}. \quad (2.55)$$

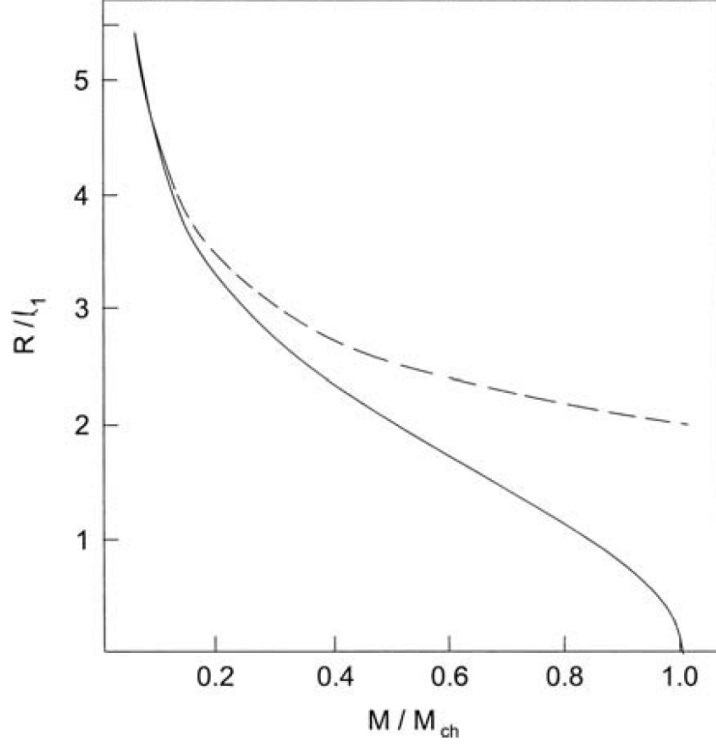


Figura 6: A variação do raio com a massa para anãs brancas. A curva sólida corresponde à solução completa, onde a curva tracejada é obtida por meio da equação de estado não relativística (2.34). A unidade de raio l_1 usada no eixo vertical é definida na equação (2.57).

Esta é a relação massa-raio muito importante das anãs brancas, dentro da qual a matéria satisfaz a equação de estado não relativística (2.34). A linha tracejada na Figura 6 (adaptada de [13]) mostra como o raio varia com a massa quando (2.34) é usado para resolver a estrutura da anã branca [6]. É claro que as anãs brancas de massa crescente são menores em tamanho.

Precisamos agora considerar o caso da equação relativística de estado (2.38), que segue de (2.41) ao tomar $n = 3$. Um resultado muito surpreendente é que a massa M torna-se independente de ρ_c ao substituir $n = 3$ em (2.53). Em outras palavras, a massa de uma estrela que obedece à equação de estado relativística (2.38) tem um valor fixo e pode ser obtida em (2.51) [7]. Multiplicando (2.46) por ξ^2 e integrando de $\xi = 0$ a $\xi = \xi_1$, obtemos

$$\int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^3 d\xi = -\xi_1^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}. \quad (2.56)$$

Para definir l_1 , unidade usada para compor o eixo da Figura 6, usaremos a equação (46) da referência [13], que é:

$$l_1 = \frac{1}{B} \left(\frac{2A}{\pi G} \right)^{1/2}, \quad (2.57)$$

onde

$$A = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} \quad \text{e} \quad B = \frac{8\pi m^3 c^3 \mu_e H}{3h^3}, \quad (2.58)$$

que por sua vez H é definido em [13].

A integral em (2.51) pode então ser substituída por $|\xi_1^2 \theta'(\xi_1)|$, onde a plica denota diferenciação em relação a ξ . Além disso, substituímos a expressão de a dada por (2.45) em (2.51) e, em seguida, colocamos a expressão (2.39) no lugar de K [7]. Isso finalmente nos dá a massa de estrelas neste regime na forma:

$$M_{\text{Ch}} = \frac{\sqrt{6}}{32\pi} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^2 \frac{\xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|}{m_H^2}. \quad (2.59)$$

Resolvendo numericamente a equação de Lane-Emden para $n = 3$, encontramos $\xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2,018$. Substituindo os valores de outras quantidades em (2.59), encontramos

$$M_{\text{Ch}} = 1,46 \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^2 M_{\odot}. \quad (2.60)$$

Chegamos à conclusão de que apenas esse valor fixo de massa é possível se o material estelar satisfaz exatamente a equação de estado relativística (2.38). Essa massa fixa M_{Ch} é considerada a unidade de massa no eixo horizontal da Figura 6. Para entender o que está acontecendo, temos que considerar a equação de estado completa decorrente de (2.27) em vez de considerar os limites não relativísticos e ultra-relativísticos [7]. Usando esta equação de estado em (2.40), pode-se descobrir a variação do raio com a massa. A curva sólida na Figura 6 indica os resultados que obtemos usando a equação de estado completa. Para anãs brancas de massas menores (que também têm tamanhos maiores), a densidade interna não é tão alta e o limite não relativístico da equação de estado se mantém. Portanto, a curva sólida coincide com a curva tracejada não relativística no lado esquerdo da figura. Para massas crescentes e densidades interiores maiores, o momento de Fermi p_F começa a se tornar maior como visto em (2.31) [3]. Quando $p_{FC} \approx m_e c^2$, os efeitos relativísticos tornam-se importantes e a curva tracejada desvia da curva sólida. Ao comparar (2.34) e (2.38), descobrimos que os efeitos relativísticos tornam a equação de estado “mais suave”, ou seja, a pressão não aumenta com a densidade tão rapidamente como no caso não relativístico. Isso se deve ao fato de que as velocidades das partículas saturam em c e a pressão, que resulta dos movimentos aleatórios das partículas, não pode aumentar com a densidade tão rapidamente quanto aumentava antes da saturação [6]. Matéria com uma equação de estado mais suave é menos eficiente em neutralizar a gravidade. A massa M_{Ch} correspondente ao limite relativístico da equação de estado é a massa limite para a qual o raio vai a zero. Este é o *limite de massa de Chandrasekhar* [14]. É a maior massa para uma anã branca.

Anãs brancas geralmente se formam a partir do núcleo de estrelas nas quais o hidrogênio foi completamente queimado para produzir hélio (e elementos superiores em algumas circunstâncias). Se a fração de massa do hidrogênio $X \approx 0$, segue de (2.30) que $\mu_e \approx 2$. Portanto, (2.60) implica que o limite de massa de Chandrasekhar deve ser em torno de $1,4 M_{\odot}$ [7]. Vê-se na Figura 5 que a equação de estado começa a se tornar

relativística quando a densidade é da ordem de 10^9 kgm^{-3} . Isso pode ser considerado a densidade típica dentro de uma anã branca. Se a massa é da ordem de 10^{30} kg , o raio deve ser de cerca de $10^7 \text{ m} \approx 10^4 \text{ km}$. Este é realmente o tamanho típico de uma anã branca [1].

