

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - CCET
Departamento de Física
Campus Cidade Universitária Dom Delgado

Carlos Eduardo Nogueira Oliveira

Reação de Radiação na Eletrodinâmica Clássica

**São Luís - MA
2024**

Carlos Eduardo Nogueira Oliveira

Reação de Radiação na Eletrodinâmica Clássica/ Carlos Eduardo Nogueira Oliveira. – São Luís - MA, 2024-

85p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Manoel Messias Ferreira Junior

Trabalho de Monografia – Universidade Federal do Maranhão, 2024.

1. Eletrodinâmica Clássica. 2. Reação de Radiação. 2. Força de Abraham-Lorentz. I. Orientador. II. Universidade Federal do Maranhão. III. Departamento de Física. IV. Reação de Radiação na Eletrodinâmica Clássica.

Carlos Eduardo Nogueira Oliveira

Reação de Radiação na Eletrodinâmica Clássica

Trabalho de Monografia apresentado como requisito para obtenção do título de bacharelado em física na Universidade Federal do Maranhão.

Trabalho aprovado em São Luís - MA, 10 de Janeiro de 2024:

Dr. Manoel Messias Ferreira Junior
(Orientador)
Universidade Federal do Maranhão

Dr. Diego Paiva Pires
Universidade Federal do Maranhão

Dr. Jerias Alves Batista
Universidade Federal do Maranhão

São Luís - MA
2024

Agradecimentos

A conclusão deste trabalho marca não apenas o fim de uma etapa acadêmica, mas também o início de uma jornada repleta de aprendizado e descobertas. Ao expressar meus sinceros agradecimentos, reconheço a contribuição de inúmeras pessoas que foram fundamentais para o sucesso desta monografia.

Em primeiro lugar, gostaria de expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, **Manoel Messias Ferreira Junior**, pela orientação sábia, paciência infinita e valiosos insights fornecidos ao longo deste processo. Sua dedicação e apoio foram cruciais para o desenvolvimento deste trabalho, e sou imensamente grato pela oportunidade de aprender sob sua orientação.

À minha família, que esteve ao meu lado durante toda a jornada acadêmica, expresso minha mais profunda gratidão. O amor, incentivo e compreensão que recebi foram a base sólida que me permitiu superar desafios e alcançar este marco. Em especial, agradeço a minha mãe, **Gracilene Marques Nogueira**, e ao meu pai, **Luiz Carlos Oliveira**, aos quais expresso meu eterno amor e agradecimento por todo sacrifício e dedicação à minha criação.

Dedico um agradecimento imortal à minha noiva, **Mylena Almeida Silva**. Seu amor incondicional, paciência e apoio foram minha inspiração diária. Sua presença trouxe equilíbrio e serenidade aos momentos desafiadores, e celebramos juntos as vitórias. Este trabalho é também uma homenagem ao nosso compromisso mútuo e ao papel fundamental que desempenha na minha vida. Você foi, é e sempre será a minha resposta para a vida, o universo e tudo mais.

Aos amigos e colegas de curso, que compartilharam não apenas as alegrias, mas também os desafios dessa jornada, agradeço pela camaradagem e apoio mútuo. A troca de experiências e conhecimentos enriqueceu não apenas meu trabalho, mas também minha vida acadêmica como um todo.

Agradeço à **FAPEMA** (Fundação de Amparo à Pesquisa do Maranhão) e ao **CNPq** (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) que possibilitaram a realização deste estudo. O suporte financeiro foi essencial para a condução de pesquisas e aquisição de recursos necessários para a minha formação acadêmica.

Por fim, agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para este trabalho. Seja por meio de conselhos valiosos, discussões enriquecedoras ou simples gestos de encorajamento, cada contribuição foi significativa.

Este trabalho representa não apenas minha dedicação, mas também a colaboração e apoio de muitos indivíduos que acreditaram em meu potencial. A todos vocês, meu mais profundo agradecimento. Este é o resultado de um esforço coletivo e o início de novos desafios e conquistas.

*"Who dares wins."
(Sir David Stirling - Special Air Service (S.A.S.).)*

Resumo

Neste trabalho, proporcionamos uma aprofundada introdução aos conceitos fundamentais da eletrodinâmica clássica, com o propósito de investigar e analisar de maneira abrangente os efeitos resultantes da reação de radiação. Inicialmente, abordamos as transformações de calibre, aplicadas de forma precisa ao campo eletromagnético. Com base no formalismo do calibre de Lorenz, utilizamos soluções da equação de onda para descrever os campos gerados por cargas pontuais, resultando nos campos de Lienard-Wiechert. A seguir, aprofundamo-nos na descrição da radiação emitida por cargas pontuais em baixas velocidades, abrangendo o contexto não-relativístico. Adicionalmente, exploramos a eletrodinâmica sob a perspectiva da teoria da relatividade restrita, abordando os potenciais eletromagnéticos de maneira tensorial, fazendo uso do tensor do campo eletromagnético de Maxwell. Introduzimos também os escalares de Lorentz, inclusive discutindo o tensor de energia-momento. No âmbito não relativístico, derivamos a fórmula de Larmor, que quantifica a potência de radiação. Utilizando as ferramentas teóricas desenvolvidas nas seções anteriores, determinamos a força de Abraham-Lorentz exercida sobre as cargas fontes. Culminando, na aplicação da força de Abraham-Lorentz para uma carga oscilante devido um campo elétrico externo, obtivemos as leis do espalhamento de Thomson e Rayleigh. Além disso, estendemos nosso estudo ao modelo do elétron, considerando-o como uma partícula com dimensões finitas, ignorando sua estrutura interna, com propósito de eliminar as divergências do modelo inicial. Como ápice do estudo, estendemos nossas considerações sobre o problema da reação de radiação para o contexto relativístico, valendo-nos do arcabouço tensorial desenvolvido previamente. Em seguida apresentamos a equação de Landau-Lifshitz, uma versão covariante da força de Abraham-Lorentz que não apresenta as soluções divergentes apresentadas no modelo clássico. Por fim, concluímos o trabalho com uma análise dos resultados obtidos. Nossa expectativa é que esta abordagem formativa em nível mais elevado que a base curricular do bacharelado em física venha a sedimentar caminho para realização de pesquisas originais associadas a problemas de reação de radiação, emissão de radiação em eletrodinâmicas modificadas e em outros ramos da física.

Palavras-chave: Eletrodinâmica, Reação de Radiação, Força de Abraham-Lorentz

Abstract

In this work, we provide a thorough introduction to the fundamental concepts of classical electrodynamics, aiming to investigate and comprehensively analyze the effects resulting from radiation reaction. Initially, we address gauge transformations, precisely applied to the electromagnetic field. Based on the Lorenz gauge formalism, we employ solutions of the wave equation to describe the fields generated by point charges, resulting in the Lienard-Wiechert fields. Next, we delve into the description of radiation emitted by point charges at low velocities, covering the non-relativistic context. Additionally, we explore electrodynamics from the perspective of special relativity theory, addressing electromagnetic potentials tensorially and utilizing the Maxwell electromagnetic field tensor. We also introduce Lorentz scalars, including a discussion of the energy-momentum tensor. In the non-relativistic realm, we derive the Larmor formula, quantifying the radiation power. Using the theoretical tools developed in the preceding sections, we determine the Abraham-Lorentz force exerted on source charges. Culminating in the application of the Abraham-Lorentz force to an oscillating charge due to an external electric field, we obtain the laws of Thomson and Rayleigh scattering. Furthermore, we extend our study to the electron model, considering it as a particle with finite dimensions while ignoring its internal structure to eliminate divergences from the initial model. As the apex of the study, we extend our considerations of the radiation reaction problem to the relativistic context, leveraging the tensorial framework developed earlier. We then present the Landau-Lifshitz equation, a covariant version of the Abraham-Lorentz force that avoids the divergent solutions presented in the classical model. Finally, we conclude the work with an analysis of the obtained results. Our expectation is that this advanced formative approach, beyond the undergraduate physics curriculum, will pave the way for conducting original research associated with radiation reaction problems, radiation emission in modified electrodynamics, and other branches of physics.

Keywords: Electrodynamics. Radiation Reaction. Abraham-Lorentz Force.

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Partícula pontual em movimento.	17
Figura 2.2 – Cubo que contém uma carga q em MRU.	27
Figura 3.1 – Modelo para o elétron.	54

Sumário

Sumário	8
1 Introdução	10
2 Fundamentos da Teoria Eletromagnética Clássica	12
2.1 Equações de Maxwell e Potenciais Eletromagnéticos	12
2.1.1 Potenciais Eletromagnéticos e Transformações de Calibre	13
2.2 Transformações de Calibre	14
2.2.1 Calibre de Lorenz	15
2.3 Dinâmica das Cargas	16
2.3.1 Potenciais de Liénard-Wiechert	17
2.3.2 Campos de Liénard-Wiechert	19
2.4 Radiação Eletromagnética Emitida por Cargas Pontuais	22
2.4.1 Radiação emitida em baixas velocidades	24
2.4.2 Radiação emitida por uma carga com uma orientação arbitrária entre velocidade e aceleração	25
2.5 Campo Eletromagnético com Base na Teoria da Relatividade Restrita.	26
2.5.1 Transformações relativísticas para carga e corrente.	27
2.5.2 4-potencial de Lorentz e transformações relativísticas para campo elétrico e magnético	29
2.5.3 Tensor do campo eletromagnético, equações de Maxwell na Forma tensorial	31
2.5.4 Invariantes relativísticos	33
2.5.5 Leis de conservação e o tensor energia-momento do campo eletromagnético.	34
2.5.6 Fórmula de Larmor covariante para a potência de radiação	41
3 Reação de Radiação	43
3.1 Reação de radiação na formulação não-relativística	43
3.1.1 Reação de radiação baseada na conservação de energia	43
3.1.2 Reação de Radiação na Presença de um Oscilador Harmônico.	46
3.1.2.1 Apresentação do problema e Solução da Equação de Movimento	46
3.1.2.2 Espalhamento de Thomson e de Rayleigh	48
3.1.3 Cálculo da reação de radiação para um elétron	54
3.2 Reação de Radiação em sua Formulação Covariante	58
3.2.1 Potência de radiação realizada por uma 4-força pura e a força de Lorentz-Dirac	58
3.2.2 A equação de Landau-Lifshitz	63

4 Conclusão	66
Referências	69
A Solução da equação de onda pelo método da função de Green	71
B Cálculo dos Campos de Liénard-Wiechert	74
C Solução da Equação do Oscilador Harmônico Forçado	81
D Cálculo do campo elétrico para o modelo do elétron	82

1 Introdução

A Eletrodinâmica Clássica é um ramo fundamental da física que descreve as interações eletromagnéticas entre partículas carregadas e os campos elétricos e magnéticos que as rodeiam. Desde os trabalhos pioneiros de Michael Faraday e James Clerk Maxwell no século XIX, a teoria eletromagnética tem desempenhado um papel central no entendimento dos fenômenos naturais. Ao longo dos anos, os avanços na eletrodinâmica clássica levaram à formulação das leis de Maxwell, que unificaram a eletricidade e o magnetismo em um conjunto consistente de equações diferenciais. Essas leis estabeleceram as bases para a compreensão das ondas eletromagnéticas e tornaram possível explicar a propagação da luz e outras formas de radiação eletromagnética [16].

Neste trabalho, apresentamos uma sólida introdução dos conceitos fundamentais da eletrodinâmica clássica com ênfase no estudo da reação de radiação. Inicialmente, introduzimos os princípios básicos da teoria eletromagnética, incluindo a formulação das leis de Maxwell e a aplicação das transformações de calibre para o campo eletromagnético. Em seguida, abordamos os campos gerados por cargas pontuais, usando a solução da equação de onda nos potenciais eletromagnéticos, conhecidos como campos de Liénard-Wiechert [8,11].

Uma questão de interesse neste trabalho é a emissão de radiação por cargas pontuais em movimento. Investigamos o caso não-relativístico, em que as velocidades das partículas são baixas em relação à velocidade da luz, permitindo a derivação da fórmula de Larmor para a potência de radiação emitida [11]. Além disso, apresentamos a formulação relativística para o eletromagnetismo. Nesse cenário, mostramos a versão covariante da equação de continuidade da carga elétrica. Em uma aplicação direta das transformações de tensores exibimos as transformações relativísticas para a carga e corrente para um boost no eixo-x. Em seguida, definimos o 4-potencial que será utilizado para deduzimos a versão covariante das equações de Maxwell. Para finalizar o capítulo discutimos as leis de conservação para o campo eletromagnético, em que falamos dos teoremas de Poynting e obtemos a versão relativística da formula de Larmor [9].

Como próximo passo, iremos discutir o tópico central desse trabalho de monografia. Neste capítulo, analisamos os efeitos que a radiação produz sobre as próprias partículas que a geraram, um efeito denominado Reação de Radiação. Nosso ponto de partida será propor que a fórmula de Larmor seja resultado da potência exercida por uma força radiativa, tendo como consequência a formulação da força de Abraham-Lorentz. Usando a segunda lei de Newton, mostraremos que a força de Abraham-Lorentz apresenta soluções não-físicas, em que na ausência de forças externas a partícula acelera exponencialmente violando a primeira lei de Newton, em que na ausência de forças os corpos devem se manter em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Em

contrapartida, a conservação de energia não é violada, pois esta força foi determinada a partir da fórmula de Larmor. [15,18, 11] A seguir, consideraremos que o elétron seja forçado a oscilar devido a existência de um campo elétrico externo, resultando em uma equação do tipo movimento harmônico forçado (MHF). Usando a solução advinda da equação do MHF, em especial sua aceleração, juntamente com a fórmula de Larmor faremos uma breve discussão sobre espalhamento Thomson e Rayleigh, mostrando que o formalismo da reação de radiação pode ser utilizado para obter resultados clássicos do eletromagnetismo.

Posteriormente, ampliamos nossa discussão para abranger um contexto mais realista, introduzindo o modelo do elétron da teoria de Lorentz, reobtendo a força de Abraham-Lorentz, agora livre dos termos de divergência da aceleração. Entretanto outros problemas surgem. Na qual a solução indica uma "pré-aceleração", ou seja a partícula acelera antes da força atuar sobre a partícula, violando o princípio da causalidade. Mais adiante analisaremos os efeitos da reação de radiação em sua versão covariante. A luz do teorema de Poynting, iremos obter a força de radiação que mantém o balanço de energia para um sistema em que atua uma força que não modifica a massa de repouso da partícula [14]. em que neste sentido a força radiativa será a versão relativística da força de Abraham-Lorentz para a reação de radiação, em que neste contexto é conhecida por força de Abraham-Lorentz-Dirac, ou simplesmente força de Lorentz-Dirac. Embora as considerações relativísticas abrangentes nessa teoria, mostraremos que a componente espacial, a menos de uma mudança de parâmetro, expressa a mesma equação diferencial obtida pela força de Abraham-Lorentz no limite clássico e consequentemente, possui a mesma solução não-física. Para finalizar o estudo, apresentamos uma possível solução para os problemas discutidos anteriormente. Tal solução, proposta por Landau e Lifshitz [10,18, 12, 16], propõe que a força de Abraham-Lorentz seja aproximada no limite o termo referente a reação de radiação seja desprezível em comparação a força externa. Neste contexto, podemos substituir a derivada da aceleração pela derivada da força externa. Como consequência dessa aproximação, a força de Abraham-Lorentz se anula na ausência de forças externas, corrigindo a solução auto-acelerante e mantendo a primeira lei de Newton.

Além de elucidar os fundamentos da eletrodinâmica clássica, este trabalho desvela a complexidade dos efeitos da reação de radiação em sistemas físicos, transcendendo as fronteiras entre os domínios não-relativístico e relativístico. Ao abordar tópicos muitas vezes negligenciados no curso de bacharelado em física, esta pesquisa não apenas serve como uma base sólida para estudos avançados de pós-graduação, mas também lança luz sobre abordagens inovadoras, explorando eletrodinâmicas modificadas e outras fronteiras da física contemporânea.

2 Fundamentos da Teoria Eletromagnética Clássica

No vasto panorama da física, poucos avanços foram tão transcendentais quanto a formulação das equações de Maxwell no século XIX, por James Clerk Maxwell. A convergência magistral das teorias elétrica e magnética proporcionada por essas equações não apenas redefiniu a compreensão do eletromagnetismo, mas também estabeleceu as bases para a revolução tecnológica que moldou o século XX e continua a impulsionar o progresso científico no século XXI.

Neste capítulo, exploraremos a adaptação das equações de Maxwell em relação aos potenciais escalar e vetor. Investigaremos também as transformações desses potenciais e campos sob mudanças de calibre, para depois discutirmos o calibre de Lorenz. Posteriormente, deduziremos os potenciais de Liénard-Wiechert, e seus respectivos campos. Em seguida, faremos uma discussão a cerca da radiação emitida por cargas pontuais obtendo a fórmula de Larmor [8, 18, 7]. Em seguida, calculamos as transformações para as densidades de carga e corrente, possibilitando demonstrar uma forma covariante para a equação de continuidade da carga. Definimos o tensor 4-potencial (A^μ) a partir do qual iremos estabelecer a forma tensorial das equações de Maxwell, através do tensor $F^{\mu\nu}$. De posse desse tensor, fizemos uma breve digressão sobre os invariantes relativísticos associados ao tensor do campo eletromagnético ($F^{\mu\nu}$). Finalizaremos com a formulação covariante da fórmula de Larmor [1, 3, 9].

2.1 Equações de Maxwell e Potenciais Eletromagnéticos

As equações de Maxwell no Sistema Internacional¹ (SI) são expressas da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

Estas equações, em conjunto com a força de Lorentz², dada por:

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.5)$$

e a lei de conservação da carga e corrente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2.6)$$

¹ Tem existem outros sistemas de unidades, como por exemplo o Gaussiano, vide [9].

² $\mathbf{v}$ representa a velocidade da carga (q) que interage com os campos elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$.

descrevem integralmente a dinâmica do campo eletromagnético e sua interação com partículas. Contudo, a resolução desse conjunto de equações não é um processo trivial, pois, no mínimo, é necessário conhecer as densidades de carga (ρ) e corrente ($\mathbf{j}$). Agora, exploraremos uma abordagem para simplificar as equações de Maxwell utilizando os potenciais escalar (ϕ) e vetor ($\mathbf{A}$).

2.1.1 Potenciais Eletromagnéticos e Transformações de Calibre

Para encontrar o potencial vetor, utilizaremos a equação (2.2) e a propriedade do rotacional, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$. Definimos o campo magnético $\mathbf{B}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.7)$$

Substituindo na equação (2.3),

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (2.8)$$

Utilizando a propriedade de comutação das derivadas,

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.9)$$

Lembrando³ que $\nabla \times (-\nabla \phi) = 0$, encontramos:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Com as equações (2.10) e (2.7), podemos substituir nas equações de Maxwell não-homogêneas e expressá-las em função dos potenciais. Começando com a lei de Gauss,

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.11)$$

onde usamos $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$. Podemos somar e subtrair o termo $\mu_0 \epsilon_0 \partial^2 \phi / \partial t^2$, obtendo:

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.12)$$

Agora, usando a equação de Ampere-Maxwell,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (2.13)$$

Como $\nabla \times \nabla = \nabla(\nabla \cdot) - \nabla^2$, temos:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \nabla \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (2.14)$$

³ Aqui escolhemos o sinal negativo para ficar mais consistente com o caso eletrostático.

Organizando os termos semelhantes,

$$\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.15)$$

Verificamos que (2.12) e (2.15) são um sistema de duas equações diferenciais lineares acopladas. Para torná-las mais simétricas, introduzimos o operador de D'Alembert⁴ expresso como $\square = \mu_0\epsilon_0 \partial^2 / \partial t^2 - \nabla^2$ e definimos⁵:

$$\xi = \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.16)$$

Portanto, as equações (2.12) e (2.15) se reduzem a:

$$\square \phi - \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \square \mathbf{A} + \nabla \xi = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.17)$$

A seguir, examinaremos algumas formas de desacoplar essas equações.

2.2 Transformações de Calibre

As transformações de calibre, também conhecidas como transformações de Gauge, referem-se a um conjunto de mudanças locais de coordenadas que preservam a forma matemática das equações. No nosso contexto, consideraremos uma função escalar $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ de modo que o potencial vetor assumira a forma:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda. \quad (2.18)$$

Seja o campo magnético no referencial S' dado por $\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}'$. Substituindo a transformação para o potencial vetor, obtemos:

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \Lambda) = \nabla \times \mathbf{A} + \cancel{\nabla \times \nabla \Lambda}^0 = \mathbf{B}. \quad (2.19)$$

Assim, comprovamos que a transformação dada por (2.18) mantém o campo magnético invariante. Agora, vamos examinar como deve ser a transformação para manter o campo elétrico inalterado. Escrevemos o campo $\mathbf{E}$ no sistema S' e substituímos a transformação (2.10), resultando em:

$$\mathbf{E}' = -\nabla \phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla \phi' - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla \Lambda). \quad (2.20)$$

Permutando a derivada temporal com o gradiente, obtemos:

$$\mathbf{E}' = -\nabla \left(\phi' + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.21)$$

⁴ Neste trabalho, usaremos a convenção $(+, -, -, -)$.

⁵ Também conhecida como condição de Gauge em algumas literaturas.

Para manter $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$, impomos a condição:

$$\phi = \phi' + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (2.22)$$

Consequentemente, observamos que as transformações de calibre (2.18) e (2.22) mantêm os campos elétrico e magnético invariantes. Na próxima seção, exploraremos uma das principais transformações de calibre que simplificam as equações (2.17).

2.2.1 Calibre de Lorenz

No calibre de Lorenz⁶, escolhemos a divergência do potencial vetor para desacoplar (2.17). Observa-se que a escolha mais apropriada para desacoplar consiste em fazer $\xi = 0$, ou seja:

$$\xi = \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (2.23)$$

Portanto,

$$\square \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.24)$$

Verifica-se que as equações satisfeitas para o potencial escalar e vetor reduzem-se a um conjunto de equações de onda não homogêneas, em que as densidades de carga e corrente representam as fontes. Vale ressaltar que a equação de onda é totalmente covariante sob as transformações de Lorentz, o que é particularmente importante na relatividade, indicando que o calibre de Lorenz é o mais adequado para uma formulação relativística [11]. Para resolver as equações de onda, utilizaremos o método da função de Green. Seja a equação de onda mais geral possível:

$$\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t), \quad (2.25)$$

cuja solução geral⁷ é dada por:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int dt' \int d^3 r' G^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') f(\mathbf{r}', t'), \quad (2.26)$$

onde,

$$G^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left(t' - \left[t \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right] \right), \quad (2.27)$$

é a função de Green que resolve a equação (2.25). A função $G^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ é a chamada função de Green retardada,

$$G^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t_R), \quad (2.28)$$

⁶ Este calibre é conhecido na literatura mais antiga como calibre de Lorentz, atribuindo crédito a H. A. Lorentz. Entretanto, livros mais atualizados e edições modernas de livros clássicos corrigem essa atribuição para o verdadeiro autor, L. V. Lorenz. Também convém mencionar que existe outras transformações de calibre importantes, como por exemplo o calibre de Coulomb, conforme indicado em [9, 8, 11].

⁷ Para o cálculo detalhado, consulte o apêndice A.

onde $t_R = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$ é o chamado tempo de retardo. Enquanto $G^{(-)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$,

$$G^{(-)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t_a), \quad (2.29)$$

é a função de Green avançada e $t_a = t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ é o tempo avançado. Com a função de Green retardada, os potenciais descritos pelas equações (2.24) são lidos como:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \int dt' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t' - \left[t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right]\right), \quad (2.30)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \int dt' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t' - \left[t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right]\right). \quad (2.31)$$

Utilizando a propriedade da função delta de Dirac, encontramos:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t_R)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_R)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.33)$$

De maneira similar, para a função de Green avançada, os potenciais escalares e vetores são lidos como:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t_a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.35)$$

A solução referente à função de Green de retardo indica que a propagação de uma "informação" a partir de $\mathbf{r}'$ foi emitida no tempo t_R e, devido à velocidade finita de propagação da luz, essa informação leva um certo tempo até atingir o ponto de observação $\mathbf{r}$ em um instante de tempo t posterior. Portanto, a função de Green retardada mantém o princípio da causalidade. A solução referente à função de Green avançada é uma solução matematicamente viável, porém não é aceitável fisicamente, pois a "informação" é emitida em um tempo t_a posterior ao tempo t do recebimento do observador, sendo incompatível com o princípio da causalidade.

2.3 Dinâmica das Cargas

Os potenciais escalar e vetor representam uma forma de descrever o campo eletromagnético gerado por densidades de carga e correntes arbitrárias. Nesta seção, abordaremos especificamente os campos gerados por cargas pontuais, denominados potenciais e campos de Liénard-Wiechert.

2.3.1 Potenciais de Liénard-Wiechert

Os potenciais de Liénard-Wiechert descrevem de maneira relativisticamente correta os efeitos clássicos do campo eletromagnético gerado por cargas em movimento arbitrário. Utilizando o Gauge de Lorenz, os potenciais retardados são expressos por:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \int dt' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t' - \left[t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right]\right), \quad (2.36)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \int dt' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t' - \left[t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right]\right). \quad (2.37)$$

É importante notar que ambos os potenciais, avaliados no tempo t , são dados em termos da integral das fontes avaliadas no tempo de retardo $t_R = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$, o qual representa o tempo anterior a t . Para obter os potenciais, vamos considerar uma carga pontual em movimento arbitrário. A figura abaixo representa o sistema a ser considerado.

