



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO BACHARELADO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

ISABELA OLIVEIRA DE CASTRO MOREIRA
FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA: FUNÇÕES
ANALÍTICAS E TRANSFORMAÇÕES CONFORMES

São Luís
2025

ISABELA OLIVEIRA DE CASTRO MOREIRA

**FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA: FUNÇÕES
ANALÍTICAS E TRANSFORMAÇÕES CONFORMES**

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da UFMA, como requisito para a obtenção parcial do grau de BACHAREL em Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Jadevilson Cruz Ribeiro

Doutor em Matemática - UFMA

São Luís

2025

MOREIRA, Isabela Oliveira De Castro

Funções de uma variável complexa: funções analíticas e transformações conformes/ Isabela Oliveira De Castro Moreira. - São Luís, 2025.

112 f.

Orientador: Prof. Dr. Jadevilson Cruz Ribeiro

Monografia (Graduação) - Curso Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão, 2025.

1. Conjunto dos Números Complexos. 2. Funções Complexas. 3. Transformações Conformes.. I.Título.

CDU 000

ISABELA OLIVEIRA DE CASTRO MOREIRA

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA: FUNÇÕES
ANALÍTICAS E TRANSFORMAÇÕES CONFORMES

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da UFMA, como requisito para a obtenção parcial do grau de BACHAREL em Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Aprovado em 07/02/2025

BANCA EXAMINADORA

Jadevilson Cruz Ribeiro

Doutor em Matemática - UFMA

Gustavo Silvestre do Amaral Costa

Doutor em Matemática - UFMA

Ermerson Araujo Rocha

Doutor em Matemática - UFMA

Resumo

Esta monografia apresenta um estudo sobre funções analíticas complexas, explorando suas principais propriedades e aplicações. Inicialmente, define-se o conjunto dos números complexos, destacando a distinção entre o conjunto \mathbb{C} e o espaço usual \mathbb{R}^2 . Em seguida, são introduzidos os conceitos de limite e derivada para funções de uma variável complexa, culminando na definição de função analítica complexa. Além disso, realiza-se uma breve comparação entre funções analíticas no contexto real e no complexo. O trabalho também aborda as equações de Cauchy-Riemann e o conceito de funções harmônicas, além de apresentar definições e propriedades de polinômios e funções racionais complexas. Por fim, são discutidos conceitos fundamentais e teoremas relevantes sobre Transformações Conformes. Nos anexos, são fornecidas instruções e códigos em Python para a geração das imagens de autoria própria apresentadas ao longo do trabalho.

Palavras-chave: Conjunto dos Números Complexos. Funções Complexas. Funções Analíticas. Transformações Conformes.

Abstract

This monograph presents a study on complex analytic functions, exploring their main properties and applications. Initially, the set of complex numbers is defined, highlighting the distinction between the set \mathbb{C} and the usual space \mathbb{R}^2 . Then, the concepts of limit and derivative for functions of a complex variable are introduced, leading to the definition of a complex analytic function. Furthermore, a brief comparison between analytic functions in the real and complex contexts is presented. The work also discusses the Cauchy-Riemann equations and the concept of harmonic functions, as well as definitions and properties of polynomials and complex rational functions. Finally, fundamental concepts and relevant theorems concerning Conformal Transformations are addressed. In the appendices, instructions and Python code are provided for generating the original images presented throughout the work.

Keywords: Set of Complex Numbers. Complex Functions. Analytic Functions. Conformal Transformations.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha mãe, Rosângela, por sempre ter me apoiado e me incentivado a seguir meus sonhos. Agradeço também à toda minha família por todo amor e companherismo.

Aos meus amigos Mariana, Leônidas e Laura. Por sempre me apoiarem, acreditarem em mim mais do que eu mesma e por todos os puxões de orelha. A vivência na faculdade foi infinitamente mais leve e divertida com vocês.

Ao meu amor, Paulo, por estar comigo em todos os momentos que precisei, pelo apoio e palavras de conforto sempre.

Ao professor Gustavo, por ter me dado a oportunidade de estudar com ele e pela orientação. Ao professor Jadevilson, por ter aceitado continuar o trabalho, pela orientação e pelo apoio e incentivo nos meus estudos.

*“Somos guiados por nossos instintos, nossa
intuição, nossos desejos e medos, nossas
cicatrizes e nossos sonhos”*

Taylor Swift

Sumário

1	Introdução	6
1.1	Um pouco de contexto histórico	6
2	Conjunto dos Números Complexos	8
2.1	Conjunto \mathbb{C}	8
2.1.1	Conjugado	13
2.1.2	Valor absoluto	16
2.2	Representação Geométrica de Números Complexos	18
2.2.1	Adição e Multiplicação	18
3	Funções Complexas	22
3.1	Limite e Continuidade	23
3.2	Função Analítica	28
3.3	Funções Harmônicas	35
3.4	Polinômios	42
3.5	Funções Racionais	46
4	Transformações Conformes	50
4.1	Transformações por funções elementares	55
4.1.1	Transformação Linear	55
4.1.2	Transformação pela função exponencial	56
4.1.3	Transformação pela função logarítmica	57
5	Considerações Finais	61

Referências Bibliográficas	63
A Apêndice	65
A.1 Figuras	65
A.1.1 Instalação do Visual Studio Code (VS Code)	65
A.1.2 Instalação do Python	65
A.1.3 Instalação das Bibliotecas Necessárias	65
A.1.4 Configuração e Execução do Código	66
A.1.5 Verificação dos Gráficos	66
A.2 Códigos Python para gerar as Figuras	66
A.2.1 Código da Figura 2.1: Representação Cartesiana.	66
A.2.2 Código da Figura 2.2: Adição e multiplicação.	68
A.2.3 Código da Figura 4.1: Transformação Conforme.	71
A.2.4 Código da Figura 4.2: Conformidade.	75
A.2.5 Código da Figura 4.3: Preservação dos ângulos.	80
A.2.6 Código da Figura 4.4: Proposição 4.1	85
A.2.7 Código da Figura 4.5: Transformação $f(z) = z$	87
A.2.8 Código da Figura 4.6: Transformação Exponencial.	90
A.2.9 Código da Figura 4.7: Transformação Logarítmica.	92
A.2.10 Código da Figura 4.8: θ fixado e $r > 1$	95
A.2.11 Código da Figura 4.9: θ fixado e $0 < r < 1$	98
A.2.12 Código da Figura 4.10: r fixado e $\theta > 0$	101
A.2.13 Código da Figura 4.11: r fixado e $\theta < 0$	104

1 Introdução

1.1 Um pouco de contexto histórico

Números com radicais negativos já apareciam em registros desde a Grécia Antiga, na tentativa de resolver equações quadráticas e cúbicas. Entretanto, como os gregos buscavam soluções de problemas que estivessem associadas a representações geométricas, sempre que a busca por essas soluções levava ao aparecimento de raízes quadradas de números negativos, admitia-se que não haviam soluções para aquele problema (Júnior, 2009).

Em 1545, o italiano Girolamo Cardano (1501-1576), em sua obra *Ars Magna*, pela primeira vez na história, considerou a existência de raízes quadradas de números negativos, as quais foram chamadas de quantidades "sofisticadas" (Júnior, 2009). Nessa obra, Cardano mostra um método para a resolução de equações cúbicas da forma $x^3 + px + q = 0$. Tal método é conhecido como Fórmula de Cardano, entretanto, quem sugeriu essa resolução a ele foi o matemático Niccolo Tartaglia (Santos, 2013).

Mais tarde, em 1572, o algebrista italiano Rafael Bombelli (1526-1572) publicou sua obra *L'Algebra*, onde, na tentativa de resolver uma equação de terceiro grau, começou a fazer operações com o número $\sqrt{-1}$, desenvolvendo regras operatórias com raízes quadradas de números negativos (Santos, 2013). Após isso, os matemáticos começaram a utilizar raízes quadradas de números negativos em seus postulados e, no século XVIII, o suíço Leonhard Euler (1707-1783) propôs a notação algébrica $i = \sqrt{-1}$ (Chaves, 2013).

Em 1799, Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855) propôs uma representação geométrica dos números complexos no plano. Antes dele, o suíço Jean Robert Argand (1768-1822) e o norueguês Caspar Wessel (1745-1818) já haviam escrito sobre essa representação no plano, mas tiveram pouca notoriedade na época. Gauss foi o primeiro a utilizar o termo "Números Complexos" e apresentou uma explicação detalhada de como esses números poderiam ser desenvolvidos segundo uma teoria exata, apoiada na representação deles no plano cartesiano (Chaves, 2013).

Por fim, em 1837, o irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865), apresentou um artigo à Academia Irlandesa formalizando a álgebra dos números complexos.

Em seu trabalho, ele considerou os números complexos $a + ib$ como pares ordenados de números reais (a, b) e definiu as operações de soma e multiplicação da seguinte forma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ (Santos, 2013).

De modo geral, a teoria das funções de variáveis complexas é a parte da matemática que estuda funções definidas sobre o campo dos números complexos. Esse estudo pode ser visto como uma extensão da teoria de funções de variáveis reais para o contexto dos números complexos. As principais aplicações são em problemas de escoamento de calor, mecânica dos fluidos, aerodinâmica, elasticidade, teoria potencial, teoria eletromagnética, entre outros. Sendo assim, o objetivo desse trabalho é se aprofundar no estudo desse tema, por meio da elaboração de exemplos e da demonstração de teoremas e proposições relevantes. Para isso, realizou-se uma revisão bibliográfica de importantes matemáticos da área como Ahlfors (1979), Fernandez e Bernardes(2008), além da consulta de bibliografias disponíveis em bibliotecas virtuais e pesquisas na internet.

Desse modo, esse trabalho apresenta diversos conceitos importantes a respeito do corpo dos números complexos como: conjugado, função complexa, equações de Cauchy-Riemann, limite e derivada de uma função complexa e função analítica complexa, bem como uma comparação com funções analíticas reais. Além disso, este trabalho apresenta resultados e aplicações dos números complexos na teoria das Transformações Conformes, incluindo: introdução ao tema, transformações por funções elementares, transformações lineares, transformações pela função exponencial e transformações pela função logarítmica.

2 Conjunto dos Números Complexos

2.1 Conjunto \mathbb{C}

Definição 2.1. O conjunto, denotado por \mathbb{C} , definido por

$$\mathbb{C} := \{z = (x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\} \quad (2.1)$$

munido das operações de adição e multiplicação,

$$(i) \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ e}$$

$$(ii) \quad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

respectivamente, recebe o nome de conjunto dos números complexos. Um número complexo também pode ser representado por $z = x + iy$, em que $i = \sqrt{-1}$. (Ahlfors, 1979, cap. 1)

Observação 2.1. *Do item (i) da Definição 2.1 vem $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$. Tomando $z_1 = (x_1 + iy_1)$ e $z_2 = (x_2 + iy_2)$, temos*

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 \\ &= x_1 + x_2 + iy_1 + iy_2 \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \end{aligned}$$

Agora, de forma análoga, para $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$, obtemos

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) \\ &= x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2 \\ &= x_1 - x_2 + iy_1 - iy_2 \\ &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Já no item (ii) da Definição 2.1 temos $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Note que

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 \end{aligned}$$

Como $i = \sqrt[2]{-1}$, então $i^2 = -1$ e portanto,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) - y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

Note que o conjunto \mathbb{C} se assemelha ao \mathbb{R}^2 , visto que ambos são espaços bidimensionais, havendo ainda uma correspondência direta entre o número $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e o ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Entretanto, conforme observação, nota-se que \mathbb{C} tem as operações de adição e multiplicação bem definidas entre dois números complexos, algo que não ocorre no \mathbb{R}^2 , que tem apenas a operação de adição bem definida. Assim, é possível perceber que o conjunto \mathbb{C} é um conjunto mais completo que o \mathbb{R}^2 , apesar de suas semelhanças.

Proposição 2.1. *Sejam z_1 e z_2 números complexos, então $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)}$ também é um número complexo, para $(x_2 + iy_2) \neq 0$. (Ahlfors, 1979, cap. 1)*

Demonstração. Se $\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = x + iy$, temos:

$$\begin{aligned} x_1 + iy_1 &= (x + iy)(x_2 + iy_2) \\ &= xx_2 - yy_2 + i(xy_2 + yx_2). \end{aligned}$$

Assim, igualando a parte real com a parte real e a parte imaginária com a parte imaginária dos números complexos, obtemos

$$x_1 = xx_2 - yy_2 \tag{2.2}$$

$$y_1 = xy_2 + yx_2. \tag{2.3}$$

Note que multiplicando (2.2) por $(-y_2)$ e (2.3) por (x_2) , obtemos:

$$\begin{aligned} -x_1 y_2 &= -xx_2 y_2 + y(y_2)^2 \\ x_2 y_1 &= xy_2 x_2 + y(x_2)^2 \Leftrightarrow \\ x_2 y_1 - x_1 y_2 &= y(x_2)^2 + y(y_2)^2 \Leftrightarrow \\ x_2 y_1 - x_1 y_2 &= y(x_2^2 + y_2^2) \Leftrightarrow \\ y &= \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

Agora, vamos achar o valor de x , utilizando o valor de y encontrado

$$\begin{aligned}
 x_1 &= xx_2 - y_2 \left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \Leftrightarrow \\
 xx_2 &= x_1 + y_2 \left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \Leftrightarrow \\
 &= \frac{x_1(x_2^2 + y_2^2) + y_2(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \Leftrightarrow \\
 &= \frac{x_1 x_2^2 + x_1 y_2^2 + y_2 x_2 y_1 - y_2^2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} \Leftrightarrow \\
 &= \frac{x_1 x_2^2 + y_2 x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}
 \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por x_2 , obtemos que

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

Assim, temos que

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (2.4)$$

□

Proposição 2.2. *Sejam $\alpha + i\beta$ e $x + iy$ números complexos tal que $(x + iy)^2 = \alpha + i\beta$.*

Então,

$$(i) \text{ se } \beta \neq 0, \sqrt{\alpha + i\beta} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2} (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})} + i \frac{\beta}{|\beta|} \sqrt{\frac{1}{2} (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})} \right)$$

$$(ii) \text{ se } \beta = 0 \text{ e } \alpha \geq 0, \sqrt{\alpha + i\beta} = \pm \sqrt{\alpha}$$

$$(iii) \text{ se } \beta = 0 \text{ e } \alpha < 0, \sqrt{\alpha + i\beta} = \pm i \sqrt{-\alpha}$$

(Ahlfors, 1979, cap. 1)

Demonstração. (i) Se $\beta \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
 (x + iy) &= \sqrt{\alpha + i\beta} \Leftrightarrow \\
 (x + iy)^2 &= \alpha + i\beta \Leftrightarrow \\
 x^2 + 2xiy - i^2 y^2 &= \alpha + i\beta \Leftrightarrow \\
 x^2 + 2ixy - y^2 &= \alpha + i\beta
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases} \quad (2.5)$$

Elevando as equações ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= (x^2 - y^2)^2 \\ \beta^2 &= 4x^2y^2.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Somando ambas as equações, segue que