2.3.3 O Gotejamento de Nêutrons e Estrelas de Nêutrons

Assim como a pressão de degenerescência dos elétrons sustenta uma anã branca contra a gravidade, a pressão de degenerescência dos nêutrons sustenta uma estrela de nêutrons [7]. Ao contrário dos prótons, os nêutrons são eletricamente neutros e, portanto, muitos nêutrons podem ser reunidos sem serem interrompidos pela repulsão eletrostática. No entanto, os nêutrons são conhecidos por decair de acordo com a reação

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu} \quad (2.61)$$

com meia-vida de cerca de 13 minutos, em que $\bar{\nu}$ é um anti-neutrino sendo uma partícula muito leve e elusiva [3]. Uma reação reversa também é, em princípio, possível:

$$p + e \rightarrow n + \nu, \quad (2.62)$$

em que ν é um neutrino.

Como a massa do nêutron é maior do que a massa combinada de um próton e um elétron, a reação (2.62) só pode ocorrer se alguma energia for fornecida para compensar esse déficit de massa. Portanto, em circunstâncias laboratoriais normais, (2.62) é uma reação improvável e os nêutrons livres decaem seguindo (2.61).

Quando a matéria é comprimida em densidades muito altas, as coisas mudam drasticamente. Os elétrons se degeneram com o aumento da densidade, enquanto as outras partículas mais pesadas ainda permanecem não degeneradas [3]. Sabemos que todos os níveis são preenchidos até o momento de Fermi p_F , que está relacionado com a densidade numérica n_e dos elétrons por (2.24). Seja

$$E_F = \sqrt{p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4} \quad (2.63)$$

a energia de Fermi associada a este momento de Fermi p_F . A menos que uma energia $E_F - m_e c^2$ seja adicionada a um elétron, não é possível colocar o elétron na região de alta densidade, uma vez que todos os estados de menor energia são preenchidos [3]. Esse excesso de energia necessária torna-se igual ou maior que $(m_n - m_p - m_e)c^2$, a quantidade pela qual a massa do nêutron excede a soma da massa do próton e da massa do elétron. Nesta situação, será energeticamente favorável para o elétron se combinar com um próton para produzir um nêutron, de acordo com (2.62), ao invés de existir como um elétron livre (assumindo que os nêutrons são não degenerados e um nêutron pode ser criado no estado de energia mais baixa). A condição para esta situação crítica é

$$\sqrt{p_{F,c}^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 = (m_n - m_p - m_e)c^2, \quad (2.64)$$

onde $p_{F,c}$ é o momento crítico de Fermi. Deste

$$m_e c^2 \left(1 + \frac{p_{F,c}^2}{m_e^2 c^2} \right)^{1/2} = Q c^2, \quad (2.65)$$

onde $Q = m_n - m_p$. Esta equação pode ser lançada da seguinte forma para dar o momento crítico de Fermi:

$$P_{F,c} = m_e c \left[\left(\frac{Q}{m_e} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (2.66)$$

Como o momento de Fermi aumenta com a densidade, esperamos que o momento de Fermi seja menor que $p_{F,c}$ quando a densidade está abaixo de uma densidade crítica. Nesta situação, os elétrons livres são energeticamente favorecidos e não esperamos que nenhum nêutron esteja presente, pois eles decairiam de acordo com (2.61). A densidade crítica, na qual o momento de Fermi torna-se igual a $p_{F,c}$, pode ser obtida colocando os valores das constantes fundamentais em (2.66) para obter $p_{F,c}$, então obtendo n_e com a ajuda de (2.24) e multiplicando n_e por $m_p + m_e$ (uma vez que apenas prótons e elétrons estão presentes abaixo da densidade crítica) [3]. Isto dá

$$\rho_c = 1,2 \times 10^{10} \text{ kgm}^{-3}. \quad (2.67)$$

Quando a densidade é maior do que isso, os elétrons começam a se combinar com os prótons para gerar nêutrons (e neutrinos). Este fenômeno é chamado de *gotejamento de nêutrons*. Em densidades bem acima da densidade crítica, a matéria consistiria principalmente de nêutrons [7]. Esses nêutrons não decaem de acordo com (2.61) que agora está completamente suprimido, uma vez que não há estados livres para o elétron produzido ocupar (abaixo do nível muito alto de Fermi).

Apresentamos acima um cálculo simplificado do gotejamento de nêutrons sem considerar a possível formação de núcleos. Quando a existência de núcleos é levada em consideração, o cálculo se torna muito mais difícil. Ao fazer várias suposições razoáveis, o valor mais realista da densidade crítica para gotejamento de nêutrons é de $3.2 \times 10^{14} \text{ kgm}^{-3}$. Estritamente falando, o termo “gotejamento de nêutrons” se refere a nêutrons saindo dos núcleos quando a densidade é elevada acima da densidade crítica.

Se um núcleo estelar for comprimido por algum meio além da densidade necessária para o gotejamento de nêutrons, o núcleo consistirá essencialmente de nêutrons [6]. Como os nêutrons são partículas de Fermi como os elétrons e obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, os nêutrons também podem originar uma pressão de degenerescência. Ao derivar a pressão de degenerescência devido aos elétrons, usamos a estatística de Fermi-Dirac, que assume que as partículas não estão interagindo. Esta não é uma suposição tão ruim para o gás de elétrons dentro de uma anã branca [6]. No entanto, quando os nêutrons são compactados em densidades próximas à densidade dentro de um núcleo atômico (que é o caso no interior das estrelas de nêutrons), os nêutrons vizinhos interagem entre si por meio de forças nucleares e não se justifica mais tratá-los como partículas que não interagem. Consequentemente, encontrar uma equação de estado precisa para a matéria em densidades tão altas é muito difícil e o assunto ainda não está em uma posição muito firme. Como o limite de Chandrasekhar das anãs brancas, as estrelas de nêutrons também têm um limite de massa. No entanto, esse limite de massa não é conhecido com muita precisão devido à incerteza em nosso conhecimento da equação de estado [7]. Pode-se obter um limite teórico absoluto exigindo que a equação de estado não seja tão rígida a ponto de que a velocidade do som seja maior do que a velocidade da luz. Embora este limite teórico absoluto da massa da estrela de nêutrons seja de $3,2 M_\odot$, acredita-se que o limite de massa real seja um pouco menor do que isso e provavelmente em torno de $2 M_\odot$.