Figura 2.1 – Partícula pontual em movimento.

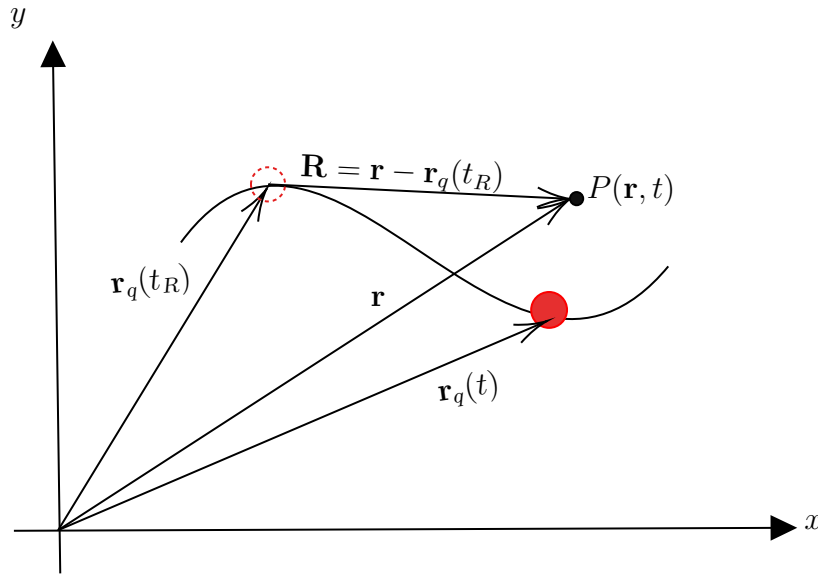


Figura feita pelo próprio autor.

Para uma partícula pontual, as densidades de carga localizadas no ponto $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_q(t')$ podem ser relacionadas por meio da distribuição delta de Dirac:

$$\rho(\mathbf{r}', t') = q\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_q(t')). \quad (2.38)$$

Substituindo em (2.36), obtemos:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \int_V d^3r' \frac{q\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_q(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t' - \left[t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right]\right), \quad (2.39)$$

ou de forma mais simplificada:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|} \delta\left(t' - \left[t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|}{c}\right]\right). \quad (2.40)$$

Devido ao termo t' no denominador, a integral não é trivial. Para simplificar, realizaremos a seguinte mudança de variáveis:

$$t'' = t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|}{c} \xrightarrow{\text{diferenciando}} dt'' = dt' - dt + \frac{d}{dt'} \left[\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)|}{c} \right] dt', \quad (2.41)$$

Dado que o ponto de observação P está fixo em $(\mathbf{r}, t)$, temos $dt = 0$, resultando em:

$$dt'' = dt' + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|) dt'. \quad (2.42)$$

Para prosseguir, primeiro definiremos o vetor relativo e seu módulo:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t'), \quad R' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')| = \sqrt{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}'}. \quad (2.43)$$

Derivando o módulo em relação a t' ,

$$\frac{d}{dt'} (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}'}} \left[\frac{d\mathbf{R}'}{dt'} \cdot \mathbf{R}' + \mathbf{R}' \cdot \frac{d\mathbf{R}'}{dt'} \right] = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}'}} \left[\frac{d\mathbf{R}'}{dt'} \cdot \mathbf{R}' \right], \quad (2.44)$$

Derivando também $\mathbf{R}'$,

$$\frac{d\mathbf{R}'}{dt'} = \frac{d}{dt'} [\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')] \rightarrow \frac{d\mathbf{R}'}{dt'} = \cancel{\frac{d\mathbf{r}}{dt'}}^0 - \frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'} = -\mathbf{v}(t'), \quad (2.45)$$

Com esse resultado, obtemos:

$$\frac{d}{dt'} (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|) = -\frac{\mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{R}'}{R'} = -\mathbf{v}(t') \cdot \hat{R}', \quad (2.46)$$

onde $\hat{R}' = \mathbf{R}'/R'$ é o versor que aponta na direção da posição relativa entre as cargas nos instantes $(\mathbf{r}, t)$ e $(\mathbf{r}, t_R)$. Retornando esse resultado para a equação (2.42):

$$dt'' = dt' \left[1 - \frac{\mathbf{v}(t') \cdot \hat{R}'}{c} \right] \rightarrow dt' = \frac{dt''}{[1 - \boldsymbol{\beta}(t') \cdot \hat{R}']}, \quad (2.47)$$

onde $\boldsymbol{\beta}(t') = \mathbf{v}(t')/c$. Substituindo na integral (2.40):

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dt'' \delta(t'')}{[1 - \boldsymbol{\beta}(t'' + t_R) \cdot \hat{R}(t'' + t_R)] |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t'' + t_R)|}, \quad (2.48)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[1 - \boldsymbol{\beta}(t_R) \cdot \hat{R}(t_R)] R(t_R)}, \quad (2.49)$$

onde usamos $t' = t'' + t_R$. Lembrando que $\hat{R}(t_R) = \mathbf{R}(t_R)/R(t_R)$, podemos escrever o denominador como: $[1 - \boldsymbol{\beta}(t_R) \cdot \hat{R}(t_R)] R(t_R) = R(t_R) - \boldsymbol{\beta}(t_R) \cdot \mathbf{R}(t_R)$. Portanto, o potencial escalar assume a forma:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R(t_R) - \boldsymbol{\beta}(t_R) \cdot \mathbf{R}(t_R)]}, \quad (2.50)$$

Por um processo análogo, definimos a densidade de corrente para uma carga pontual da seguinte forma:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}_q(t), t') = q\mathbf{v}(t')\delta^3(\mathbf{r}_q(t) - \mathbf{r}_q(t')), \quad (2.51)$$

Substituindo esta expressão na equação (2.37), obtemos:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \int dt'' \frac{\mathbf{v}(t'' - t_R)\delta(t'')}{[1 - \boldsymbol{\beta}(t'' + t_R) \cdot \hat{\mathbf{R}}(t'' + t_R)] |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t'' + t_R)|}, \quad (2.52)$$

Após realizar a mudança de coordenadas e resolver a integral, o potencial vetor resulta em:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}(t_R)}{[R(t_R) - \boldsymbol{\beta}(t_R) \cdot \mathbf{R}(t_R)]}, \quad (2.53)$$

Dessa forma, os potenciais escalar e vetor para uma partícula pontual são expressos da seguinte maneira:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t_R) - \boldsymbol{\beta}(t_R) \cdot \mathbf{R}(t_R)}, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}(t_R)}{R(t_R) - \boldsymbol{\beta}(t_R) \cdot \mathbf{R}(t_R)}, \quad (2.55)$$

É notável que o potencial vetor possui uma expressão semelhante ao potencial escalar. Utilizando as relações $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$ e $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, o potencial vetor se simplifica para:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\boldsymbol{\beta}(t_R)}{c} \phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.56)$$

As equações (2.54) e (2.55) são conhecidas como potenciais de Liénard-Wiechert.

2.3.2 Campos de Liénard-Wiechert

Para determinar os campos de Liénard-Wiechert usaremos as relações para os campos elétricos e magnéticos da seção anterior. Primeiramente, precisamos do gradiente do potencial escalar⁸, ou seja,

$$\nabla\phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(1 - \beta(t_R)^2) \mathbf{R}(t_R) + \left(\mathbf{R}(t_R) \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c}\right) \mathbf{R}(t_R)}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} + \frac{[(\boldsymbol{\beta}(t_R) \cdot \mathbf{R}(t_R)) - R(t_R)] \boldsymbol{\beta}(t_R)}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} \right\}, \quad (2.57)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}(t_R) = \frac{d\boldsymbol{\beta}(t_R)}{dt}$. Calculando a derivada temporal do potencial vetor,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c}\right) R(t_R)^2 - \left(R(t_R) \frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c} - \boldsymbol{\beta}(t_R)\right) [\boldsymbol{\beta}(t_R) \cdot \mathbf{R}(t_R)]}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} + \frac{R(t_R) \boldsymbol{\beta}(t_R) [\mathbf{R}(t_R) \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c} - \boldsymbol{\beta}(t_R)]}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} \right\}. \quad (2.58)$$

⁸ Para os cálculos detalhados veja o apêndice B.

De posse desses resultados, o campo elétrico, $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$, é expresso por:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(1 - \beta(t_R)^2) \mathbf{R}(t_R) + \left(\mathbf{R}(t_R) \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c} \right) \mathbf{R}(t_R) + [(\boldsymbol{\beta}(t_R) \cdot \mathbf{R}(t_R)) - R(t_R)] \boldsymbol{\beta}(t_R)}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} - \frac{R \frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c} - \boldsymbol{\beta}(t_R) R(t_R) \beta(t_R)^2 + R(t_R) \boldsymbol{\beta}(t_R) (\hat{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R))}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} + \frac{R(t_R) \boldsymbol{\beta}(t_R) \left(\mathbf{R}(t_R) \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c} \right)}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} \right\}. \quad (2.59)$$

Simplificando os termos, obtemos:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\mathbf{R}(t_R) - R(t_R) \boldsymbol{\beta}(t_R)) (1 - \beta(t_R)^2)}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} + \frac{\mathbf{R}(t_R) \times [(\mathbf{R}(t_R) - R(t_R) \boldsymbol{\beta}(t_R)) \times \frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c}]}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} \right\}. \quad (2.60)$$

O campo elétrico descrito pela eq.(2.60) possui duas contribuições. O primeiro termo depende apenas da velocidade $\boldsymbol{\beta}(t_R) = \mathbf{v}(t_R)/c$ da partícula, enquanto o segundo exibe também dependência da aceleração da partícula, $\boldsymbol{\alpha}(t_R) = \mathbf{a}(t_R)/c^2$. Por este motivo, fator que é proporcional a $\boldsymbol{\beta}(t_R)$, é conhecido como campo elétrico de velocidade ($\mathbf{E}_v$) ou campo de Coulomb,

$$\mathbf{E}_v(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\mathbf{R}(t_R) - R(t_R) \boldsymbol{\beta}(t_R)) (1 - \beta(t_R)^2)}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} \right\}. \quad (2.61)$$

Essa contribuição recebe o nome de campo de Coulomb porque para o caso estático, $\mathbf{v} \rightarrow 0$, o campo de velocidade deve retornar para o campo eletrostático de Coulomb. Ou seja:

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \mathbf{E}_v(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\mathbf{R}(t_R) - \cancel{\boldsymbol{\beta}(t_R)}) (1 - \cancel{\beta(t_R)^2})}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \cancel{\boldsymbol{\beta}(t_R)}]^3} \right\}, \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}(t_R)}{R(t_R)^3}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

E o segundo termo, proporcional a $\boldsymbol{\alpha}(t_R)$, é conhecido como campo elétrico de aceleração ($\mathbf{E}_a$) ou campo de radiação,

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{R}(t_R) \times [(\mathbf{R}(t_R) - \boldsymbol{\beta}(t_R)) \times \frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c}]}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} \right\}. \quad (2.63)$$

Agora, nosso próximo passo é determinar o campo magnético partindo das equações,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\boldsymbol{\beta}(t_R)}{c} \phi(\mathbf{r}, t).$$

Combinando tais equações,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \nabla \times (\boldsymbol{\beta}(t_R) \phi(\mathbf{r}, t)) . \quad (2.64)$$

Utilizando a propriedade vetorial, $\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$, encontramos:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} (\nabla \phi(t_R)) \times \boldsymbol{\beta}(t_R) + \phi(t_R) (\nabla(t_R) \times \boldsymbol{\beta}(t_R)) . \quad (2.65)$$

Resolvendo os produtos,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \left\{ -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1 - \beta(t_R)^2) \mathbf{R}(t_R) + \left(\mathbf{R}(t_R) \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c} \right) \mathbf{R}(t_R)}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{[(\boldsymbol{\beta}(t_R) \cdot \mathbf{R}(t_R)) - R(t_R)] \boldsymbol{\beta}(t_R)}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} \right] \times \boldsymbol{\beta}(t_R) \right. \\ \left. + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t_R) - \boldsymbol{\beta}(t_R) \cdot \mathbf{R}(t_R)} \left[\frac{\frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c} \times \mathbf{R}(t_R)}{R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)} \right] \right\} . \quad (2.66) \end{aligned}$$

Após simplificar os termos, resultamos que o campo magnético é lido como:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{(\boldsymbol{\beta}(t_R) \times \mathbf{R}(t_R)) [1 - \beta(t_R)^2 + \mathbf{R}(t_R) \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c}]}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} + \frac{\frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c} \times \mathbf{R}(t_R)}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^2} \right\} . \quad (2.67)$$

Podemos notar que, de maneira similar ao campo elétrico, o campo magnético pode ser dividido em campo magnético de velocidade ($\mathbf{B}_v$):

$$\mathbf{B}_v(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{(\boldsymbol{\beta}(t_R) \times \mathbf{R}(t_R)) [1 - \beta(t_R)^2 + \mathbf{R}(t_R) \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c}]}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} \right\} . \quad (2.68)$$

E o campo magnético de aceleração ($\mathbf{B}_a$),

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{\frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c} \times \mathbf{R}(t_R)}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^2} \right\} . \quad (2.69)$$

Considerando o limite em que a aceleração da partícula é nula, $\mathbf{a}(t_R) = 0$, encontramos:

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{a} \rightarrow 0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{(\boldsymbol{\beta}(t_R) \times \mathbf{R}(t_R)) [1 - \beta(t_R)^2 + \cancel{\mathbf{R}(t_R) \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c}}]}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} \frac{\cancel{\frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c}} \times \mathbf{R}(t_R)}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^2} \right\} , \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left\{ \frac{(\mathbf{v}(t_R) \times \mathbf{R}(t_R)) [1 - \beta(t_R)^2]}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} \right\} . \quad (2.70) \end{aligned}$$

Adicionalmente, se consideramos baixas velocidades ($\beta \approx 1$), obtemos a lei de Biot-Savart:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v}(t_R) \times \mathbf{R}(t_R)}{R(t_R)^3} . \quad (2.71)$$

Por fim, é importante ressaltar que os campos de Liénard-Wiechert estão vinculados entre si. Se tomarmos o produto vetorial de $\hat{R}(t_R)/c$ com o campo elétrico da eq. (2.60) podemos mostrar⁹ que vale a relação:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} [\hat{R}(t_R) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] . \quad (2.72)$$

Essa relação será usada posteriormente para calcular a potência de radiação emitida pelos campos de Liénard-Wiechert.

2.4 Radiação Eletromagnética Emitida por Cargas Pontuais

Ao tratar de radiação eletromagnética, várias distribuições de cargas e correntes podem gerar esse fenômeno. No entanto, aqui nos concentraremos na radiação emitida pela forma mais simples de distribuição: cargas pontuais. Como discutimos anteriormente, os campos gerados por cargas pontuais são os campos de Liénard-Wiechert, expressos por:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\mathbf{R}(t_R) - R(t_R)\boldsymbol{\beta}(t_R))(1 - \beta(t_R)^2)}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} + \frac{\mathbf{R}(t_R) \times [(\mathbf{R}(t_R) - R(t_R)\boldsymbol{\beta}(t_R)) \times \frac{\boldsymbol{\alpha}(t_R)}{c}]}{[R(t_R) - \mathbf{R}(t_R) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R)]^3} \right\} . \quad (2.73)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{R}(t_R) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{c} , \quad (2.74)$$

onde valem as relações:

$$\mathbf{R}(t_R) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_R) , \quad \boldsymbol{\beta}(t_R) = \frac{\mathbf{v}(t_R)}{c} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\alpha}(t_R) = \frac{\mathbf{a}(t_R)}{c} ,$$

em que $\mathbf{r}_q(t_R)$ descreve a posição da carga q no tempo de retardo.

É importante destacar que os campos possuem dois termos distintos, um relacionado à velocidade da partícula e outro à aceleração. Como estamos interessados na radiação emitida a pontos muito distantes da fonte, o termo dependente da velocidade, proporcional a $1/R^2$, se anula mais rapidamente do que os campos de aceleração, proporcionais a $1/R$, quando $R \rightarrow \infty$. Neste limite, o campo elétrico é aproximadamente expresso por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c}]}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^3} . \quad (2.75)$$

Lembrando que o fluxo de energia (por unidade de área) transportado pela onda eletromagnética é dado pelo vetor de Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \left[\frac{\hat{R} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{c} \right] . \quad (2.76)$$

⁹ Para o cálculo veja a referência [11].

Usando a propriedade $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$, escrevemos:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ |\mathbf{E}|^2 \hat{R} - [\hat{R} \cdot \mathbf{E}] \mathbf{E} \right\}. \quad (2.77)$$

Para determinar a potência emitida pela carga ao se mover, precisamos integrar o vetor de Poynting sobre uma superfície σ fechada. A superfície mais indicada é uma casca esférica centrada na posição da carga (avaliada no tempo de retardo), ou seja, uma esfera com raio $R = c(t - t_R)$. Em geral, o campo elétrico pode ter ambas as contribuições (campo de velocidade e de aceleração). No entanto, analisando a eq. (2.77), vemos que o vetor de Poynting possui termos proporcionais a $1/R^4$ (campo de velocidade multiplicado por ele mesmo), $1/R^3$ (campo de velocidade multiplicado por campo de aceleração) e $1/R^2$ (campo de aceleração multiplicado por ele mesmo).

Contudo, a área da esfera a ser considerada é proporcional ao quadrado do raio, ou seja, $A \propto R^2$. No limite de $R \rightarrow \infty$, apenas o termo gerado pelo campo de aceleração ($\propto 1/R^2$) terá uma contribuição significativa.

Como o campo elétrico de aceleração é perpendicular ao versor $\hat{R}$, a equação (2.77) se reduz a:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c} |\mathbf{E}_a|^2 \hat{R}. \quad (2.78)$$

Consequentemente, a quantidade de energia que atravessa a superfície da esfera no tempo t será:

$$\frac{dP(t)}{dA} = \mathbf{S} \cdot \hat{R}. \quad (2.79)$$

Se considerarmos que a unidade de área pode ser dada por $dA = R^2 d\Omega$, a potência irradiada pode ser escrita como:

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = R^2 [\mathbf{S} \cdot \hat{R}] \Rightarrow \frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{R^2}{\mu_0 c} |\mathbf{E}_a|^2 (\hat{R} \cdot \hat{R}). \quad (2.80)$$

Podemos notar que a potência não é a mesma emitida em t_R , a qual pode ser obtida utilizando a regra da cadeia:

$$P(t_R) = \frac{dW}{dt_R} = \frac{dW}{dt} \frac{\partial t}{\partial t_R} \rightarrow P(t_R) = P(t) \frac{\partial t}{\partial t_R}. \quad (2.81)$$

Conforme calculado no Apêndice B, a derivada de t em relação ao tempo de retardo t_R é dada por:

$$\frac{\partial t}{\partial t_R} = \frac{1}{1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}. \quad (2.82)$$

Assim, temos:

$$P(t) = \frac{P(t_R)}{1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}. \quad (2.83)$$

Substituindo a eq. (2.83) em (2.80), obtemos:

$$\frac{dP(t_R)}{d\Omega} = \frac{R^2}{\mu_0 c} [1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}] |\mathbf{E}_a|^2. \quad (2.84)$$

Integrando em relação à superfície que envolve a carga elétrica, obtemos que a potência total emitida é:

$$P(t_R) = \oint_{\sigma} d\Omega \frac{dP(t_R)}{d\Omega} \rightarrow P(t_R) = \oint_{\sigma} d\Omega \frac{R^2}{\mu_0 c} [1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}] |\mathbf{E}_a|^2. \quad (2.85)$$

Agora, vamos analisar alguns casos particulares.

2.4.1 Radiação emitida em baixas velocidades

Este caso considera uma carga q movendo-se com velocidade muito baixa em comparação com a velocidade da luz. Podemos tomar o limite em que $\boldsymbol{\beta} \rightarrow 0$ na expressão (2.75), resultando em:

$$\lim_{\boldsymbol{\beta} \rightarrow 0} \mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t) = \lim_{\boldsymbol{\beta} \rightarrow 0} \left\{ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\alpha}]}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^3} \right\} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\hat{R} \times [\hat{R} \times \mathbf{a}]}{R}, \quad (2.86)$$

onde usamos a relação $\hat{R} = \mathbf{R}/R$. Lembrando da propriedade do duplo produto vetorial, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, obtemos:

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\hat{R} \cdot \mathbf{a}) \hat{R} - (\hat{R} \cdot \hat{R}) \mathbf{a}}{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\hat{R} \cdot \mathbf{a}) \hat{R} - \mathbf{a}}{R}. \quad (2.87)$$

Para encontrar o vetor de Poynting, precisamos de $|\mathbf{E}_a|^2 = \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_a$, ou seja:

$$|\mathbf{E}_a|^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 R^2} [(\hat{R} \cdot \mathbf{a}) \hat{R} - \mathbf{a}] \cdot [(\hat{R} \cdot \mathbf{a}) \hat{R} - \mathbf{a}] = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 R^2} [|\mathbf{a}|^2 - (\hat{R} \cdot \mathbf{a})^2]. \quad (2.88)$$

O produto escalar pode ser decomposto em $\hat{R} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\hat{R}$:

$$|\mathbf{E}_a|^2 = \frac{q^2 |\mathbf{a}|^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 R^2} [|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{a}|^2 \cos^2 \theta] \Rightarrow |\mathbf{E}_a|^2 = \frac{q^2 |\mathbf{a}|^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 R^2} \sin^2 \theta. \quad (2.89)$$

Assim, o vetor de Poynting (2.78) torna-se:

$$\mathbf{S} = \left(\frac{\mu_0 q^2 |\mathbf{a}|^2}{16\pi^2 c R^2} \sin^2 \theta \right) \hat{R}. \quad (2.90)$$

Vale notar que não há emissão de radiação paralelamente à aceleração da carga, e a máxima emissão ocorre no plano perpendicular. Com o vetor de Poynting, a potência irradiada por unidade de ângulo sólido é dada por:

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 \frac{\mu_0 q^2 |\mathbf{a}|^2}{16\pi^2 c R^2} \sin^2 \theta \rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 |\mathbf{a}|^2}{16\pi^2 c} \sin^2 \theta, \quad (2.91)$$

resultando na potência total:

$$P = \oint d\Omega \frac{\mu_0 q^2 |\mathbf{a}|^2}{16\pi^2 c} \sin^2 \theta. \quad (2.92)$$

Lembrando que o ângulo sólido de uma esfera é $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$,

$$P = \frac{\mu_0 q^2 |\mathbf{a}|^2}{16\pi^2 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta, \quad (2.93)$$

portanto,

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} |\mathbf{a}|^2. \quad (2.94)$$

Esta é conhecida como a fórmula de Larmor para a radiação emitida pela partícula. Vale notar que, neste caso, a direção da velocidade em relação à direção da aceleração não importa.

2.4.2 Radiação emitida por uma carga com uma orientação arbitrária entre velocidade e aceleração

Para o caso geral em que a velocidade e a aceleração da partícula têm uma orientação e módulos arbitrários, devemos utilizar o campo elétrico de radiação como um todo, ou seja:

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\alpha}]}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^3}. \quad (2.95)$$

Ao calcular o módulo quadrado, $|\mathbf{E}_a|^2$, chegamos a:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_a|^2 &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4} \left[\left(\frac{\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^3} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^3} \right) \right], \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4} \left[\frac{(\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]) \cdot (\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}])}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^6} \right]. \end{aligned} \quad (2.96)$$

ou ainda:

$$|\mathbf{E}_a|^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4} \frac{|\hat{R} \times [(\hat{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]|^2}{R^2 [1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^6}, \quad (2.97)$$

em que vale a a Lembrando que potência irradiada por unidade de ângulo sólido é dada por:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{R^2}{\mu_0 c} [1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}] |\mathbf{E}_a|^2. \quad (2.98)$$

Substituindo o campo elétrico, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{q^2 R^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^5} \frac{|\hat{R} \times [(\hat{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]|^2}{[1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^6} \left[\frac{|\hat{R} \times [(\hat{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]|^2}{R^2 [1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^6} \right], \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 (\mu_0 \epsilon_0) (\epsilon_0 c) c^4} \left[\frac{|\hat{R} \times [(\hat{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]|^2}{[1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^5} \right], \end{aligned} \quad (2.99)$$

Usando $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$, temos:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c^4} \left[\frac{|\hat{R} \times [(\hat{R} - \beta) \times \mathbf{a}]|^2}{[1 - \hat{R} \cdot \beta]^5} \right], \quad (2.100)$$

resultando em,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \frac{|\hat{R} \times [(\hat{R} - \beta) \times \mathbf{a}]|^2}{[1 - \hat{R} \cdot \beta]^5}. \quad (2.101)$$

Integrando a expressão acima sobre o ângulo sólido Ω , obtemos::

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left[|\mathbf{a}|^2 - \left| \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c} \right|^2 \right], \quad (2.102)$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ é o fator de Lorentz. As expressões (2.101) e (2.102) são generalizações de Liénard para a fórmula de Larmor (2.94), que é recuperada tomando $\beta \rightarrow 0$.