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 \Leftrightarrow \\ &= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 \Leftrightarrow \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \Leftrightarrow \\ &= (x^2 + y^2)^2 \Rightarrow \\ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} &= x^2 + y^2.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Por (2.5), temos que $x^2 = \alpha + y^2$ e $y^2 = x^2 - \alpha$. Substituindo $y^2 = x^2 - \alpha$ em (2.7)

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} &= x^2 + x^2 - \alpha \Leftrightarrow \\ &= 2x^2 - \alpha \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) &= x^2 \Leftrightarrow \\ x &= \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})} \right)\end{aligned}$$

Agora, substituindo $x^2 = \alpha + y^2$ em 2.7

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} &= \alpha + y^2 + y^2 \Leftrightarrow \\ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} &= \alpha + 2y^2 \Leftrightarrow \\ \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2} &= y^2 \Leftrightarrow \\ y &= \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})} \right)\end{aligned}$$

Desse modo, se $\beta \neq 0$, então

$$\sqrt{\alpha + i\beta} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})} + i \frac{\beta}{|\beta|} \sqrt{\frac{1}{2}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})} \right)$$

(ii) Se $\beta = 0$ e $\alpha \geq 0$, note que

$$\sqrt{\alpha + i\beta} = \pm \sqrt{\alpha + 0} = \sqrt{\alpha}.\tag{2.8}$$

(iii) Se $\beta = 0$ e $\alpha < 0$:

$$\sqrt{\alpha + i\beta} = \pm \sqrt{\alpha + 0} = i\sqrt{-\alpha}\tag{2.9}$$

□

Note que, por (2.5), se $\beta \neq 0$, então $x \neq 0$ e $y \neq 0$, pois se $x = 0$ ou $y = 0$, $\beta = 0$. Observe também que

$$\beta > 0, x > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$\beta > 0, x < 0 \Rightarrow y < 0$$

$$\beta < 0, x > 0 \Rightarrow y < 0$$

$$\beta < 0, x < 0 \Rightarrow y > 0$$

Exemplo 2.1. Vamos encontrar a raiz quadrada do número complexo $z = 3 + 4i$. Assim, queremos um número complexo $x + iy$ tal que $(x + iy)^2 = 3 + 4i$. Pela Proposição 2.2, temos que: $\alpha = 3$ e $\beta = 4$, então estamos no caso (i), pois $\beta \neq 0$. Assim, aplicamos a fórmula:

$$\sqrt{3 + 4i} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2} \left(3 + \sqrt{3^2 + 4^2} \right)} + i \frac{4}{|4|} \sqrt{\frac{1}{2} \left(-3 + \sqrt{3^2 + 4^2} \right)} \right).$$

Para isso, calculamos $\alpha^2 + \beta^2$:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Logo

$$\sqrt{25} = 5$$

Substituímos na fórmula:

$$\sqrt{\frac{1}{2}(8)} = \sqrt{4} = 2$$

e

$$\sqrt{\frac{1}{2}(2)} = \sqrt{1} = 1$$

Portanto:

$$\sqrt{3 + 4i} = \pm(2 + i)$$

Para confirmar, elevamos $(2 + i)$ ao quadrado:

$$\begin{aligned} (2 + i)^2 &= 2^2 + 2(2)(i) + i^2 \\ &= 4 + 4i + (-1) \\ &= 3 + 4i \end{aligned}$$

Portanto, a resposta está correta e a raiz quadrada de $3 + 4i$ é $\pm(2 + i)$.

2.1.1 Conjugado

Definição 2.2. Dado um número complexo $z = x + iy$, onde $x, y \in \mathbb{R}$, define-se como o conjugado de z o número $\bar{z} = x - iy$. (Ahlfors, 1979, cap. 1).

Desse modo, podemos observar na Figura 2.1 $z, \bar{z}, -z$ e $-\bar{z}$ representados no plano Cartesiano, onde $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $-z = -x - iy$ e $-\bar{z} = -x + iy$.

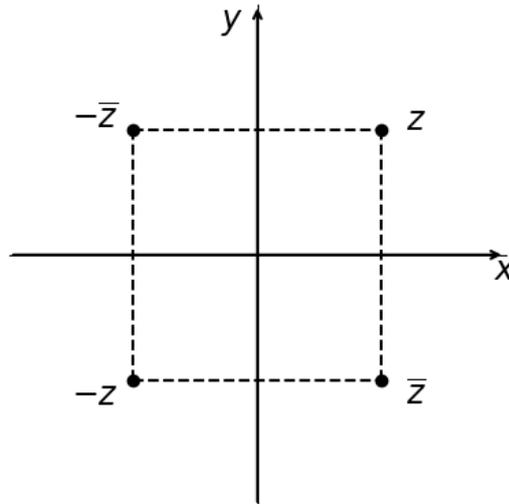


Figura 2.1: Representação Cartesiana.

Fonte: Elaboração própria.

Proposição 2.3. Seja z um número complexo, então $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ (Ahlfors, 1979, cap. 1).

Demonstração. Seja $z = x + iy$ um número complexo e $\bar{z} = x - iy$, temos

$$\begin{aligned} \frac{z + \bar{z}}{2} &= \frac{x + iy + x - iy}{2} \\ &= \frac{2x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = Re(z)$$

□

Proposição 2.4. Seja z um número complexo, então $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ (Ahlfors, 1979, cap. 1).

Demonstração. Seja $z = x + iy$ um número complexo e $\bar{z} = x - iy$, temos

$$\begin{aligned} \frac{z - \bar{z}}{2i} &= \frac{x + iy - (x - iy)}{2i} \\ &= \frac{x + iy - x + iy}{2i} \\ &= \frac{2yi}{2i} \\ &= y \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \text{Im}(z)$$

□

Proposição 2.5. *Sejam z_1 e z_2 números complexos, as seguintes propriedades são verdadeiras (Ahlfors, 1979, cap. 1).*

$$(i) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$(ii) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

Demonstração. Demonstração do item (i):

Sejam $z_1 = (x_1 + iy_1)$ e $z_2 = (x_2 + iy_2)$ e seus respectivos conjugados $\bar{z}_1 = (x_1 - iy_1)$ e $\bar{z}_2 = (x_2 - iy_2)$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 \Leftrightarrow \\ z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \Leftrightarrow \\ \overline{z_1 + z_2} &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \Leftrightarrow \\ &= x_1 + x_2 - iy_1 - iy_2 \Leftrightarrow \\ &= x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 \Leftrightarrow \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \end{aligned}$$

Demonstração do item (ii): Pela Proposição 2.1, item (i), já temos que $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Desse modo, segue que

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \Leftrightarrow \\ \overline{z_1 z_2} &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 \bar{z}_2 &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \Leftrightarrow \\ &= x_1 x_2 - x_1 iy_2 - ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 \Leftrightarrow \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

□

Proposição 2.6. *Se z_1, z_2, \dots, z_n são n números complexos, então*

$$\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_n},$$

$n \in \mathbb{N}$ (Ahlfors, 1979, cap. 1).

Demonstração. Seja z_1, z_2, \dots, z_n números complexos. Já foi mostrado que

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad (2.10)$$

Para essa proposição, vamos fazer a demonstração por indução. Assim, considere como hipótese de indução que: $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_n}$. Vamos mostrar que essa soma vale para $(n+1)$ elementos, ou seja $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n + z_{n+1}} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_n} + \overline{z_{n+1}}$.

$$\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n + z_{n+1}} = \overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n + z_{n+1}}$$

Utilizando a hipótese de indução, obtemos que

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n + z_{n+1}} &= (\overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_n}) + \overline{z_{n+1}} \Leftrightarrow \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_n} + \overline{z_{n+1}} \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n + z_{n+1}} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_n} + \overline{z_{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ \square

Proposição 2.7. *Se z_1, z_2, \dots, z_n são n números complexos, então*

$$\overline{z_1 z_2 \dots z_n} = \overline{z_1} \overline{z_2} \dots \overline{z_n}.$$

Demonstração. Já foi mostrado que

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

Hipótese de indução: $\overline{z_1 z_2 \dots z_n} = \overline{z_1} \overline{z_2} \dots \overline{z_n}$. Vamos mostrar que esse produto vale para $(n+1)$ elementos, ou seja

$$\overline{z_1 z_2 \dots z_n z_{n+1}} = \overline{z_1 z_2 \dots z_n} \overline{z_{n+1}}$$

Utilizando a hipótese de indução, obtemos que

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2 \dots z_n z_{n+1}} &= (\overline{z_1} \overline{z_2} \dots \overline{z_n}) \overline{z_{n+1}} \Leftrightarrow \\ &= \overline{z_1} \overline{z_2} \dots \overline{z_n} \overline{z_{n+1}} \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{z_1 z_2 \dots z_n z_{n+1}} = \overline{z_1} \overline{z_2} \dots \overline{z_n} \overline{z_{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ \square

Proposição 2.8. *Sejam z_1 e z_2 números complexos, então $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ (Ahlfors, 1979, cap. 1).*

Demonstração. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Temos

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \left(\frac{z_2}{z_2}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{z_1 z_2}{z_2 z_2}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}\right)} \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.9, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1 \bar{z}_2}}{|\bar{z}_2|^2} \\ &= \frac{\overline{z_1 \bar{z}_2}}{(z_1 \bar{z}_2) |\bar{z}_2|^2} \\ &= \frac{\bar{z}_1 \bar{\bar{z}_2}}{z_1 \bar{z}_2 |\bar{z}_2|^2} \\ &= \frac{\bar{z}_1 z_2}{z_1 \bar{z}_2 |\bar{z}_2|^2} \\ &= \frac{\bar{z}_1 z_2}{z_1 \bar{z}_2 z_2 \bar{z}_2} \\ &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \end{aligned}$$

□

2.1.2 Valor absoluto

Os próximos resultados são referentes ao conceito de valor absoluto de números complexos.

Proposição 2.9. *Sejam $z = x + iy$ um número complexo e $\bar{z} = x - iy$ seu conjugado. Então é válido o seguinte resultado*

$$z\bar{z} = |z|^2$$

(Ahlfors, 1979, cap. 1).

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\ &= x^2 - i^2y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$z\bar{z} = |z|^2$$

□

Proposição 2.10. (*Valor absoluto do produto*) Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Então,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

(Ahlfors, 1979, cap. 1).

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} \\ &= z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2} \\ &= z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 |z_2|^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

□

Proposição 2.11. Sejam $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. É válido o seguinte resultado

$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|$$

(Ahlfors, 1979, cap. 1).

Demonstração. Vamos fazer essa demonstração por indução matemática, assim para $n = 1$, temos que $|z_1| = |z_1|$, o que é logicamente verdadeiro. E para $n = 2$, já foi provado que $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

Vamos supor que essa propriedade seja válida para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|$$

Queremos mostrar que essa propriedade vale para $(n+1)$ elementos, ou seja,

$$|z_1 z_2 \dots z_n z_{n+1}| = |z_1| |z_2| \dots |z_n| |z_{n+1}|$$

De fato, utilizando a definição de módulo do produto para números complexos, temos que

$$|z_1 z_2 \dots z_n z_{n+1}| = |(z_1 z_2 \dots z_n) z_{n+1}|$$

Pelo resultado $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, temos

$$|z_1 z_2 \dots z_n z_{n+1}| = |z_1 z_2 \dots z_n| |z_{n+1}|$$

Utilizando a hipótese de indução, obtemos que

$$|z_1 z_2 \dots z_n z_{n+1}| = |z_1| |z_2| \dots |z_n| |z_{n+1}|$$

Desse modo, $|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ □

2.2 Representação Geométrica de Números Complexos

2.2.1 Adição e Multiplicação

A adição de números complexos pode ser vista como uma adição de vetores. Assim, pode-se representar o número complexo z_1 como um vetor, de modo que o tamanho desse vetor é igual a $|z_1|$. Desse modo, a distância entre os pontos z_1 e z_2 é igual a $|z_1 - z_2|$ (Ahlfors, 1979). Temos que $z_1 + z_2$ e $z_1 - z_2$ são diagonais do paralelogramo de lados z_1 e z_2 como pode ser observado na Figura 2.2.

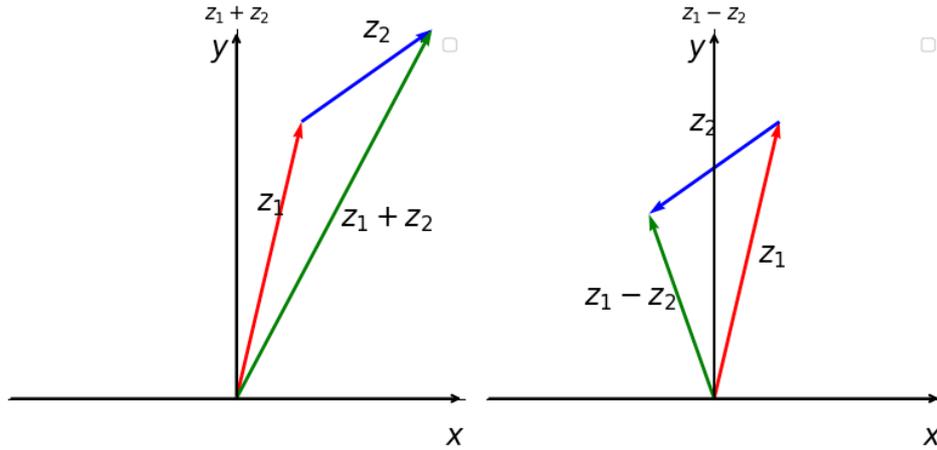


Figura 2.2: Adição e multiplicação.

Fonte: Elaboração própria.

Definição 2.3. (Coordenadas Polares) As coordenadas polares do ponto (x, y) são (r, φ) , temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (2.11)$$

Desse modo, temos $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, onde: $r \geq 0$, $r = |z|$ e φ é o argumento ou amplitude do número complexo z e é denotado $\arg(z)$ (Ahlfors, 1979, cap. 1).

Proposição 2.12. (Multiplicação) Sejam $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Seu produto pode ser escrito na forma

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (2.12)$$

(Ahlfors, 1979, cap. 1).

Demonstração. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Note que

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + i \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + i \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)] \\ &= [\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + i(\cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2))] \end{aligned}$$

Aplicando as identidades trigonométricas $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)$ e $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2)$, obtemos

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

□

Desse modo, tomamos que o produto de dois números complexos z_1 e z_2 tem como módulo $r_1 r_2$ e argumento $(\varphi_1 + \varphi_2)$.

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2), \text{ onde } z_1, z_2 \neq 0. \quad (2.13)$$

Proposição 2.13. *De forma geral, temos que $z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)]$. Onde $n \in \mathbb{N}$ (Ahlfors, 1979, cap. 1).*

Demonstração. Já foi provado que $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$, ou seja, essa propriedade é válida quando $n = 2$.