Cálculos detalhados sugerem que uma estrela de nêutrons normalmente tem um raio da ordem de 10 km e densidade interna próxima a 10^{18} kgm^{-3} . A relatividade geral pode ser desprezada se o fator $2GM/c^2 r$ for pequeno em comparação com 1. Para uma estrela

de nêutrons de massa $1 M_{\odot}$ e raio de 10 km, esse fator é tão grande quanto 0,3. Consequentemente, os efeitos da relatividade geral não podem ser negligenciados em um cálculo rigoroso.

Essas correções da relatividade geral nos dá uma nova versão de (2.19), a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov, dada por

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho \left(1 + \frac{P}{\rho c^2} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{M_r c^2} \right) \left(1 - \frac{2GM_r}{rc^2} \right)^{-1}. \quad (2.68)$$

Aqui a equação de TOV é usada apenas como uma ferramenta, motivo para que a derivação não receba grande atenção neste trabalho. Uma derivação da equação de TOV a partir da relatividade geral está anexada em B. Para resolver a equação de TOV usando Python (linhas 28, 29 e 30 do código em A.2) será útil reescrevê-la na forma:

$$\frac{dP}{dr} = -G(\rho(r) + P/c^2) \frac{M_r + 4\pi r^3 P/c^2}{r(r - 2GM_r/c^2)}; \quad (2.69a)$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho; \quad (2.69b)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{M_r + 4\pi r^3 P/c^2}{r(r - 2GM_r/c^2)}. \quad (2.69c)$$

3 SOLUÇÕES

A força que neutraliza a gravidade em anãs brancas é a pressão do gás de elétrons degenerado. A força da gravidade comprime a matéria com tanta força que os elétrons são forçados a ocupar todos os níveis de energia mais baixos. Devido ao princípio de exclusão de Pauli, apenas dois elétrons podem ocupar um nível de energia e, assim, criam a pressão para fora, a fim de preencher todos os estados disponíveis; esta pressão quântica neutraliza a gravidade e a anã branca é estável. Como vimos anteriormente, para estrelas densas como anãs brancas e estrelas de nêutrons a pressão se torna função da densidade diminuindo o número de variáveis independentes.

3.1 Soluções Para Uma Estrela Anã Branca

Partiremos do procedimento para soluções de anãs brancas feito na [seção 2.3.2](#). Assim chegamos à equação de Lane-Emden:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n. \quad (3.1)$$

Como esta é uma equação de segunda ordem, precisamos de duas condições iniciais para resolvê-la. Uma condição limite é

$$\theta(\xi = 0) = 1. \quad (3.2)$$

Soluções analíticas são exprimíveis por séries de potências convergentes expandidas em torno de algum ponto inicial. Normalmente, o ponto de expansão é $\xi = 0$, que também é um ponto singular (singularidade fixa) da equação, e são fornecidos alguns dados iniciais $\theta(0)$ no centro da estrela. O raio de convergência desta série é limitado devido à existência de duas singularidades no eixo imaginário no plano complexo. Essas singularidades estão localizadas simetricamente em relação à origem. Sua posição muda quando alteramos os parâmetros da equação e a condição inicial $\theta(0)$, e por isso são chamadas de singularidades móveis devido à classificação das singularidades de equações diferenciais ordinárias não lineares no plano complexo por Paul Painlevé⁹.

A outra condição de contorno vem da consideração de que não queremos uma singularidade na densidade no centro da estrela, o que implica

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=0} = 0. \quad (3.3)$$

Esta é a abordagem padrão para compreender as estruturas das anãs brancas.

A análise da equação de Lane-Emden fornece vários resultados úteis, como o raio da estrela e relações raio-densidade e raio-massa. Resolveremos analiticamente usando o sistema computacional **Mathematica** para $n = 0$, $n = 1$ e $n = 5$.

Para $n = 0$, $n = 1$ e $n = 5$ temos, respectivamente, as soluções $\theta(\xi) = \frac{1}{6}(6 - \xi^2)$, $\theta(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi}$ e $\theta(\xi) = \left(1 + \frac{1}{3}\xi^2\right)^{-1/2}$, com os correspondentes gráficos nas Figuras 7, 8 e 9.

Conforme mencionado anteriormente, o raio físico da estrela é dado por $R = a\xi_1$, onde ξ_1 é o valor de ξ quando $\theta(\xi) = 0$. Para $n = 0$ encontramos $\xi_1 = \sqrt{6}$. Para $n = 1$

⁹Uma estrutura de singularidades semelhante aparece em outras equações não lineares que resultam da redução do operador de Laplace na simetria esférica, por exemplo, equação da Esfera Isotérmica.

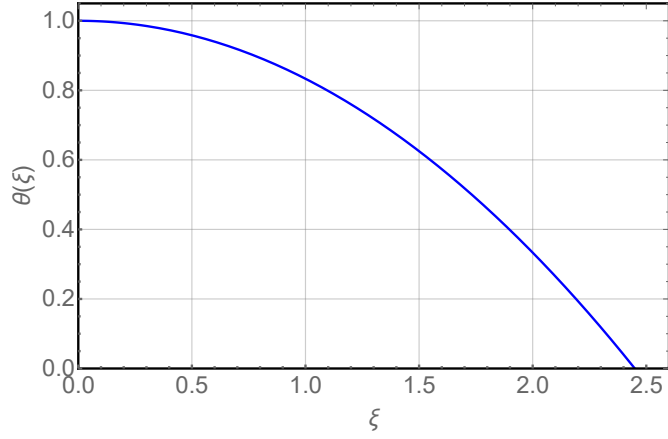


Figura 7: Solução analítica da equação de Lane-Emden para $n = 0$.

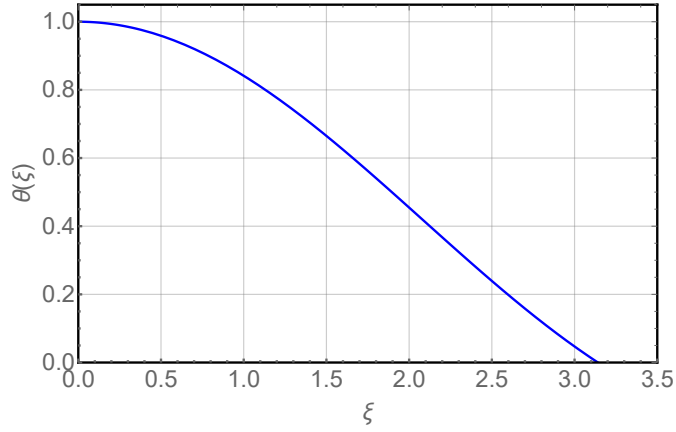


Figura 8: Solução analítica da equação de Lane-Emden para $n = 1$.