2.5 Campo Eletromagnético com Base na Teoria da Relatividade Restrita.

A compreensão aprofundada do eletromagnetismo desempenhou um papel crucial no desenvolvimento da Teoria da Relatividade Restrita (TRR), concebida por Albert Einstein em 1905. A TRR destaca-se pela sua capacidade em unificar os conceitos de espaço e tempo, estabelecendo uma relação entre diferentes referenciais por meio das transformações de Lorentz. As fundações da teoria eletromagnética repousam sobre as equações de Maxwell, que governam toda a dinâmica do campo [9, 1, 3].

No contexto eletromagnético, cargas elétricas em repouso originam um campo elétrico, enquanto cargas em movimento, ou corrente elétrica, geram não apenas um campo elétrico, mas também um campo magnético. A relação entre os estados de repouso e movimento retilíneo uniforme, mediada pelas transformações de Lorentz, revela que os fenômenos elétricos e magnéticos são intercambiáveis. Os campos elétrico e magnético tornam-se grandezas mutuamente conversíveis, manifestando-se como facetas de uma entidade maior: o campo eletromagnético.

Neste cenário, a TRR desempenha o papel de descrever o campo eletromagnético de uma maneira mais geral. Isso significa que a TRR confirma que as leis do eletromagnetismo se mantêm consistentes, independentemente da velocidade do observador, alinhando-se com o princípio da relatividade de Einstein. Em outras palavras, essa interconexão entre a TRR e o eletromagnetismo ressalta a natureza integrada e universal das leis físicas, proporcionando uma compreensão mais profunda da relação entre espaço, tempo e campos eletromagnéticos.

O ponto de partida de nossa análise reside na formulação das leis de transformação para grandezas eletromagnéticas fundamentais, tais como densidade de carga, densidade de corrente, potenciais eletromagnéticos e campos eletromagnéticos. Em seguida, introduzimos o crucial conceito do tensor do campo eletromagnético ($F^{\mu\nu}$), a partir do qual derivamos representações manifestamente covariantes para as equações de Maxwell [1]. Concluimos essa abordagem com as leis de conservação da eletrodinâmica, pavimentando o caminho para uma análise mais aprofundada da reação de radiação.

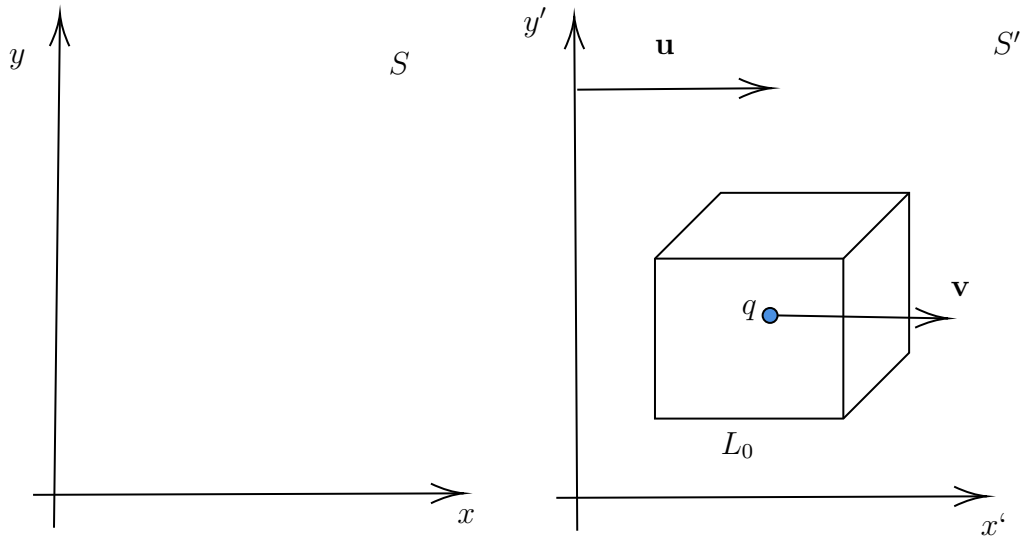
2.5.1 Transformações relativísticas para carga e corrente.

Considere então o seguinte sistema: Um cubo de arestas de comprimento L_0 , dentro do qual há uma carga q . No referencial próprio do cubo, o comprimento das arestas é L_0 , de modo que a densidade volumétrica de carga é dada simplesmente por:

$$\rho_0 = \frac{q}{L_0^3}, \quad (2.103)$$

onde L_0^3 é o volume próprio do cubo. Considere agora o ponto de vista do referencial S em relação ao qual o referencial do cubo se move com velocidade u relativa à S e que uma carga q contida no cubo se move com velocidade v , conforme demonstra a figura abaixo,

Figura 2.2 – Cubo que contém uma carga q em MRU.



Fonte: Os autores.

No referencial S , a dimensão do cubo na direção de seu movimento sofre uma contração no seu comprimento, valendo $L = L_0\sqrt{1 - \beta^2}$, onde $\beta = u/c$. Assim, o volume do cubo no referencial S será dado por $V = L_0^3\sqrt{1 - \beta^2}$, o que implica em um aumento na densidade de carga ρ :

$$\rho = \frac{q}{L_0^3\sqrt{1 - \beta^2}}, \rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \rightarrow \rho = \gamma\rho_0. \quad (2.104)$$

Essa é a expressão que relaciona a densidade de carga em dois referenciais inerciais distintos. A densidade de corrente, quando escrita no ref. S será:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}, \quad (2.105)$$

Substituindo a densidade de carga (2.104), encontramos:

$$\mathbf{j} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{v}. \quad (2.106)$$

Elevando ao quadrado a eq. (2.104),

$$\rho^2 \left[1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right] = \rho_0^2 \rightarrow c^2 \rho^2 - \mathbf{j}^2 = c^2 \rho_0^2. \quad (2.107)$$

Essa equação evidencia que ρ e $\mathbf{j}$ satisfazem uma relação Lorentz-invariante, uma vez que $c^2 \rho_0^2$ é uma quantidade invariante sob as transformações de Lorentz. Essa relação abre a possibilidade de definir o 4-vetor densidade de corrente¹⁰ J^μ ,

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{j}), \quad (2.108)$$

cuja sua norma equivale exatamente à quantidade (2.107),

$$J_\mu J^\mu = (c\rho, -\mathbf{j}) \cdot (c\rho, \mathbf{j}) = c^2 \rho^2 - \mathbf{j}^2 \rightarrow J_\mu J^\mu = c^2 \rho_0^2. \quad (2.109)$$

Outro fato interessante decorre da contração do operador 4-derivada,

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (2.110)$$

com a 4-corrente encontramos:

$$\partial_\mu J^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \cdot (c\rho, \mathbf{j}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (2.111)$$

O lado direito representa a conhecida equação de continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2.112)$$

cuja sua representação covariante é dada por:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (2.113)$$

Vale notar que a densidade de corrente obedece a lei de transformação para tensores contravariantes, ou seja:

$$J^{\nu'} = \Lambda^{\nu'}_\mu J^\mu, \quad (2.114)$$

¹⁰ Em que nesse trabalho seguimos a convenção adotada em [9] para os 4-vetores covariantes (J_μ) e contravariantes (J^μ) onde vale a relação $J_\mu = \eta_{\mu\nu} J^\nu$, com $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ o tensor métrico de Minkowski.

na qual $J^{\nu'}$ é o tensor densidade de corrente escrito no referencial S' , $\Lambda_{\mu}^{\nu'}$ é um elemento da matriz de transformações de Lorentz e J^{μ} é a 4-corrente no referencial S . Usando as transformações de Lorentz para um boost no eixo-x a matriz $\Lambda_{\mu}^{\nu'}$ assume a forma:

$$\Lambda_{\mu}^{\nu'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.115)$$

Substituindo em (2.114):

$$J^{\nu'} = \Lambda_{\mu}^{\nu'} J^{\mu},$$

$$\begin{pmatrix} c\rho'_0 \\ j'_x \\ j'_y \\ j'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho_0 \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}, \quad (2.116)$$

obtendo as seguintes transformações:

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{u}{c^2} j_x \right), \quad j'_x = \gamma (j_x - u\rho), \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z. \quad (2.117)$$

Observe que as componentes perpendiculares em relação ao movimento relativo permanecem invariantes ($j'_y = j_y$ e $j'_z = j_z$), de maneira semelhante como ocorre com as componentes do momento linear.

2.5.2 4-potencial de Lorentz e transformações relativísticas para campo elétrico e magnético

Como foi apresentado anteriormente, podemos escrever as equações de Maxwell em sua forma tensorial usando os potenciais escalar (ϕ) e vetor ($\mathbf{A}$),

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{e} \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.118)$$

Na formulação tensorial-relativística do campo eletromagnético, há um 4-vetor que congrega as relações acima em uma única estrutura. Trata-se do **4-potencial de Lorentz**, expressado por:

$$A^{\nu} = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right). \quad (2.119)$$

Uma aplicação direta deste tensor 4-potencial é a obtenção rápida das transformações relativísticas (para um boost na direção do eixo-x) para os campos elétrico e magnético, partindo-se da transformação usual dos 4-vetores,

$$A^{\nu'} = \Lambda_{\alpha}^{\nu'} A^{\alpha}, \quad (2.120)$$

obtendo assim,

$$\phi' = \gamma(\phi - uA_x), \quad A'_x = \gamma\left(A_x - \frac{u}{c^2}\phi\right), \quad A'_y = A_y \quad \text{e} \quad A'_z = A_z. \quad (2.121)$$

Primeiramente consideremos a componente-x do campo elétrico no ref. S' :

$$E'_x = -\partial_{x'}\phi' - \partial_{t'}A'_x. \quad (2.122)$$

Juntamente com as transformações das derivadas,

$$\partial_{x'} = \gamma\left(\partial_x + \frac{u}{c^2}\partial_t\right), \quad \partial_{t'} = \gamma(\partial_t + u\partial_x), \quad \partial_{y'} = \partial_y, \quad \partial_{z'} = \partial_z. \quad (2.123)$$

Diante disso, a transformação da componente-x do campo elétrico fica:

$$\begin{aligned} E'_x &= -\gamma\left(\partial_x + \frac{u}{c^2}\partial_t\right)\gamma(\phi - uA_x) - \gamma(\partial_t + u\partial_x)\gamma\left(A_x - \frac{u}{c^2}\phi\right), \\ E'_x &= -\gamma^2\left[\cancel{\partial_x\phi} + \frac{u}{c^2}\cancel{\partial_t\phi} - \cancel{u\partial_xA_x} + \frac{u^2}{c^2}\partial_tA_x + \partial_tA_x + \cancel{u\partial_xA_x} - \frac{u}{c^2}\cancel{\partial_t\phi} - \frac{u^2}{c^2}\partial_x\phi\right], \\ E'_x &= -\gamma^2\left[\partial_x\phi\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + \partial_tA_x\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\right] = -\partial_x\phi - \partial_tA_x, \\ E'_x &= E_x. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Fazendo o mesmo procedimento para as componentes y e z, encontramos:

$$\begin{aligned} E'_y &= -\partial_{y'}\phi' - \partial_{t'}A'_{y'} = -\gamma\partial_y(\phi - uA_x) - \gamma(\partial_t + u\partial_x)A_y, \\ E'_y &= \gamma\left[-\partial_y\phi - \partial_tA_y + u\underbrace{(\partial_xA_y - \partial_yA_x)}_{B_z}\right], \\ E'_y &= \gamma[E_y + uB_z]. \end{aligned} \quad (2.125)$$

e,

$$\begin{aligned} E'_z &= -\partial_{z'}\phi' - \partial_{t'}A'_{z'} = -\gamma\partial_z(\phi - uA_x) - \gamma(\partial_t + u\partial_x)A_z, \\ E'_z &= \gamma\left[-\partial_z\phi - \partial_tA_z - u\underbrace{(\partial_xA_z - \partial_zA_x)}_{B_y}\right], \\ E'_z &= \gamma[E_z - uB_y]. \end{aligned} \quad (2.126)$$

De maneira análoga, as transformações para o campo magnético são obtidas pela relação com o potencial vetor: $B_k = \mathbf{e}_{ijk}\partial_iA^j$. Logo, para o eixo-x:

$$B'_x = (\partial_{y'}A'_{z'} - \partial_{z'}A'_{y'}) = \partial_yA_z - \partial_zA_y = B_x. \quad (2.127)$$

Para a componente-y,

$$\begin{aligned} B'_y &= (\partial_{z'}A'_{x'} - \partial_{x'}A'_{z'}) = \gamma\left[\partial_z\left(A_x - \frac{u}{c^2}\phi\right) - \left(\partial_x + \frac{u}{c^2}\partial_t\right)A_z\right], \\ B'_y &= \gamma\left[\partial_zA_x - \partial_xA_z + \frac{u}{c^2}\underbrace{(-\partial_z\phi - \partial_tA_z)}_{E_z}\right], \\ B'_y &= \gamma\left[B_y + \frac{u}{c^2}E_z\right]. \end{aligned} \quad (2.128)$$

E por fim, a componente-z é lida como:

$$\begin{aligned} B'_z &= (\partial_{x'} A_{y'} - \partial_{y'} A_{x'}) = \gamma \left[\left(\partial_x + \frac{u}{c^2} \partial_t \right) A_y - \partial_y \left(A_x - \frac{u}{c^2} \phi \right) \right], \\ B'_y &= \gamma \left[\partial_x A_y - \partial_y A_x - \frac{u}{c^2} \underbrace{(-\partial_y \phi - \partial_t A_y)}_{E_y} \right], \\ B'_x &= \gamma \left[B_z - \frac{u}{c^2} E_y \right]. \end{aligned} \quad (2.129)$$

2.5.3 Tensor do campo eletromagnético, equações de Maxwell na Forma tensorial

Vimos que o 4-potencial é a estrutura de representação dos campos elétricos e magnéticos, de modo que uma formulação tensorial para o campo eletromagnético é definido a partir do tensor $F^{\alpha\beta}$, antissimétrico e de rank-2, no qual é utilizado para escrever as equações de Maxwell tensorialmente. Definindo o tensor, $F^{\alpha\nu}$ como:

$$F^{\alpha\nu} = \partial^\alpha A^\nu - \partial^\nu A^\alpha, \quad (2.130)$$

é de imediato a averiguação de que $F^{\alpha\alpha} = 0$, comprovando a anti-simetria do tensor. Para calcular suas componentes, primeiro vamos tomar $\alpha = 0$ e $\nu = i = 1, 2, 3$, ou seja,

$$\begin{aligned} F^{0i} &= \partial^0 A^i - \partial^i A^0, \\ F^{0i} &= \left[\frac{1}{c} \partial_t A^i + \partial^i \left(\frac{\phi}{c} \right) \right] = -\frac{1}{c} [-\partial^i \phi - \partial_t A^i]. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Desses resultados, podemos definir o campo elétrico da seguinte maneira:

$$\frac{E^i}{c} = -F^{0i} = F^{i0}, \quad (2.132)$$

Agora calculando as componentes restantes:

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -B_z, \quad (2.133)$$

$$F^{13} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = -\partial_x A_z + \partial_z A_x = B_y, \quad (2.134)$$

$$F^{23} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 = -\partial_y A_z + \partial_z A_y = -B_x. \quad (2.135)$$

Este mesmo resultado pode ser obtido de uma forma genérica observando que $B_k = \mathbf{e}_{kij} \partial^i A^j$. Para obter essa expressão, vamos multiplicar F^{ij} por $\mathbf{e}_{kij}$,

$$\mathbf{e}_{kij} F^{ij} = \mathbf{e}_{kij} (\partial^i A^j - \partial^j A^i) \rightarrow \mathbf{e}_{kij} F^{ij} = 2\mathbf{e}_{kji} \partial^i A^j = 2B_k, \quad (2.136)$$

$$B_k = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{kij} F^{ij} \quad \text{ou} \quad F^{ij} = \mathbf{e}^{kij} B_k. \quad (2.137)$$

De posse dos resultados vamos escrever o tensor $F^{\alpha\nu}$ em sua forma matricial:

$$F^{\alpha\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

Vamos agora obter as equações de Maxwell na sua formulação tensorial. Partindo da lei de Gauss para o campo elétrico e a lei de Ampère-Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \partial_i E^i = \mu_0 c^2 \rho, \quad (2.139)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \rightarrow \mathbf{e}_{kij} \partial_i B^j - \frac{1}{c^2} \partial_t E^k = \mu_0 j^k, \quad (2.140)$$

onde usamos $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$. Da primeira equação resultamos,

$$\partial_i \left(\frac{E^i}{c} \right) = \mu_0 (c\rho) \rightarrow \partial_i F^{i0} = \mu_0 J^0. \quad (2.141)$$

Fazendo o mesmo procedimento para a outra equação,

$$\partial_i \left(\mathbf{e}_{kij} B^j \right) - \partial_0 \frac{E^k}{c} = \mu_0 J^k, \quad (2.142)$$

$$\partial_i F^{ik} + \partial_0 F^{0k} = \mu_0 J^k \rightarrow \partial_\alpha F^{\alpha k} = \mu_0 J^k. \quad (2.143)$$

Em que J^0 e J^k são as componentes da 4-corrente $J^\nu = (c\rho, \mathbf{j})$. Combinando (2.141) e (2.143), obtemos as equações de Maxwell não-homogêneas em sua formulação tensorial:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\nu} = \mu_0 J^\nu. \quad (2.144)$$

As outras duas equações de Maxwell (homogêneas) também podem ser expressas tensorialmente. Seja a Lei de Gauss para o magnetismo e a lei de Faraday-Lenz, respectivamente:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \partial_i B^i = 0, \quad (2.145)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \rightarrow \mathbf{e}_{kij} \partial_i \frac{E^j}{c} + \frac{1}{c} \partial_t B^k = 0. \quad (2.146)$$

De modo análogo as equações anteriores, podemos definir o campo magnético como:

$$B^i = \mathcal{F}^{0i} = -\mathcal{F}^{i0}. \quad (2.147)$$

Juntamente com:

$$\mathcal{F}^{ki} = -\mathbf{e}^{kij} \frac{E_j}{c} = \mathcal{F}^{ik}. \quad (2.148)$$

Substituindo esses resultados:

$$\partial_i \mathcal{F}^{i0} = 0, \quad (2.149)$$

$$\partial_0 \mathcal{F}^{0k} + \partial_i \left(\mathbf{e}_{kij} \frac{E^j}{c} \right) = 0. \quad (2.150)$$

As equações de Maxwell homogêneas resultam em:

$$\partial_0 \mathcal{F}^{0i} + \partial_j \mathcal{F}^{ji} = 0, \quad (2.151)$$

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha i} = 0. \quad (2.152)$$

Unificando as eq. (2.149) e (2.152) obtemos:

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\nu} = 0. \quad (2.153)$$

Em que $\mathcal{F}^{\alpha\nu}$ é chamado **tensor dual do campo eletromagnético**. Escrevendo sua representação matricial:

$$\mathcal{F}^{\alpha\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.154)$$

A relação entre o tensor $F^{\alpha\nu}$ e seu dual $\mathcal{F}^{\alpha\nu}$ é lida por:

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.155)$$

na qual $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ é tensor de Levi-Civita 4-dimensional. Nesse estágio verifica-se que a partir do tensor $F^{\mu\nu}$, obtemos os principais resultados do eletromagnetismo clássico em sua versão tensorial.

2.5.4 Invariantes relativísticos

Uma aplicação interessante da formulação tensorial é a construção de invariantes relativísticos próprios do campo eletromagnético. Sabendo que quantidades escritas como contrações tensoriais são invariantes perante mudanças de coordenadas, é razoável propor que tais invariantes sejam escritas em termos de contrações dos tensores $F^{\mu\nu}$ e $\mathcal{F}^{\mu\nu}$. O primeiro invariante, $\mathbb{I}_1$, é definido como a contração de $F^{\mu\nu}$ consigo próprio, ou seja,

$$\mathbb{I}_1 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.156)$$

Calculando a contração,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ij} F^{ij}, \\ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= 2F_{0i} F^{0i} + F_{ij} F^{ij}. \end{aligned} \quad (2.157)$$

Usando as relações para o campo elétrico e magnético, dados por (2.132) e (2.137) respectivamente, encontramos:

$$F_{0i} F^{0i} = \left(\frac{E_i}{c} \right) \left(-\frac{E^i}{c} \right) = -\frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2, \quad (2.158)$$

$$F_{ij} F^{ij} = \epsilon^{kij} \epsilon_{pij} B_p B^k = 2\delta_k^p B_p B^k = 2\mathbf{B}^2, \quad (2.159)$$

em que na ultima passagem utilizamos $e^{pij}e_{kij} = 2\delta_k^p$. Substituindo esses resultados em (2.156), temos:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_1 &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(2F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij}), \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{c^2}\mathbf{E}^2 - 2\mathbf{B}^2\right) = \mathbf{B}^2 - \frac{1}{c^2}\mathbf{E}^2.\end{aligned}\quad (2.160)$$

Vale observar que $\mathbb{I}_1$ envolve exclusivamente as normas dos vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, não fazendo nenhuma referência à direção relativa entre eles. Neste sentido, pode-se então ser definido um outro invariante, $\mathbb{I}_2$, que seja sensível a direção entre os campos. Este invariante é dado a partir de:

$$\mathbb{I}_2 = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.\quad (2.161)$$

Fundamentando-se na definição do tensor dual, escrevemos explicitamente a relação entre o invariante com os campos:

$$\mathbb{I}_2 = -\frac{1}{4}[\mathcal{F}_{0i}F^{0i} + \mathcal{F}_{i0}F^{i0} + \mathcal{F}_{ij}F^{ij}] = -\frac{1}{4}[2\mathcal{F}_{0i}F^{0i} + \mathcal{F}_{ij}F^{ij}].\quad (2.162)$$

Usando $\mathcal{F}_{0i} = -B_i$, $\mathcal{F}_{ij} = -\mathbf{e}_{ijl}E^l/c$, $F^{0i} = -E^i/c$ e $F^{ij} = -\mathbf{e}^{ijk}B_k$, temos:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_2 &= -\frac{1}{4}\left[2B_i\frac{E^i}{c} + \mathbf{e}^{ijk}\mathbf{e}_{ijl}B_k\frac{E^l}{c}\right], \\ &= -\frac{1}{4}\left[2B_i\frac{E^i}{c} + 2\delta_l^k B_k\frac{E^l}{c}\right] = -\frac{1}{4}\left[2B_i\frac{E^i}{c} + 2B_l\frac{E^l}{c}\right], \\ \mathbb{I}_2 &= -\frac{1}{c}\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}.\end{aligned}\quad (2.163)$$

2.5.5 Leis de conservação e o tensor energia-momento do campo eletromagnético.

Na eletrodinâmica clássica sabemos que o campo eletromagnético transporta energia e momento. As quantidades relacionadas as essas grandezas físicas estão intimamente ligadas a simetrias e invariâncias na integral de ação¹¹. De maneira semelhante as equações de Maxwell, neste trabalho vamos partir do limite clássico e estender para o caso relativístico.

- Conservação da Energia:

Como ponto de partida, vamos considerar a força de Lorentz expressa como:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).\quad (2.164)$$

Na mecânica clássica o trabalho realizado por uma força é dado por:

$$dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \rightarrow dW = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt.\quad (2.165)$$

¹¹ Para o calculo detalhado via o Teorema de Noether veja [16].