Suponha que essa igualdade é válida para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)]$$

Vamos mostrar que essa igualdade vale para $(n+1)$, ou seja,

$$z_1 z_2 \dots z_n z_{n+1} = r_1 r_2 \dots r_n r_{n+1} [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n + \varphi_{n+1}) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n + \varphi_{n+1})]$$

Assim,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \dots z_n (z_{n+1}) &= r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)] [\\ &\quad r_{n+1} (\cos(\varphi_{n+1}) + i \sin(\varphi_{n+1}))] \\ &= r_1 r_2 \dots r_n r_{n+1} [\cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) \cos(\varphi_{n+1}) + i \cos(\varphi_{n+1}) \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) \\ &\quad + i \sin(\varphi_{n+1}) \cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) - \sin(\varphi_{n+1}) \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)] \\ &= r_1 r_2 \dots r_n r_{n+1} [\cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) \cos(\varphi_{n+1}) - \sin(\varphi_{n+1}) \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) \\ &\quad + i (\cos(\varphi_{n+1}) \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) + \sin(\varphi_{n+1}) \cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_n))] \end{aligned}$$

Aplicando as propriedades trigonométricas: $\cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_n + \varphi_{n+1}) = \cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) \cos(\varphi_{n+1}) - \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) \sin(\varphi_{n+1})$ e $\sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n + \varphi_{n+1}) = \cos(\varphi_{n+1}) \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) + \sin(\varphi_{n+1}) \cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)$. Obtemos:

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)].$$

□

Desse modo, encontramos que o produto de n números complexos $z_1 z_2 \dots z_n$ tem como módulo $r_1 r_2 \dots r_n$ e argumento $(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)$.

$$\arg(z_1 z_2 \dots z_n) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \dots + \arg(z_n) \quad (2.14)$$

Proposição 2.14. (*Divisão*) Sejam $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

Seu quociente pode ser escrito na forma

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (2.15)$$

(Ahlfors, 1979, cap. 1).

Demonstração. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Note que

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} \\ &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) r_2(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1 r_2 [\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - i \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)]}{r_2^2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1 [\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + i(\sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_1))]}{r_2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)} \end{aligned}$$

Aplicando as identidades trigonométricas $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)$ e $\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_1)$, temos que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

□

3 Funções Complexas

Nesta capítulo, introduziremos as funções analíticas complexas e, para isso, falaremos sobre a definição de uma função complexa e conceitos como limite e continuidade de funções complexas, onde $f(z)$ é uma função complexa de uma variável complexa.

Definição 3.1. Seja U um subconjunto do conjunto dos números complexos \mathbb{C} . Uma função complexa f de uma variável complexa é uma regra de correspondência que associa a cada elemento $z \in U$ um único elemento $w \in \mathbb{C}$. Formalmente, escrevemos:

$$f : U \rightarrow \mathbb{C} \quad (3.1)$$

Isso significa que a função f associa a cada elemento z do domínio U um único número complexo $f(z)$ no contradomínio \mathbb{C} . (Fernandez, 2008).

Exemplo 3.1. A função que para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$ é definida por

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad (3.2)$$

é chamada de função exponencial complexa. Note que se $z = x + i0$, então temos

$$e^z = e^x(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x(1 + i0) = e^x \quad (3.3)$$

Ou seja, a exponencial de um número real x coincide com a exponencial de x quando este é visto como um número complexo.

Observação 3.1. Observe que se f é uma função complexa de uma variável pode-se escrever a função f na forma

$$f(x + iy) = f_1(x, y) + if_2(x, y) \quad (3.4)$$

com $f_1(x, y), f_2(x, y) \in \mathbb{R}$ para cada $x + iy \in U$. Estamos identificando \mathbb{C} como sendo o \mathbb{R}^2 e obtemos as funções f_1, f_2 de uma variável real, $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$. Denotamos $f_1(x, y) = \operatorname{Re}f(z)$ e $f_2(x, y) = \operatorname{Im}f(z)$.

Exemplo 3.2. A função f definida por $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$, é uma função complexa. Observe que

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 + 2xiy + (iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \quad (3.5)$$

portanto

$$f_1(x, y) = x^2 - y^2 \text{ e } f_2(x, y) = 2xy. \quad (3.6)$$

3.1 Limite e Continuidade

Definição 3.2. (Limite) A função complexa f tem limite A com z tendendo a z_0 ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad (3.7)$$

se e somente se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para todo valor de z

$$|z - z_0| < \delta, z \neq z_0 \Rightarrow |f(z) - A| < \epsilon \quad (3.8)$$

(Ahlfors, 1979, cap. 2).

Proposição 3.1. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa cujo limite no ponto z_0 exista e seja igual a A . Então o limite do conjugado de f é igual ao conjugado de A , ou seja,*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \overline{f(z)} = \overline{A} \quad (3.9)$$

(Ahlfors, 1979, cap. 2).

Demonstração. Temos que $\lim_{z \rightarrow z_0} \overline{f(z)} = \overline{A} \Leftrightarrow \forall \epsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0$ tal que, se $|z - z_0| < \delta_1, z \neq z_0$, então $|\overline{f(z)} - \overline{A}| < \epsilon_1$. Porém, temos também que $|\overline{f(z)} - \overline{A}| = |f(z) - A|$, pois

$$|\overline{f(z)} - \overline{A}| = \sqrt{(\overline{f(z)} - \overline{A})(\overline{\overline{f(z)} - \overline{A}})}. \quad (3.10)$$

Pela Proposição 2.5, obtemos

$$\begin{aligned} |\overline{f(z)} - \overline{A}| &= \sqrt{(\overline{f(z)} - \overline{A})(\overline{\overline{f(z)} - \overline{A}})} \\ &= \sqrt{(\overline{f(z)} - \overline{A})(f(z) - A)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Além disso, pela Proposição 2.9, sabemos que

$$|f(z) - A| = \sqrt{(f(z) - A)\overline{(f(z) - A)}}. \quad (3.12)$$

Aplicando a Proposição 2.5, obtemos

$$|f(z) - A| = \sqrt{(f(z) - A)\overline{(f(z) - A)}}. \quad (3.13)$$

Portanto, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \overline{f(z)} = \overline{A}$ □

Proposição 3.2. *Dada uma função complexa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ cujo limite exista em z_0 e seja igual a A . Então é válido o seguinte resultado:*

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} A \\ &e \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} A$$

(Ahlfors, 1979, cap. 2).

Demonstração. $\vdash [\Rightarrow]$ Temos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que para todo valor de z

$$|z - z_0| < \delta, z \neq z_0 \Rightarrow |f(z) - A| < \epsilon.$$

Além disso,

$$f(z) = \operatorname{Re}f(z) + i\operatorname{Im}f(z)$$

e

$$A = \operatorname{Re}A + i\operatorname{Im}A.$$

Fazendo

$$\begin{aligned} |f(z) - A| &= |\operatorname{Re}f(z) + i\operatorname{Im}f(z) - \operatorname{Re}A - i\operatorname{Im}A| \\ &= |\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}A + i[\operatorname{Im}f(z) - \operatorname{Im}A]| \\ &= \sqrt{(\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}A)^2 + (\operatorname{Im}f(z) - \operatorname{Im}A)^2}. \end{aligned}$$

Assim, se $|f(z) - A| < \epsilon$, então $|\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}A| < \epsilon$ e $|\operatorname{Im}f(z) - \operatorname{Im}A| < \epsilon$. Logo,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}f(z) = \operatorname{Re}A$$

e

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}f(z) = \operatorname{Im}A$$

$\vdash [\Leftarrow]$ Sabemos que $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}f(z) = \operatorname{Re}A \Leftrightarrow \forall \epsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0$ tal que para todo valor de z

$$|z - z_0| < \delta_1, z \neq z_0 \Rightarrow |\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}A| < \epsilon_1.$$

Similarmente, $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}f(z) = \operatorname{Im}A \Leftrightarrow \forall \epsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0$ tal que para todo valor de z

$$|z - z_0| < \delta_2, z \neq 0 \Rightarrow |\operatorname{Im}f(z) - \operatorname{Im}A| < \epsilon_2.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se $|z - z_0| < \delta$, então

$$|f(z) - A| = \sqrt{(\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}A)^2 + (\operatorname{Im}f(z) - \operatorname{Im}A)^2} < \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}$$

Agora fazendo $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} &= \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2}} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$|f(z) - A| < \epsilon.$$

Assim, encontramos que se $|Re f(z) - Re A| < \epsilon_1$ e $|Im f(z) - Im A| < \epsilon_2$, então $|f(z) - A| < \epsilon$, onde $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$. Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} Re f(z) = Re A \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} Im f(z) = Im A \\ \Updownarrow \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \end{aligned}$$

□

Definição 3.3. (*Função Contínua*) Uma função complexa $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ é dita contínua em z_0 se e somente se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (3.15)$$

Uma função é contínua se for contínua em todos os pontos em que está definida. (Ahlfors, 1979, cap. 2).

Proposição 3.3. *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ funções contínuas, valem as propriedades:*

- (i) $f(z) + g(z)$, $f(z) - g(z)$ e $f(z)g(z)$ são também contínuas;
- (ii) $\frac{f(z)}{g(z)}$, $g(z) \neq 0$ é definida e contínua em z_0 para $g(z_0) \neq 0$.
- (iii) $\overline{f(z)}$ e $|f(z)|$ são definidas contínuas.

Demonstração. Consulte as Proposições 5, 6 e 10 e o Teorema 9 presentes em Fernandez(2008, p. 39, 41). □

Proposição 3.4. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ funções complexas contínuas, então*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

(Ahlfors, 1979, cap. 2).

Demonstração. Seja $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = x$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = y$, então, pela Definição 3.2,

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = x \Rightarrow$ Para cada $\epsilon_1 > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, tal que $|f(z) - x| < \epsilon_1, \forall z$, t. q. $|z - z_0| < \delta_1, z \neq z_0$.

$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = y \Rightarrow$ Para cada $\epsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0$, tal que $|g(z) - y| < \epsilon_2, \forall z, t. q. |z - a| < \delta_2, z \neq a$.

Além disso, $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = x + y \Rightarrow$ Para cada $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que $|f(z) + g(z) - (x + y)| < \epsilon, \forall z, t. q. |z - a| < \delta, z \neq a$.

Note que,

$$\begin{aligned} |f(z) + g(z) - (x + y)| &= |f(z) + g(z) - x - y| \\ &= |f(z) - x + g(z) - y| \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$|f(z) - x + g(z) - y| \leq |f(z) - x| + |g(z) - y| \quad (3.16)$$

Tomando $\delta := \max\{\delta_1, \delta_2\}$, então

$$\begin{aligned} |f(z) - x| < \epsilon_1 & \quad e \quad |g(z) - y| < \epsilon_2 \\ \Downarrow & \\ |f(z) - x| + |g(z) - y| < \epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned}$$

Por 3.16, temos

$$|f(z) + g(z) - (x + y)| < \epsilon_1 + \epsilon_2.$$

Fazendo $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$, segue que: para cada $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. $|f(z) + g(z) - (x + y)| < \epsilon$, t.q. $|z - a| < \delta$. \square

Proposição 3.5. *A função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua em z_0 , se e somente se, $Re f(z)$ e $Im f(z)$ são contínuas (Ahlfors, 1979, cap. 2).*

Demonstração. $\vdash [\Rightarrow]$

$f(z)$ é contínua em $z_0 \Rightarrow$ para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ para todo valor de z , tal que $|z - z_0| < \delta, z \neq z_0$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \epsilon &> |f(z) - f(z_0)| \Leftrightarrow \\ \epsilon^2 &> |f(z) - f(z_0)|^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

É importante destacar que a desigualdade se mantém devido ao fato de que a função

$g(x) = x^2$ é crescente, visto que $g'(x)$ é positiva pra todo $x > 0$. Dessa forma:

$$\begin{aligned} \epsilon^2 > |f(z) - f(z_0)|^2 &= (f(z) - f(z_0))\overline{(f(z) - f(z_0))} \\ |f(z) - f(z_0)|^2 &= (f(z) - f(z_0))(\overline{f(z)} - \overline{f(z_0)}) \\ &= [\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0) + i(\operatorname{Im}f(z) - \operatorname{Im}f(z_0))][\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0) \\ &\quad - i(\operatorname{Im}f(z) + \operatorname{Im}f(z_0))] \\ &= [\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0)]^2 + [\operatorname{Im}f(z) + \operatorname{Im}f(z_0)]^2 \\ &= [\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0)]^2 + [\operatorname{Im}f(z) + \operatorname{Im}f(z_0)]^2 < \epsilon^2 \end{aligned}$$

↓

$$\epsilon > |\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0)| \quad \text{e} \quad \epsilon > |\operatorname{Im}f(z) + \operatorname{Im}f(z_0)|.$$

Portanto, se $f(z)$ é contínua, então $\operatorname{Re}f(z)$ e $\operatorname{Im}f(z)$ são contínuas em z_0 .

⊢ [⇐]

$\operatorname{Re}f(z)$ é contínua em $z_0 \Rightarrow$ para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0)| < \epsilon$ para todo valor de z , tal que $|z - z_0| < \delta_1$, $z \neq z_0$.

$\operatorname{Im}f(z)$ é contínua em $z_0 \Rightarrow$ para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|\operatorname{Im}f(z) - \operatorname{Im}f(z_0)| < \epsilon$ para todo valor de z , tal que $|z - z_0| < \delta_2$, $z \neq z_0$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e seja z tal que $|z - z_0| < \delta$. Então

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0)| + |\operatorname{Im}f(z) + \operatorname{Im}f(z_0)| &< \epsilon + \epsilon \Leftrightarrow \\ |\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0)| + |\operatorname{Im}f(z) + \operatorname{Im}f(z_0)| &< 2\epsilon \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |\operatorname{Re}f(z) + i\operatorname{Im}f(z) - (\operatorname{Re}f(z_0) + i\operatorname{Im}f(z_0))| \Leftrightarrow \\ &= |\operatorname{Re}f(z) + i\operatorname{Im}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0) - i\operatorname{Im}f(z_0)| \\ &= |\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0) + i\operatorname{Im}f(z) - i\operatorname{Im}f(z_0)| \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular, obtemos

$$|\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0) + i\operatorname{Im}f(z) - i\operatorname{Im}f(z_0)| \leq |\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0)| + |i\operatorname{Im}f(z) - i\operatorname{Im}f(z_0)|$$

Como $|i| = 1$, temos

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0) + i\operatorname{Im}f(z) - i\operatorname{Im}f(z_0)| &\leq |\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0)| + |\operatorname{Im}f(z) - \operatorname{Im}f(z_0)| \\ |f(z) - f(z_0)| &\leq |\operatorname{Re}f(z) - \operatorname{Re}f(z_0)| + |\operatorname{Im}f(z) - \operatorname{Im}f(z_0)| \leq 2\epsilon \\ |f(z) - f(z_0)| &\leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Logo, $|f(z) - f(z_0)| \leq 2\epsilon$ para todo valor z tal que $|z - z_0| < \delta$, $z \neq z_0$ e para cada $\epsilon > 0$.

Portanto, concluímos a demonstração da proposição. \square

3.2 Função Analítica

Para introduzirmos o conceito de função analítica, vamos primeiramente enunciar o conceito de derivada para funções complexas.

Definição 3.4. (Derivada) Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ e seja um ponto $z_0 \in \text{Int}U$. A derivada de uma função f em z_0 é definida por

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (3.18)$$

(Ahlfors, 1979, cap. 2).