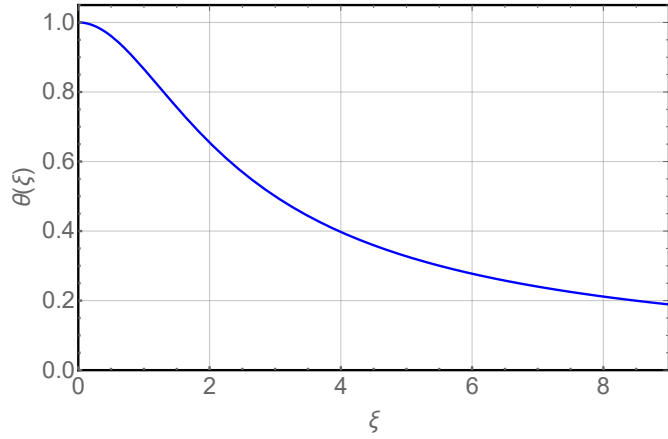


Figura 9: Solução analítica da equação de Lane-Emden para $n = 5$.

encontramos $\xi_1 = \pi$. Para $n = 5$ não existe ξ_1 , pois

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3}\xi^2\right)^{-1/2} = 0. \quad (3.4)$$

Desse último resultado concluímos que para modelagem física, como as estrelas têm raio finito, o valor de n deve ser menor que 5, e os casos com $n < 5$, com exceção de $n = 0$ e $n = 1$, devem ser resolvidos numericamente.

3.2 Soluções Para Uma Estrela de Nêutrons

Para estrelas de nêutrons usamos as equações (2.68) (equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov, a TOV) e (2.18).

Para resolver a equação de TOV, precisamos de duas condições iniciais. Uma delas é intuitiva: a massa no centro da estrela deve ser zero, $m(0) = 0$. A segunda condição inicial é $\rho(0) = \rho_c$, onde ρ_c é a pressão no centro. Por não conhecermos a pressão central, a solução da equação TOV deveria ser parametrizada por ρ_c . Assim a variação de ρ_c daria diferentes massas e raios da estrela. Com o **Mathematica**, podemos resolver equações diferenciais acopladas usando a função integrada **NDSolve**. Resolver a equação TOV nos dá $\rho(r)$ e $M(r)$, onde r é a distância ao centro da estrela. O raio R da estrela é definido como a distância ao centro onde a pressão se torna zero, $\rho(R) = 0$, e a massa da estrela é definida como $M = M(R)$. Se resolvermos as equações (2.68) e (2.18) para valores sucessivos ρ_c , podemos encontrar aproximações do raio e da massa da estrela como funções de ρ_c . Essas funções podem ser usadas para encontrar uma relação entre a massa de uma estrela e seu raio. Faremos esse procedimento a seguir considerando um modelo estelar com raio de 13 km, usando Python.

Partiremos de um determinado ρ_c usado de forma auxiliar para obtenção das soluções, e por isso os dados nos eixos podem não representar tão bem os dados observados para uma estrela em específico. Entretanto, antes da solução da equação de TOV (que tem correções relativísticas) vamos apresentar um resultado a partir das equações obtidas para o cálculo de uma estrela típica (sem correções da relatividade geral, ou seja, usando as equações de (2.18) a (2.21)).

Na Figura 10 temos a pressão versus o raio. Na Figura 11 temos a massa versus o raio.

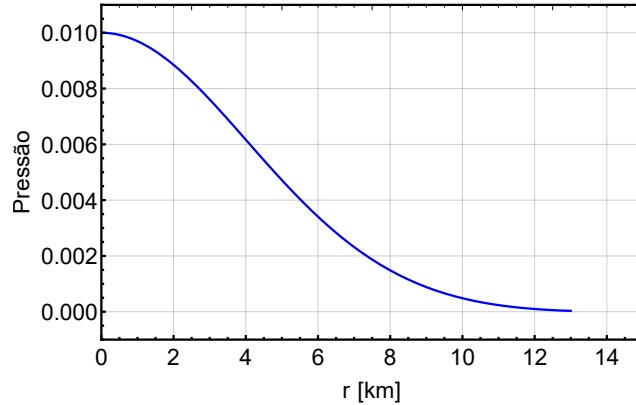


Figura 10: Gráfico P versus r newtoniano para uma estrela de nêutrons.

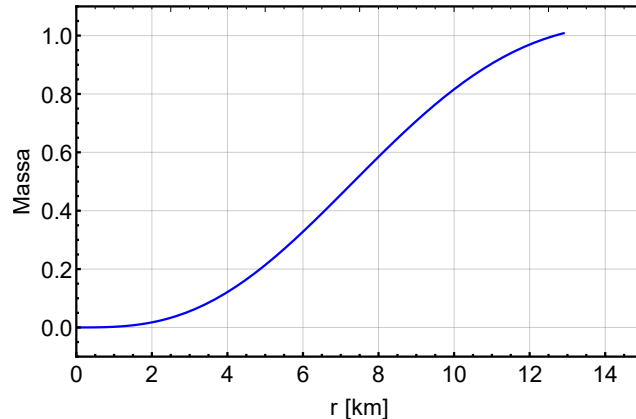


Figura 11: Gráfico M versus r newtoniano para uma estrela de nêutrons.

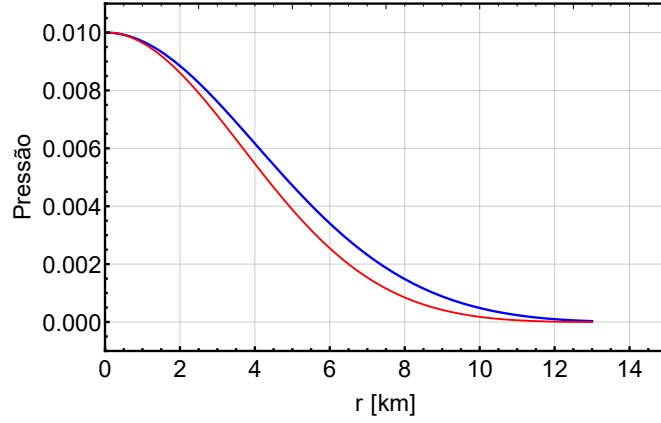


Figura 12: Gráfico P versus r com correções para uma estrela de nêutrons.

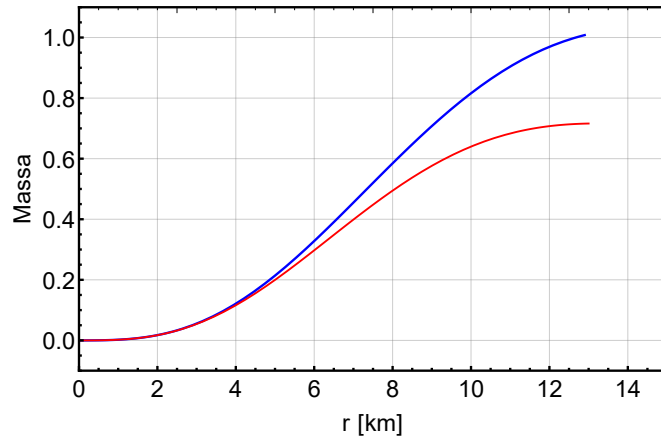


Figura 13: Gráfico M versus r com correções para uma estrela de nêutrons.