O segundo termo é nulo, pois $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \perp \mathbf{v}$. Assim a potência dissipada pela força é dada por:

$$P = \frac{dW}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} . \quad (2.166)$$

Considerando que ao invés de uma carga pontual q , temos uma densidade volumétrica de cargas, ou seja,

$$P = \int_V d^3r (\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{E} = \int_V d^3r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} , \quad (2.167)$$

onde usamos a relação $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Agora vamos fazer o produto escalar $\mathbf{E}$ na equação de Ampere-Maxwell,

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}}{\mu_0} \cdot \left(\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) . \quad (2.168)$$

Na primeira parcela vamos usar a identidade vetorial: $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$,

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0} \left[(\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})) - \mu_0\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \right] , \quad (2.169)$$

e também a equação de Faraday-Lenz,

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0} \left[\left(\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) + \mathbf{B} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \right) - \mu_0\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \right] , \quad (2.170)$$

ou ainda,

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \left[-\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \right] . \quad (2.171)$$

O primeiro termo é o vetor de Poynting, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$. Já para os outros vamos usar a regra de Leibniz para a derivada do produto escalar,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (2.172)$$

Diante disso, temos:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \left[-\nabla \cdot \mathbf{S} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{2} \right) \right] , \quad (2.173)$$

onde o termo entre parênteses é a densidade de energia armazenada nos campos eletromagnéticos (u_{ele}). Substituindo esses resultados em (2.167), obtemos:

$$P = \int_V d^3r \left[-\nabla \cdot \mathbf{S} - \frac{\partial u_{ele}}{\partial t} \right] \rightarrow P = - \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{S} - \int_V d^3r \frac{\partial u_{ele}}{\partial t} . \quad (2.174)$$

Como estamos integrando em todo o volume e ele não depende do tempo, a derivada parcial pode sair da integral como uma derivada total e usando o teorema da divergência no primeiro termo, encontramos:

$$P = - \oint_{\sigma=\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} - \frac{d}{dt} \int_V d^3r u_{ele} . \quad (2.175)$$

Sabendo que o trabalho realizado também gera uma variação na energia mecânica das partículas,

$$P = \frac{dU_{mec}}{dt} = - \oint_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} - \frac{dU_{ele}}{dt} \rightarrow \frac{dU_{tot}}{dt} = - \oint_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}. \quad (2.176)$$

Logo, obtemos o conhecido teorema de Poynting para o balanço de energia. Podemos analisar que a eq. (2.174) possui um termo já apresentado anteriormente. O invariante relativístico, dado por (2.160) apresenta quantidades semelhantes. Isso pode indicar que existe um tensor que engloba toda essa informação com relação ao balanço de energia. Se dividirmos toda eq. (2.174) por c , temos:

$$-\frac{1}{c} j^k E^k = \left[\frac{1}{c\mu_0} \partial_k (\epsilon^{kij} E_i B_j) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^p B_p}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^q E_q}{2} \right) \right]. \quad (2.177)$$

Escrevendo os termos de uma maneira conveniente:

$$j^k \left(-\frac{E_k}{c} \right) = \left[\frac{1}{\mu_0} \partial_k \left(\epsilon^{kij} B_j \frac{E_i}{c} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^p B_p}{2\mu_0} + \frac{c^2 \epsilon_0}{2} \left(\frac{E^q}{c} \right) \left(\frac{E_q}{c} \right) \right) \right]. \quad (2.178)$$

Usando as relações tensoriais para os campos elétricos (2.132), magnéticos (2.137) e a 4-corrente (2.108) obtemos:

$$j^k F_k^0 = \left[-\frac{1}{\mu_0} \partial_k (F^{ki} F_i^0) - \partial_0 \left(\frac{\eta^{00}}{2\mu_0} \left(\frac{\epsilon_{plm} F^{lm}}{2} \right) \left(\frac{\epsilon^{prs} F_{rs}}{2} \right) + \frac{1}{2\mu_0} F^{0q} F_q^0 \right) \right], \quad (2.179)$$

onde usamos a métrica de Minkowski, $\eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Reorganizando os termos:

$$j^k F_k^0 = \left[\frac{1}{\mu_0} \partial_k (F^{ki} F_i^0) + \partial_0 \left(\frac{\eta^{00} \epsilon_{plm} \epsilon^{prs}}{8\mu_0} F^{lm} F_{rs} + \frac{1}{2\mu_0} F^{0q} F_q^0 \right) \right]. \quad (2.180)$$

O produto dos Levi-Civita nos fornece: $\epsilon_{plm} \epsilon^{prs} = (\delta_l^r \delta_m^s - \delta_m^r \delta_l^s)$. Logo,

$$\epsilon_{plm} \epsilon^{prs} F^{lm} F_{rs} = F^{lm} F_{rs} (\delta_l^r \delta_m^s - \delta_m^r \delta_l^s) = F^{rs} F_{rs} - F^{sr} F_{rs} = 2F^{rs} F_{rs}. \quad (2.181)$$

Substituindo,

$$j^k F_k^0 = \left[-\frac{1}{\mu_0} \partial_k (F^{ki} F_i^0) - \partial_0 \left(\frac{\eta^{00}}{4\mu_0} F^{rs} F_{rs} + \frac{1}{2\mu_0} F^{0q} F_q^0 \right) \right], \quad (2.182)$$

$$j^k F_k^0 = \left[-\frac{1}{\mu_0} \partial_k (F^{ki} F_i^0) - \partial_0 \left(\frac{\eta^{00}}{4\mu_0} F^{rs} F_{rs} + \frac{1}{2\mu_0} F^{0q} F_q^0 \right) \right]. \quad (2.183)$$

Podemos somar um termo proporcional a η^{0k} nessa equação sem alterar o resultado pois $\eta^{0k} = 0$. Fazendo esse procedimento e organizando as parcelas chegamos em:

$$J^\nu F_\nu^0 = \left[\partial_k \left(\frac{\eta^{0k}}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{\mu_0} F^{ki} F_i^0 \right) + \partial_0 \left(\frac{\eta^{00}}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2\mu_0} F^{0r} F_r^0 + \frac{1}{2\mu_0} F^{0q} F_q^0 \right) \right], \quad (2.184)$$

resultando,

$$J^\nu F_\nu^0 = \left[\partial_k \left(\frac{\eta^{0k}}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{\mu_0} F^{ki} F_i^0 \right) + \partial_0 \left(\frac{\eta^{00}}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{\mu_0} F^{0q} F_q^0 \right) \right] , \quad (2.185)$$

$$J^\nu F_\nu^0 = \partial_\nu \left[\frac{\eta^{\nu 0}}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{\mu_0} F^{\nu\lambda} F_\lambda^0 \right] = \partial_\nu T^{\nu 0} . \quad (2.186)$$

O termo entre chaves é a componente $T^{\nu 0}$ do tensor energia-momento,

$$T^{\nu 0} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\eta^{\nu 0}}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + F^{\nu\lambda} F_\lambda^0 \right] . \quad (2.187)$$

Para obter as componentes espaciais, vamos verificar a conservação do momento linear associado ao campo eletromagnético.

- Conservação do momento linear:

Para tal procedimento, vamos novamente partir da força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = \int_V d^3r (\rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \int_V d^3r (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) . \quad (2.188)$$

Usando as leis de Gauss e de Ampere-Maxwell, obtemos a densidade volumétrica de força,

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \epsilon_0 \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \\ &= \epsilon_0 \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} . \end{aligned} \quad (2.189)$$

Usando as identidades vetoriais, e organizando os termos

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \epsilon_0 \left(\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right) . \quad (2.190)$$

O ultimo termo é identificado como o vetor de Poynting e usando a lei de Faraday-Lenz,

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} . \quad (2.191)$$

Se somamos $\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B})/\mu_0$ a equação não se altera, pois o termo entre parênteses é identicamente nulo pela lei de Gauss para o campo magnético. Portanto,

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] + \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} . \quad (2.192)$$

Substituindo esses resultados em (2.188),

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= - \int_V d^3r \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right) + \int_V d^3r \left\{ \epsilon_0 [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \right\} . \end{aligned} \quad (2.193)$$

Sabendo que a força causa uma variação no momento mecânico da partícula temos,

$$\frac{d\mathbf{P}_{mec}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V d^3r \left(\frac{\mathbf{S}}{c^2} \right) = \int_V d^3r \left\{ \epsilon_0 [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] + \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \right\} . \quad (2.194)$$

A integral envolvendo o vetor de Poynting tem dimensão de densidade de momento, portanto é conveniente definir a quantidade:

$$\mathbf{P}_{ele} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} , \quad (2.195)$$

e integrando sob o volume obtemos o momento linear total associado ao campo eletromagnético,

$$\mathbf{P}_{ele} = \int_V d^3r \mathbf{P}_{ele} = \int_V d^3r \left(\frac{\mathbf{S}}{c^2} \right) . \quad (2.196)$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \overbrace{(\mathbf{P}_{mec} + \mathbf{P}_{ele})}^{\mathbf{P}_{tot}} = \int_V d^3r \left\{ \epsilon_0 [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] + \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \right\} . \quad (2.197)$$

Vamos resolver o lado direito,

$$[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] = [E^i (\partial_j E^j) - \epsilon_{ipq} E^p (\epsilon_{qrs} \partial_r E^s)] . \quad (2.198)$$

Podemos eliminar os símbolos de Levi-Civita no segundo termo usando a propriedade: $\epsilon_{ipq}\epsilon_{qrs} = (\delta_{ir}\delta_{ps} - \delta_{is}\delta_{pr})$, portanto:

$$[E^i (\partial_j E^j) - (\delta_{ir}\delta_{ps} - \delta_{is}\delta_{pr}) E^p (\partial_r E^s)] = [E^i (\partial_j E^j) - (E^s (\partial_i E^s) - E^p (\partial_p E^i))] . \quad (2.199)$$

Como p e j são índices mudos, o primeiro e ultimo termo são os resultados de uma derivada do produto, ou seja:

$$[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] = [\partial_j (E^i E^j) - E^j (\partial_i E^j)] . \quad (2.200)$$

Na segunda parcela vamos usar novamente a regra de Leibniz, ou seja:

$$\partial_i (E^s E^s) = 2E^s (\partial_i E^s) \rightarrow E^s (\partial_i E^s) = \frac{1}{2} \partial_j (\delta_{ij} E^s E^s) , \quad (2.201)$$

em que usamos a relação $\partial_i = \delta_{ij} \partial_j$. Logo:

$$[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] = \partial_j \left[E^i E^j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^s E^s \right] . \quad (2.202)$$

Por um processo análogo para o campo magnético, resultamos:

$$\frac{d\mathbf{P}_{tot}}{dt} = \int d^3r \partial_j \left[\epsilon_0 E^i E^j - \frac{\epsilon_0}{2} \delta_{ij} E^s E^s + \frac{1}{\mu_0} B^i B^j - \frac{1}{2\mu_0} \delta_{ij} B^s B^s \right] . \quad (2.203)$$

O termo entre colchetes é conhecido como tensor de stress de Maxwell, T_M^{ij} ,

$$\frac{d\mathbf{P}_{tot}}{dt} = \int_V d^3r \partial_j T_M^{ij} \rightarrow \frac{d\mathbf{P}_{tot}}{dt} = \oint_{\partial V} d\mathbf{A} T_M^{ij}, \quad (2.204)$$

em que na ultima passagem utilizamos o teorema da divergência. A eq. (2.204) estabelece a lei de conservação do momento linear total do sistema formado pelas cargas e pelos campos eletromagnéticos. Como o lado esquerdo tem dimensão de força, o tensor de stress de Maxwell tem dimensão de força por unidade de área. Por um procedimento análogo ao da conservação de energia, vamos escrever essa lei de conservação de uma maneira covariante. Partindo de:

$$\mathbf{f} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \partial_j \left[\epsilon_0 E^i E^j - \frac{\epsilon_0}{2} \delta_{ij} E^s E_s + \frac{1}{\mu_0} B^i B^j - \frac{1}{2\mu_0} \delta_{ij} B^s B_s \right]. \quad (2.205)$$

Organizando de maneira conveniente,

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{E_m}{c} \epsilon^{imn} B_n \right) + \partial_j \left\{ \frac{\epsilon_0 c^2}{c^2} \left[E^i E^j - \frac{\delta_{ij}}{2} E^s E_s \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[B^i B^j - \frac{\delta_{ij}}{2} B^s B_s \right] \right\}. \quad (2.206)$$

Vamos trabalhar com o termo do campo magnético,

$$B^i B^j - \frac{\delta_{ij}}{2} B^s B_s = (B^i B^j - \delta_{ij} B^s B_s) - \frac{\delta_{ij}}{2} B^s B_s + \delta_{ij} B^s B_s = (B^i B^j - \delta_{ij} B^s B_s) + \frac{\delta_{ij}}{2} B^s B_s. \quad (2.207)$$

A relação entre parenteses pode ser calculado via o tensor $F^{\mu\nu}$. Fazendo a contração:

$$F^{ik} F_k^j = \epsilon_{kil} \epsilon_{kjm} B^l B^m = (\delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{lj}) B^l B^m = \delta_{ij} B^l B^l - B^i B^j. \quad (2.208)$$

Logo,

$$B^i B^j - \frac{\delta_{ij}}{2} B^s B_s = \frac{\delta_{ij}}{2} B^s B_s - F^{ik} F_k^j. \quad (2.209)$$

Substituindo essa relação em (2.206) temos:

$$-\partial_0 \left(\frac{1}{\mu_0} F_k^0 F^{ik} \right) + \partial_j \left\{ \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{E^i E^j}{c} - \frac{\delta_{ij}}{2} \frac{E^s E_s}{c} - F^{ik} F_k^j + \frac{\delta_{ij}}{2} B^s B_s \right] \right\}, \quad (2.210)$$

$$-\partial_0 \left(\frac{1}{\mu_0} F_k^0 F^{ik} \right) + \partial_j \left\{ \frac{1}{\mu_0} \left[- \underbrace{(F^{i0} F_0^j + F^{ik} F_k^j)}_{F^{i\lambda} F_\lambda^j} + \frac{\overbrace{\delta_{ij}}^{-\eta^{ij}}}{2} \underbrace{\left(B^s B_s - \frac{E^s E_s}{c^2} \right)}_{\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}} \right] \right\}, \quad (2.211)$$

De maneira similar ao feito da seção anterior também podemos somar um termo proporcional a η^{0k} na componente temporal reescrevendo de maneira simétrica,

$$-\partial_0 \left(\frac{1}{\mu_0} F_k^0 F^{ik} + \frac{\eta^{0i}}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) - \partial_j \left\{ \frac{1}{\mu_0} \left[F^{i\lambda} F_\lambda^j + \frac{\eta^{ij}}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right] \right\} = -\partial_\nu T^{\nu j}, \quad (2.212)$$

onde denominamos o oposto do tensor de stress de Maxwell como a componente ij do tensor energia-momento. Ou seja,

$$T^{ij} = -T_M^{ij} = \frac{1}{\mu_0} \left[F^{i\lambda} F_{\lambda}^j + \frac{\eta^{ij}}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right]. \quad (2.213)$$

Combinando este resultado com a eq. (2.187) obtemos a versão covariante do tensor momento-energia que reúne todas as informação a cerca da energia e do momento linear associados ao campo eletromagnético.

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left[F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu} + \frac{\eta^{\nu\mu}}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right]. \quad (2.214)$$

Fazendo uso de (2.173) e (2.205) podemos escrever de forma covariante as leis de conservação de energia e momento linear,

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = J^{\lambda} F_{\lambda}^{\nu}. \quad (2.215)$$

Para o caso de uma partícula pontual, a 4-corrente assume

$$J^{\lambda} = q U^{\lambda}, \quad (2.216)$$

onde $U^{\lambda} = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ é a 4-velocidade da carga q . Dessa forma, a eq. (2.215) fica:

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = q U^{\lambda} F_{\lambda}^{\nu}, \quad (2.217)$$

em que o lado direito é a versão covariante da força de Lorentz, ou seja:

$$f^{\mu} = q U^{\lambda} F_{\lambda}^{\mu}. \quad (2.218)$$

Expressando em componentes:

$$\begin{aligned} f^0 &= q \left[U^0 F_0^0 + U^i F_i^0 \right], \\ \gamma \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) &= q (\gamma v^i) \left(\frac{E^i}{c} \right), \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.219)$$

em que na ultima passagem usamos $\mathbf{j} = q\mathbf{v}$. Agora para a componente espacial:

$$\begin{aligned} f^i &= q \left[U^0 F_0^i + U^j F_j^i \right], \\ \gamma F^i &= q \left[(\gamma c) \left(\frac{E^i}{c} \right) + (\gamma v^j) (e_{ijk} B^k) \right], \\ \mathbf{F} &= q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (2.220)$$

2.5.6 Fórmula de Larmor covariante para a potência de radiação

Para realizar uma descrição covariante da reação de radiação, iremos precisar da versão relativística da fórmula de Larmor. Para obter a potência total irradiada por uma carga acelerada, usaremos a versão não relativística da formula de Larmor, expressa por:

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} |\mathbf{a}|^2 = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi m^2 c} \left| m \frac{dv}{dt} \right|^2 \rightarrow P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi m^2 c} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right). \quad (2.221)$$

Como essa equação foi obtida no limite não relativístico, $\beta \rightarrow 0$, podemos sugerir que a versão covariante seja da forma¹²,

$$P = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi m^2 c} \left(\frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} \right), \quad (2.222)$$

onde $d\tau = dt/\gamma$ e $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$ é o 4-momento da partícula. Para mostrar que essa equação é válida, vamos fazer a contração:

$$-\frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 = \left(\gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\gamma \frac{dE}{dt} \right)^2. \quad (2.223)$$

Considerando o sistema em que vale as quantidades, $E = \gamma mc^2$ e $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$, temos:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt} + \gamma m\mathbf{a} \quad \text{e} \quad \frac{dE}{dt} = mc^2 \frac{d\gamma}{dt}. \quad (2.224)$$

Logo,

$$\gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma^4 m\mathbf{v} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right) + \gamma^2 m\mathbf{a} \quad \text{e} \quad \gamma \frac{dE}{dt} = \gamma^4 m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}), \quad (2.225)$$

onde usamos a derivada do fator de Lorentz: $d\gamma/dt = \gamma^3(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})/c^2$. Elevando ao quadrado as quantidades acima,

$$\left(\gamma \frac{dE}{dt} \right)^2 = [\gamma^4 m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})]^2 = \gamma^8 m^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2, \quad (2.226)$$

$$\begin{aligned} \left(\gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 &= \left[\gamma^4 m \frac{\mathbf{v}}{c} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \right) + \gamma^2 m\mathbf{a} \right]^2, \\ &= \gamma^8 m^2 \left| \frac{\mathbf{v}}{c} \right|^2 \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \right)^2 + \gamma^4 m^2 |\mathbf{a}|^2 + 2\gamma^6 m^2 \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.227)$$

Substituindo,

$$-\frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} = \left\{ \gamma^8 m^2 \left| \frac{\mathbf{v}}{c} \right|^2 \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \right)^2 + \gamma^4 m^2 |\mathbf{a}|^2 + 2\gamma^6 m^2 \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \right)^2 - \frac{1}{c^2} [\gamma^8 m^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2] \right\}. \quad (2.228)$$

¹² Procedimento similar ao realizado no [9].

ou,

$$-\frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} = \left\{ -\gamma^8 m^2 \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \right)^2 \left[1 - \left| \frac{\mathbf{v}}{c} \right|^2 \right] + \gamma^4 m^2 |\mathbf{a}|^2 + 2\gamma^6 m^2 \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \right)^2 \right\} \cdot \quad (2.229)$$

Organizando os termos:

$$\gamma^6 m^2 \left\{ -\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \right)^2 + \frac{1}{\gamma^2} |\mathbf{a}|^2 + 2 \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \right)^2 \right\}. \quad (2.230)$$

E usando o resultado:

$$\frac{1}{\gamma^2} |\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2 \left[1 - \left| \frac{\mathbf{v}}{c} \right|^2 \right] = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{a}|^2 \left| \frac{\mathbf{v}}{c} \right|^2, \quad (2.231)$$

encontramos:

$$-\frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} = \gamma^6 m^2 \left[|\mathbf{a}|^2 - \left| \frac{\mathbf{v}}{c} \right|^2 |\mathbf{a}|^2 + \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \right)^2 \right] = \gamma^6 m^2 \left[|\mathbf{a}|^2 - \left| \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c} \right|^2 \right], \quad (2.232)$$

em que na ultima passagem utilizamos a propriedade: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$. Portanto, (2.223) é expressa por:

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left[|\mathbf{a}|^2 - \left| \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c} \right|^2 \right]. \quad (2.233)$$

Esse resultado é exatamente a generalização da fórmula de Larmor para a potência de radiação, mostrada em (2.102), assegurando que a suposição indicada é de fato verdadeira.

3 Reação de Radiação

Vimos no capítulo anterior que uma carga acelerada perde energia devido à emissão da radiação eletromagnética. Ao estudarmos o balanceamento da energia de uma partícula que se move sob a influência de forças externas, é necessário levar em consideração as perdas por radiação. Vimos que o campo de radiação possui não apenas energia, mas também momento. Em virtude deste fato, a emissão da radiação é acompanhada por uma força de reação do campo sobre a partícula. A ação do campo de radiação sobre o movimento da partícula é chamada reação de radiação.

Quando uma partícula de massa m e carga q sofre a ação de uma força resultante não nula, ela adquire uma aceleração e conseqüentemente uma variação em sua energia cinética. A força externa, durante o deslocamento da partícula, realiza trabalho, cuja magnitude, pelo teorema trabalho-energia, deveria ser igual à variação de energia cinética. Entretanto, sabemos que cargas aceleradas emitem radiação, de modo que nem todo trabalho realizado é convertido em energia cinética. Uma parte da energia torna-se radiação, e faz parecer como se a força resultante na partícula fosse menor do que de fato ela é. Portanto, há uma força exercida pela radiação sobre a carga que a gerou. É o que denominamos reação de radiação.

3.1 Reação de radiação na formulação não-relativística

Nesta seção, apresentaremos uma análise mais detalhada da reação de radiação. Iniciaremos a discussão com o formalismo não relativístico, no qual derivaremos a força de Abraham-Lorentz com base na conservação de energia, abordando as inconsistências das soluções da equação de movimento. Posteriormente, examinaremos um caso específico em que um elétron é sujeito a oscilações devido à incidência de um campo elétrico externo. Essa consideração nos permitirá reproduzir os resultados dos fenômenos de espalhamento de Thomson e Rayleigh. Por fim, abordaremos a reação de radiação para uma esfera rígida carregada, assemelhando-se ao modelo proposto por Lorentz para o elétron.

3.1.1 Reação de radiação baseada na conservação de energia

Nesta seção, vamos determinar uma expressão para a reação de radiação baseada na aplicação da lei de conservação da energia a uma carga acelerada. Por simplicidade, vamos considerar uma partícula não relativística, ou seja, $\beta \ll 1$. Com isso, podemos utilizar a fórmula de Larmor,

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} |\mathbf{a}|^2. \quad (3.1)$$

Essa é a potência média emitida na forma de radiação pela carga que tem uma aceleração $\mathbf{a}$. Podemos pensar que essa potência corresponde à taxa temporal com que a carga perde energia por causa da força exercida pela radiação, $\mathbf{F}_{rad}$, ou seja,

$$P = -\mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v}, \quad (3.2)$$

a ser determinada. O sinal negativo indica que a potência está sendo retirada da partícula e $\mathbf{v}$ representa a sua velocidade. Substituindo (3.1) em (3.2) encontramos,

$$\mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} |\mathbf{a}|^2. \quad (3.3)$$

É importante notar que essa equação não está completa, pois a carga também tem campos de velocidade, descrito pela eq. (2.61), os quais têm uma energia associada. No entanto, a energia gerada pelos campos de velocidade não se "desprende" da carga, como ocorre com os campos de radiação dados em (2.63). Para determinar a energia perdida pela carga deve-se levar em conta tanto a parte de radiação quanto a parte dos campos de velocidade. Porém, vamos considerar um movimento cíclico em pequeno intervalo de tempo $[t_0, t_f]$, em que t_0 e t_f representam os tempos inicial e final, respectivamente. Dessa maneira, a velocidade e a aceleração da partícula serão as mesmas nesse intervalo. Assim, em média, a equação (3.3) é válida. Logo, integrando nesse intervalo:

$$\int_{t_0}^{t_f} dt \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} = -\int_{t_0}^{t_f} dt \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} |\mathbf{a}|^2. \quad (3.4)$$

Lembrando que $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ e que $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, obtemos:

$$\int_{t_0}^{t_f} dt \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]. \quad (3.5)$$

Usando a propriedade da derivada,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}. \quad (3.6)$$

Substituindo-a na eq. (3.5),

$$\int_{t_0}^{t_f} dt \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_0}^{t_f} dt \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \right], \quad (3.7)$$

que pode ser escrita como,

$$\int_{t_0}^{t_f} dt \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left[\int_{t_0}^{t_f} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) - \int_{t_0}^{t_f} dt \mathbf{v} \cdot \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \right]. \quad (3.8)$$

Uma vez que $\mathbf{v}$ e $d\mathbf{v}/dt$ são iguais em t_0 e t_f por causa do movimento cíclico executado pela carga, decorre que:

$$\int_{t_0}^{t_f} dt \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left[\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} dt \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{a}} \right], \quad (3.9)$$

onde $\dot{\mathbf{a}} = d\mathbf{a}/dt$, um termo conhecido como *jerk* , cuja unidade é m/s^3 . Portanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{a}} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\mathbf{F}_{rad} - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}} \right] \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.10)$$

Como essa relação deve ser válida para qualquer $\mathbf{v}$, identificamos a chamada *força de Abraham-Lorentz* para reação de radiação:

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}}. \quad (3.11)$$

Note que tal força foi estabelecida considerando a situação mais simples. Portanto, ela vale apenas se nos restringimos a um movimento cíclico em que $\mathbf{v}$ e $d\mathbf{v}/dt$ são iguais no começo e no fim do ciclo. Na próxima seção vamos aplicar esse modelo a um caso mais realista. Por ora veremos algumas consequências importantes. Aplicamos então a segunda lei de Newton sobre a partícula de carga q supondo que a aceleração desenvolvida é decorrente da força externa e da força de aceleração:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{F}_{rad} &= m\mathbf{a}, \\ \mathbf{F}^{ext} &= m \left(\mathbf{a} - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi m c} \dot{\mathbf{a}} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se definimos a constante de tempo τ_{rad} por meio de:

$$\tau_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi m c}, \quad (3.13)$$

a equação de movimento se resume em:

$$\mathbf{F}^{ext} = m (\mathbf{a} - \tau_{rad} \dot{\mathbf{a}}). \quad (3.14)$$

Está equação é a conhecida força de Abraham-Lorentz. Para o caso do elétron, τ_{rad} vale aproximadamente $6,24 \times 10^{-24} s$, enquanto para o próton ele vale $3,4 \times 10^{-24} s$. Neste cenário, fica evidente que a força associada a reação de radiação, $m\tau_{rad}\dot{\mathbf{a}}$, é geralmente insignificante em comparação com acelerações causadas por uma força externa ($\mathbf{F}^{ext}$) que se enquadra na análise clássica¹. Forças que induzem variações de aceleração intensas o suficiente para se aproximar de níveis de $\tau_{rad}\dot{\mathbf{a}} \approx \mathbf{a}$ exigiriam componentes de Fourier com frequências da ordem de $1/\tau_{rad}$, da ordem de $10^{23} Hz$ para elétrons. Nesse cenário, os quanta de campo associados se manifestam como raios gama com energia, $\hbar/\tau_{rad}$, de aproximadamente 100 MeV. No entanto, é crucial observar que a criação de pares elétron-pósitron se torna proeminente em energias em torno de $h\nu \approx 2m_e c^2$, aproximadamente 1 MeV. Em tais níveis de energia, a análise clássica perde validade, uma vez que os efeitos quânticos não podem ser ignorados [14].