Proposição 3.6. *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ funções deriváveis em um ponto z_0 , então:*

(i) *Para todo $c \in \mathbb{C}$, cf é diferenciável em z_0 e*

$$(cf)'(z_0) = cf'(z_0).$$

(ii) *$f + g$ é diferenciável em z_0 e*

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

(iii) *fg é diferenciável em z_0 e*

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

(iv) *Quando $g(z_0) \neq 0$, f/g é diferenciável em z_0 e*

$$(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Demonstração. Para demonstração veja Proposição 3, Fernandez(2008, p. 54) □

Exemplo 3.3. Vamos considerar a função complexa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$f(z) = z^2 + e^z.$$

A derivada de $f(z)$ no ponto z_0 é dada por:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Substituindo $f(z) = z^2 + e^z$:

$$f(z) - f(z_0) = (z^2 + e^z) - (z_0^2 + e^{z_0}) = (z - z_0)(z + z_0) + e^z - e^{z_0}.$$

Dividindo por $z - z_0$:

$$\frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} + \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0}.$$

Simplificando a primeira fração:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0}.$$

Para a segunda fração, utilizamos o limite fundamental da derivada exponencial:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = e^{z_0}.$$

Portanto, a derivada da função f no ponto z_0 é igual a

$$f'(z_0) = 2z_0 + e^{z_0}.$$

Definição 3.5. (Função Analítica) Uma função complexa f de uma variável complexa que possui derivada onde a função está definida é chamada de função analítica. (Ahlfors, 1979, cap. 2).

Exemplo 3.4. Considere a função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$f(z) = \sin(z) + i \cos(z)$$

Vamos verificar se essa função é analítica. Para isso, calculamos sua derivada usando a definição:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Substituindo $f(z)$:

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= (\sin(z) + i \cos(z)) - (\sin(z_0) + i \cos(z_0)) \\ &= (\sin(z) - \sin(z_0)) + i(\cos(z) - \cos(z_0)) \end{aligned}$$

Dividindo por $z - z_0$:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\sin(z) - \sin(z_0)}{z - z_0} + i \frac{\cos(z) - \cos(z_0)}{z - z_0}$$

Agora aplicamos os limites fundamentais das funções trigonométricas:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sin(z) - \sin(z_0)}{z - z_0} = \cos(z_0)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\cos(z) - \cos(z_0)}{z - z_0} = -\sin(z_0)$$

Portanto, obtemos:

$$f'(z_0) = \cos(z_0) - i \sin(z_0)$$

Ou seja, a derivada da função é:

$$f'(z) = \cos(z) - i \sin(z)$$

Note que essa expressão é precisamente a derivada de e^{-iz} , pois:

$$\frac{d}{dz} e^{-iz} = -i e^{-iz} = \cos(z) - i \sin(z)$$

Assim, a função $f(z)$ é diferenciável em todo \mathbb{C} , o que significa que é analítica.

Isso confirma que

$$f(z) = \sin(z) + i \cos(z)$$

é uma função analítica complexa.

Dada a definição de uma função analítica complexa, podemos tecer uma comparação com funções analíticas reais. Para isso, vamos introduzir o conceito de polinômios de Taylor e o de funções analíticas reais.

Teorema 3.1. *Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Se a é interior ao intervalo I e $a + h \in I$, então podemos escrever, para todo $n \in \mathbb{N}$:*

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot h^{n-1} + r_n(h), \quad (3.19)$$

onde

$$r_n(h) = \frac{f^{(n)}(a + \theta_n h)}{n!} \cdot h^n, \quad \text{com } 0 < \theta_n < 1. \quad (3.20)$$

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n$ é chamada série de Taylor da função f em torno do ponto a . (Lima, 2014).

Assim, a Série de Taylor é uma maneira de representar uma função $f(x)$ como uma soma infinita de termos baseados nas derivadas dessa função em um ponto específico a . Ela é útil para aproximar funções complicadas por polinômios mais simples.

Definição 3.6. (Função Analítica Real) Uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto I , chama-se *analítica* quando é de classe C^∞ e, para todo $x_0 \in I$, existe $r > 0$ tal que $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ implica que $x \in I$ e que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \cdots \quad (3.21)$$

(Lima, 2014).

Desse modo, temos que uma função real é analítica se for de classe C^∞ (ou seja, pode ser derivada quantas vezes se deseje em todos os pontos do seu domínio) e, para cada ponto x_0 no intervalo onde $f(x)$ está definida, existe um certo raio r ao redor desse ponto onde a função pode ser escrita como uma soma infinita de seus termos da série de Taylor. De fato, essa soma infinita converge para a função f no intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$.

As principais diferenças entre funções analíticas reais e complexas estão na sua definição e comportamento. No caso real, uma função analítica precisa ser infinitamente diferenciável e sua série de Taylor deve convergir para a função dentro de um intervalo. No entanto, existem funções C^∞ que não são analíticas. Já no caso complexo, a simples existência da derivada complexa implica automaticamente que a função é analítica, tornando a análise complexa mais rígida.

Exemplo 3.5. A função real definida por

$$f(0) = 0, \quad f(x) = e^{-1/x}, \quad x \neq 0$$

não é analítica, enquanto a função complexa

$$f(0) = 0, \quad f(z) = e^{-1/z}, \quad z \neq 0$$

é analítica em todo o plano complexo.

Para $x \neq 0$, temos:

$$f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}.$$

Indutivamente, as derivadas são da forma:

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-1/x},$$

com $P_n(x)$ polinômios. Como $e^{-1/x} \rightarrow 0$ para $x \rightarrow 0$, segue que $f^{(n)}(0) = 0$, tornando sua série de Taylor nula. Como $f(x) \neq 0$ para $x \neq 0$, a função não é analítica em $x = 0$.

Já para o caso complexo, temos que a derivada é:

$$f'(z) = \frac{e^{-1/z}}{z^2},$$

o que mostra que $f(z)$ é diferenciável para $z \neq 0$. Como $e^{-1/z}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e tende a zero em $z \rightarrow 0$, a função pode ser estendida a $z = 0$, sendo analítica em todo o plano.

Portanto, temos que $f(x)$ não é analítica em $x = 0$ porque sua série de Taylor é trivialmente nula. Além disso, $f(z)$ é analítica em todo \mathbb{C} , pois suas derivadas são bem definidas e a função pode ser estendida naturalmente a $z = 0$.

Proposição 3.7. *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ funções analíticas, valem as propriedades:*

- (i) $f(z) \pm g(z)$ e $f(z)g(z)$ são também analíticas;
- (ii) $\frac{f(z)}{g(z)}$, $g(z) \neq 0$ é analítica.

Demonstração. Isso é uma consequência de Proposição 3.6 e da definição de função analítica complexa. Veja Proposição 3 em Fernandez(2008, p. 54). \square

Proposição 3.8. *(Condição de Cauchy-Riemann) Se $f'(z)$ existe, então*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} \quad (3.22)$$

(Ahlfors, 1979, cap. 2).

Demonstração. Suponha que f esteja definida em $U \subset \mathbb{C}$ de tal maneira que f é diferenciável em U . Então

$$f'(z_0) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} \quad (3.23)$$

Sendo $z_0 = x_0 + iy_0$ e $w = h$. Então

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + h) - f(x_0 + iy_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0 + iy_0 + h) + if_2(x_0 + iy_0 + h) - f_1(x_0 + iy_0) - if_2(x_0 + iy_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0 + iy_0 + h) - f_1(x_0 + iy_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{i[f_2(x_0 + iy_0 + h) - f_2(x_0 + iy_0)]}{h} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Agora, fazendo $w = ik$.

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + ik) - f(x_0 + iy_0)}{ik} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0 + iy_0 + ik) + if_2(x_0 + iy_0 + ik) - f_1(x_0 + iy_0) - if_2(x_0 + iy_0)}{ik} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0 + iy_0 + ik) - f_1(x_0 + iy_0) + i[f_2(x_0 + iy_0 + ik) - f_2(x_0 + iy_0)]}{ik} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_1(x_0 + iy_0 + h) - f_1(x_0 + iy_0)}{ik} + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{i[f_2(x_0 + iy_0 + h) - f_2(x_0 + iy_0)]}{ik} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{i f_1(x_0 + iy_0 + h) - f_1(x_0 + iy_0)}{i^2 k} + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{[f_2(x_0 + iy_0 + h) - f_2(x_0 + iy_0)]}{k} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{i f_1(x_0 + iy_0 + h) - f_1(x_0 + iy_0)}{i^2 k} + \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-i f_1(x_0 + iy_0 + h) - f_1(x_0 + iy_0)}{k} + \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \\
 &= -i \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0)
 \end{aligned}$$

Igualando as equações encontradas, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) &= -i \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) \\
 &\Downarrow \\
 \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) &\text{ e } i \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

□

Assim, podemos escrever 4 diferentes expressões para $f'(z)$, sendo a mais simples

$$f'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} \tag{3.26}$$

Segundo Pinto e Morgado(2009), na integração de funções de uma variável, é utilizado o método de substituição, com o objetivo de tornar a integral mais simples. Tal método é baseado na seguinte fórmula

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u)) \cdot g'(u) du \tag{3.27}$$

onde $a = g(c)$, $b = g(d)$ e g é uma função com derivada contínua em $[c, d]$ e f é contínua em $[a, b]$.

No caso de uma integral de funções de duas variáveis, a substituição transforma uma integral dupla de uma região R do plano xy em outra integral dupla, de uma região R' do plano uv (Pinto; Morgado, 2009). Desse modo, é feita a seguinte mudança de variável

$$x = x(u, v) \text{ e } y = y(u, v) \tag{3.28}$$

Assim, obtemos uma aplicação g que associa um ponto (x, y) do plano xy a cada ponto (u, v) de uv . Ou seja

$$g(u, v) = (x(u, v), y(u, v)). \quad (3.29)$$

Considere a aplicação 3.28, onde x e y são de classe C^1 e g é injetora em R' .

Temos

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} du dv \quad (3.30)$$

Onde $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ é o determinante Jacobiano de x e y em relação a u e v , dado

por

$$\frac{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (3.31)$$

Considere uma transformação $T(x, y) = (\alpha x, \beta y)$. Temos que o jacobiano dessa transformação é igual a

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} &= \alpha\beta \end{aligned} \quad (3.32)$$

Observe que o jacobiano é exatamente a razão entre ambas as funções, pois ele representa o quanto a transformação T modifica a área da região inicial. Com isso, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 3.9. $|f'(z)|^2$ é o jacobiano de f_1 e f_2 e, relação a x e y (Ahlfors, 1979, cap. 2).

Demonstração. Por (3.26) e utilizando as propriedades do módulo, temos

$$\begin{aligned} |f'(z)|^2 &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} - i \frac{\partial f_2}{\partial x} \right] \Leftrightarrow \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Por Cauchy-Riemann, obtemos

$$|f'(z)|^2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

□

Proposição 3.10. *Seja $f(z)$ uma função analítica, por Cauchy-Riemann, segue que*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

(Ahlfors, 1979, cap. 2).

Demonstração. Sendo $f(z) = f(x, y) = f_1(x, y) + i f_2(x, y)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, y) + i f_2(x, y)] \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

Por Cauchy-Riemann, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ &= -i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + \frac{1}{(-i)} \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \right) \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{-i} \frac{i}{i} &= \frac{i}{-(-1)} \\ &= i \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} -i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + \frac{1}{(-i)} \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \right) &= -i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \right) \\ &= -i \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

□

3.3 Funções Harmônicas

Da equação (3.26) obtemos que

$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \\ \Delta f_2 &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \end{aligned} \tag{3.34}$$

(Ahlfors, 1979, cap. 2).

Demonstração. Por Cauchy-Riemann, temos que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Derivando inicialmente a primeira igualdade em relação a x

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}$$

Agora, a segunda igualdade em relação a y

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}$$

Somando ambas as igualdades

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}$$

Como f é contínua, temos que $\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}$. Portanto

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0 = \Delta f_1$$

Agora, para encontrar Δf_2 , derivamos a primeira igualdade em relação a y

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}$$

Agora, a segunda igualdade em relação a x

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \Leftrightarrow \\ -\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Somando ambas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \Leftrightarrow \\ 0 &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \Leftrightarrow \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} &= \Delta f_2 = 0 \end{aligned}$$

□

Segundo Ahlfors(1979), uma função f_1 que satisfaz a Equação de Laplace $\Delta f = 0$ é uma função harmônica. E, se duas funções harmônicas f_1 e f_2 cumprem as condições de Cauchy-Riemann, então é correto afirmar que f_2 é a função conjugada harmônica de f_1 . Do mesmo modo, f_1 é conjugada harmônica de $-f_2$.

Exemplo 3.6. Considere a seguinte função:

$$f_1(x, y) = x^2 - y^2$$

Verificamos se $f_1(x, y)$ é harmônica calculando suas derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = -2$$

Agora, somamos essas derivadas de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 2 + (-2) = 0$$

Como a equação de Laplace é satisfeita, concluímos que $f_1(x, y) = x^2 - y^2$ é uma função harmônica.

Proposição 3.11. *Se duas funções conjugadas harmônicas $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ possuem derivadas parciais contínuas de 1ª ordem que satisfazem as equações diferenciais de Cauchy Riemann, então $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$ é analítica com derivada contínua $f'(z)$ (Ahlfors, 1979, cap. 2).*

Demonstração. Seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $z = x + iy \in G$, $B(z, r) \subset G$ e $h + ik \in B(0, r)$.

$$f_1(x+h, y+k) - f_1(x, y) = [f_1(x+h, y+k) - f_1(x, y+k)] + [f_1(x, y+k) - f_1(x, y)] \quad (3.35)$$

Vamos enunciar agora o seguinte teorema para que possamos prosseguir com a demonstração:

Teorema 3.2. *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) . Então, existe ao menos um c em (a, b) tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

(Guidorizzi, 2013, seq. 15.2).

Aplicando o Teorema 3.2 para cada uma das expressões nos colchetes, temos que existem, para cada $h + ik$ em $B(0, r)$, números h_0 e k_0 tais que $|h_0| < |h|$ e $|k_0| < |k|$.

Assim:

$$\begin{aligned} f_1(x+h, y+k) - f_1(x, y+k) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x+h_0, y+k)h \\ f_1(x, y+k) - f_1(x, y) &= \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y+k_0)k \end{aligned}$$

Fazendo

$$g(h, k) = [f_1(x+h, y+k) - f_1(x, y+k)] - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)k \right]$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x+h_0, y+k)h + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y+k_0)k &= f_1(x+h, y+k) - f_1(x, y) \Rightarrow \\ g(h, k) &= \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}(x+h_0, y+k)h + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y+k_0)k - \right] \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)k \right] \Leftrightarrow \\ &= h \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}(x+h_0, y+k) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) \right] + k \left[\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y+k_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right] \end{aligned}$$

Dividindo ambas a partes por $h+ik$

$$\frac{g(h, k)}{h+ik} = \frac{h}{h+ik} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}(x+h_0, y+k) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) \right] + \frac{k}{h+ik} \left[\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y+k_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right]$$

Aplicando o limite $\lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{g(h, k)}{h+ik}$ temos que quando h vai para 0, h_0 também vai, então quando $h+ik \rightarrow 0$, o termo que está multiplicando $\frac{k}{h+ik}$ vai para 0. Sabemos disso pois, por hipótese, $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ é contínua, então se $h+ik \rightarrow 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y+k_0) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)$. Além disso, como $|h| < |h+ik|$, $\frac{k}{h+ik}$ é limitado e algo limitado multiplicado por algo que vai para zero no limite é igual a zero. Assim,

$$\lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{g(h, k)}{h+ik} = 0 \quad (3.36)$$

Portanto

$$f_1(x+h, y+k) - f_1(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)k + g(h, k) \quad (3.37)$$

onde g satisfaz (3.36).