Agora consideramos a equação completa de TOV com os três fatores de correções da relatividade geral. Essas soluções serão plotadas em vermelho juntamente com as soluções anteriores para efeito de comparação.

Na Figura 12 temos a pressão versus o raio. Na Figura 13 temos a massa versus o raio. Assim vemos que a diferença entre as soluções são significativas e para estrelas tão densas quanto estrelas de nêutrons as correções da relatividade geral não podem ser negligenciadas.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Anãs Brancas

Usando o Código Python (referenciado em A.1) para resolver numericamente a equação de Lane-Emden para $n \in \{0, 1, 2, \dots, 5\}$, com as mesmas condições iniciais propostas anteriormente, podemos obter a Figura 14, que inclui todas as soluções traçadas simultaneamente, com detalhamento além das soluções analíticas:

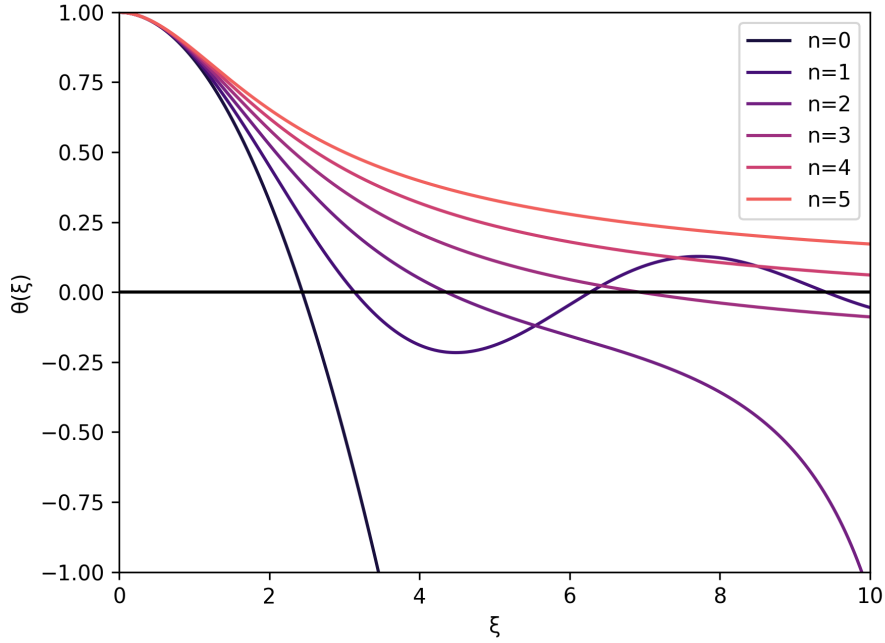


Figura 14: Gráfico $\theta(\xi)$ versus ξ ; soluções numéricas da equação (3.1).

Por não existir uma correspondência imediata entre os eixos da solução da equação de Lane-Emden apresentada e os parâmetros físicos de estrelas anãs brancas, não plotaremos dados reais, como os da Tabela 1.

O tratamento relativístico completo da equação de estado fornece uma representação mais precisa do comportamento da massa em relação à densidade central. O comportamento assintótico da massa à medida que ela tende a M_{Ch} para densidades cada vez maiores não é o que se observa na natureza; quanto a densidades mais altas, os efeitos relativísticos gerais devem ser levados em consideração, dando origem às equações TOV de estrutura estelar. No entanto, na faixa de densidade de anãs brancas gravitacionalmente estáveis, os efeitos relativísticos gerais introduzem pequenas mudanças que podem ser negligenciadas. Além disso, correções devido à interação eletrostática (Coulomb) entre os íons e os elétrons podem ser introduzidas na equação de estado de férmions para obter uma curva ainda mais precisa [15].

Este efeito deriva da distribuição local não uniforme de carga, de modo que a carga positiva é concentrada em íons, o que faz com que a separação elétron-íon média seja menor do que a entre os elétrons. Os elétrons sentem assim um potencial elétrico atrativo que reduz a pressão para uma dada densidade. Outra correção que pode ser introduzida é devido ao decaimento beta inverso para densidades mais altas.

Como foi mencionado, existem outras correções que podem ser incluídas para obter modelos mais realistas. Uma extensão deste estudo poderia incluir as correções decorrentes da interação eletrostática e do decaimento beta inverso, além de incluir núcleos compostos por diferentes elementos. Consideramos estrelas anãs brancas em equilíbrio termodinâmico, o que é outra idealização; as anãs brancas esfriam, principalmente logo após serem formadas, algo que em um modelo mais completo também deveria ser incluir.

4.2 Estrelas de Nêutrons

Usando o Código Python (referenciado em A.2) para resolver numericamente a equação de TOV (na versão das equações (2.69), que são mais adequadas para os algoritmos) com as mesmas condições iniciais propostas anteriormente, podemos obter a Figura 15, que inclui plotes de 100 exemplares de estrelas de nêutrons traçadas simultaneamente:

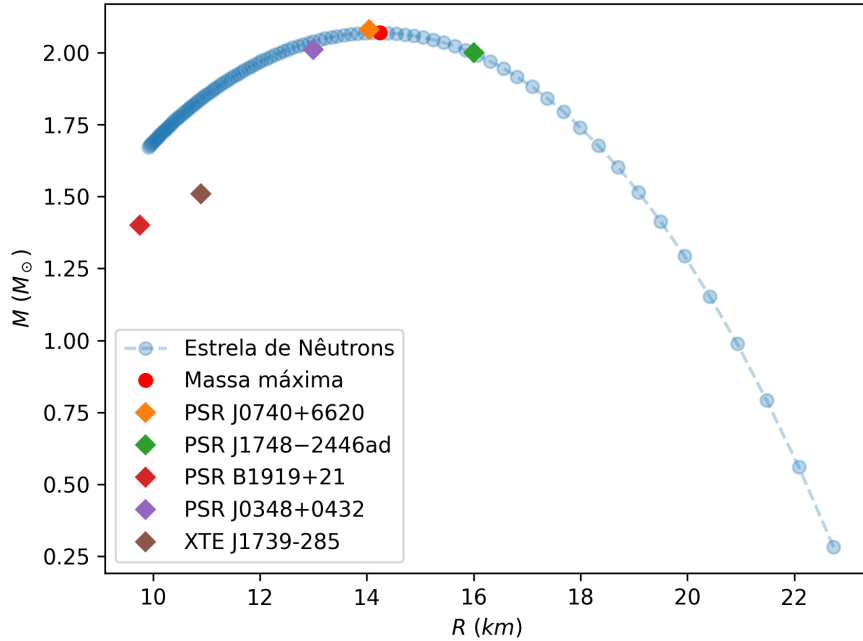


Figura 15: Gráfico TOV e mais estrelas de nêutrons, $M(M_\odot)$ versus $R(\text{km})$; solução numérica.