No caso hipotético em que não há força externa agindo sobre a partícula, havendo apenas força de radiação, escrevemos (3.14) como:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{1}{\tau_{rad}} \mathbf{a}. \quad (3.15)$$

¹ Mais adiante veremos que essa consideração levará a formulação da equação de Landau-Lifshitz.

A solução dessa equação diferencial pode ser obtida facilmente, e sua solução tem a forma:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 \exp \left[\frac{t}{\tau_{rad}} \right]. \quad (3.16)$$

Essa solução descreve uma partícula carregada que acelera mesmo na ausência de uma força externa, e essa aceleração cresce exponencialmente com o tempo. Tal solução "auto-acelerante" é obviamente não física pois na ausência de forças externas a partícula não iria emitir radiação. Além de que (3.16) viola a primeira lei de Newton, uma vez que a partícula deveria se manter em repouso ou em movimento retilíneo uniforme na ausência de forças.

Embora seja um resultado não-físico, a eq. (3.16) apresenta algumas consequências interessantes a serem discutidas. A dedução da força de radiação (3.11) foi fundamentada na potência de radiação, regida pela fórmula de Larmor. Embora a conservação de energia seja mantida, como mencionado anteriormente, essa conclusão é fisicamente inaceitável, pois sugere que a força de radiação forneça à partícula uma energia infinita para manter a aceleração crescente de maneira exponencial, conforme estabelecido pelo teorema trabalho-energia. É importante notar que, mesmo considerando um caso mais realista, como veremos na seção 3.1.3, essa solução persiste, entretanto, outros problemas surgirão. Por ora, exploraremos algumas aplicações da força de Abraham-Lorentz na presença de forças externas.

3.1.2 Reação de Radiação na Presença de um Oscilador Harmônico.

Nosso objetivo nessa seção será apresentar algumas aplicações do comportamento da força de Abraham-Lorentz (3.14) na presença de uma força externa restauradora, $-kx$, e um campo elétrico oscilante, $E_0 e^{-i\omega t}$.

3.1.2.1 Apresentação do problema e Solução da Equação de Movimento

Como aplicação da teoria de Abraham-Lorentz, consideremos a radiação de uma carga elétrica oscilante². Este é o análogo clássico da emissão por um oscilador harmônico quântico. No limite de números quânticos grandes, os cálculos clássicos e quânticos convergem para o mesmo resultado, tal como estabelecido através do princípio da correspondência. Anteriormente, vimos que na ausência de forças externas o movimento da partícula é consequência da radiação emitida pela própria carga, obtendo uma solução incompatível fisicamente. Agora vamos considerar que o elétron é forçado a oscilar devido à existência de um campo elétrico externo. Para tal tratamento, vamos considerar que o movimento do elétron é não-relativístico. Deste modo iremos desprezar os efeitos causados pelo campo magnético da onda incidente. Neste sentido, a equação

² Esta seção seguirá como feito em [7].

de movimento³ será dada a partir de (3.14),

$$m(\ddot{x} - \tau_{rad} \ddot{\dot{x}}) = F^{ext}, \quad (3.17)$$

em que $\ddot{\dot{x}} = \dot{a}$ é a derivada temporal da aceleração. Considerando um elétron ligado esteja oscilando devido as forças externas:

$$F^{ext} = -kx - qE_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.18)$$

onde E_0 é a amplitude do campo e ω a frequência da onda incidente. Neste cenário, (3.17) será:

$$\ddot{x} - \tau_{rad} \ddot{\dot{x}} + \omega_0^2 x = -\frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t}, \quad (3.19)$$

de modo que usamos a definição $\omega_0^2 = k/m$. Considerando apenas que o elétron esteja em seus estados estacionários⁴, sua solução é apenas proporcional a $e^{-iEt/\hbar}$ sendo $E = \hbar\omega$, pela relação de Einstein para a energia do fóton. Logo, a solução será do tipo:

$$x(t) = x_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.20)$$

Dessa maneira, podemos expressar a derivada terceira por:

$$\ddot{\dot{x}} = \frac{d^3}{dt^3} (x_0 e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \dot{x}. \quad (3.21)$$

Portanto, a eq. (3.19) fica:

$$\ddot{x} + \tau_{rad} \omega^2 \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.22)$$

Se quisermos levar em conta outros processos dissipativos, além do processo de reação de radiação, podemos incluir um termo resistivo $\gamma\dot{x}$ no primeiro membro de (3.19), onde γ é uma constante de decaimento com dimensões de frequência. Definindo assim:

$$\Gamma = \gamma + \tau_{rad} \omega^2. \quad (3.23)$$

A equação de movimento fica, portanto:

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.24)$$

A solução dessa equação, em que os cálculos detalhados se encontram nos apêndices, é dada por:

$$x(t) = -\frac{qE_0}{m} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}. \quad (3.25)$$

³ Por simplicidade iremos considerar o movimento unidimensional.

⁴ Neste contexto, a expressão 'estacionário' não se relaciona à ideia de a solução não depender do tempo, mas sim ao cenário em que o elétron está confinado a uma órbita circular, conforme proposto no modelo de Bohr. Dessa forma, o termo 'estacionário' está associado às quantidades observadas que permanecem constantes ao longo do tempo. Como veremos adiante, os valores médios não irão variar com o tempo.

Derivando em relação tempo obtemos a velocidade da carga em termos do campo elétrico será:

$$v(t) = \frac{d}{dt} \left\{ -\frac{qE_0}{m} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \right\} = -\frac{qE_0}{m} \frac{-i\omega e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma}. \quad (3.26)$$

E, conseqüentemente, a aceleração será:

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left\{ -\frac{qE_0}{m} \frac{-i\omega e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega\Gamma} \right\} = -\frac{qE_0}{m} \frac{\omega^2 e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma}. \quad (3.27)$$

De posse dessa quantidade, podemos analisar alguns casos particulares.

3.1.2.2 Espalhamento de Thomson e de Rayleigh

A reação de radiação na presença de um campo oscilatório externo apresenta uma aplicação interessante. Neste cenário, podemos utilizar a solução exibida na eq.(3.27) para fazer uma descrição acerca da teoria de espalhamento de radiação por um formalismo diferente ao encontrado em livros clássicos, como por exemplo em [9]. Inicialmente, faremos uma revisão do processo de espalhamento de Thomson, onde a carga está sujeita apenas à força elétrica excitadora. Em seguida, iremos abordar o espalhamento Rayleigh, onde consideramos a carga sob uma aceleração que leva em conta a reação de radiação, como efeito de aplicação do tópico sob estudo. Antes de prosseguirmos, vamos fazer uma breve apresentação sobre a teoria do espalhamento.

Uma onda eletromagnética incidente é dita espalhar ou difratar de uma amostra de matéria quando o campo produzido pela amostra não pode ser descrito usando a teoria de reflexão e refração de Fresnel de uma interface plana [18].

Um conceito importante na teoria do espalhamento é seção de choque. Ela fornece uma maneira quantitativa de descrever o resultado de um processo de dispersão. Em um nível fundamental, a seção de choque é definida em relação às colisões entre partículas. O número de eventos de dispersão, dN , que ocorrem em um volume dV do material em um intervalo de tempo dt , deve ser proporcional ao fluxo de entrada $n_1 v_1$ e à densidade de alvos n_2 . A constante de proporcionalidade é, por definição, a seção de choque (σ). Matematicamente, o número de eventos é definido como:

$$dN = \sigma n_1 v_1 n_2 dV dt. \quad (3.28)$$

Considere um feixe monocromático de partículas, ou seja, um feixe no qual todas as partículas de entrada têm a mesma energia E . Então, $En_1 v_1$ representa o fluxo de energia de entrada. Por simplicidade, consideraremos a dispersão elástica, onde a partícula de entrada é dispersa a partir de um centro fixo, de modo que sua energia final é a mesma que a energia inicial. Então, multiplicando por E e integrando sobre o volume do alvo, a equação (3.28) fornece:

$$EdN = \sigma En_1 v_1 dt \int n_2 dV. \quad (3.29)$$

Observe que $dE/dt = d(EN)/dt$ é a energia dispersa por unidade de tempo, ou seja, a potência do espalhamento. Enquanto En_1v_1 é o fluxo de energia incidente, e $N_2 = \int n_2 dV$ é o número de alvos. Portanto, a seção de choque é igual à razão da potência de espalhamento P por fluxo de energia incidente I por unidade de alvo. Portanto, se considerarmos uma onda incidente em um único alvo,

$$\sigma = \frac{\frac{d(EN)}{dt}}{En_1v_1N_2} = \frac{\langle P \rangle}{I} \quad (3.30)$$

Como $I = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{R}$ definimos, de maneira geral, a seção de choque por unidade de ângulo sólido como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{R}} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle. \quad (3.31)$$

Dito essas considerações acerca da teoria do espalhamento e seção de choque, vamos voltar para o nosso problema. Nesta seção, focamos na classe de problemas onde isso ocorre porque o comprimento de onda do campo monocromático incidente não é pequeno em comparação com a curvatura de uma fronteira material. Nos casos em que iremos estudar, o mecanismo de espalhamento será para um elétron livre (Espalhamento Thomson) e para o caso de um elétron ligado (Espalhamento de Rayleigh).

- Espalhamento Thomson:

O espalhamento Thomson ocorre quando uma onda plana eletromagnética interage com um único elétron livre e fracamente acelerado. Para esse caso, vale $\omega_0 = 0$ e $\Gamma \approx 0$, de forma que a eq. (3.27) se reduz em:

$$a(t) = -\frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.32)$$

Como estamos interessados na potência média por unidade de ângulo sólido, vamos usar a eq. (2.91), ou seja,

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \left\langle \frac{\mu_0 q^2 |\mathbf{a}|^2}{16\pi^2 c} \sin^2 \theta \right\rangle = \frac{\mu_0 q^2 \langle |\mathbf{a}|^2 \rangle}{16\pi^2 c} \sin^2 \theta \quad (3.33)$$

Usando agora a aceleração⁵ dada pela eq.(3.32), obtemos:

$$\langle |\mathbf{a}|^2 \rangle = \langle (a(t))^* a(t) \rangle = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t} \right)^* \left(-\frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t} \right) \right] = \frac{q^2 E_0^2}{2m^2}. \quad (3.34)$$

Substituindo em (3.33):

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\mu_0 q^4 E_0^2}{32m^2 \pi^2 c} \sin^2 \theta. \quad (3.35)$$

Podemos simplificar esse resultado definindo o raio do elétron clássico como:

$$r_0 = \frac{\mu_0 q^2}{4\pi m} \rightarrow r_0^2 = \frac{\mu_0^2 q^4}{16\pi^2 m^2}. \quad (3.36)$$

⁵ Porém, como $a(t)$ é uma função complexa, a média vale (Machado, 2003): $\langle f \cdot g \rangle = \frac{1}{2} \text{Real}(\mathcal{F}^* \mathcal{G})$.

Logo,

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} r_0^2 \sin^2 \theta. \quad (3.37)$$

Agora precisamos da média do vetor de Poynting. Partindo de (2.78) obtemos:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left\langle \frac{1}{\mu_0 c} \hat{R} |\mathbf{E}_a|^2 \right\rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \hat{R} \langle |\mathbf{E}_a|^2 \rangle. \quad (3.38)$$

Como estamos em um ponto muito distante da fonte que gerou a onda incidente, sua contribuição para o campo elétrico é aproximadamente proporcional ao campo de radiação (campo de aceleração), ou seja:

$$\mathbf{E}_{inc} \approx \mathbf{E}_a \rightarrow \mathbf{E}_a = E_0 e^{-i\omega t} \hat{r}. \quad (3.39)$$

A média do campo de radiação será:

$$\langle |\mathbf{E}_a|^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[(E_0 e^{-i\omega t} \hat{r})^* (E_0 e^{-i\omega t} \hat{r}) \right] = \frac{1}{2} E_0^2 \quad (3.40)$$

Portanto, o valor médio do vetor de Poynting será:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \hat{R} \rightarrow I = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{R} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}. \quad (3.41)$$

De posse desses resultados, a seção de choque por unidade de ângulo sólido:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{R}} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle, \\ &= \frac{\cancel{\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}} r_0^2 \sin^2 \theta}{\cancel{\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}}} = r_0^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Integrando sob o ângulo sólido que corta uma superfície arbitrária S :

$$\oint_S \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = r_0^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = r_0^2 2\pi \frac{4}{3}. \quad (3.43)$$

De modo que,

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2, \quad (3.44)$$

é a seção de choque de Thomson [18]. Observe que a frequência da onda eletromagnética radiada é a mesma que a frequência da onda incidente: uma onda incidente oscilando na frequência ω induz um movimento oscilatório do elétron livre novamente na frequência ω . Por sua vez, esse movimento gera radiação dipolar na frequência ω . Portanto, as ondas incidentes e dispersas têm a mesma frequência. Deve-se observar que, na mecânica quântica, esse resultado é modificado em frequências suficientemente altas, e a frequência da onda dispersa é menor que a da onda incidente [12]. E as frequências só serão iguais em um caso de retroespalhamento, conforme demonstrado por Compton [5].

- Espalhamento Rayleigh:

Agora consideramos a dispersão de uma onda eletromagnética em um elétron ligado a um átomo ou a uma molécula. Vale destacar que, assim como o caso anterior, para uma descrição completa é necessário um tratamento via mecânica quântica, levando em consideração os níveis de energia discretos do elétron ligado. Além disso, assim como na dispersão em um elétron livre, se a frequência da onda eletromagnética estiver na faixa dos raios-X ou maior, também devemos levar em consideração a natureza quântica do campo eletromagnético, o que eventualmente exige o uso da teoria quântica de campos, como indicado em [2]. Aqui, no entanto, discutimos o cálculo puramente clássico, no qual tanto o elétron quanto o campo eletromagnético são tratados de maneira clássica. Diante disso, agora vamos considerar que o elétron está ligado ao átomo e sujeito à força de radiação, de modo que a aceleração da partícula é dada pela eq. (3.27):

$$a(t) = -\frac{qE_0}{m} \frac{\omega^2 e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma}. \quad (3.45)$$

Calculando a média da aceleração ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle |a(t)|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{qE_0}{m} \frac{\omega^2 e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma} \right)^* \cdot \left(-\frac{qE_0}{m} \frac{\omega^2 e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma} \right) \right], \quad (3.46) \\ &= \frac{q^2 E_0^2}{2m^2} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}. \end{aligned}$$

Consequentemente a potência média de radiação será:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\mu_0 q^4 E_0^2}{32m^2 \pi^2 c} \sin^2 \theta \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}, \quad (3.47)$$

$$= \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} r_0^2 \sin^2 \theta \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}. \quad (3.48)$$

em que novamente usamos a definição do raio clássico do elétron (3.36). A onda incidente depende apenas da fonte que a gerou, como discutido anteriormente. Isso significa que sua energia não se altera se o elétron está ligado ou não. Deste modo a intensidade da onda é equivalente ao caso do espalhamento Thomson, em que:

$$I = \langle S \rangle \cdot \hat{R} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}, \quad (3.49)$$

tal como expresso em (3.41). Desta forma, a seção de choque (por unidade de ângulo sólido) será:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{R}} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle, \\ &= r_0^2 \sin^2 \theta \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

integrando sobre o ângulo sólido obtemos:

$$\begin{aligned} \oint_S \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega &= r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta, \\ &= \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Logo,

$$\sigma_{scatt}(\omega) = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}. \quad (3.52)$$

Neste cenário, convém definir a seção de choque normalizada pela seção de Thomson, ou seja,

$$\frac{\sigma_{scatt}(\omega)}{\sigma_T} = \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}. \quad (3.53)$$

Agora, vamos analisar alguns casos particulares.

1. Caso $\omega \gg \omega_0$ e $\omega \gg \Gamma$: Este caso particular é valido para a frequência da onda incidente é muito maior que a frequência de oscilação natural (ω_0) do elétron. Tal situação é equivalente ao caso descrito anteriormente em que o elétron está livre. Consequentemente, a seção de choque espalhada será:

$$\frac{\sigma_{scatt}(\omega)}{\sigma_T} = \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \approx \frac{\omega^4}{(\omega^2)^2} = 1, \quad (3.54)$$

o que implica em:

$$\sigma_{scatt}(\omega) = \sigma_T. \quad (3.55)$$

2. Caso $\omega \ll \omega_0$ e $\Gamma \approx 0$: Neste caso temos que a frequência natural de oscilação é muito maior que a frequência da onda incidente. Nesse caso a seção de choque será:

$$\frac{\sigma_{scatt}(\omega)}{\sigma_T} = \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \approx \frac{\omega^4}{(\omega_0^2)^2} \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4. \quad (3.56)$$

Assim, a baixas frequências, a seção de choque aumenta com a quarta potência da frequência. Esta dependência da frequência é chamada lei de Rayleigh [7]. Essa lei explica, por exemplo, por que o céu parece azul durante o dia. As moléculas de gás na atmosfera dispersam mais eficientemente a luz azul do que a luz de comprimentos de onda mais longos, como o vermelho. Portanto, quando a luz do sol passa pela atmosfera, ela é mais intensamente dispersa na direção dos observadores, resultando em um céu azul.

3. Caso $\omega_0 \approx \omega$: Neste caso obtemos o efeito de ressonância que pode ser subdividido em dois casos particulares:

Caso de ressonância ($\omega_0 = \omega$). Para $\Gamma \ll \omega_0$ a seção de choque é,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{scatt}(\omega)}{\sigma_T} &= \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} = \frac{\omega_0^4}{\omega_0^2 \Gamma^2}, \\ \frac{\sigma_{scatt}(\omega)}{\sigma_T} &= \left(\frac{\omega_0}{\Gamma} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Vemos que essa seção de choque é significativamente aprimorada em relação à seção de choque de Thomson σ_T , por um fator proporcional a frequência natural de oscilação. Outro ponto importante a ser comentado é para quando o fator de amortecimento (Γ) apresenta contribuição significativa apenas da reação de radiação, ou seja, $\Gamma = \tau_{rad} \omega_0^2$. Neste caso, temos:

$$\frac{\sigma_{scatt}(\omega)}{\sigma_T} = \left(\frac{\omega_0}{\tau_{rad} \omega_0^2} \right)^2 = \frac{1}{\tau_{rad}^2 \omega_0^2}. \quad (3.58)$$

Neste cenário que apenas o termo de radiação contribui, o caso de ressonância cresce de Aproximação da ressonância ($\omega_0 \approx \omega$), a seção de choque para esse caso será dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{scatt}(\omega)}{\sigma_T} &= \frac{\omega^4}{(\omega - \omega_0)^2 (\omega + \omega_0)^2 + \omega^2 \Gamma^2} = \frac{\omega^4}{(\omega - \omega_0)^2 (2\omega)^2 + \omega^2 \Gamma^2}, \\ &= \frac{1}{4\omega^2} \frac{\omega^4}{\left[(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2 \right]} = \frac{\omega^2}{4 \left[(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2 \right]}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

A partir dessa expressão, podemos observar que a condição de ressonância é mantida em uma faixa estreita de frequências $\Delta\omega \approx \frac{\Gamma}{2}$ centrada em torno de ω_0 [12].

Após essa breve análise sobre a força de Abraham-Lorentz concluímos que ela pode ser usada para obter resultados já conhecidos sem levar em consideração todas as análises em meios dispersivos como tratado em [9] e [18]. Entretanto, vale destacar que os resultados contidos nas referências citadas levam em consideração que a onda eletromagnética incide em uma superfície que pode ser aproximada por um oscilador harmônico amortecido sem considerar a natureza desse amortecimento, na qual aqui vimos que ele apresenta uma contribuição da reação de radiação, que embora pequena na grande maioria dos casos, sua contribuição apresenta resultados mensuráveis experimentalmente para energias muito alta (faixa de raio-x e raio- γ), como indicado em um estudo recente [2].

A seguir, iremos analisar uma aplicação mais realista da reação de radiação. Veremos como os campos de Liénard-Wiechert se comportam ao considerarmos uma esfera rígida uniformemente carregada, tratamento similar ao realizado por Lorentz para obter, de maneira independente, a expressão da reação de radiação desse modelo para o elétron.

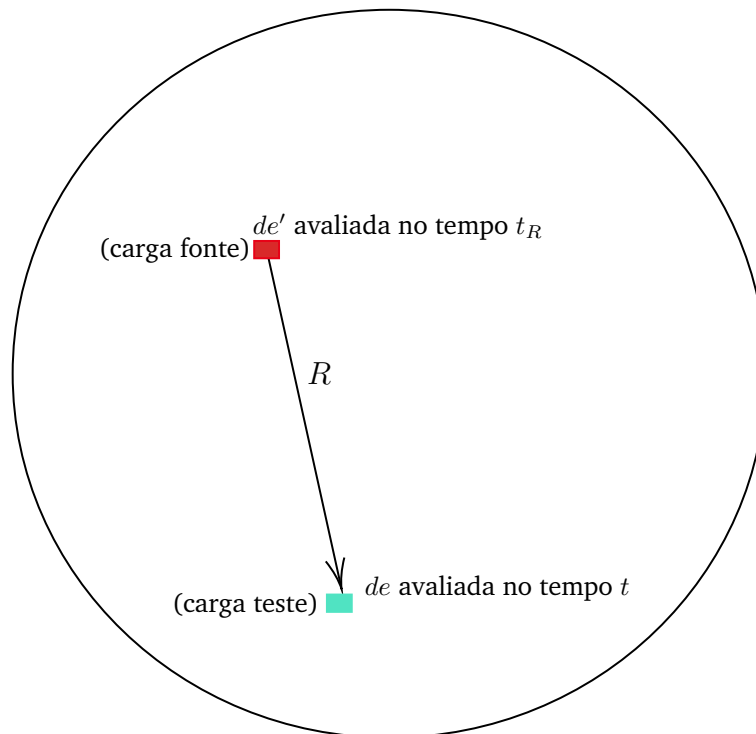
3.1.3 Cálculo da reação de radiação para um elétron

Nosso objetivo nessa seção é refazer o cálculo da reação de radiação considerando agora um modelo para o elétron proposto por Lorentz. Primeiro, faremos algumas considerações:

1. A partícula está instantaneamente em repouso⁶ no tempo atual, ou seja, $v(t) = 0$;
2. O movimento dos elementos infinitesimais de carga nos quais dividiremos a carga do elétron é não-relativístico;
3. Os campos eletromagnéticos produzidos por um elemento de carga de noutro de' são os campos de Liénard-Wiechert;
4. A carga segue uma distribuição com simetria esférica;
5. Os resultados não devem depender do "tamanho" do elétron.

Com essas considerações, vamos iniciar os cálculos. A figura 3.1 mostra o modelo para o elétron a ser considerado. O campo elétrico produzido pela carga de' sobre a carga de é

Figura 3.1 – Modelo para o elétron.



Fonte: Próprio autor.