Similarmente, podemos repetir o mesmo processo para f_2

$$f_2(x+h, y+k) - f_2(x, y) = [f_2(x+h, y+k) - f_2(x, y+k)] + [f_2(x, y+k) - f_2(x, y)] \quad (3.38)$$

Aplicando o Teorema 3.2 para cada uma das expressões nos colchetes, temos que existem, para cada $h+ik$ em $B(0, r)$, números h_1 e k_1 tais que $|h_1| < |h|$ e $|k_1| < |k|$. Assim:

$$\begin{aligned} f_2(x+h, y+k) - f_2(x, y+k) &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(x+h_1, y+k)h \\ f_2(x, y+k) - f_2(x, y) &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y+k_1)k \end{aligned}$$

Tomando

$$\varphi(h, k) = [f_2(x+h, y+k) - f_2(x, y+k)] - \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)k \right]$$

Note que

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x+h_1, y+k)h + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y+k_1)k = f_2(x+h, y+k) - f_2(x, y) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \varphi(h, k) &= \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x+h_1, y+k)h + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y+k_1)k \right] - \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)k \right] \Leftrightarrow \\ \varphi(h, k) &= h \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x+h_1, y+k) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \right] + k \left[\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y+k_1) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \right] \Leftrightarrow \\ \frac{\varphi(h, k)}{h+ik} &= \frac{h}{h+ik} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x+h_1, y+k) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \right] + \frac{k}{h+ik} \left[\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y+k_1) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \right] \end{aligned}$$

Mas $|h| < |h+ik|$, $|k| < |h+ik|$, $|h_1| < |h|$, $|k_1| < |h+ik|$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ são contínuas. Então

$$\lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{\varphi(h, k)}{h+ik} = 0 \quad (3.39)$$

Portanto

$$f_2(x+h, y+k) - f_2(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)k + \varphi(h, k) \quad (3.40)$$

onde φ satisfaz (3.39)

Considere

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x, y) &= f_1(x+h, y+k) + if_2(x+h, y+k) - f_1(x, y) - if_2(x, y) \\ &= f_1(x+h, y+k) - f_1(x, y) + i[f_2(x+h, y+k) - f_2(x, y)] \end{aligned}$$

Por (3.37) e (3.40) obtemos

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x, y) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)k + g(h, k) \\ &+ i \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)k + \varphi(h, k) \right] \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)ik + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)k + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)ih \\ &+ g(h, k) + i\varphi(h, k) \end{aligned}$$

Por Cauchy-Riemann, segue que

$$\begin{aligned}
f(x+h, y+k) - f(x, y) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)ik - \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)k \\
&+ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)ih + g(h, k) + i\varphi(h, k) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)[h+ik] + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)[ih-k] + g(h, k) \\
&+ i\varphi(h, k) \Leftrightarrow \\
\frac{f(x+h, y+k) - f(x, y)}{h+ik} &= \frac{1}{h+ik} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)[h+ik] + \frac{1}{h+ik} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)[ih-k] \\
&+ \frac{g(h, k) + i\varphi(h, k)}{h+ik} \Leftrightarrow \\
\frac{f(x+h, y+k) - f(x, y)}{h+ik} &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{i}{i} \frac{1}{h+ik} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)[ih-k] \\
&+ \frac{g(h, k) + i\varphi(h, k)}{h+ik} \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{i}{ih-k} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)[ih-k] \\
&+ \frac{g(h, k) + i\varphi(h, k)}{h+ik} \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) + \frac{g(h, k) + i\varphi(h, k)}{h+ik} \Leftrightarrow \\
\lim_{(h+ik) \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y)}{h+ik} &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)
\end{aligned}$$

Também podemos escrever

$$\lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{f(z+h+ik) - f(z)}{h+ik} = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \quad (3.41)$$

□

Seja a função $f(x, y)$ de duas variáveis reais $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$. Como

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = \frac{1}{2}(2x) = x \quad (3.42)$$

e

$$-\frac{i}{2}(z - \bar{z}) = -\frac{i}{2}(x + iy - x + iy) = -\frac{i}{2}(2iy) = y \quad (3.43)$$

Então podemos escrever

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ e } y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}) \quad (3.44)$$

Com esta mudança de variável, podemos considerar $f(x, y)$ uma função de z e \bar{z} . Derivando f em relação a z e \bar{z} temos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (3.45)$$

Da Proposição 3.10, sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \quad (3.46)$$

Usando isso, temos que funções analíticas são caracterizada pela seguinte condição

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

(Ahlfors, 1979, cap. 2).

Demonstração. Temos que

$$f(x, y) = f\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z}), +\frac{-i}{2}(z + \bar{z})\right)$$

Pela Regra da Cadeia

$$Df(z, \bar{z}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Como

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{-i}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2}$$

Então,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(-i \frac{\partial f}{\partial y} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

3.4 Polinômios

De acordo com Ahlfors(1979), toda função constante é uma função analítica de derivada igual a zero. A função analítica mais simples não-constante é z , cuja derivada é igual a 1. Pela Definição 3.5, a soma e o produto de duas funções analíticas são também analíticas. Assim, segue que todo polinômio $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, \quad a_i \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} \quad (3.47)$$

é uma função analítica, onde $a_n \neq 0$. E sua derivada é igual a

$$P'(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}$$

Assim, temos que 3.47 é um polinômio de grau n .

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, para $n > 0$, a equação $P(z) = 0$ tem ao menos uma raiz, ou seja, todo polinômio complexo não constante possui ao menos uma raiz no conjunto dos números complexos. Isso ocorre porque \mathbb{C} é um corpo algebricamente fechado, ou seja, qualquer equação polinomial com coeficientes complexos admite pelo menos uma solução em \mathbb{C} . Seja $P(z)$ um polinômio de grau 2, onde α_1 é uma de suas raízes. Logo,

$$\begin{aligned}
 P(\alpha_1) &= a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 = 0 \\
 a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 &= -a_0 \\
 \alpha_1(a_1 + a_2\alpha_1) &= -a_0 \\
 -\alpha_1(a_1 + a_2\alpha_1) &= a_0
 \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$P(z) = -\alpha_1(a_1 + a_2\alpha_1) + a_1z + a_2z^2 \quad (3.48)$$

Dividindo (3.48) por $(z - \alpha_1)$, obtemos

$$\frac{-\alpha_1(a_1 + a_2\alpha_1) + a_1z + a_2z^2}{(z - \alpha_1)} = a_2z + a_1 + \alpha_1a_2 = P_1(z)$$

Assim, temos que, se $P(\alpha_1) = 0$ e $n > 0$, então podemos escrever $P(z) = (z - \alpha_1)P_1(z)$, onde $P_1(z)$ é um polinômio de grau $(n - 1)$. A repetição desse processo leva a uma fatoração completa onde, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ não são necessariamente distintos (Ahlfors, 1979, cap. 2).

Da fatoração, concluímos que $P(z)$ não se anula para qualquer valor diferente de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Além disso, a fatoração é unicamente determinada, exceto pela ordem dos fatores.

Se um valor α for uma raiz com multiplicidade h do polinômio $P(z)$, ele é denominado zero de ordem h de $P(z)$. Quando contamos todas as ordens dos zeros de $P(z)$, a soma dessas ordens é igual ao grau do polinômio (Ahlfors, 1979, cap. 2). Ou seja, se cada zero for contado tantas vezes quantas indicar sua ordem, um polinômio de grau n tem n zeros. Por exemplo, se $P(z)$ de grau n tem como zeros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ com as respectivas ordens h_1, h_2, \dots, h_n , então a soma dessas ordens ($h_1 + h_2 + \dots + h_n$) é igual ao grau de $P(z)$, que é n (Ahlfors, 1979, cap. 2).

A ordem de um zero α pode também ser determinada considerando as derivadas sucessivas de $P(z)$, para $z \neq \alpha$. Suponha que α é um zero de ordem h . Então, podemos escrever $P(z) = (z - \alpha)^h P_h(z)$, com $P_h(\alpha) \neq 0$ (Ahlfors, 1979, cap. 2). Derivando $P(z)$

sucessivamente, temos

$$\begin{aligned}
P'(z) &= h(z - \alpha)^{h-1}P_h(z) + (z - \alpha)^h P'_h(z) \Rightarrow \\
P'(\alpha) &= h(\alpha - \alpha)^{h-1}P_h(\alpha) + (\alpha - \alpha)^h P'_h(\alpha) \\
&= 0 \\
\\
P''(z) &= h(h-1)(z - \alpha)^{h-2}P_h(z) + (z - \alpha)^h P''_h(z) \Rightarrow \\
P''(\alpha) &= h(h-1)(\alpha - \alpha)^{h-2}P_h(\alpha) + (\alpha - \alpha)^h P''_h(\alpha) \\
&= 0 \\
&\dots \\
P^{(h-1)}(z) &= h(h-1)\dots 2(z - \alpha)P_h(z) + (z - \alpha)^h P_h^{(h-1)}(z) \Rightarrow \\
P^{(h-1)}(\alpha) &= h(h-1)\dots 2(\alpha - \alpha)P_h(\alpha) + (\alpha - \alpha)^h P_h^{(h-1)}(\alpha) \\
&= 0 \\
\\
P^{(h)}(z) &= h(h-1)\dots 2(z - \alpha)^0 P_h(z) + (z - \alpha)^h P_h^{(h)}(z)
\end{aligned}$$

Como $[h(h-1)\dots 2]$ é uma constante, chamaremos essa expressão de C .

$$\begin{aligned}
P^{(h)}(z) &= CP_h(z) + (z - \alpha)^h P_h^{(h)}(z) \Rightarrow \\
P^{(h)}(\alpha) &= CP_h(\alpha) + (\alpha - \alpha)^h P_h^{(h)}(\alpha) \\
&= CP_h(\alpha) \neq 0
\end{aligned}$$

Assim, obtemos que $P'(\alpha) = P'' = P^{(h-1)}(\alpha) = 0$, enquanto $P^{(h)}(\alpha) \neq 0$. Desse modo, podemos afirmar que a ordem de um zero é igual à ordem da primeira derivada não nula. Ou seja, as primeiras $(h-1)$ derivadas de $P(z)$ avaliadas em $z = \alpha$ serão nulas, enquanto a h -ésima derivada será não nula (Ahlfors, 1979, cap. 2).

Teorema 3.3. *Se todos os zeros de um polinômio $P(z)$ estão em um semiplano, então todos os zeros de $P'(z)$ estão no mesmo semiplano (Ahlfors, 1979, cap. 2).*

Demonstração. Se $P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n)$. Então

$$\begin{aligned}
P'(z) &= a_n [(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n)] + a_n(z - \alpha_1) [(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n)]' \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{P'(z)}{P(z)} &= \frac{a_n [(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n)]}{a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n)} + \frac{a_n(z - \alpha_1) [(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n)]'}{a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n)} \\
&= \frac{1}{(z - \alpha_1)} + \frac{1}{(z - \alpha_2)} + \dots + \frac{1}{(z - \alpha_n)}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Vamos supor que o nosso semiplano é igual o conjunto H , definido como a parte do plano onde $Im\left(\frac{z-a}{b}\right) < 0$, $a, b \in \mathbb{C}$. Se as raízes de $P(z)$ estão em H ($\alpha_k \in H, k \leq n$), mas z_1 é uma raiz de $P'(z)$ que não está em H , então

$$\begin{aligned} Im\left(\frac{z_1 - \alpha_k}{b}\right) &= Im\left(\frac{z_1 - a + a - \alpha_k}{b}\right) \\ &= Im\left(\frac{z_1 - a - (\alpha_k - a)}{b}\right) \\ &= Im\left(\frac{z_1 - a}{b}\right) - Im\left(\frac{\alpha_k - a}{b}\right) \end{aligned}$$

Mas $Im\left(\frac{z_1 - a}{b}\right) \geq 0$, pois $z_1 \notin H$ e $Im\left(\frac{\alpha_k - a}{b}\right) < 0$, pois $\alpha_k \in H$. Assim

$$Im\left(\frac{z_1 - \alpha_k}{b}\right) > 0$$

Pela Proposição 3.12, temos que

$$Im\left(\frac{z_1 - \alpha_k}{b}\right) > 0 \Rightarrow Im\left(\frac{b}{z_1 - \alpha_k}\right) < 0 \quad (3.50)$$

Por 3.49, multiplicando por b e tomando a parte imaginária, temos

$$\begin{aligned} P'(z_1) &= 0 \\ &\Downarrow \\ \frac{P'(z_1)}{P(z_1)} &= 0 \\ &\Downarrow \\ \frac{bP'(z_1)}{P(z_1)} &= 0 \\ Im\left(\frac{bP'(z_1)}{P(z_1)}\right) &= 0 \\ &= \sum_{k=1}^n Im\left(\frac{b}{z_1 - \alpha_k}\right) \end{aligned}$$

Por (3.50), temos

$$\sum_{k=1}^n Im\left(\frac{b}{z_1 - \alpha_k}\right) < 0$$

O que implica que pelo menos a parte imaginária de $P'(z_1)$ é não nula, e portanto $P'(z_1) \neq 0$, o que é um absurdo. Assim, z_1 está em H e, sem perda de generalidade, essa afirmação vale para qualquer raiz de $P'(z)$. \square

Proposição 3.12. *As partes imaginárias de números complexos inversos têm sinais opostos (Ahlfors, 1979, cap. 2).*

Demonstração. Seja $\frac{1}{z}$, onde $z = a + bi$. Podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + ib} \\ &= \frac{1}{a + ib} \frac{(a + ib)}{(a + ib)} \\ &= \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Sabemos que $a^2 + b^2 = |z|^2$. Substituindo

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{|z|^2} - \frac{bi}{|z|^2}$$

Assim,

$$Im\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-Im(z)}{|z|^2}$$

□

3.5 Funções Racionais

Definição 3.7. Uma função racional pode ser definida como

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios (Ahlfors, 1979, cap. 2).

Vamos considerar que $P(z)$ e $Q(z)$ não possuem fatores comuns e, portanto não possuem zeros comuns. Além disso se z_1 for um zero de Q ,

$$R(z_1) = \infty$$

Desse modo, $R(z)$ deve ser contínua e considerada no plano complexo estendido. Ou seja, $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definição 3.8. (Polos de $R(z)$) O zeros de $Q(z)$ são chamados de polos de $R(z)$ e a ordem de um polo é, por definição, a igual à ordem do zero de $Q(z)$ correspondente (Ahlfors, 1979, cap. 2).