A solução nesse caso dá uma correspondência imediata entre os eixos do gráfico apresentado e os parâmetros físicos de estrelas de nêutrons, então é útil plotar dados reais, como os da Tabela 2. O razoável ajuste com as estrelas de nêutrons apresentadas mostra que o tratamento a partir da equação de TOV é adequado para estudar estrelas de nêutrons.

As estrelas de nêutrons apresentam uma relação de proporção inversa entre massa e raio a partir de uma determinada região — no modelo apresentado, por volta dos 14 km de raio para mais. Quanto maior a massa da estrela de neutrons, menor seu raio.

Consideramos objetos compactos não rotativos no tratamento relativístico totalmente geral com uma equação de estado. Diferentes correções podem ser incluídas nas equações de estados de estrelas de nêutrons para descrever a matéria dentro do núcleo. Um modelo mais preciso de estrelas de nêutrons pode incluir a rotação. Uma extensão deste estudo poderia incluir a solução para a estrutura de estrelas de nêutrons considerando as correções decorrentes da rotação.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho investigamos a estrutura dos objetos compactos anãs brancas e estrelas de nêutrons. Começamos com um tratamento sobre estrelas típicas que pôde ser estendido às estrelas anãs brancas onde fizemos as considerações sobre a efetividade dessa modelagem e as implementações de correções adicionais. Usando a equação de estado politrópica obtivemos a massa de Chandrasekhar e resultados consistentes com a teoria e observações. Em seguida, tratamos o caso geral relativístico, modelando a estrutura dos objetos compactos com as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff e obtivemos a relação massa-raio para estrelas de nêutrons. Concluimos com uma discussão sobre as aproximações feitas e o que mais pode ser feito para obter um modelo mais realista.

Derivamos as equações que descrevem várias características do sistema estudado, tanto a nível clássico, passando pelas considerações acerca dos fenômenos quânticos expressados por condições extremas de pressão e considerando as correções oriundas da relatividade geral, fazendo com que o entendimento da física das estrelas de nêutrons se desse o mais próximo da realidade, assim como a obtenção de massas máximas para a manutenção da estabilidade dos objetos estudados. Ao solucionar as equações obtidas um maior conhecimento também foi obtido no uso de sistemas computacionais algébricos, principalmente pelo *Mathematica*, e pela programação em Python, usado como ferramenta de pesquisa para soluções numéricas controladas e plotes gráficos.

Além disso, as explicações estruturadas ao longo deste trabalho podem servir de base para um estudo inicial sobre objetos compactos com a perspectiva de motivar futuros trabalhos sobre objetos astrofísicos igualmente interessantes, como buracos negros ou um aprofundamento sobre os tipos de estrelas, ou até mesmo temas diversos dentro do escopo de estudo da astrofísica.

REFERÊNCIAS

- [1] Kepler, S. O. e Saraiva, M. F. O. *Astronomia e Astrofísica*. Departamento de Astronomia - Instituto de Física Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.
- [2] European Space Agency. How many stars are there in the Universe? 2019. Disponível em <<https://www.esa.int/>>. Acesso em: 27 de Novembro de 2019.
- [3] Glendenning, N. K. *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity*. Springer Science & Business Media. 2012.
- [4] Cho, A. A weight limit emerges for neutron stars. *Science*, **359**, 2018.
- [5] Hessels, Jason; Ransom, Scott M.; Stairs, Ingrid H.; Freire, Paulo C. C.; et al. “A Radio Pulsar Spinning at 716 Hz”. *Science*, Volume 311, Issue 5769, pp. 1901-1904 (2006).
- [6] Camenzind, M. *Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes*. Springer Science & Business Media. p. 269, 2007.
- [7] Choudhuri, A. R. *Astrophysics for Physicists*. Cambridge University Press, 2010.
- [8] Schwarzschild, K. 1906, *Nachr. Ges. Wiss. Gött.*, **41**.
- [9] Huchtmeier, W. K. 1975, *Astron. Astrophys.* **45**, 259.
- [10] Ritchie, B. W., Clark, J. S., Negueruela, I. e Langer, N. A VLT/FLAMES survey for massive binaries in Westerlund 1. 2010. *Astronomy & Astrophysics manuscript no.* 14834.
- [11] Fowler, R. H. 1926, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **87**, 114.
- [12] Kippenhahn, R. e Weigert, A. *Stellar Structure and Evolution*. Springer-Verlag. p. 130, 1990.
- [13] Chandrasekhar, S. 1984, *Rev. Mod. Phys.* **56**, 137.
- [14] Chandrasekhar, S. 1931, *Astrophys. J.* **74**, 81.
- [15] Marko Shuntov. *High-Energy Astrophysics: White Dwarfs and Neutron Stars*. 2018, Institut d’astrophysique de Paris. DOI:10.13140/RG.2.2.13518.77121.
- [16] Wolfram Schimdt, Marcel Volschow. *Numerical Python in Astronomy and Astrophysics*. Springer, 2020.
- [17] X. Delfosse, T. Forveille, J.-L. Beuzit, S. Udry, M. Mayor, C. Perrier. New neighbours. I. 13 new companions to nearby M dwarfs. 1999, *Astronomy and Astrophysics*, v.344, p.897-910.
- [18] SIMBAD Astronomical Database. Centre de Données astronomiques de Strasbourg.
- [19] James M. Lattimer. The Nuclear Equation of State and Neutron Star Masses. 2012, *Annual Review of Nuclear and Particle Science*. Vol. 62:485-515.
- [20] Tolman, RC (1934). *Termodinâmica da Relatividade e Cosmologia*. Imprensa Oxford. págs. 243-244.