⁶ Esta consideração sempre pode ser obtida fazendo uma mudança de referencial. Vale notar que isso não necessariamente significa que as derivadas de v são nulas.

dados por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^3} + \frac{\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \times \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c}]}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^3} \right\}. \quad (3.60)$$

É importante lembrar que o campo sentido pelas cargas de no tempo atual t foi produzido pelas cargas de' em um tempo de retardo t_R . Pelo item 2 das considerações, podemos expandir em série de Taylor as grandezas no tempo retardado em termos do tempo atual, ou seja,

$$\mathbf{v}(t_R) = \mathbf{v}(t) + \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_t (t_R - t) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \right|_t (t_R - t)^2 + \dots \quad (3.61)$$

Usando a condição 1 e a definição tempo de retardo, $t_R = t - R/c$, ficamos com:

$$\mathbf{v}(t_R) = -\frac{R\mathbf{a}(t)}{c} + \frac{\dot{\mathbf{a}}(t) R^2}{2c^2} + \dots \quad (3.62)$$

Para a aceleração temos,

$$\mathbf{a}(t_R) = \mathbf{a}(t) + \left. \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right|_t (t_R - t) + \dots \quad (3.63)$$

$$\mathbf{a}(t_R) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a} \frac{R}{c} + \dots \quad (3.64)$$

Outro fator importante é,

$$[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^{-3} = R^{-3} \left[1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{Rc} \right]^{-3}. \quad (3.65)$$

Portanto,

$$[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^{-3} = R^{-3} \left[1 - \frac{1}{Rc} \mathbf{R} \cdot \left(-\frac{R\mathbf{a}(t)}{c} + \frac{\dot{\mathbf{a}}(t) R^2}{2c^2} + \dots \right) \right]^{-3}, \quad (3.66)$$

ou ainda,

$$[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^{-3} = R^{-3} \left[1 + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}(t)}{c^2} - \frac{\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}}(t) R}{2c^3} + \dots \right]^{-3}. \quad (3.67)$$

Expandindo esse resultado em série de Taylor:

$$[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^{-3} = R^{-3} \left[1 - \frac{3}{c^2} \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}(t) + \frac{3R}{2c^3} \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}}(t) + \dots \right]. \quad (3.68)$$

Agora, na equação (3.60) podemos desprezar os termos de β^2 utilizando o fato da condição 1. Deste modo obtemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta} + \mathbf{R} \times \left[(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \times \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \right] \right\} [R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^{-3}. \quad (3.69)$$

Após substituir as expansões dadas por (3.62), (3.64), (3.68) e realizar as simplificações, em que os passos podem ser analisados em detalhes no apêndice D, chegamos a:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{2\mathbf{R}}{c^2 R^3} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) + \frac{\mathbf{R}}{2c^3 R^2} (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}}) + \frac{\dot{\mathbf{a}}}{2c^3} \right]. \quad (3.70)$$

Lembrando que a carga está distribuída de uma forma com simetria esférica (condição 4), podemos escrever:

$$de' = \rho(r')d^3r' = \rho(r')r'^2 dr' d\Omega. \quad (3.71)$$

logo,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} dr' r'^2 \rho(r') \oint_{S'} d\Omega \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{2\mathbf{R}}{c^2 R^3} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) + \frac{\mathbf{R}}{2c^3 R^2} (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}}) + \frac{\dot{\mathbf{a}}}{2c^3} \right]. \quad (3.72)$$

O campo elétrico total, obtido após a integração⁷, é expresso por:

$$\mathbf{E}^{tot}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int de' \left[\frac{2\dot{\mathbf{a}}}{3c^3} - \frac{2\mathbf{a}}{3Rc^2} \right] = \frac{\dot{\mathbf{a}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int \cancel{de'}^e - \frac{\mathbf{a}}{6\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{de'}{R}. \quad (3.73)$$

Resultando em:

$$\mathbf{E}^{tot}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\dot{\mathbf{a}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} - \frac{\mathbf{a}}{6\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{de'}{R}. \quad (3.74)$$

A força total sentida pela carga de prova de será:

$$\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{r}, t) = \int de \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (3.75)$$

Ou seja,

$$\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{r}, t) = \int de \left[\frac{e\dot{\mathbf{a}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} - \frac{\mathbf{a}}{6\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{de'}{R} \right] = \int \cancel{de}^e \frac{e\dot{\mathbf{a}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} - \frac{\mathbf{a}}{6\pi\epsilon_0 c^2} \int \int \frac{de' de}{R}. \quad (3.76)$$

Organizando os termos, obtemos:

$$\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{r}, t) = \frac{e^2 \mu_0 \dot{\mathbf{a}}}{6\pi c} - \frac{4\mathbf{a}}{3c^2} \left[\frac{1}{2} \int \int \frac{de' de}{4\pi\epsilon_0 R} \right], \quad (3.77)$$

O termo entre colchetes corresponde a energia potencial elétrica (U_0) do sistema. Neste sentido, a força total é dada:

$$\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{r}, t) = \frac{e^2 \mu_0}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}} - \frac{4U_0}{3c^2} \mathbf{a}. \quad (3.78)$$

Podemos notar que a equação exibe um termo com características de massa, dado por,

$$\mathcal{M} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2}. \quad (3.79)$$

A massa acima pode ser chamada de massa eletromagnética, pois resulta diretamente do efeito dos campos eletromagnéticos. Nesse modelo, há um "excesso" de 1/3 para que a relação relativística $E = mc^2$ seja satisfeita. A massa faltante está associada com a energia necessária para tornar o elétron estável, já que a tendência natural seria das cargas constituintes não se mantivessem unidas devido a força de Coulomb [11]. É importante notar que a reação de radiação esta presente no primeiro termo, de modo

⁷ Também está feito em detalhes no apêndice D

que reobtemos a força de Abraham-Lorentz. Vamos agora considerar que uma força externa atue sobre a partícula. Nesse caso, pela segunda lei de Newton,

$$\mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}^{tot} = m_0 \mathbf{a}, \quad (3.80)$$

sendo m_0 é a massa de repouso do elétron. Substituindo a força total,

$$\mathbf{F}_{ext} = m_0 \mathbf{a} - \frac{e^2 \mu_0}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}} + \frac{4U_0}{3c^2} \mathbf{a} = \left[m_0 + \frac{4U_0}{3c^2} \right] \mathbf{a} - \frac{e^2 \mu_0}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}}. \quad (3.81)$$

Logo, a força externa assume a forma:

$$\mathbf{F}_{ext} = m \mathbf{a} - \frac{e^2 \mu_0}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}}, \quad (3.82)$$

onde,

$$m = m_0 + \frac{4U_0}{3c^2}, \quad (3.83)$$

é a massa total observável. Dividindo por m e recobrando a definição do tempo característico (τ_{rad}), (3.82), temos:

$$\frac{\mathbf{F}_{ext}}{m} = \mathbf{a} - \tau_{rad} \dot{\mathbf{a}}. \quad (3.84)$$

Note que novamente obtemos a força de Abraham-Lorentz, expressa em (3.11). Se multiplicarmos (3.84) por um fator integrante $\exp\{[-t/\tau_{rad}]\}/\tau_{rad}$, em que vale a relação:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{a} \exp\left\{\left[-\frac{t}{\tau_{rad}}\right]\right\} \right) = \frac{(\tau_{rad} \dot{\mathbf{a}} - \mathbf{a})}{\tau_{rad}} \exp\left\{\left[-\frac{t}{\tau_{rad}}\right]\right\}, \quad (3.85)$$

então,

$$-\frac{\mathbf{F}_{ext}}{m\tau_{rad}} \exp\left\{\left[-\frac{t}{\tau_{rad}}\right]\right\} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{a} \exp\left\{\left[-\frac{t}{\tau_{rad}}\right]\right\} \right). \quad (3.86)$$

Integrando de um tempo t_0 a t ,

$$\int_{t_0}^t dt' \frac{d}{dt'} \left(\mathbf{a} \exp\left\{\left[-\frac{t'}{\tau_{rad}}\right]\right\} \right) = - \int_{t_0}^t dt' \frac{\mathbf{F}_{ext}}{m\tau_{rad}} \exp\left\{\left[-\frac{t'}{\tau_{rad}}\right]\right\}. \quad (3.87)$$

Resolvendo essa integral e organizando os termos, obtemos:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t_0) \exp\left\{\left[\frac{t-t_0}{\tau_{rad}}\right]\right\} + \int_{t_0}^t dt' \frac{\mathbf{F}_{ext}(t')}{m\tau_{rad}} \exp\left\{\left[-\frac{t'-t}{\tau_{rad}}\right]\right\}. \quad (3.88)$$

Constatamos que se $\mathbf{a}(t_0) \neq 0$, para qualquer valor finito de t_0 , o primeiro termo do lado direito cresce exponencialmente, tal qual foi discutido anteriormente. Visto que escolher $\mathbf{a}(t_0) = 0$ é muito restritivo, a opção mais satisfatória consiste em considerar $t_0 \rightarrow \infty$, de modo que o primeiro termo do lado direito vai a zero. Temos então que:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{1}{\tau_{rad}} \int_t^\infty dt' \frac{\mathbf{F}_{ext}(t')}{m} \exp\left\{\left[-\frac{t'-t}{\tau_{rad}}\right]\right\}. \quad (3.89)$$

Essa equação nos fornece um resultado interessante, pois a função exponencial do tipo $\exp\{(-x/x_0)\}$ decai rapidamente, e a rapidez de decaimento é dada pelo valor

característico x_0 . Assim, a equação pode ser entendida como sendo o valor médio de $\mathbf{F}_{ext}/m$ em um período de tempo característico dado por τ_{rad} . É interessante notar que no integrando aparece o termo $t' - t$, indicando que os valores da aceleração no tempo t , $\mathbf{a}(t)$, é calculado considerando tempos t' maiores que t , ou seja, a força nos instantes t' posteriores a t , dentro do intervalo característico $[t, t + \tau_{rad}]$, é a responsável pela aceleração da partícula no tempo t , fazendo assim com que o princípio de causalidade seja violado por um intervalo de tempo da ordem de $\tau_{rad} \approx 6,24 \times 10^{-24} \text{ s}$ para o caso do elétron.

Observe que as considerações clássicas como as que adotamos não são aplicáveis nessa ordem de intervalo de tempo, de modo que as relações de causalidade podem ser violadas desde que não sejam mensuráveis, por causa do princípio da incerteza. Outro fato a comentar é que mesmo a correção relativística feita por Dirac⁸ não altera a questão da "quebra" de causalidade aqui abordadas, indicando que o problema pode ser de fato de natureza quântica.

3.2 Reação de Radiação em sua Formulação Covariante

Nas seções anteriores, nós analisamos os efeitos da potência dissipada no regime de baixas velocidades. Tal análise nos mostrou que a solução da equação de movimento apresenta uma divergência, ou seja, a partícula em movimento acelera exponencialmente sem violar a conservação de energia. Um método para eliminar essa solução divergente é considerar as dimensões da partícula, levando em conta não apenas os campos de aceleração, mas bem como os campos de velocidade também. Como foi visto, tal procedimento exige uma extensa manipulação algébrica.

Nesta seção veremos que o mesmo resultado pode ser recuperado utilizando uma 4-força f^μ que não altera a massa de repouso e supondo a existência de um 4-vetor de modo que a equação resultante respeite o balanço de energia, obtendo a força de Lorentz-Dirac. Em seguida, discutiremos uma formulação alternativa da força de Lorentz-Dirac. Nesse contexto, a equação de movimento não apresenta o termo da derivada da aceleração, corrigindo a solução divergente. Essa equação é conhecida como equação de Landau-Lifshitz.

3.2.1 Potência de radiação realizada por uma 4-força pura e a força de Lorentz-Dirac

Primeiramente, iremos considerar que apenas forças externas de origem eletromagnética estão atuando sob a partícula. Ou seja,

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\lambda}U_\lambda. \quad (3.90)$$

⁸ Mais adiante veremos o caso relativístico.

onde U_λ é a 4-velocidade da partícula. Sabemos que essa força deve preservar o correto balanço de energia e momento em todos os referenciais, uma vez que é válido o princípio da relatividade de Einstein. Como foi visto anteriormente, as componentes individuais da força nem sempre são conservadas⁹. Entretanto, uma contração de 4-vetores é sempre conservada em todos os referenciais. Para o nosso procedimento vamos escolher o 4-vetor mais simples, a 4-velocidade da partícula em questão. Fisicamente estamos determinando a relação entre a potência exercida sob a partícula e a taxa de variação do momento linear. Portanto,

$$f^\mu U_\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} U_\mu = q F^{\mu\lambda} U_\lambda U_\mu . \quad (3.91)$$

O lado direito é identicamente nulo pois estamos contraindo um tensor antissimétrico com um simétrico. Usando a relação do 4-momento $p^\mu = mU^\mu$,

$$\begin{aligned} \frac{d(mU^\mu)}{d\tau} U_\mu &= 0, \\ m \frac{d(U^\mu)}{d\tau} U_\mu + (U^\mu U_\mu) \frac{dm}{d\tau} &= 0, \\ \frac{m}{2} \frac{d(U^\mu U_\mu)}{d\tau} - (U^\mu U_\mu) \frac{dm}{d\tau} &= 0, \end{aligned} \quad (3.92)$$

em que usamos:

$$\frac{d(U^\mu U_\mu)}{d\tau} = U^\mu \frac{d(U_\mu)}{d\tau} + \frac{d(U^\mu)}{d\tau} U_\mu = -2 \frac{d(U^\mu)}{d\tau} U_\mu. \quad (3.93)$$

como $U^\alpha = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ vale: $U^\alpha U_\alpha = c^2$. Logo (3.92) resulta em:

$$\frac{m}{2} \frac{dc^2}{d\tau} - c^2 \frac{dm}{d\tau} = 0, \quad (3.94)$$

$$\frac{dm}{d\tau} = 0. \quad (3.95)$$

Concluimos então que a força eletromagnética que induz interação entre as cargas não altera a massa de repouso. Isso é importante pois os campos próprios gerados pelas partículas representam uma distribuição de energia e portanto de massa. Diante disso, temos a condição:

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} U_\mu = 0. \quad (3.96)$$

Derivando em relação ao tempo próprio,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{dU^\mu}{d\tau} U_\mu \right) = 0 \rightarrow \frac{dU_\mu}{d\tau} \frac{dU^\mu}{d\tau} = -U_\mu \frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2}. \quad (3.97)$$

Substituindo esse termo na fórmula de Larmor, dada pela eq.(2.222),

$$P = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi m^2 c} \left(\frac{d(mU^\mu)}{d\tau} \frac{d(mU_\mu)}{d\tau} \right) \rightarrow P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} U_\mu. \quad (3.98)$$

⁹ Vide o teorema de Poyting.

Para qualquer sistema físico a variação do momento total deve levar em conta a força atuando sob o sistema e o momento de radiação, ou seja,

$$\frac{dp_{tot}^\mu}{d\tau} = f^\mu + \frac{dp_{rad}^\mu}{d\tau} . \quad (3.99)$$

Como taxa de variação do momento de radiação nem sempre é conservada, para que $\frac{dp_{tot}^\mu}{d\tau} U_\mu = 0$, deve existir um 4-vetor κ^μ para contra balançar a variação do momento de radiação. Portanto:

$$\frac{dp_{tot}^\mu}{d\tau} U_\mu = f^\mu U_\mu + \frac{dp_{rad}^\mu}{d\tau} U_\mu + \kappa^\mu U_\mu = 0 . \quad (3.100)$$

O primeiro termo do lado direito é zero, resultando:

$$\frac{dp_{rad}^\mu}{d\tau} U_\mu = -\kappa^\mu U_\mu . \quad (3.101)$$

Sabendo que a taxa de variação do momento de radiação está relacionada com a fórmula de Larmor escrevemos:

$$\frac{dp_{rad}^\mu}{d\tau} = -\frac{P}{c^2} U^\mu = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c^3} \frac{d^2 U^\alpha}{d\tau^2} U_\alpha U^\mu . \quad (3.102)$$

Contraindo esse resultado com a 4-velocidade:

$$\frac{dp_{rad}^\mu}{d\tau} U_\mu = -\frac{P}{c^2} U^\mu U_\mu = -\kappa^\mu U_\mu \rightarrow \kappa^\mu U_\mu = P , \quad (3.103)$$

logo,

$$\kappa^\mu U_\mu = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} U_\mu \rightarrow \left(\kappa^\mu - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} \right) U_\mu = 0 . \quad (3.104)$$

Como esse resultado é valido para qualquer U_μ , encontramos:

$$\kappa^\mu = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} . \quad (3.105)$$

Portanto, a equação de movimento assume a forma:

$$\frac{dp_{tot}^\mu}{d\tau} = f^\mu + \frac{dp_{rad}^\mu}{d\tau} + \kappa^\mu , \quad (3.106)$$

$$\frac{dp_{tot}^\mu}{d\tau} = f^\mu - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c^3} \frac{d^2 U^\alpha}{d\tau^2} U_\alpha U^\mu + \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} . \quad (3.107)$$

Reorganizando os termos, obtemos:

$$\frac{dp_{tot}^\mu}{d\tau} = f^\mu + \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left[\frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 U^\alpha}{d\tau^2} U_\alpha U^\mu \right] . \quad (3.108)$$

Logo,

$$F_{rad}^\mu = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left[\frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 U^\alpha}{d\tau^2} U_\alpha U^\mu \right] , \quad (3.109)$$

é a conhecida força de Lorentz-Dirac¹⁰. Usando a eq.(3.97), encontramos:

$$F_{rad}^{\mu} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left[\frac{d^2 U^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{1}{c^2} \frac{dU^{\alpha}}{d\tau} \frac{dU_{\alpha}}{d\tau} U^{\mu} \right], \quad (3.110)$$

Como um caso particular, vamos considerar que a carga q se move relativisticamente em uma dimensão. Então a componente espacial da equação de Lorentz-Dirac é expressa por:

$$\frac{dp}{d\tau} = \gamma F(\tau) + \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left\{ \frac{d^2(\gamma v)}{d\tau^2} + \frac{\gamma v}{c^2} \left[\left(\frac{d(\gamma c)}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{d(\gamma v)}{d\tau} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.111)$$

Ou ainda escrevendo em função do momento linear, $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$,

$$\frac{dp}{d\tau} = \gamma F(\tau) + \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left\{ \frac{1}{m} \frac{d^2 p}{d\tau^2} + \frac{p}{mc^2} \left[\left(c \frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{1}{m} \frac{dp}{d\tau} \right)^2 \right] \right\}. \quad (3.112)$$

Usando a relação da energia relativística,

$$\gamma^2 m^2 c^4 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \rightarrow \gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}, \quad (3.113)$$

onde $|\mathbf{p}| = p$. Derivando o fator de Lorentz em relação ao tempo próprio:

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left\{ \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \right\} = \frac{p}{\gamma m^2 c^2} \left(\frac{dp}{d\tau} \right). \quad (3.114)$$

Substituindo em (3.112):

$$\frac{dp}{d\tau} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} F(\tau) + \frac{\mu_0 q^2}{6\pi m c} \left\{ \frac{d^2 p}{d\tau^2} + \frac{p}{c^2} \left[\left(\frac{p \dot{p}}{\gamma m^2 c} \right)^2 - \left(\frac{\dot{p}}{m} \right)^2 \right] \right\}. \quad (3.115)$$

Resolvendo o último termo do lado direito:

$$\begin{aligned} \frac{p}{c^2} \left[\left(\frac{p \dot{p}}{\gamma m^2 c} \right)^2 - \left(\frac{\dot{p}}{m} \right)^2 \right] &= \frac{p}{c^2} \left[\frac{p^2 \dot{p}^2}{\gamma^2 m^2 c^2} - \frac{\dot{p}^2}{m^2} \right], \\ &= p \dot{p}^2 \left[\frac{p^2 c^2 - \gamma^2 m^2 c^4}{\gamma^2 m^2 c^4 m^2 c^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Usando (3.113),

$$\begin{aligned} \frac{p}{c^2} \left[\left(\frac{p \dot{p}}{\gamma m^2 c} \right)^2 - \left(\frac{\dot{p}}{m} \right)^2 \right] &= p \dot{p}^2 \left[\frac{-m^2 c^4}{(p^2 + m^2 c^2) m^2 c^4} \right], \\ &= -\frac{p \dot{p}^2}{p^2 + m^2 c^2}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

¹⁰ A diferença de sinal entre esse resultado e o encontrado em outros artigos se da devido a métrica que estamos utilizando.

Logo, (3.115) resulta em:

$$\dot{p} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} F(\tau) + \tau_{rad} \left[\ddot{p} - \frac{p \dot{p}^2}{p^2 + m^2 c^2} \right], \quad (3.118)$$

em que novamente identificamos a constante de tempo $\tau_{rad} = \mu_0 q^2 / 6\pi m c$. Para simplificar essa equação vamos fazer a seguinte mudança de variável, $\gamma\beta = \sinh \zeta$, logo:

$$p = m c \sinh \zeta \quad \rightarrow \quad p^2 = m^2 c^2 \sinh^2 \zeta, \quad (3.119)$$

e suas derivadas,

$$\dot{p} = m c \cosh \zeta \cdot \dot{\zeta} \quad \rightarrow \quad \ddot{p} = m c (\dot{\zeta}^2 \sinh \zeta + \ddot{\zeta} \cosh \zeta). \quad (3.120)$$

Substituindo os resultados,

$$m c \cosh \zeta \cdot \dot{\zeta} = \sqrt{1 + \frac{m^2 c^2 \sinh^2 \zeta}{m^2 c^2}} F(\tau) + \tau_{rad} \left\{ m c (\dot{\zeta}^2 \cosh \zeta + \ddot{\zeta} \sinh \zeta) - \frac{1}{m^2 c^2 \sinh^2 \zeta + m^2 c^2} \left[(m c \sinh \zeta) \cdot (m c \cosh \zeta \cdot \dot{\zeta})^2 \right] \right\}, \quad (3.121)$$

ou ainda,

$$m c \cosh \zeta \cdot \dot{\zeta} = \sqrt{1 + \sinh^2 \zeta} F(\tau) + \tau_{rad} \left\{ m c (\dot{\zeta}^2 \cosh \zeta + \ddot{\zeta} \sinh \zeta) - \frac{m^2 c^2 \sinh \zeta \cdot \cosh^2 \zeta \cdot \dot{\zeta}^2}{m^2 c^2 (\sinh^2 \zeta + 1)} \right\}, \quad (3.122)$$

$$m c \cosh \zeta \cdot \dot{\zeta} = \cosh \zeta F(\tau) + \tau_{rad} \left\{ m c (\dot{\zeta}^2 \sinh \zeta + \ddot{\zeta} \cosh \zeta - \dot{\zeta}^2 \sinh \zeta) \right\}. \quad (3.123)$$

Resultando em,

$$m c \cosh \zeta \cdot \dot{\zeta} = \cosh \zeta F(\tau) + \tau_{rad} \ddot{\zeta} \cosh \zeta, \quad (3.124)$$

$$m c (\dot{\zeta} - \tau_{rad} \ddot{\zeta}) = F(\tau). \quad (3.125)$$

que é a equação de Abraham-Lorentz, só que ao invés de estar em função da aceleração, tal qual exibida na eq. (3.89), está apresentada em função do parâmetro ζ . Este fato atesta a consistência do formalismo covariante utilizado para deduzir as soluções para o problema da reação de radiação. Podemos notar que mesmo expressa nesse parâmetro ζ , a solução da equação ainda apresenta a questão de quebra da causalidade e a solução não física da auto-aceleração, como discutido anteriormente. Entretanto, existe uma forma de eliminar esses problemas, a chamada equação de *Landau-Lifshitz* que será apresentada em seguida.

3.2.2 A equação de Landau-Lifshitz

A equação de movimento desenvolvida por Abraham, Lorentz (3.14) e Dirac (3.115) discutida em detalhes nas seções anteriores dominaram as discussões acerca da dinâmica das partículas carregadas praticamente durante todo o século XX. Entretanto, sempre foi sabido que essa equação era defeituosa, pois violava a primeira lei de Newton que diz que na ausência de forças externas os corpos devem se manter em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, que como sabemos é válida tanto para partículas relativísticas quanto não-relativísticas. Uma extensa literatura foi desenvolvida na tentativa solucionar tais problemas mas nenhuma pareceu satisfatória, até o começo do século XXI [16].

A chave para a resolução desse problema está na observação que o termo responsável por levar em conta a emissão de radiação é pequeno, veja a eq. (3.110). Em 1951¹¹ Landau e Lifshitz [10] realizaram uma aproximação que leva em consideração as dimensões desse termo. Por simplicidade, vamos inicialmente considerar o caso não-covariante. Seja a equação de Abraham-Lorentz, (3.14):

$$\mathbf{F}^{ext} = m(\mathbf{a} - \tau_{rad}\dot{\mathbf{a}}). \quad (3.126)$$

Em seu texto, Landau e Lifshitz sugeriram que o segundo termo do lado direito seja negligenciado, de modo que obtemos a segunda lei de Newton usual,

$$\mathbf{F}^{ext} = m\mathbf{a}. \quad (3.127)$$

Isso é chamado de aproximação de ordem zero¹². Para τ_{rad} pequeno e finito, essa aproximação pode ser utilizada para substituir a derivada da aceleração por uma derivada da força externa, ou seja:

$$\frac{d\mathbf{F}^{ext}}{dt} = m\dot{\mathbf{a}}. \quad (3.128)$$

Substituindo em (3.126):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}^{ext} + \tau_{rad}\frac{d\mathbf{F}^{ext}}{dt}. \quad (3.129)$$

De imediato observamos que essa equação respeita a primeira lei de Newton, uma vez que $\mathbf{F}^{ext} = 0 \rightarrow \mathbf{a} = 0$. Pela regra da cadeia, a derivada total será dada por:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla). \quad (3.130)$$

Portanto,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}^{ext} + \tau_{rad}\frac{\partial \mathbf{F}^{ext}}{\partial t} + \tau_{rad}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{F}^{ext}. \quad (3.131)$$

Essa é a versão não-relativística da equação de Landau-Lifshitz. Agora, para obter a versão relativística, vamos utilizar a eq. (3.108),

$$m\frac{dU^\mu}{d\tau} = f^\mu + \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left[\frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 U^\alpha}{d\tau^2} U_\alpha U^\mu \right]. \quad (3.132)$$

¹¹ A data de 1951 se da a primeira edição em russo do livro em questão, enquanto 1971 se refere a edição traduzida para o inglês.

¹² Para uma discussão mais detalhada sobre os métodos de aproximação veja [12].

De maneira semelhante ao caso não-relativístico, a aproximação de ordem zero vale:

$$m \frac{dU^\mu}{d\tau} = f^\mu. \quad (3.133)$$

Derivando em relação ao tempo próprio:

$$\frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{m} \frac{df^\mu}{d\tau} \quad (3.134)$$

Substituindo em (3.132):

$$m \frac{dU^\mu}{d\tau} = f^\mu + \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left[\frac{1}{m} \frac{df^\mu}{d\tau} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{m} \frac{df^\mu}{d\tau} U_\alpha U^\mu \right]. \quad (3.135)$$

Esta é a versão covariante de (3.129). Essa equação foi sugerida por Ford e O'Connell [6] de maneira independente sem o conhecimento do trabalho de Landau-Lifshitz. Em 2006, esse mesmo resultado foi obtido por Medina [13] para o modelo estendido de uma esfera carregada, em contraste ao realizando para uma partícula pontual como feito por Dirac [4].