A derivada

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - Q'(z)P(z)}{Q^2(z)}$$

existe apenas quando $Q(z) \neq 0$ (Ahlfors, 1979, cap. 2). Assim $R'(z)$ é analítica exceto nos polos. Temos que $R'(z)$ possui os mesmos polos que $R(z)$, sendo a ordem de cada polo aumentada em um. Podemos definir

$$\begin{aligned} R : \mathbb{C} \cup \{\infty\} &\rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ R(\infty) &= \lim_{z \rightarrow \infty} R(z) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Mas essa definição não determina a ordem de um zero ou polo no ∞ . Vamos considerar a função $R\left(\frac{1}{z}\right)$, reescrever como a função racional $R_1(z)$ e definir $R(\infty) = R_1(0)$. Se $R_1(0) = 0$ ou ∞ , a ordem do zero ou do polo em ∞ é definido como a ordem do zero ou polo de $R_1(z)$ na origem.

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m} \Rightarrow \\ R\left(\frac{1}{z}\right) &= R_1(z) \\ &= \frac{a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}}{b_0 + \frac{b_1}{z} + \dots + \frac{b_m}{z^m}} \\ &= \frac{a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \left(\frac{z^n}{z^n}\right)}{b_0 + \frac{b_1}{z} + \dots + \frac{b_m}{z^m} \left(\frac{z^m}{z^m}\right)} \\ &= \frac{a_0 \frac{z^n}{z^n} + \frac{a_1 z^n}{z^{n+1}} + \dots + \frac{a_n z^n}{z^{2n}}}{b_0 \frac{z^m}{z^m} + \frac{b_1 z^m}{z^{m+1}} + \dots + \frac{b_m z^n}{z^{2m}}} \\ &= \frac{\frac{1}{z^n} (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)}{\frac{1}{z^m} (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m)} \\ &= \frac{z^{-n} (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)}{z^{-m} (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m)} \\ &= z^{m-n} \frac{(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)}{(b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m)} \end{aligned}$$

Assim,

$$R_1(z) = z^{m-n} \frac{(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)}{(b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m)}$$

onde a potência z^{m-n} pertence ao numerador ou ao denominador. Desse modo, se $m > n$, $R_1(0) = 0 \Rightarrow R(\infty) = 0$, ou seja, $R(z)$ tem um zero de ordem $m - n$ no infinito. Se $m < n$, $R_1(0) = \infty \Rightarrow R(\infty) = \infty$, assim, ∞ é um polo de ordem $n - m$ para $R(z)$. Se $m=n$,

$$\begin{aligned} R_1(0) &= \frac{a_n}{b_m} \neq 0, \infty \\ &\Downarrow \\ R(\infty) &= \frac{a_n}{b_m} \neq 0, \infty \end{aligned}$$

Agora podemos contar os zeros e polos de $R(z)$ no plano complexo estendido. Temos que o número de zeros (incluindo aqueles em ∞) é igual ao $\max\{m, n\}$, que é igual ao número de polos. Em resumo

$$n^\circ \text{ de zeros} = \max\{m, n\} = n^\circ \text{ de polos}$$

Esse número em comum é chamado de ordem da função racional (Ahlfors, 1979, cap. 2).

Se a é uma constante complexa, então $(R(z) - a)$ tem os mesmos polos que $R(z)$ e, conseqüentemente, a mesma ordem.

$$\begin{aligned} R(z) - a &= \frac{P(z)}{Q(z)} - a \\ &= \frac{P(z) - aQ(z)}{Q(z)} \end{aligned}$$

Os zeros de $(R(z) - a)$ são iguais às raízes da equação $R(z) = a$ e se essas raízes forem contadas quantas vezes a ordem do zero indica, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.4. *Uma função racional $R(z)$ de ordem p tem p zeros e p polos e cada equação $R(z) = a$ tem exatamente p raízes (Ahlfors, 1979, cap. 2).*

Uma função racional de ordem 1 é uma fração linear do tipo

$$S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Observe que o determinante dos coeficientes deve ser diferente de zero.

Note que, pelo Teorema 3.4 equação $S(z) - w = 0$ tem exatamente uma raiz.

Temos que transformação $S^{-1}(z)$ é a inversa de S , onde

$$S^{-1}(z) = \frac{w\delta - \beta}{\alpha - w\gamma} \tag{3.52}$$

(Ahlfors, 1979, cap. 2).

Demonstração. Temos então

$$\begin{aligned}w &= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} && \Leftrightarrow \\w(\gamma z + \delta) &= \alpha z + \beta && \Leftrightarrow \\w\gamma z + w\delta &= \alpha z + \beta && \Leftrightarrow \\w\gamma z + w\delta - (\alpha z + \beta) &= 0 && \Leftrightarrow \\w\gamma z + w\delta - \alpha z - \beta &= 0 && \Leftrightarrow \\z(w\gamma - \alpha) &= \beta - w\delta && \Leftrightarrow \\z &= \frac{\beta - w\delta}{w\gamma - \alpha} && \Leftrightarrow \\&= \frac{-1 \beta - w\delta}{-1 w\gamma - \alpha} && \Leftrightarrow \\&= \frac{-\beta + w\delta}{-w\gamma + \alpha} && \Leftrightarrow\end{aligned}$$

□

4 Transformações Conformes

Considere C_1 e C_2 duas curvas suaves no domínio de $f(z)$ que se cruzam no ponto z_0 , cujas imagens no plano- w são representadas por S_1 e S_2 . Se $w_0 = f(z_0)$, então S_1 e S_2 se cruzam em w_0 , conforme pode ser visto na Figura 2.1 (Nonato, 2020).

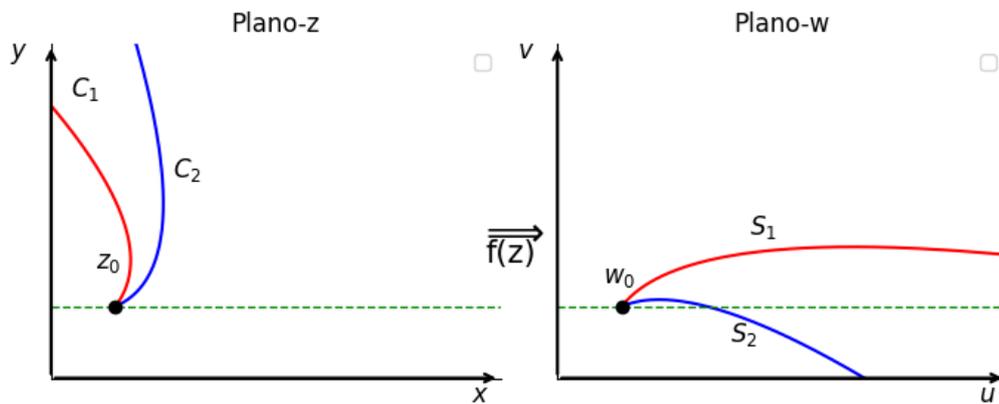


Figura 4.1: Transformação Conforme.

Fonte: Elaboração própria.

Definição 4.1. (Transformação conforme) A transformação $w = f(z)$ é conforme num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ se o ângulo entre C_1 e C_2 em z_0 for igual ao ângulo entre S_1 e S_2 no ponto w_0 , em valor absoluto e sentido, para todos os pontos z_0 em Ω (Nonato, 2020).

Temos que $f(z) = f(x, y)$ é uma transformação do tipo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Assim, o gráfico de f é dado por $Graf(f) = \{(x, y, f(x, y))\}$ ou $Graf(f) = \{(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y))\}$, onde f_1 e f_2 são as partes real e imaginária de f , respectivamente. Note que são necessárias quatro variáveis para compor o gráfico dessa função, de modo que ele não pode ser representado em uma imagem pois estaria no \mathbb{R}^4 .

Teorema 4.1. Se $f(z)$ é analítica e $f'(z) \neq 0$ num domínio Ω , então a transformação $w = f(z)$ é conforme em Ω (Nonato, 2020).

Demonstração. Considere o ponto $z_0 + \Delta z$ em C_0 no sentido positivo a partir de z_0 . O limite do argumento de Δz quando $\Delta z \rightarrow 0$ é o ângulo de inclinação α da reta tangente à curva C_0 no ponto. Se $w = f(z)$ e se $w_0 + \Delta w$ em S_0 no sentido positivo a partir de w_0 é a imagem de $z_0 + \Delta z$, então o argumento de Δw tende para o ângulo de inclinação β da reta tangente à curva S_0 no ponto w_0 .

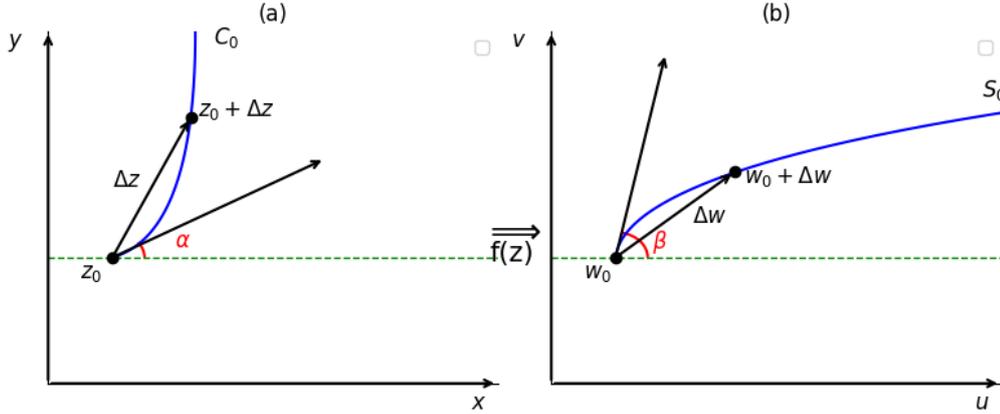


Figura 4.2: Conformidade.

Fonte: Elaboração própria.

Temos que a derivada $f'(z_0)$ é definida por

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta[f(z)]}{\Delta z} \quad (4.2)$$

onde $\Delta[f(z)] = f(z) - f(z_0)$

Têm-se que a reta tangente à curva C_0 em z_0 gira um ângulo θ_0 sob a transformação $w = f(z)$. θ_0 é um argumento de $f'(z_0)$, então o cálculo do limite do argumento de $\frac{\Delta[f(z)]}{\Delta z}$ é

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\arg \left(\frac{\Delta[f(z)]}{\Delta z} \right) \right]$$

Como o argumento é uma função contínua, podemos tirá-lo do limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \left(\frac{\Delta[f(z)]}{\Delta z} \right) = \arg \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta[f(z)]}{\Delta z} \right)$$

Mas $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta[f(z)]}{\Delta z} = f'(z_0)$

$$\arg \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta[f(z)]}{\Delta z} \right) = \arg[f'(z_0)] = \theta_0$$

Logo,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\arg \left(\frac{\Delta[f(z)]}{\Delta z} \right) \right] = \theta_0 \quad (4.3)$$

Vale destacar que esse valor encontrado é válido apenas para transformações do tipo $w = f(z)$ desde que f seja analítica e em z_0 e $f'(z_0) \neq 0$. Sendo $w_0 + \Delta w$ a imagem de $z_0 + \Delta z$, então, utilizando as propriedades do argumento do quociente, obtemos o valor do argumento de Δw , que é dado por

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{\Delta[f(z)]}{\Delta z}\right) &= \arg(\Delta[f(z)]) - \arg(\Delta z) \Leftrightarrow \\ \arg(\Delta[f(z)]) &= \arg(\Delta z) + \arg\left(\frac{\Delta[f(z)]}{\Delta z}\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sabemos que quando $\Delta z \rightarrow 0$, $\arg(\Delta z) \rightarrow \alpha$ e $\arg(\Delta[f(z)]) \rightarrow \beta$. Então, substituindo em (4.4),

$$\beta = \alpha + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\arg\left(\frac{\Delta[f(z)]}{\Delta z}\right) \right] \quad (4.5)$$

Assim, de (4.3) temos

$$\beta = \alpha + \theta_0 \quad (4.6)$$

Como o argumento θ_0 é encontrado pela função transformadora f e pelo ponto z_0 , ele é o mesmo para todas as curvas passando por z_0 .

Sendo as curvas C_1 e C_2 que se cruzam no ponto z_0 do plano complexo z , com α_1 e α_2 os ângulos de inclinação delas respectivamente, em z_0 . Através da transformação $w = f(z)$, obtêm-se as curvas S_1 e S_2 imagens de C_1 e C_2 , no plano- w , interceptando-se em $w_0 = f(z_0)$. Dessa forma, os ângulos de inclinação de S_1 e S_2 em w_0 são β_1 e β_2 , respectivamente. Assim, da equação (4.6) têm-se que

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 + \theta_0 \\ &\text{e} \\ \beta_2 &= \alpha_2 + \theta_0 \end{aligned}$$

Desta forma, têm-se

$$\beta_1 - \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$$

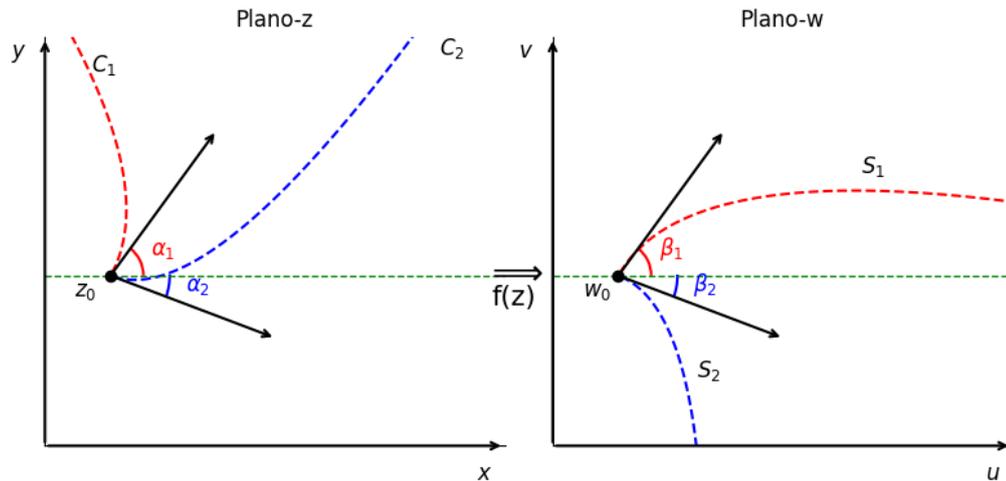


Figura 4.3: Preservação dos ângulos.

Fonte: Elaboração própria.

Portanto, é possível perceber que o ângulo entre C_1 e C_2 é igual ao ângulo entre S_1 e S_2 , em valor absoluto e módulo, como mostra a Figura. \square

Proposição 4.1. A transformação $w = f(z)$, onde $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, transforma o semiplano superior S do plano- z no disco unitário do plano- w . Onde z_0 é um ponto de S e $\theta \in \mathbb{R}$ (Nonato, 2020).