APÊNDICES

A Códigos em Python

A.1 Solução Numérica da Equação de Lane-Emden

Código da versão padrão[16], usado para plotar a solução numérica da equação (3.1):

```
1 #grafico e solucoes da equacao de Lane-Emden
2 import seaborn as sns
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from matplotlib.pyplot import *
5 sns.set_palette('magma',8)
6
7 dxi=0.01
8 N=1000
9
10 for n in range(6):
11     xi=0.01
12     theta=1.0
13     f1=0.0
14     theta_sol=[]
15     xi_sol=[]
16     for i in range(N):
17         f1+=-xi**2*theta**(n)*dxi
18         theta+=f1/xi**2*dxi
19         xi+=dxi
20         theta_sol.append(theta)
21         xi_sol.append(xi)
22     plot(xi_sol, theta_sol)
23 xlim(0,10)
24 ylim(-1,1)
25 xlabel('\u03BE')
26 ylabel('\u03B8(\u03BE)')
27 plt.gca().legend(('n=0', 'n=1', 'n=2', 'n=3', 'n=4', 'n=5'))
28 axhline(y=0.0,c='black')
29 #salvar grafico em alta resolucao
30 plt.savefig('High resolution.png',dpi=6000)
31 #plote do grafico
32 show()
```

A.2 Solução Numérica da Equação de TOV

Código da solução da equação de TOV[16], usado para plotar a solução numérica das equações (2.69):

```
1 #grafico e solucoes da equacao TOV
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 #Fator de conversao
6 LCGS=1.476701332464468e+05
7
8 def EOS_p2erc(p,K=160.,Gamma=2.): #equacao de estado
```

```

ene=(p/K)**(1./Gamma)+p/(Gamma-1.)
10 rho=(p/K)**(1./Gamma)
cs2=K*Gamma*(Gamma-1)/((Gamma-1+K*Gamma*rho**((Gamma-1))*rho**((Gamma-1))
12 return ene, rho, cs2

14 def EOS_r2pe(rho, K=160., Gamma=2.):#equacao de estado politropica: P = k rho
    ^Gamma
    p=K*rho**Gamma
16 e=rho+p/(Gamma-1.)
    return p, e

18

20 def TOV(t, y):#equacao de Tolmann-Oppenheimer-Volkoff
    r=t
22 #abrir a matriz de estado
    m=y[0] #massa de uma esfera de radio r
24 p=y[1] #pressao
    #chamar a equacao de estado
26 ene, dummy1, dummy2=EOS_p2erc(p)
    #definir o RHS
28 dy=np.empty_like(y)
    dy[0]=4*np.pi*ene*r**2
30 dy[1]=-(ene+p)*(m+4*np.pi*r**3*p)/(r*(r-2*m))
    return dy

32

34 def found_radius(t, y, pfloor=0.):#Funcao de evento: zero de pressao.
    Controle de integracao da EDO, e parado quando esta funcao retorna true
    return ((y[1]-pfloor)<=0.)

36

def solve_ode_euler(t, y0, dydt_fun, stop_event=None, verbose=False):#Algoritmo
    de Euler para solucao de EDO. Retorna apenas o ultimo ponto, a solucao
    nao e armazenada
38 N=len(t)
    dt=np.diff(t)[0]
40 y=y0
    for i in range(N):
42         yprev=np.copy(y)
         y+=dt*dydt_fun(t[i], y)
44         if verbose: print(t[i], y)
         if stop_event:
46             if bool(stop_event(t[i], y)):
                 print('Event reached.')
48                 return t[i-1], yprev
         if stop_event: print('No event reached')
50     return t[i], y

52 rmin, rmax=1e-6, 20.
N=2000 #numero de pontos entre rmin e rmax
54 rspan=np.linspace(rmin, rmax, N)

56 rho0=1.28e-3 #Densidade de massa de repouso central (maxima)
p0, e0=EOS_r2pe(rho0)
58 m0=4./3.*np.pi*e0*rmin**3
sol0=[m0, p0]

60 t, sol=solve_ode_euler(rspan, sol0, TOV, stop_event=found_radius, verbose=True)
62

```

```

#obtem a massa e raio
64 R=t*LCGS*1e-5 #km
M=sol[0] #Msol
66 pmin=sol[1]
print(pmin,R,M)
68
def set_initial_conditions(rho,rmin):#rotina para definir os dados iniciais
70     p,e=EOS_r2pe(rho)
        m=4./3.*np.pi*e*rmin**3
72     return m,p

74 #Construir modelo de 100 estrelas
rhospan = np.linspace(0.6e-4,7e-3,100)
76 R=[]
M=[]
78
for rho0 in rhospan:#Resolver a TOV para rho0
80     sol0=set_initial_conditions(rho0,rmin)
        t,sol=solve_ode_euler(rspan,sol0,TOV,stop_event=found_radius)
82     R.append(t)
        M.append(sol[0])
84
M=np.array(M)
86 R=np.array(R)

88 #Encontrar o indice da estrela maxima
immax=np.argmax(M)
90 Mmax=M[immax]
Rmax=R[immax]
92 print(immax,Mmax,Rmax)

94 km=LCGS*1e-5
fig=plt.figure()
96 ax=plt.subplot(111)
#pontos e estrelas notaveis
98 plt.plot(R*km,M,'o—',label='Estrela de Neutrons',alpha=0.3)
plt.plot(Rmax*km,Mmax,'ro',label='Massa maxima')
100 plt.plot(14.05,2.08,'D',label='PSR J0740+6620')
plt.plot(16,2,'D',label='PSR J1748-2446ad')
102 plt.plot(9.75,1.4,'D',label='PSR B1919+21')
plt.plot(13,2.01,'D',label='PSR J0348+0432')
104 plt.plot(10.9,1.51,'D',label='XTE J1739-285')
ax.legend()
106 plt.xlabel('$R$ (km)')
plt.ylabel('$M$ (M_\odot)')
108 #salvar grafico em alta resolucao
plt.savefig('High resolution.png',dpi=3000)
110 #plote do grafico
plt.show()

```

ANEXOS

A Tabelas

A.1 Anãs Brancas

Tabela usada na [seção 2.1.2](#):

Objeto	Massa ($M_{\odot}$)	Raio ($R_{\odot}$)	Referência
Sirius B	$1.018^{+0.011}_{-0.011}$	0.0084	[17]
Procyon B	$0.602^{+0.015}_{-0.015}$	0.01234	
Van Maanen 2	$0.67^{+0.01}_{-0.01}$	0.0138	
LP 145-141	$0.75^{+0.03}_{-0.03}$	0.01	
40 Eridani B	$0.573^{+0.0064}_{-0.0064}$	0.014	
Stein 2051 B	$0.69^{+0.01}_{-0.01}$	0.0125	
G 240-72	$0.81^{+0.01}_{-0.01}$	0.00984	
LP 658-2	$0.80^{+0.0064}_{-0.01}$	0.014	
Gliese 3991 B	$0.50^{+0.01}_{-0.01}$	0.013	

Tabela 1: Exemplos de anãs brancas.