Consideraremos agora que apenas forças de natureza eletromagnética estão atuando sob a partícula. Nesse sentido, a 4-força f^μ será a 4-força Lorentz, vista anteriormente em (2.218). Dessa maneira, (3.132) arrume a forma:

$$m \frac{dU^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} U_\nu + \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left[\frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 U^\alpha}{d\tau^2} U_\alpha U^\mu \right]. \quad (3.136)$$

Novamente usando a aproximação de ordem zero:

$$m \frac{dU^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} U_\nu. \quad (3.137)$$

e sua derivada relação tempo próprio,

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} &= q \frac{d}{d\tau} (F^{\mu\nu} U_\nu), \\ &= q U_\nu \frac{dF^{\mu\nu}}{d\tau} + q F^{\mu\nu} \frac{dU_\nu}{d\tau}. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Para escrever apenas em função de $F^{\mu\nu}$ e suas derivadas vamos usar a (3.137) para substituir a derivada da 4-velocidade. Ou seja,

$$\frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} = \frac{q}{m} U_\nu \frac{dF^{\mu\nu}}{d\tau} + \frac{q^2}{m^2} F^{\mu\nu} F_{\nu\alpha} U^\alpha. \quad (3.139)$$

Substituindo esse resultado em (3.136),

$$\begin{aligned} m \frac{dU^\mu}{d\tau} &= q F^{\mu\nu} U_\nu + m \tau_{rad} \left[\left(\frac{q}{m} U_\nu \frac{dF^{\mu\nu}}{d\tau} + \frac{q^2}{m^2} F^{\mu\nu} F_{\nu\alpha} U^\alpha \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c^2} U_\alpha U^\mu \left(\frac{q}{m} U_\nu \frac{dF^{\alpha\nu}}{d\tau} + \frac{q^2}{m^2} F^{\alpha\nu} F_{\nu\lambda} U^\lambda \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.140)$$

O termo proporcional a $U_\alpha U_\nu \frac{dF^{\alpha\nu}}{d\tau}$ é igual a zero, pois resulta em uma contração de um tensor simétrico ($U_\alpha U_\nu$) com um antissimétrico ($F^{\alpha\nu}$). Dessa maneira, (3.140) resulta em:

$$m \frac{dU^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}U_\nu + m\tau_{rad} \left[\frac{q}{m} U_\nu \frac{dF^{\mu\nu}}{d\tau} + \frac{q^2}{m^2} F^{\mu\nu} F_{\nu\alpha} U^\alpha - \frac{q^2 U^\mu}{m^2 c^2} (F^{\alpha\nu} U_\alpha) (F_{\nu\lambda} U^\lambda) \right]. \quad (3.141)$$

Logo,

$$m \frac{dU^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}U_\nu + m\tau_{rad} \left[\frac{q}{m} U_\nu U^\beta \partial_\beta F^{\mu\nu} + \frac{q^2}{m^2} F^{\mu\nu} F_{\nu\alpha} U^\alpha - \frac{q^2 U^\mu}{m^2 c^2} (F^{\alpha\nu} U_\alpha) (F_{\nu\lambda} U^\lambda) \right]. \quad (3.142)$$

Obtendo a versão covariante da equação de Landau-Lifshitz, podemos notar que, assim como (3.129), a eq. (3.142) também obedece à primeira lei de Newton. Isso ocorre quando não há força externa atuando, resultando em $\frac{dU^\mu}{d\tau} = 0$. Dessa maneira, a equação de Landau-Lifshitz corrige os problemas de solução com auto-aceleração, eliminando consequentemente o crescimento exponencial da aceleração.

Entretanto, é importante ressaltar que essa teoria é válida apenas para $\tau_{rad} \ll 1$. O maior valor de τ_{rad} que ocorre é para o elétron, como visto anteriormente, sendo $\tau_{rad} \approx 6,25 \times 10^{-24} \text{s}$ [(16)]. Portanto, a equação de Landau-Lifshitz é válida para todas as partículas conhecidas e pode ser utilizada como substituto da equação de Abraham-Lorentz em inúmeros problemas nos quais seja interessante levar em conta os efeitos da reação de radiação.

4 Conclusão

A investigação realizada neste trabalho revelou que é possível expressar as equações de Maxwell em termos dos potenciais eletromagnéticos. Nesse contexto, a opção pelo calibre de Lorenz proporcionou uma análise mais profunda. Demonstrou-se que esses potenciais obedecem a uma equação de onda não-homogênea, cuja solução foi alcançada pelo método de Green. A introdução do conceito de tempo de retardo permitiu determinar os potenciais de Lienard-Wiechert, bem como os campos correspondentes. Com esses resultados em mãos, examinamos a capacidade dos campos de Lienard-Wiechert em descrever a radiação emitida por cargas pontuais, culminando na derivação da fórmula de Larmor.

Posteriormente, foi abordado a formulação covariante para o campo eletromagnético; o uso da formulação tensorial-relativística permitiu uma descrição covariante do eletromagnetismo clássico, no que se refere a maneiras de escrever as leis de Maxwell em uma forma que é manifestamente invariante sob transformações de Lorentz. Nesse contexto, calculamos as transformações para as densidades de carga e corrente, possibilitando demonstrar uma forma covariante para a equação de continuidade da carga. Em seguida, definimos o tensor 4-potencial a partir do qual estabeleceu-se uma forma tensorial das equações de Maxwell, permitindo tratar os campos elétricos e magnéticos como entes de um campo mais fundamental, o campo eletromagnético, através do tensor $F^{\mu\nu}$. De posse desse tensor, fizemos uma breve digressão sobre os invariantes relativísticos associados ao tensor $F^{\mu\nu}$.

Como próxima etapa, obtemos a conservação da energia e momento linear, utilizando como ponto de partida o trabalho e a pressão realizado pela força de Lorentz¹ sob uma densidade volumétrica de cargas. Obtivemos, assim as leis de conservação usual na literatura. Diante desse resultado, identificamos que tais leis de conservações apresentam uma forma simétrica que pode ser relacionada com contrações do tensor $F^{\mu\nu}$, indicando a existência de uma relação mais fundamental, a conservação do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$. Para finalizar a seção, reescrevemos a fórmula de Larmor para a potência de radiação em sua forma covariante, possibilitando a discussão da potência exercida por uma força externa sob uma partícula carregada mais adiante.

A utilização da fórmula de Larmor clássica permitiu a descrição da potência de radiação associada à força conhecida como a força de Abraham-Lorentz (A-L). Por conseguinte, foi observado que a solução da força de A-L, para o caso simples, é dada em termos de uma aceleração exponencial, sem no entanto violar a conservação de energia,

¹ Outro método bastante utilizado para obter tais leis de conservação é pelo teorema de Noether, que se utiliza das simetrias da ação como quantidades conservadas. Veja [16] para uma discussão mais aprofundada.

pois foi obtida a partir da fórmula de Larmor na qual obedece a conservação de energia. Tal consequência é fisicamente inaceitável, pois esta solução indica a existência de forças associadas com energia infinita. Em seguida fizemos uma aplicação da força de A-L para o caso de um elétron ligado forçado a oscilar devido a existência de um campo elétrico externo, na qual como solução da equação diferencial obtemos as leis de espalhamento de Thomson e de Rayleigh.

Como uma tentativa de contornar o problema da solução divergente da força de A-L, foi utilizando o modelo de uma partícula esférica carregada e rígida (semelhante ao modelo do elétron proposto por Lorentz), levando em consideração não apenas os campos de aceleração, como também os termos associados ao campo próximo da fonte (ou campo de velocidades). O procedimento consiste em fazer uma aproximação em multipolo para os campos de Lienard-Wiechert, viabilizando o cálculo da força sentida pelos elementos de carga infinitesimalmente próximos da carga fonte. Vimos que tal força também apresenta a mesma solução inconsistente da aceleração exponencial, porém outros problemas aparecem. Nessa solução, surge um termo com dimensão de massa que não satisfaz a relação² $E = mc^2$. Também vimos que os elementos que compõem o elétron aceleram antes da informação da força chegar a eles, violando o princípio da causalidade. Entretanto, a escala de tempo que esses efeitos ocorrem não são mensuráveis a nível de uma teoria clássica.

Posteriormente, partindo da fórmula de Larmor covariante, fizemos uma breve discussão a cerca da potência exercida por uma força externa sob uma partícula carregada. Mostramos que as forças de origem eletromagnéticas não alteram a massa de repouso, o que gera uma inconsistência no balanço de energia-momento. Entretanto, sabemos que a potência total é conservada ($U_\nu \dot{p}_{tot}^\nu = 0$), o que sugere que deva existir um 4-vetor κ^ν cuja contração com a 4-velocidade venha contrabalancear a pressão de radiação mantendo o balanço de energia estável. A existência desse termo, proposta por Dirac [4], estabelece uma equação covariante e consistente com a conservação da massa de repouso, sem no entanto fazer qualquer menção ao termo de "massa" eletromagnética discutido no formalismo clássico. O 4-vetor κ^ν além de sua posição fundamental para o equilíbrio da energia, fornece a fórmula de Larmor quando contraído com a 4-velocidade. É a partir da sua inserção que obtemos a versão covariante da força de A-L, conhecida nesse cenário como força de Lorentz-Dirac (L-D). Contudo, mesmo desempenhando com êxito o papel de mediador da transição do formalismo clássico para o relativístico, as soluções da equação de movimento ainda apresentam a quebra da causalidade, o que pode indicar que o problema está no modelo da eletrodinâmica que estamos considerando.

Por fim, mostramos uma possível correção desse problema, chamada equação de Landau-Lifshitz (L-L). Esse método foi inicialmente apresentado por Landau e Lifshitz

² Uma tentativa de solucionar tal problema foi proposto por Poincaré realizando o processo de renormalização da massa, na qual está relacionada a estabilidade da partícula [3].

[10], no qual se considera uma aproximação de primeira ordem de τ_{rad} , permitindo-nos descartar a derivada da aceleração e transformá-la em uma derivada primeira da aceleração. Dessa maneira, a força de A-L depende apenas da força externa aplicada sobre a partícula, garantindo assim que a primeira lei de Newton seja respeitada. Em outras palavras, não há pré-aceleração, como sugerido na seção 3.1.3. No entanto, é crucial observar que a validade da equação de L-L se restringe a pequenos valores de τ_{rad} . Entretanto, o maior desses valores ocorre para o elétron, com valor de $6,24 \cdot 10^{-24} s$. Nesse contexto, a equação de L-L mostra-se aplicável a diversos cenários distintos a qual seja interessante levar em consideração os efeitos da reação de radiação.

Em resumo, este trabalho oferece uma revisão detalhada dos fundamentos do eletromagnetismo clássico, proporcionando um tratamento aprofundado do problema da reação de radiação, tanto no âmbito relativístico quanto não-relativístico. Apesar dos avanços alcançados, é importante reconhecer as limitações e as questões em aberto que permanecem na compreensão dessa fenomenologia.

Ao abordar a força de Abraham-Lorentz e suas soluções divergentes, este estudo destaca a complexidade do problema da reação de radiação, especialmente quando aplicado a partículas elementares como o elétron. A proposta da equação de Landau-Lifshitz representa um avanço significativo ao corrigir as inconsistências da abordagem de Abraham-Lorentz, mas a sua validade está restrita a pequenos valores de τ_{rad} , levando-nos a refletir sobre a extensão desses resultados para cenários mais amplos.

Importante ressaltar que, apesar dos esforços para contornar as limitações da teoria clássica, a questão da causalidade continua a desafiar nosso entendimento. A existência de pré-acelerações e as divergências temporais apresentadas por algumas soluções indicam que a natureza da reação de radiação é intrinsecamente complexa e pode exigir abordagens mais avançadas.

Essas considerações destacam a importância de estender este trabalho para novos cenários, como eletrodinâmicas estendidas ou abordagens de renormalização mais avançadas, conforme proposto por [12]. Além disso, a exploração de teorias emergentes, como a eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw [17], pode oferecer perspectivas valiosas para esclarecer as nuances da reação de radiação em contextos mais complexos.

Em última análise, este estudo não apenas esclarece os desafios inerentes à reação de radiação, mas também aponta para direções promissoras para pesquisas futuras. Ao continuar a explorar e aprimorar nosso entendimento nessa área, esperamos contribuir para uma compreensão mais completa e precisa dos fenômenos eletromagnéticos em escalas fundamentais.

Referências

- 1 BARUT, A. O. *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*. 1st ed. : Dover Publications, 1980.
- 2 BLACKBURN, T.G. Radiation reaction in electron–beam interactions with high-intensity lasers. *Rev. Mod. Plasma Phys.*, vol. 4, no. 5 (2020). <<https://doi.org/10.1007/s41614-020-0042-0>>
- 3 BRAU, C. *Modern Problems in Classical Electrodynamics*. Oxford University Press, 2004.
- 4 DIRAC, P. A. M. *Classical theory of radiating electrons*, *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 167, pp. 148–169, 1938.
- 5 EISBERG, R., RESNICK, R. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*. 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1985.
- 6 FORD, G.W.; O'CONNELL, R.F. *Relativistic form of radiation reaction*, *Physics Letters A*, vol. 174, no. 3, pp. 182-184, 1993.
- 7 FRENKEL, Josif, *Princípios de eletrodinâmica clássica*; 2ed., EDUSP, 2005
- 8 GRIFFITHS, David J. *Introduction to Electrodynamics*. 3rd ed. : Prentice Hall, 1999.
- 9 JACKSON, John David. *Classical Electrodynamics*. 3rd ed. : John Wiley & Sons, 1998.
- 10 LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields*. Translated by M. Hamermesh. 4th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1975.
- 11 MACHADO, Kleber Daum. *Teoria do Eletromagnetismo*. 1st ed. : Editora UEPG, 2006. v. 3.
- 12 MAGGIORE, M. *A Modern Introduction to Classical Electrodynamics*. Oxford University Press, 2023 Aug 13.
- 13 MEDINA, Rodrigo. Radiation reaction of a classical quasi-rigid extended particle. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 39, no. 14, pp. 3801–3816, 2006.
- 14 MELIA, F. *Electrodynamics*. Chicago Lectures in Physics, University of Chicago Press, 2001.
- 15 PANOFSKY, W. K. H., PHILLIPS, M. *Classical Electricity and Magnetism*. Dover Publication, Inc., 2005.

- 16 ROHRLICH, Fritz. Classical Charged Particles. 3rd ed. : World Scientific, 2007.
- 17 VIPPALA, V. R.; GUTTI, Ss; HAQUE, A. Radiation Reaction in a Lorentz-Violating Electrodynamics. (2022). <<https://doi.org/10.48550/arXiv.1707.09522>>.
- 18 ZANGWILL, Andrew. Modern Electrodynamics. 1st ed. : Cambridge University Press, 2013.

A Solução da equação de onda pelo método da função de Green

Neste apêndice, vamos resolver a equação de onda,

$$\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.1})$$

Para determinar a função de Green, ela deve satisfazer a seguinte equação:

$$\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t'). \quad (\text{A.2})$$

Escreveremos as transformadas de Fourier da função de Green e da delta de Dirac

$$G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int G(\mathbf{p}, \omega) e^{-i[\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')+\omega(t-t')]} d\omega d^3\mathbf{p}, \quad (\text{A.3})$$

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i[\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] } d^3\mathbf{p}, \quad \delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega(t-t')} d\omega. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo em (A.2) resulta

$$\int \int \left[\frac{\omega^2}{c^2} - p^2 \right] G(\mathbf{p}, \omega) e^{-i[\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')+\omega(t-t')]} d\omega d^3\mathbf{p} = \int \int e^{-i[\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')+\omega(t-t')]} d\omega d^3\mathbf{p} \quad (\text{A.5})$$

ou ainda,

$$G(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{k^2 - p^2}. \quad (\text{A.6})$$

Esta é a função de Green no espaço recíproco. Para obtermos a função de Green desejada, basta substituir (A.6) na equação (A.3)

$$G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \int \frac{1}{-k^2 + p^2} e^{-i[\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')+\omega(t-t')]} d\omega d^3\mathbf{p}. \quad (\text{A.7})$$

Vamos resolver a integral da variável p em coordenadas esféricas,

$$\int \frac{1}{-k^2 + p^2} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3\mathbf{p} = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{p^2}{p^2 - k^2} e^{-ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cos\theta} \sin\theta dp d\theta d\phi. \quad (\text{A.8})$$

Efetuamos inicialmente a integral na variável ϕ ,

$$\int \frac{1}{-k^2 + p^2} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3\mathbf{p} = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{p^2}{p^2 - k^2} e^{-ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\cos\theta} \sin\theta dp d\theta. \quad (\text{A.9})$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis $\cos\theta = u$, $du = -\sin\theta d\theta$,

$$\int \frac{1}{-k^2 + p^2} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3\mathbf{p} = 2\pi \int_0^\infty \int_{-1}^1 \frac{p^2}{p^2 - k^2} e^{-ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|u} dp du. \quad (\text{A.10})$$

Integrando em u ,

$$\int \frac{1}{-k^2 + p^2} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3\mathbf{p} = \frac{2\pi i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_0^\infty \frac{p}{p^2 - k^2} \left(e^{-p|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - e^{-ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dp, \quad (\text{A.11})$$

$$I = \int_0^\infty \frac{p}{p^2 - k^2} e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dp - \int_0^\infty \frac{p}{p^2 - k^2} e^{-ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dp. \quad (\text{A.12})$$

Fazendo $p \rightarrow -p$ na segunda parcela,

$$I = \int_0^\infty \frac{p}{p^2 - k^2} e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dp - \int_0^{-\infty} \frac{p}{p^2 - k^2} e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dp. \quad (\text{A.13})$$

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{p}{p^2 - k^2} e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dp. \quad (\text{A.14})$$

A integral I pode ser facilmente resolvida usando o teorema dos resíduos. Uma vez que os polos do integrando são $\pm\omega$, devemos usar o truque da regularização antes de aplicar o teorema dos resíduos,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{p}{p^2 - k^2} e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dp = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{p}{p^2 + \alpha^2} e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dp, \quad (\text{A.15})$$

onde,

$$\alpha = \pm\sqrt{\epsilon^2 - k^2}. \quad (\text{A.16})$$

Dessa forma, os polos passam a ser,

$$p = \pm i\alpha. \quad (\text{A.17})$$

Usando o teorema dos resíduos e traçando o contorno por baixo, temos,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{p}{p^2 + \alpha^2} e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dp = -2\pi i \lim_{p \rightarrow -i\alpha} (p + i\alpha) \frac{p e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{(p - i\alpha)(p + i\alpha)}, \quad (\text{A.18})$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{p}{p^2 + \alpha^2} e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dp = \frac{2\pi i}{2i\alpha} i\alpha e^{\alpha|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = i\pi e^{\alpha|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (\text{A.19})$$

Assim,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} i\pi e^{\alpha|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = i\pi e^{\pm ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = i\pi e^{\pm i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (\text{A.20})$$

Uma vez que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha = \pm ik$, logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{p^2 - k^2} e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dp = i\pi e^{\pm i\omega \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}}, \quad (\text{A.21})$$

e então,

$$\int \frac{p}{p^2 - k^2} e^{-ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{p} = \frac{2\pi^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{\pm i\omega \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}}. \quad (\text{A.22})$$

Substituindo na função de Green,

$$G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int e^{\pm i\omega \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}} e^{-i\omega(t-t')} d\omega, \quad (\text{A.23})$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int e^{-i\omega[(t-t') \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}]} d\omega, \quad (\text{A.24})$$

$$G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} 2\pi \delta \left[(t - t') \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right], \quad (\text{A.25})$$

e finalmente,

$$G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left[\left(t \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} - t' \right) \right]. \quad (\text{A.26})$$

Essa é a função de Green do problema.

B Cálculo dos Campos de Liénard-Wiechert

Para obter os campos partiremos dos potenciais descritos pelas equações (2.54) e (2.55):

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t_R) - \boldsymbol{\beta}(t_R) \cdot \mathbf{R}(t_R)}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}(t_R)}{R(t_R) - \boldsymbol{\beta}(t_R) \cdot \mathbf{R}(t_R)}.$$

Inicialmente, vamos calcular o gradiente do potencial escalar¹,

$$\nabla\phi = \nabla \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^2} \nabla [R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]. \quad (\text{B.1})$$

Resolvendo o gradiente:

$$\nabla [R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}] = \nabla (R) - \nabla (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}). \quad (\text{B.2})$$

sabendo que: $R = \sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}$, temos:

$$\nabla (R) = \frac{1}{2R} \nabla (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}). \quad (\text{B.3})$$

Lembrando que: $\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$, temos:

$$\nabla (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) = (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{R} + \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{R}) + (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{R} + \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{R}) = 2[(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{R} + \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{R})]. \quad (\text{B.4})$$

Logo,

$$\nabla (R) = \frac{1}{2R} 2[(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{R} + \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{R})] = \frac{1}{R} [(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{R} + \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{R})]. \quad (\text{B.5})$$

Usando $\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_q$:

$$(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{R} = (\mathbf{R} \cdot \nabla) [\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_q] = (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{r}(t) - (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{r}_q. \quad (\text{B.6})$$

Lançando mão da definição do vetor posição $\mathbf{r}(t) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ e $\mathbf{R} = R_x\hat{x} + R_y\hat{y} + R_z\hat{z}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{r}(t) &= \left[(R_x\hat{x} + R_y\hat{y} + R_z\hat{z}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} \right) \right] (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}), \\ &= R_x\hat{x} + R_y\hat{y} + R_z\hat{z} = \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{r}_q &= \left[(R_x\hat{x} + R_y\hat{y} + R_z\hat{z}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} \right) \right] (x_q\hat{x} + y_q\hat{y} + z_q\hat{z}), \\ &= \left[R_x \frac{\partial}{\partial x} + R_y \frac{\partial}{\partial y} + R_z \frac{\partial}{\partial z} \right] (x_q\hat{x} + y_q\hat{y} + z_q\hat{z}), \\ &= \left[R_x \frac{\partial x_q}{\partial x} \hat{x} + R_y \frac{\partial y_q}{\partial y} \hat{y} + R_z \frac{\partial z_q}{\partial z} \hat{z} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

¹ Como todas as quantidades estão expressas em função do tempo de retardo (t_R), iremos omitir para uma notação mais simplificada.