Demonstração. Seja $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e $\bar{z}_0 = \bar{x}_0 - i\bar{y}_0$, onde $z_0 \in \mathbb{C}$ pois caso fosse real, haveria problema no denominador. Então, pela definição de módulo

$$\begin{aligned} z - z_0 &= (x - x_0) + i(y - y_0) \Rightarrow \\ |z - z_0| &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

e ainda

$$\begin{aligned} z - \bar{z}_0 &= (x - x_0) + i(y + y_0) \Rightarrow \\ |z - \bar{z}_0| &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Observe que se z pertence ao semiplano superior (ou seja, quando $y \geq 0$, temos $|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0|$ e se z pertence ao eixo real ($y = 0$), $|z - z_0| = |z - \bar{z}_0|$

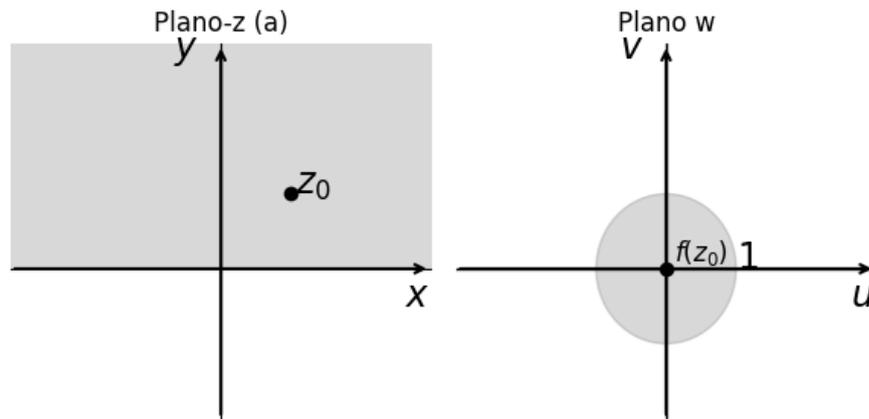


Figura 4.4: Proposição 4.1.

Fonte: Elaboração própria.

Observe também que, pela fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Pela definição de módulo, temos que

$$\begin{aligned} |e^{i\theta}| &= \sqrt{(\cos \theta)^2 - i^2(\sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |w| &= \left| e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| \Leftrightarrow \\ &= |e^{i\theta}| \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| \leq 1 \end{aligned}$$

Logo, $|f(z)| = |w| \leq 1$, o que nos leva a um disco unitário em que $f(z_0) = 0$ e que o eixo real equivale à circunferência, observado na Figura 4.4. \square

Exemplo 4.1. Considere transformação $f(z) = z$. Note que ela transforma a função linear em linear, cuja derivada é igual a $f'(z) = z' = 1$. Desse modo, têm-se que essa função preserva tanto a magnitude quanto a direção dos vetores tangentes no plano. Observe que f é conforme pois é analítica e tem derivada não nula em todo o seu domínio, preservando os ângulos e formas, como pode ser visto na Figura 4.5.

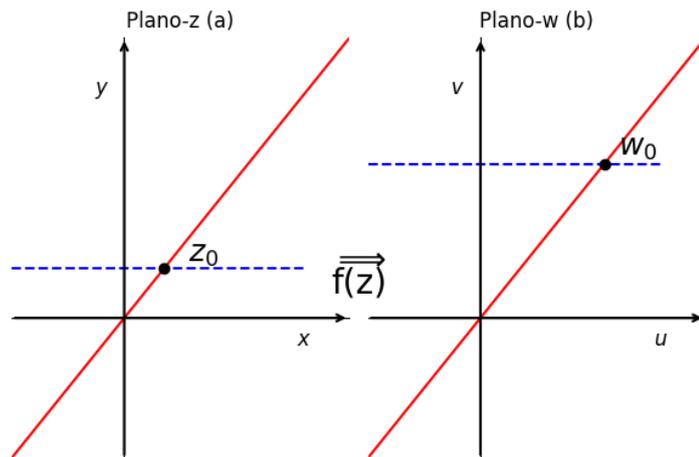


Figura 4.5: Transformação $f(z) = z$.

Fonte: Elaboração própria.

4.1 Transformações por funções elementares

As transformações discutidas aqui são conformes, exceto nos pontos singulares.

4.1.1 Transformação Linear

É possível transformar uma região em outra por meio de funções lineares. Essa transformação $w = Cz$, onde C é uma constante complexa não nula e $z \neq 0$, pode ser escrita na forma exponencial. Assim, escrevendo $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $C = k(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, obtemos

$$C = ke^{i\alpha} \text{ e } z = re^{i\theta} \quad (4.9)$$

Logo,

$$w = (kr)e^{i(\alpha+\theta)} \quad (4.10)$$

Assim, essa transformação leva todo ponto de uma região do plano- z para o plano- w , em que ambas as regiões tem a mesma forma, tamanho e orientação (Nonato, 2020).

4.1.2 Transformação pela função exponencial

Temos que a transformação $w = e^z$, onde $z = x + iy$, pode ser escrita na forma $w = e^x e^{iy}$. Assim, se $w = \rho e^{i\phi}$, então

$$\rho = e^x \text{ e } \phi = y. \quad (4.11)$$

(Nonato, 2020).

A imagem do ponto $z = (C_1, y)$ arbitrário de uma reta $x = C_1$ tem como coordenadas polares $\rho = e^{C_1}$ e $\phi = y$. À medida que o ponto z percorre a reta para cima, sua imagem percorre o círculo mostrado na figura, no sentido anti-horário. A imagem da reta $x = C_1$ é o círculo todo e cada ponto dele é imagem de um número infinito de pontos ao longo dessa reta, espaçados 2π unidades. Assim, cada ponto do círculo é gerado por um ponto da reta, mas existem pontos na reta que geram os mesmos pontos do círculo (Nonato, 2020).

A função exponencial define uma bijeção de uma reta horizontal $y = C_2$ sobre o ângulo $\phi = y$.

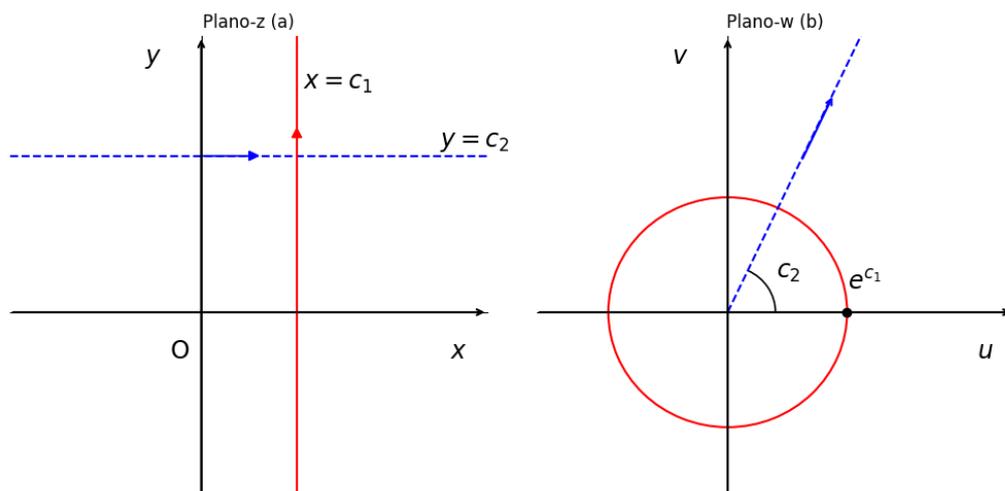


Figura 4.6: Transformação Exponencial.

Fonte: Elaboração própria.

Conforme y varia no sentido positivo, quando $x = C_1$, sua imagem percorre o círculo no sentido anti-horário.

4.1.3 Transformação pela função logarítmica

Qualquer ramo do logaritmo é uma função injetiva, definida em todo o plano- z (exceto em $z = 0$) e tem como imagem toda a faixa horizontal do plano- w e a totalidade dos ramos, cobrindo assim, todo o plano- w (Nonato, 2020). Podemos escrever

$$z = re^{i\theta}, w = u + iv$$

e

$$\begin{aligned} w &= \ln(z) \\ &= \ln(re^{i\theta}) \\ &= \ln(r) + \ln(e^{i\theta}) \\ &= \ln(r) + i\theta \ln(e) \\ &= \ln(r) + i\theta \end{aligned}$$

Portanto,

$$w = \ln(z) = \ln(r) + i\theta$$

Os raios $\theta = \text{const.}$ do plano- z , que vão nas retas horizontais $v = \text{const.}$ do plano- w , e os círculos $r = \text{const.}$ são levados nas retas verticais $u = \text{const.}$

Note que a ortogonalidade das curvas $u(x, y) = \text{const.}$ e $v(x, y) = \text{const.}$ era de se esperar, de acordo com a interpretação geométrica das equações de Cauchy-Riemann.

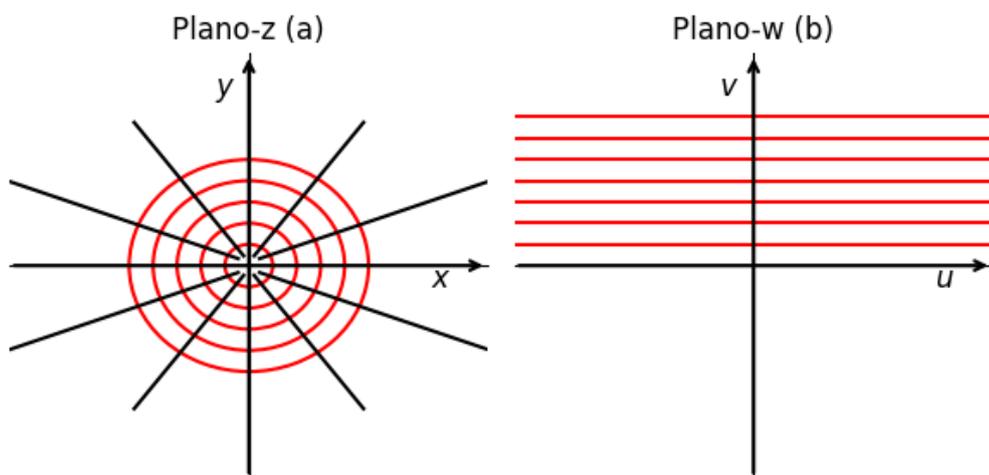


Figura 4.7: Transformação Logarítmica.

Fonte: Elaboração própria.

O ramo principal leva ao plano- z , $z \neq 0$, na faixa $0 \leq v < 2\pi$ do plano- w . E, em geral, o ramo k -ésimo leva o plano- z , $z \neq 0$, na faixa $2\pi k \leq v < 2(k+1)\pi$ do plano- w .

Assim, todo ramo do logaritmo é uma função injetiva, definida em todo o plano- z , exceto em $z=0$.

Desse modo, note que r sempre deve ser positivo pois representa o raio do círculo. Assim, se tivermos θ fixado, então

$$r \rightarrow +\infty \Rightarrow \ln(r) \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty$$

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow \ln(r) \rightarrow -\infty \Rightarrow u \rightarrow -\infty$$

Então, para $r > 1$, temos a Figura 4.8:

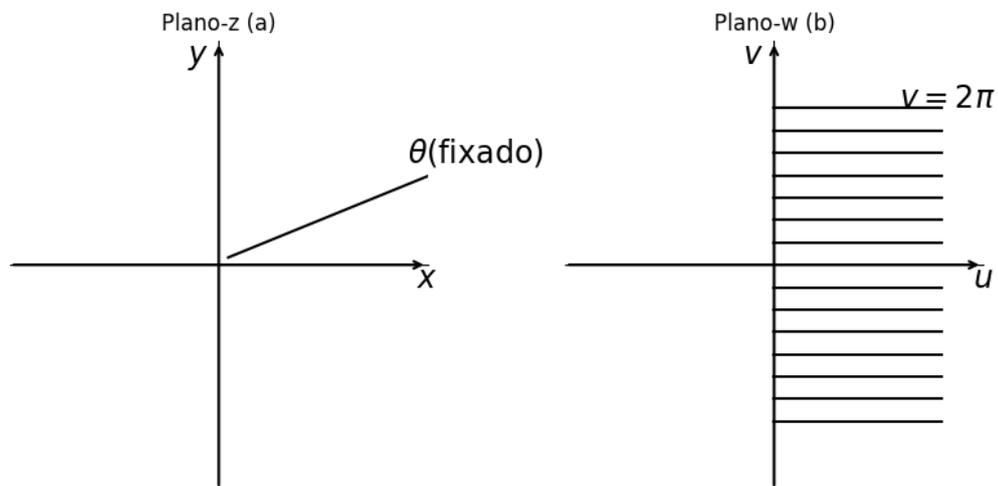


Figura 4.8: θ fixado e $r > 1$.

Fonte: Elaboração própria.

Para $0 < r < 1$, temos a ocorrência da Figura 4.9.

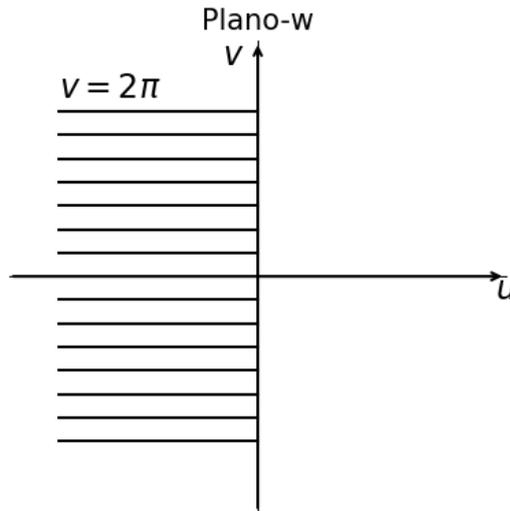


Figura 4.9: θ fixado e $0 < r < 1$.

Fonte: Elaboração própria.

Para o caso em que $r = 1$, segue que $\ln(r) = u$. Se tivermos r fixado e θ variando temos que

$$\theta > 0 \Rightarrow v \rightarrow +\infty$$

$$\theta < 0 \Rightarrow v \rightarrow -\infty$$

Note que, se $\theta > 0$, o círculo gira no sentido anti-horário, e se $\theta < 0$ o círculo gira no sentido horário. Assim, se $\theta > 0$, o círculo do plano-z gera retas verticais com $v > 0$ no plano-w, como pode ser observado na Figura 4.10.

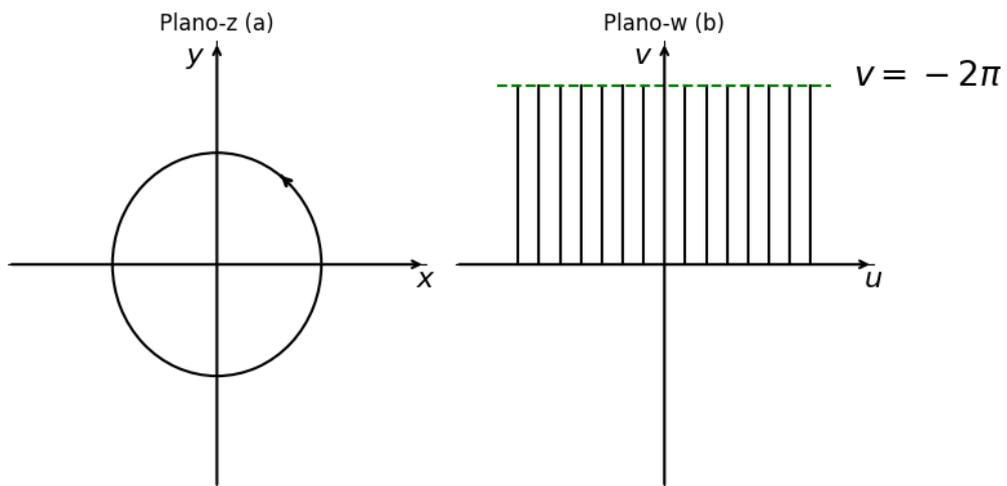


Figura 4.10: r fixado e $\theta > 0$.