A.2 Estrelas de Nêutrons

Tabela usada na [seção 2.1.3](#) e na [seção 4.2](#):

Objeto	Massa ($M_{\odot}$)	Raio (km)	Referência
PSR J0740+6620	2.08	14.05	[18]
PSR J1748-2446ad	2.00	16.00	
PSR B1919+21	1.40	9.75	
PSR J0348+0432	2.01	13.00	
XTE J1739-285	1.51	10.90	

Tabela 2: Exemplos de estrelas de nêutrons.

A.3 Sistemas Binários

A.3.1 Estrelas de Nêutrons - Anãs Brancas

Tabela usada na [seção 2.1.3](#):

Objeto	Massa ($M_{\odot}$)	Objeto	Massa ($M_{\odot}$)	Referência
J1713+0747	$1.53^{+0.08}_{-0.06}$	B1802-07	$1.26^{+0.08}_{-0.17}$	[19]
J0024-7204H	$1.48^{+0.06}_{-0.03}$	B1802-2124	$1.11^{+0.73}_{-0.11}$	
J1910+1256	$1.6^{+0.6}_{-0.6}$	J2106+1948	$1.0^{+0.5}_{-0.1}$	
J1853+1303	$1.4^{+0.7}_{-0.5}$	J1045-4509	$1.19^{+0.29}_{-0.29}$	
J1804-2718	$1.3^{+0.4}_{-0.4}$	J2019+2425	$1.205^{+0.305}_{-0.305}$	

Tabela 3: Sistemas binários: estrelas de nêutrons - anãs brancas.

A.3.2 Estrelas de Nêutrons - Estrelas de Nêutrons

Tabela usada na seção 2.1.3:

Objeto	Massa ($M_\odot$)	Objeto	Massa ($M_\odot$)	Referência
J1829+2456	$1.25^{+0.11}_{-0.35}$	Companheira	$1.34^{+0.37}_{-0.10}$	[19]
J1811-1736	$1.53^{+0.22}_{-0.63}$	Companheira	$1.04^{+0.73}_{-0.12}$	
J1906+0746	$1.248^{+0.018}_{-0.018}$	Companheira	$1.365^{+0.018}_{-0.018}$	
J1518+4904	$1.23^{+0.00}_{-0.33}$	Companheira	$1.49^{+0.33}_{-0.00}$	
B1534+12	$1.3332^{+0.0010}_{-0.0010}$	Companheira	$1.3452^{+0.0010}_{-0.0010}$	
B1913+16	$1.4398^{+0.0002}_{-0.0002}$	Companheira	$1.3886^{+0.0002}_{-0.0002}$	
B2127+11C	$1.358^{+0.010}_{-0.010}$	Companheira	$1.354^{+0.010}_{-0.010}$	
J0737-3039A	$1.3381^{+0.0007}_{-0.0007}$	J0737-3039B	$1.2489^{+0.0007}_{-0.0007}$	
J1756-2251	$1.312^{+0.017}_{-0.017}$	Companheira	$1.258^{+0.017}_{-0.017}$	
J1807-2500B	$1.3655^{+0.0020}_{-0.0020}$	Companheira	$1.2064^{+0.0020}_{-0.0020}$	

Tabela 4: Sistemas binários: estrelas de nêutrons - estrelas de nêutrons.

B Derivação da Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Derivaremos agora a equação de TOV a partir da relatividade geral, adaptada de [20]. Partimos de um fluido perfeito estático e esfericamente simétrico. O intervalo de comprimento infinitesimal elevado ao quadrado é o de um tensor métrico diagonal, estático e isotrópico:

$$c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (\text{B.1})$$

Pela suposição de fluido perfeito, o tensor tensão-energia é diagonal (no sistema de coordenadas esféricas centrais), com autovalores de densidade de energia e pressão:

$$T^0_0 = \rho c^2 \quad (\text{B.2})$$

e

$$T^j_i = -P\delta^j_i, \quad (\text{B.3})$$

onde $\rho(r)$ é a densidade do fluido e $P(r)$ é a pressão do fluido.

Para prosseguir, resolveremos as equações de campo de Einstein:

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}, \quad (\text{B.4})$$

em que $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein definido como $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$.

Consideremos primeiro o componente G_{00} :

$$\frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2 e^\nu = \frac{e^\nu}{r^2} \left(1 - \frac{d}{dr} r e^{-\lambda} \right), \quad (\text{B.5})$$

que ao integrar de 0 a r resulta em

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM_r}{rc^2}, \quad (\text{B.6})$$

com M_r equivalente ao definido na [seção 2.2.1](#).

Consideremos agora o componente G_{11} :

$$-\frac{8\pi G}{c^4}Pe^\lambda = \frac{-r\nu' + e^\lambda - 1}{r^2}, \quad (\text{B.7})$$

que podemos simplificar (usando (B.6)) para obter

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2GM_r}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{2GM_r}{c^2 r} + \frac{8\pi G}{c^4} r^2 P\right). \quad (\text{B.8})$$

Obtemos uma segunda equação exigindo a continuidade do tensor de energia-momento: $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$. Observando que $\partial_t \rho = \partial_t P = 0$ (dado que a configuração é assumida como estática) e que $\partial_\phi P = \partial_\theta P = 0$ (dado que a configuração também é isotrópica), obtemos em particular

$$0 = \nabla_\mu T^\mu_1 = -\frac{dP}{dr} - \frac{1}{2}(P + \rho c^2) \frac{d\nu}{dr}, \quad (\text{B.9})$$

que ao reorganizar resulta em

$$\frac{dP}{dr} = -\left(\frac{\rho c^2 + P}{2}\right) \frac{d\nu}{dr}. \quad (\text{B.10})$$

Isso nos dá duas expressões, ambas contendo $d\nu/dr$. Eliminando $d\nu/dr$, nós obtemos:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\rho c^2 + P}{2}\right) \left(\frac{2GM_r}{c^2 r} + \frac{8\pi G}{c^4} r^2 P\right) \left(1 - \frac{2GM_r}{c^2 r}\right)^{-1}. \quad (\text{B.11})$$

Tirando um fator de $GM_r/c^2 r$ e reorganizando fatores de 2 e c^2 a expressão acima resulta na equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, apresentada na equação (2.68):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{c^2 r^2} \left(\frac{\rho c^2 + P}{1}\right) \left(1 + \frac{4\pi}{c^2 M_r} r^3 P\right) \left(1 - \frac{2GM_r}{c^2 r}\right)^{-1} \quad (\text{B.12a})$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{c^2 r^2} \rho c^2 \left(\frac{\rho c^2 + P}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi}{c^2 M_r} r^3 P\right) \left(1 - \frac{2GM_r}{c^2 r}\right)^{-1} \quad (\text{B.12b})$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho \left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{M_r c^2}\right) \left(1 - \frac{2GM_r}{rc^2}\right)^{-1}. \quad (\text{B.12c})$$