Utilizando a regra da cadeia,

$$(\mathbf{R} \cdot \nabla) \mathbf{r}_q = \left[R_x \frac{dx_q}{dt_R} \frac{\partial t_R}{\partial x} \hat{x} + R_y \frac{dy_q}{dt_R} \frac{\partial t_R}{\partial y} \hat{y} + R_z \frac{dz_q}{dt_R} \frac{\partial t_R}{\partial z} \hat{z} \right] = c\boldsymbol{\beta} (\mathbf{R} \cdot \nabla t_R), \quad (\text{B.9})$$

sendo: $\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{c} \left(\frac{dx_q}{dt_R} \hat{x} + \frac{dy_q}{dt_R} \hat{y} + \frac{dz_q}{dt_R} \hat{z} \right) = \frac{\mathbf{v}(t_R)}{c}$, temos:

$$(\mathbf{R} \cdot \nabla) \mathbf{R} = \mathbf{R} - c\boldsymbol{\beta} (\mathbf{R} \cdot \nabla t_R). \quad (\text{B.10})$$

Agora vamos calcular o termo com o rotacional,

$$\nabla \times \mathbf{R} = \nabla \times \mathbf{r}(t) - \nabla \times \mathbf{r}_q, \quad (\text{B.11})$$

em que:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{r}_q &= \hat{x} \left(\frac{\partial z_q}{\partial y} - \frac{\partial y_q}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial x_q}{\partial z} - \frac{\partial z_q}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial y_q}{\partial x} - \frac{\partial x_q}{\partial y} \right), \\ &= \hat{x} \left(\frac{dy_q}{dt_R} \frac{\partial t_R}{\partial y} - \frac{dz_q}{dt_R} \frac{\partial t_R}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{dz_q}{dt_R} \frac{\partial t_R}{\partial z} - \frac{dx_q}{dt_R} \frac{\partial t_R}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{dx_q}{dt_R} \frac{\partial t_R}{\partial x} - \frac{dy_q}{dt_R} \frac{\partial t_R}{\partial y} \right), \\ &= -c\boldsymbol{\beta} \times \nabla t_R. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Logo,

$$\nabla \times \mathbf{R} = c\boldsymbol{\beta} \times \nabla t_R. \quad (\text{B.13})$$

Realizando o produto vetorial com $\mathbf{R}$ pela esquerda,

$$\mathbf{R} \times \nabla \times \mathbf{R} = c\mathbf{R} \times \boldsymbol{\beta} \times \nabla t_R. \quad (\text{B.14})$$

Substituindo esses resultados em (B.5),

$$\nabla(R) = \frac{1}{R} [\mathbf{R} - c\boldsymbol{\beta} (\mathbf{R} \cdot \nabla t_R) + c\mathbf{R} \times \boldsymbol{\beta} \times \nabla t_R]. \quad (\text{B.15})$$

Usando a propriedade: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, obtemos:

$$\begin{aligned} [\mathbf{R} - c\boldsymbol{\beta} (\mathbf{R} \cdot \nabla t_R) + c\mathbf{R} \times \boldsymbol{\beta} \times \nabla t_R] &= \{ \mathbf{R} + c[\mathbf{R} \times \boldsymbol{\beta} \times \nabla t_R - \boldsymbol{\beta} (\mathbf{R} \cdot \nabla t_R)] \}, \\ &= \left\{ \mathbf{R} + c \left[(\mathbf{R} \cdot \nabla t_R) \boldsymbol{\beta} - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) \nabla t_R - \boldsymbol{\beta} (\mathbf{R} \cdot \nabla t_R) \right] \right\}, \\ &= \{ \mathbf{R} - c(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) \nabla t_R \}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\nabla(R) = \frac{1}{R} [\mathbf{R} - c(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) \nabla t_R]. \quad (\text{B.16})$$

Por outro lado, vale a relação $R = c(t - t_R)$, de modo que

$$\nabla(R) = c\nabla(t - t_R) = -c\nabla t_R. \quad (\text{B.17})$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 -c\nabla t_R &= \frac{1}{R} [\mathbf{R} - c(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})\nabla t_R], \\
 cR\nabla t_R - c(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})\nabla t_R &= -\mathbf{R}, \\
 c[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]\nabla t_R &= -\mathbf{R}, \\
 \nabla t_R &= \frac{-\mathbf{R}}{c[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]}. \tag{B.18}
 \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado em (B.17),

$$\nabla(R) = -\nabla \left[\frac{-\mathbf{R}}{c[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]} \right] = \frac{\mathbf{R}}{[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]}. \tag{B.19}$$

Como próximo passo, vamos calcular o termo referente $\nabla(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})$, utilizando novamente a identidade vetorial:

$$\nabla(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{R} \cdot \nabla)\boldsymbol{\beta} + \mathbf{R} \times (\nabla \times \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R} + \boldsymbol{\beta} \times (\nabla \times \mathbf{R}). \tag{B.20}$$

Por um processo semelhante aos utilizados nas eq. (B.7) e (B.12) podemos expressar:

$$(\mathbf{R} \cdot \nabla)\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{R} \cdot \nabla t_R), \tag{B.21}$$

$$(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla)\mathbf{R} = \boldsymbol{\beta} - c\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla t_R), \tag{B.22}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\alpha} \times \nabla t_R, \tag{B.23}$$

$$\nabla \times \mathbf{R} = c\boldsymbol{\beta} \times \nabla t_R, \tag{B.24}$$

onde $\boldsymbol{\alpha}(t_R) = \frac{\mathbf{a}(t_R)}{c}$. Utilizando o resultado ∇t_R calculado anteriormente em (B.18), obtemos:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{R} \cdot \nabla)\boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\alpha} \left[\mathbf{R} \cdot \left(\frac{-\mathbf{R}}{c[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]} \right) \right], \\
 &= \frac{-\boldsymbol{\alpha} R^2}{c[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]}, \tag{B.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla)\mathbf{R} &= \boldsymbol{\beta} - c\boldsymbol{\beta} \left[\boldsymbol{\beta} \cdot \left(\frac{-\mathbf{R}}{c[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]} \right) \right], \\
 &= \frac{\boldsymbol{\beta} [R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})] + \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})}{[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]}, \\
 &= \frac{\boldsymbol{\beta} R}{[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]}, \tag{B.26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{\beta} &= -\boldsymbol{\alpha} \times \left[\frac{-\mathbf{R}}{c[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]} \right], \\ &= \frac{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \times \mathbf{R}}{[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]},\end{aligned}\tag{B.27}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{R} &= c\boldsymbol{\beta} \times \left[\frac{-\mathbf{R}}{c[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]} \right], \\ &= \frac{-\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}}{[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]}.\end{aligned}\tag{B.28}$$

Deste modo, temos:

$$\nabla(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]} \left\{ -\frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} R^2 + \mathbf{R} \times \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \times \mathbf{R} \right) + \boldsymbol{\beta} R - \boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}) \right\}.\tag{B.29}$$

Novamente usando a propriedade do produto vetorial:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} \times \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \times \mathbf{R} \right) &= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} - \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \right) \mathbf{R} = \frac{\alpha R^2}{c} - \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \right) \mathbf{R}, \\ \boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}) &= (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) \boldsymbol{\beta} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{R} = (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) \boldsymbol{\beta} - \beta^2 \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) &= \frac{1}{[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]} \left\{ -\frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} R^2 + \frac{\alpha R^2}{c} - \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \right) \mathbf{R} + \boldsymbol{\beta} R - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) \boldsymbol{\beta} + \beta^2 \mathbf{R} \right\}, \\ &= \frac{1}{[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]} \left\{ -\left(\mathbf{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \right) \mathbf{R} + \boldsymbol{\beta} R - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) \boldsymbol{\beta} + \beta^2 \mathbf{R} \right\}.\end{aligned}\tag{B.30}$$

Usando os resultados anteriores, o gradiente do potencial escalar pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\nabla \phi &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^2} \left[\frac{\mathbf{R}}{[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]} - \frac{-\left(\mathbf{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \right) \mathbf{R} + \boldsymbol{\beta} R - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) \boldsymbol{\beta} + \beta^2 \mathbf{R}}{[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]} \right], \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^3} \left[\mathbf{R} + \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \right) \mathbf{R} - \boldsymbol{\beta} R + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) \boldsymbol{\beta} - \beta^2 \mathbf{R} \right], \\ \nabla \phi &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left\{ (1 - \beta^2) \mathbf{R} + \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \right) \mathbf{R} + [(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) - R] \boldsymbol{\beta} \right\}}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^3}.\end{aligned}\tag{B.31}$$

Para finalizar, precisamos calcular a derivada temporal do potencial vetor, ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right], \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{\mathbf{v}}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^2} \frac{\partial}{\partial t} [R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}] \right\}.\end{aligned}\tag{B.32}$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t_R}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_R}.$$

Lembrando que: $t = t_R + \frac{R}{c}$,

$$\frac{\partial t}{\partial t_R} = 1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{cR} = 1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} \rightarrow \frac{\partial t_R}{\partial t} = \frac{R}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]}. \quad (\text{B.33})$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]} \frac{\partial}{\partial t_R}.$$

Com esses resultados temos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{R}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_R} = \frac{cR\boldsymbol{\alpha}}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]}, \quad (\text{B.34})$$

e,

$$\frac{\partial}{\partial t} [R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}] = \frac{R}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]} \frac{\partial}{\partial t_R} [R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}] = \frac{R}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]} \left[\frac{\partial R}{\partial t_R} - \frac{\partial}{\partial t_R} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) \right]. \quad (\text{B.35})$$

Calculando a derivada do primeiro termo:

$$\frac{\partial R}{\partial t_R} = \frac{\partial}{\partial t_R} (\sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}) = \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t_R} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t_R} \right) = \frac{2}{2R} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t_R} \cdot \mathbf{R} \right), \quad (\text{B.36})$$

onde,

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t_R} = \frac{\partial}{\partial t_R} (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_q) = -c\boldsymbol{\beta}. \quad (\text{B.37})$$

Logo,

$$\frac{\partial R}{\partial t_R} = -c(\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}}). \quad (\text{B.38})$$

Calculando a derivada do segundo termo, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t_R} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_R} \cdot \mathbf{R} + \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t_R} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{R} - c(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}), \quad (\text{B.39})$$

Assim, a equação (B.35) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} [R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}] = \frac{-c(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) - R(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{R}) + cR\beta^2}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]}. \quad (\text{B.40})$$

Substituindo em (B.32):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]} \left(\frac{cR\boldsymbol{\alpha}}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]} \right) \right. \\ \left. - \frac{c\boldsymbol{\beta}}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^2} \left(\frac{-c(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) - R(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{R}) + cR\beta^2}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]} \right) \right\}, \quad (\text{B.41}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \frac{cR\boldsymbol{\alpha}}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^2} - \frac{c^2 R \boldsymbol{\beta} \beta^2 - c^2 \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) - cR\boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{R})}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^3} \right\}, \quad (\text{B.42})$$

$$= \frac{\mu_0 c^2 q}{4\pi} \left\{ \frac{R \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} [R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}] - R\boldsymbol{\beta} \beta^2 - \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) - R\boldsymbol{\beta} (\frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \cdot \mathbf{R})}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^3} \right\}. \quad (\text{B.43})$$

Usando, $\mu_0 c^2 = 1/\epsilon_0$,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{R\frac{\boldsymbol{\alpha}}{c}[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}] - R\boldsymbol{\beta}\beta^2 - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) - R\boldsymbol{\beta}(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \cdot \mathbf{R})}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^3} \right\}. \quad (\text{B.44})$$

De posse da derivada temporal do potencial vetor, usando o resultado da eq. (B.31) obtemos o campo elétrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (\text{B.45})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) = & - \left\{ -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left\{ (1 - \beta^2)\mathbf{R} + \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \right) \mathbf{R} + [(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) - R]\boldsymbol{\beta} \right\}}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^3} \right\} \\ & - \left\{ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left\{ R\frac{\boldsymbol{\alpha}}{c}[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}] - R\boldsymbol{\beta}\beta^2 + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) + R\boldsymbol{\beta}(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \cdot \mathbf{R}) \right\}}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^3} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

ou,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) = & \frac{q}{4\pi\epsilon_0[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^3} \left\{ (1 - \beta^2)\mathbf{R} + \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \right) \mathbf{R} + \cancel{\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})} - \boldsymbol{\beta}R \right. \\ & \left. - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c}[R^2 - R(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})] + R\boldsymbol{\beta}\beta^2 - \cancel{\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})} - R\boldsymbol{\beta} \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \cdot \mathbf{R} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

ou ainda,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^3} \left\{ (1 - \beta^2)(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) + \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \right) (\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c}[\mathbf{R} \cdot (\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta})] \right\}. \quad (\text{B.48})$$

Utilizando a relação:

$$\mathbf{R} \times \left[(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \times \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \right] = \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \right) (\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c}[\mathbf{R} \cdot (\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta})],$$

obtemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta})}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^3} + \frac{\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \times \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c}]}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^3} \right\}. \quad (\text{B.49})$$

Esta é a expressão para o conhecido campo elétrico de Liénard-Wiechert. Vamos agora obter o campo magnético, ou seja:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t) = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{B.50})$$

Usando a relação entre os potenciais vetor e escalar $\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{c}\phi$ e as eq. (B.27) e (B.31), encontramos:

$$\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{c}\phi \right) = \frac{1}{c} [(\nabla\phi) \times \boldsymbol{\beta} + \phi(\nabla \times \boldsymbol{\beta})]. \quad (\text{B.51})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t) = \frac{1}{c} \left\{ \left[-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left\{ (1 - \beta^2)\mathbf{R} + \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c}\right)\mathbf{R} + [(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) - R]\boldsymbol{\beta} \right\}}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^3} \right] \times \boldsymbol{\beta} + \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]} \right] \left(\frac{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \times \mathbf{R}}{[R - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})]} \right) \right\}. \quad (\text{B.52})$$

Como $\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta} = 0$, o campo magnético de Liénard-Wiechert é dado por:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{c} \times \mathbf{R}}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^2} - \frac{\left[(1 - \beta^2) + \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}}{c}\right) \right] (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\beta})}{[R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}]^3} \right\}. \quad (\text{B.53})$$

C Solução da Equação do Oscilador Harmônico Forçado

Neste apêndice resolveremos a eq. (3.24).

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (\text{C.1})$$

Supondo uma solução $x = Ae^{\lambda t}$ temos:

$$\dot{x} = \lambda Ae^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = \lambda^2 Ae^{\lambda t}. \quad (\text{C.2})$$

Substituindo em (C.1):

$$\lambda^2 Ae^{\lambda t} + \lambda \Gamma Ae^{\lambda t} + \omega_0^2 Ae^{\lambda t} = -\frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (\text{C.3})$$

Ou,

$$(\lambda^2 + \lambda \Gamma + \omega_0^2) Ae^{\lambda t} = -\frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t}, \quad (\text{C.4})$$

Como as exponenciais são funções linearmente independentes, para que a única solução não seja a trivial, $x(t) = 0$, temos que impor:

$$\lambda = -i\omega, \quad (\text{C.5})$$

$$(-\omega^2 - i\omega\Gamma + \omega_0^2) A = -\frac{q}{m} E_0. \quad (\text{C.6})$$

Resolvendo para A na equação (C.6):

$$A = -\frac{q}{m} E_0 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \quad (\text{C.7})$$

Logo, a solução da eq. (3.24) será dada por:

$$x(t) = -\frac{qE_0}{m} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}. \quad (\text{C.8})$$

D Cálculo do campo elétrico para o modelo do elétron

O campo elétrico produzido pela carga de' sobre a carga de é dado por¹:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^3} + \frac{\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \times \frac{\mathbf{a}}{c}]}{[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^3} \right\}. \quad (\text{D.1})$$

Vamos expandir em série de Taylor as grandezas no tempo retardado em termos do tempo atual, ou seja,

$$\mathbf{v}(t_R) = \mathbf{v}(t) + \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_t (t_R - t) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \right|_t (t_R - t)^2 + \dots \quad (\text{D.2})$$

Usando a condição de que a partícula está em repouso no tempo atual, ou seja $\mathbf{v}(t) = 0$, e a definição tempo de retardo, $t_R = t - R/c$, ficamos com:

$$\mathbf{v}(t_R) = -\frac{R\mathbf{a}(t)}{c} + \frac{\dot{\mathbf{a}}(t) R^2}{2c^2} + \dots \quad (\text{D.3})$$

Sendo $\mathbf{a}(t)$ a aceleração da partícula no tempo atual t . Agora vamos calcular a expansão da aceleração temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t_R) &= \mathbf{a}(t) + \left. \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right|_t (t_R - t) + \dots \\ \mathbf{a}(t_R) &= \mathbf{a}(t) - \frac{R}{c} \dot{\mathbf{a}}(t) + \dots \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Outro fator importante é,

$$[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^{-3} = R^{-3} \left[1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{Rc} \right]^{-3}. \quad (\text{D.5})$$

Portanto,

$$[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^{-3} = R^{-3} \left[1 - \frac{1}{Rc} \mathbf{R} \cdot \left(-\frac{R\mathbf{a}(t)}{c} + \frac{\dot{\mathbf{a}}(t) R^2}{2c^2} + \dots \right) \right]^{-3}, \quad (\text{D.6})$$

ou ainda,

$$[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^{-3} = R^{-3} \left[1 + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}(t)}{c^2} - \frac{\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}}(t) R}{2c^3} + \dots \right]^{-3}. \quad (\text{D.7})$$

Usando a expansão, $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, esse resultado assume:

$$[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^{-3} = R^{-3} \left[1 - \frac{3}{c^2} \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}(t) + \frac{3R}{2c^3} \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}}(t) + \dots \right]. \quad (\text{D.8})$$

¹ Neste apêndice vamos suprimir as dependências em relação ao tempo atual t , em contrapartida vamos deixar de maneira explícita as dependências ao tempo de retardo, t_R .

Agora, na equação (D.1) podemos desprezar os termos de β^2 utilizando o fato de $\mathbf{v}(t_R) \ll c$. Deste modo o campo elétrico será:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{c^2} (\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]) \right\} [\mathbf{R} - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^{-3}. \quad (\text{D.9})$$

Usando a identidade $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, obtemos

$$\left\{ \mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{c^2} [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{R} \cdot (\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}))\mathbf{a}] \right\}, \quad (\text{D.10})$$

ou ainda,

$$\left\{ \left(1 + \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} \right) (\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) - \left[\frac{R^2}{c^2} - \frac{R}{c^2} (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) \right] \mathbf{a}(t_R) \right\}. \quad (\text{D.11})$$

Substituindo as expansões dadas por (D.3) e (D.4), encontramos as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned} [\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}] &= \mathbf{R} - \frac{R}{c} \mathbf{v}(t_R), \\ &= \mathbf{R} - \frac{R}{c} \left[-\frac{R\mathbf{a}(t)}{c} + \frac{\dot{\mathbf{a}}(t)}{2} \frac{R^2}{c^2} + \dots \right], \\ &= \mathbf{R} + \frac{R^2}{c^2} \mathbf{a}(t) - \frac{\dot{\mathbf{a}}(t)}{2} \frac{R^3}{c^3} + \dots \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} \right) &= 1 + \frac{1}{c^2} \mathbf{R} \cdot \left[\mathbf{a}(t) - \dot{\mathbf{a}} \frac{R}{c} + \dots \right], \\ &= 1 + \frac{1}{c^2} \left[\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}(t) - \frac{R}{c} \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}} + \dots \right], \\ &= 1 + \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} - \frac{R}{c} \frac{(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}})}{c^2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{R^2}{c^2} - \frac{R}{c^2} (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) \right] &= \frac{R^2}{c^2} - \frac{R}{c^3} \mathbf{R} \cdot \left[-\frac{R\mathbf{a}(t)}{c} + \frac{\dot{\mathbf{a}}(t)}{2} \frac{R^2}{c^2} + \dots \right], \\ &= \frac{R^2}{c^2} + \frac{R^2}{c^2} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} - \frac{R^3}{c^3} \frac{(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}})}{2c^2} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Calculando os produtos (considerando apenas termos até a ordem R^3/c^3):

$$\begin{aligned} \left[\frac{R^2}{c^2} - \frac{R}{c^2} (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) \right] \mathbf{a}(t_R) &= \\ &= \left[\frac{R^2}{c^2} + \frac{R^2}{c^2} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} - \frac{R^3}{c^3} \frac{(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}})}{2c^2} + \dots \right] \left[\mathbf{a} - \frac{R}{c} \dot{\mathbf{a}} + \dots \right], \\ &= \frac{R^2}{c^2} \mathbf{a} + \frac{R^2}{c^2} \mathbf{a} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} + \frac{R^3}{c^3} \mathbf{a} \frac{(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}})}{2c^2} - \frac{R^3}{c^3} \dot{\mathbf{a}} - \frac{R^3}{c^3} \dot{\mathbf{a}} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

E para o outro termo,

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2}\right) [\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}] = \\ & \left[1 + \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} - \frac{R(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}})}{c} \frac{1}{c^2} + \dots\right] \left[\mathbf{R} + \frac{R^2}{c^2} \mathbf{a} - \frac{\dot{\mathbf{a}} R^3}{2c^3} + \dots\right] \quad (\text{D.16}) \\ & = \mathbf{R} + \mathbf{R} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} - \mathbf{R} \frac{R(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}})}{c} \frac{1}{c^2} + \frac{R^2}{c^2} \mathbf{a} \\ & \quad + \frac{R^2}{c^2} \mathbf{a} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} - \frac{R^3(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}})}{c^3} \frac{1}{c^2} \mathbf{a} - \frac{\dot{\mathbf{a}} R^3}{2c^3} - \frac{R^3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^3} \frac{\dot{\mathbf{a}}}{c^2} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Substituindo em (D.11):

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(1 + \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2}\right) (\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) - \left[\frac{R^2}{c^2} - \frac{R}{c^2}(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})\right] \mathbf{a}(t_R) \right\} = \\ & = \left\{ \left[\mathbf{R} + \mathbf{R} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} - \mathbf{R} \frac{R(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}})}{c} \frac{1}{c^2} + \frac{R^2}{c^2} \mathbf{a} + \frac{R^2(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} \mathbf{a} - \frac{R^3(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}})}{c^3} \frac{1}{c^2} \mathbf{a} - \frac{\dot{\mathbf{a}} R^3}{2c^3} - \frac{R^3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^3} \frac{\dot{\mathbf{a}}}{c^2} \frac{1}{2}\right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{R^2}{c^2} \mathbf{a} + \frac{R^2}{c^2} \mathbf{a} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} + \frac{R^3(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}})}{c^3} \frac{1}{2c^2} \mathbf{a} - \frac{R^3}{c^3} \dot{\mathbf{a}} - \frac{R^3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^3} \frac{\dot{\mathbf{a}}}{c^2} \frac{1}{2}\right] \right\}. \quad (\text{D.17}) \end{aligned}$$

Multiplicando esse resultado por (D.8):

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(1 + \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2}\right) (\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) - \left[\frac{R^2}{c^2} - \frac{R}{c^2}(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})\right] \mathbf{a} \right\} [R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]^{-3} = \\ & \left\{ \left[\mathbf{R} + \mathbf{R} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} - \mathbf{R} \frac{R(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}})}{c} \frac{1}{c^2} + \frac{R^2}{c^2} \mathbf{a} + \frac{R^2(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} \mathbf{a} - \frac{R^3(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}})}{c^3} \frac{1}{c^2} \mathbf{a} - \frac{\dot{\mathbf{a}} R^3}{2c^3} - \frac{R^3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^3} \frac{\dot{\mathbf{a}}}{c^2} \frac{1}{2}\right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{R^2}{c^2} \mathbf{a} + \frac{R^2}{c^2} \mathbf{a} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^2} + \frac{R^3(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}})}{c^3} \frac{1}{2c^2} \mathbf{a} - \frac{R^3}{c^3} \dot{\mathbf{a}} - \frac{R^3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})}{c^3} \frac{\dot{\mathbf{a}}}{c^2} \frac{1}{2}\right] \right\} \times \\ & \quad \times R^{-3} \left[1 - \frac{3}{c^2} \mathbf{R} \cdot \mathbf{a} + \frac{3R}{2c^3} \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}}\right]. \quad (\text{D.18}) \end{aligned}$$

Descartando os termos de ordem superior a R^3/c^3 , imposto pela nossa aproximação, encontramos:

$$R^{-3} \left[\mathbf{R} - \frac{2\mathbf{R}}{c^2} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) + \frac{R\mathbf{R}}{2c^3} (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}}) + \frac{\dot{\mathbf{a}}}{2c} \right]. \quad (\text{D.19})$$

De posse desse resultado, o campo elétrico (D.1) é escrito como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{2\mathbf{R}}{c^2 R^3} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) + \frac{\mathbf{R}}{2c^3 R^2} (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}}) + \frac{\dot{\mathbf{a}}}{2c^3} \right]. \quad (\text{D.20})$$

Lembrando que a carga está distribuída de uma forma com simetria esférica, podemos escrever:

$$de' = \rho(r') d^3 r' = \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = \rho(r') r'^2 dr' d\Omega. \quad (\text{D.21})$$

logo,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dr' r'^2 \rho(r') \oint d\Omega \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{2\mathbf{R}}{c^2 R^3} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) + \frac{\mathbf{R}}{2c^3 R^2} (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{a}}) + \frac{\dot{\mathbf{a}}}{2c^3} \right]. \quad (\text{D.22})$$

Escrevendo em notação indicial,

$$E^i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dr' r'^2 \rho(r') \oint d\Omega \left[\frac{R^i}{R^3} - \frac{2R^i}{c^2 R^3} (R^j a^j) + \frac{R^i}{2c^3 R^2} (R^j \dot{a}^j) + \frac{\dot{a}^i}{2c^3} \right]. \quad (\text{D.23})$$

Para resolver a integração sob o ângulo sólido, vamos utilizar as seguintes identidades:

$$\oint d\Omega = 4\pi, \quad \oint r^i d\Omega = 0, \quad \oint r^i r^j d\Omega = \frac{4\pi}{3} r^2 \delta_{ij}. \quad (\text{D.24})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \oint d\Omega \left[\frac{R^i}{R^3} - \frac{2R^i}{c^2 R^3} (R^j a^j) + \frac{R^i}{2c^3 R^2} (R^j \dot{a}^j) + \frac{\dot{a}^i}{2c^3} \right] = \\ \frac{1}{R^3} \oint R^i d\Omega - \frac{2a^j}{c^2 R^3} \oint (R^i R^j) d\Omega + \frac{\dot{a}^j}{2c^3 R^2} \oint (R^i R^j) d\Omega + \frac{\dot{a}^i}{2c^3} \oint d\Omega, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\oint d\Omega \left[\frac{R^i}{R^3} - \frac{2R^i}{c^2 R^3} (R^j a^j) + \frac{R^i}{2c^3 R^2} (R^j \dot{a}^j) + \frac{\dot{a}^i}{2c^3} \right] = 4\pi \left[-\frac{2a^j}{c^2 R^3} \frac{R^2 \delta^{ij}}{3} + \frac{\dot{a}^j}{2c^3 R^2} \frac{R^2 \delta^{ij}}{3} + \frac{\dot{a}^i}{2c^3} \right],$$

O campo elétrico, expresso em (D.23), resulta em:

$$E^i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dr' r'^2 \rho(r') 4\pi \left[-\frac{2a^j}{c^2 R} \frac{\delta^{ij}}{3} + \frac{\dot{a}^j}{2c^3} \frac{\delta^{ij}}{3} + \frac{\dot{a}^i}{2c^3} \right], \quad (\text{D.25})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int de \left[-\frac{2a^i}{3c^2 R} + \frac{2\dot{a}^i}{3c^3} \right]. \quad (\text{D.26})$$

Voltando para a notação vetorial,

$$\mathbf{E}^{tot}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int de' \left[\frac{2\dot{\mathbf{a}}}{3c^3} - \frac{2\mathbf{a}}{3Rc^2} \right] = \frac{\dot{\mathbf{a}}}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int \cancel{de'}^e - \frac{\mathbf{a}}{6\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{de'}{R}. \quad (\text{D.27})$$

Resultando:

$$\mathbf{E}^{tot}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 e \dot{\mathbf{a}}}{6\pi c} - \frac{\mathbf{a}}{6\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{de'}{R}. \quad (\text{D.28})$$

Aqui completamos os cálculos para o campo elétrico gerado pelo elemento de carga de' .