Fonte: Elaboração própria.

E se $\theta < 0$, temos que o círculo gira no sentido horário no plano- z , gerando retas verticais com $v < 0$ no plano- w , como pode ser visto na Figura 4.11.

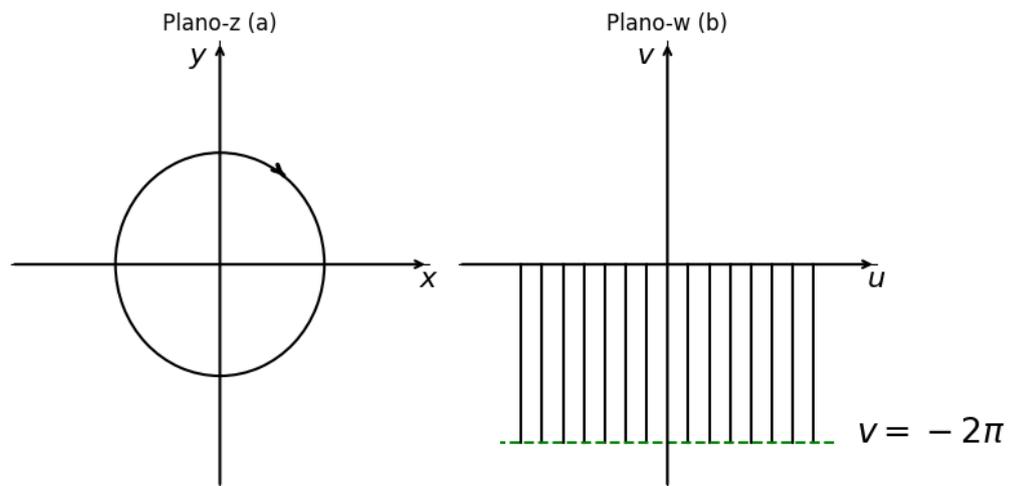


Figura 4.11: r fixado e $\theta < 0$.

Fonte: Elaboração própria.

5 Considerações Finais

O presente trabalho teve como objetivo central investigar as funções de uma variável complexa, com ênfase nas funções analíticas e nas transformações conformes, temas de grande relevância dentro da Análise Complexa. A partir da construção teórica fundamentada em autores clássicos da área, foi possível delinear os principais conceitos e propriedades que regem o comportamento dessas funções no conjunto dos números complexos.

Iniciou-se com a definição do corpo dos números complexos, destacando suas propriedades algébricas e geométricas, o que permitiu compreender a distinção fundamental entre o espaço \mathbb{R}^2 e o plano complexo \mathbb{C} . Em seguida, foram abordados os conceitos de limite, continuidade e derivada no contexto complexo, culminando na definição de função analítica. Ressaltou-se, neste ponto, a rigidez estrutural das funções analíticas complexas, cuja existência da derivada em um ponto garante uma série de propriedades adicionais, inexistentes no caso real.

As equações de Cauchy-Riemann foram analisadas como condição necessária para a diferenciabilidade complexa, estabelecendo uma ponte entre os componentes reais e imaginários das funções. Foram ainda discutidos conceitos fundamentais como funções harmônicas, polinômios e funções racionais, os quais constituem a base para a construção e compreensão das transformações conformes.

As transformações conformes, por sua vez, foram exploradas como aplicações que preservam ângulos e formas locais, desempenhando papel essencial na modelagem de fenômenos físicos e na resolução de problemas em diversas áreas da matemática aplicada.

As figuras apresentadas ao longo deste trabalho foram elaboradas pela autora, com o auxílio da linguagem de programação Python, por meio do ambiente de desenvolvimento Visual Studio Code, utilizando-se das bibliotecas Matplotlib e Numpy. A elaboração dessas representações gráficas contribuiu de maneira significativa para a visualização geométrica dos conceitos abordados, favorecendo uma interpretação mais intuitiva de resultados abstratos e complexos.

Durante a etapa de aplicação dos conteúdos abordados, considerou-se inicial-

mente a possibilidade de explorar aplicações relacionadas à Computação Quântica, especificamente no contexto dos chamados qubits (bits quânticos). No entanto, a escassez de materiais introdutórios que apresentassem o tema com uma abordagem didática e acessível levou à inviabilidade dessa proposta. Outra alternativa considerada foi a utilização dos números complexos na construção de fractais, campo de estudo de elevada complexidade que exigiria um aprofundamento técnico que extrapolaria o escopo e o tempo disponível para o desenvolvimento deste trabalho. Diante disso, optou-se por abordar as Transformações Conformes, por se tratar de um tema com sólida fundamentação teórica e aplicações relevantes, além de apresentar viabilidade prática para experimentação computacional.

Dessa forma, conclui-se que o estudo das funções analíticas e das transformações conformes no plano complexo não apenas enriquece a compreensão teórica da Análise Complexa, como também revela aplicações práticas em áreas como a teoria do potencial, a eletrostática, a mecânica dos fluidos e a engenharia. A abordagem adotada nesta monografia buscou oferecer uma base sólida para futuras investigações no campo da matemática pura e aplicada, ressaltando a profundidade e a elegância das estruturas envolvidas.

Referências Bibliográficas

- [] AHLFORS, L. V. **COMPLEX ANALYSIS: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable**. International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., 1979
- [] CHAVES, Marcelo Santos. **Números Complexos: História, Teoria e Prática**. Belém-PA: Fundação Universitaria Andaluza Inca Garcilaso, 2013. 54 p. Disponível em: <http://www.eumed.net/libros-gratis/2013a/1317/index.htm>. Acesso em: 5 set. 2024.
- [] FERNANDEZ, Cecília S.; BERNARDES Jr., Nilson C. **Introdução às Funções de uma Variável Complexa**. Rio de Janeiro: SBM, 2008.
- [] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo: volume 1**. Rio de Janeiro. LTC-Livros Técnicos e Científicos. 5^a edição, 2001.
- [] JÚNIOR, Ulício Pinto. **A História dos números complexos: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand**. Orientador: Tatiana Roque. 2009. 94 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
- [] LIMA, E. L. **Curso de análise**. 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1981. v. 1
- [] PINTO, Diomara; MORGADO, Maria Cândida Ferreira. **Calculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2009.
- [] SANTOS, Marcos André dos. **Dos Números Complexos aos Quatérnions: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações**. Orientador: Olga Harumi Saito. 2013. 101 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

- [] TRIGUEIRO, Ana Nonato. **Estudo Sobre as Transformações Conformes: Teoria e Aplicações na Matemática e na Física na Perspectiva da Interdisciplinaridade.** Orientador: Kíssia Carvalho. 2020. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, Cajazeiras-PB, 2020.

A Apêndice

A.1 Figuras

As figuras de autoria própria apresentadas nesta monografia foram elaboradas utilizando-se a linguagem de programação Python e suas respectivas bibliotecas Numpy e Matplotlib. Para isso, foi utilizado o software Visual Studio Code, um editor de código-fonte desenvolvido pela Microsoft disponível para Windows, macOS e Linux. À seguir, mostra-se instruções para a geração de algumas dessas imagens utilizando-se esse software.

A.1.1 Instalação do Visual Studio Code (VS Code)

1. Passo 1: Acesse o site oficial do Visual Studio Code [Visual Studio Code](#)
2. Passo 2: Clique no botão de download e selecione a versão apropriada para o seu sistema operacional (Windows, macOS ou Linux).
3. Após o download, execute o instalador e siga as instruções na tela para concluir a instalação.

A.1.2 Instalação do Python

1. Passo 1: Acesse o site oficial do Python [Python Downloads](#).
2. Passo 2: Baixe a versão mais recente do Python compatível com seu sistema operacional.
3. Passo 3: Execute o instalador e certifique-se de marcar a opção "Add Python to PATH" antes de clicar em "Install Now".

A.1.3 Instalação das Bibliotecas Necessárias

1. Passo 1: Abra o Visual Studio Code.

2. Passo 2: Abra o terminal integrado no VS Code navegando no menu superior: ****View > Terminal****.
3. Passo 3: No terminal, instale as bibliotecas `numpy` e `matplotlib` digitando o seguinte comando e pressionando 'Enter':

```
pip install numpy matplotlib
```

A.1.4 Configuração e Execução do Código

1. Passo 1: Crie um novo arquivo Python no VS Code clicando em ****File > New File**** e salvando-o com a extensão `.py` (por exemplo, `graficos.py`).
2. Passo 2: Copie e cole o código fornecido no novo arquivo Python criado.
3. Passo 3: Salve o arquivo.
4. Passo 4: Execute o código clicando com o botão direito do mouse no arquivo e selecionando ****Run Python File in Terminal****.

A.1.5 Verificação dos Gráficos

1. Após a execução bem-sucedida do código, será exibida uma janela de gráficos,

A.2 Códigos Python para gerar as Figuras

A.2.1 Código da Figura 2.1: Representação Cartesiana.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

fig, ax = plt.subplots(figsize=(4, 4))
ax.set_xlim(-1, 1)
ax.set_ylim(-1, 1)
ax.grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
```

```
# Adicionando setas aos eixos
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
ax.spines['left'].set_position(('data', 0))

# Adicionando setas aos eixos
ax.annotate('', xy=(1, 0), xytext=(-1, 0),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))
ax.annotate('', xy=(0, 1), xytext=(0, -1),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))

# Ocultando os números dos eixos
ax.set_xticks([])
ax.set_yticks([])

# Rótulos dos eixos
ax.text(1, -0.1, '$x$', fontsize=17, ha='center')
ax.text(-0.1, 0.9, '$y$', fontsize=17, ha='center')

ax.text(0.6, 0.5, '$z$', fontsize=17, ha='left')
plt.scatter(0.5, 0.5, color='black', zorder=5)
plt.plot([0.5,0.5], [-0.5, 0.5], color='black', linestyle='--',linewidth=1.5)

ax.text(0.6,-0.6,'$\overline{z}$', fontsize=17, ha='left')
plt.scatter(0.5, -0.5, color='black', zorder=5)
plt.plot([-0.5,0.5],[-0.5,-0.5],color='black', linestyle='--',linewidth=1.5)
ax.text(-0.75, 0.5, '$-\overline{z}$', fontsize=17, ha='left')
plt.scatter(-0.5, 0.5, color='black', zorder=5)
plt.plot([-0.5,-0.5],[-0.5,0.5],color='black', linestyle='--',linewidth=1.5)
```

```
ax.text(-0.75, -0.6, '$-z$', fontsize=17, ha='left')
plt.scatter(-0.5,-0.5,color='black',zorder=5)
plt.plot([-0.5,0.5],[0.5,0.5],color='black', linestyle='--',linewidth=1.5)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

A.2.2 Código da Figura 2.2: Adição e multiplicação.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Arc

z1 = (1, 2.5)
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(8, 4))

# Ajustes no primeiro gráfico
axs[0].set_xlim(-7, 7)
axs[0].set_ylim(0, 4)
axs[0].grid(True, color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[0].legend()
axs[0].set_title('$z_1 + z_2$')

# Ajustes no segundo gráfico
axs[1].set_xlim(-7, 7)
axs[1].set_ylim(0, 4)
axs[1].grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[1].legend()
axs[1].set_title('$z_1-z_2$')

axs[0].text(6.7, -0.5, '$x$', fontsize = 17, ha='center')
axs[0].text(-0.5, 3.7, '$y$', fontsize = 17, ha='center')
```

```
axs[1].text(6.7, -0.5, '$x$', fontsize = 17, ha='center')
axs[1].text(-0.5, 3.7, '$y$', fontsize = 17, ha='center')

# Anotações nos gráficos
axs[0].text(0.6, 2.03, '$z_1$', fontsize = 17, ha='left')
axs[0].text(3.85, 3.9, '$z_2$', fontsize = 17, ha='left')
axs[0].text(3.18, 1.86, '$z_1+z_2$', fontsize = 17, ha='left')

axs[1].text(-0.8, 2.89, '$z_2$', fontsize = 17, ha='left')
axs[1].text(1.33, 1.47, '$z_1$', fontsize = 17, ha='left')
axs[1].text(-4, 1, '$z_1-z_2$', fontsize = 17, ha='left')

# Vetor no gráfico da esquerda
vetor_a = np.array([2, 3])
vetor_b = np.array([4, 1])

# Soma vetorial
vetor_soma = vetor_a + vetor_b

# Subtração vetorial
vetor_subtracao = vetor_a - vetor_b

axs[0].quiver(0, 0, vetor_a[0], vetor_a[1], angles='xy', scale_units='xy',
              scale=1, color='r', label='$\\vec{a}$')

# Adicionar o vetor b partindo do final do vetor a
axs[0].quiver(vetor_a[0], vetor_a[1], vetor_b[0], vetor_b[1], angles='xy',
              scale_units='xy', scale=1, color='b', label='$\\vec{b}$')

# Soma vetorial como resultado direto
axs[0].quiver(0,0,vetor_soma[0],vetor_soma[1], angles='xy',scale_units='xy',
              scale=1,color='g', linestyle='-', label='$\\vec{a} + \\vec{b}$')
```

```

# Subtração vetorial
axs[1].quiver(0,0,vetor_a[0],vetor_a[1], angles='xy', scale_units='xy',
              scale=1, color='r')

# Adicionar o vetor -b partindo do final do vetor a
axs[1].quiver(vetor_a[0], vetor_a[1], -vetor_b[0], -vetor_b[1], angles='xy',
              scale_units='xy', scale=1, color='b', label='$-\vec{b}$')

# Subtração vetorial como resultado direto
axs[1].quiver(0, 0, vetor_subtracao[0], vetor_subtracao[1], angles='xy',
              scale_units='xy', scale=1, color='green', label='$\vec{a}-\vec{b}$')

# Adicionando setas nos eixos
for ax in axs:
    ax.spines['right'].set_color('none')
    ax.spines['top'].set_color('none')
    ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
    ax.yaxis.set_ticks_position('left')
    ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
    ax.spines['left'].set_position(('data', 0))

# Adicionando setas aos eixos
ax.annotate('', xy=(7, 0), xytext=(-7, 0),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))
ax.annotate('', xy=(0, 4), xytext=(0, 0),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))

# Ocultando os números dos eixos
axs[0].set_xticks([])
axs[0].set_yticks([])
axs[1].set_xticks([])

```

```
axs[1].set_yticks([])

plt.tight_layout()
plt.show()
```

A.2.3 Código da Figura 4.1: Transformação Conforme.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definindo o novo ponto de origem z1
z1 = (1, 1.5)

# Definindo as funções do segundo grau ajustadas para começar no ponto z1
#com coeficientes diferentes
def f(x):
    return np.where(x > z1[0], 0.5 * (x - z1[0])**2 + z1[1], np.nan)

def g(x):
    return np.where(x > z1[0], 0.3 * (x - z1[0])**2 + z1[1], np.nan)

# Definindo as funções com concavidade invertida para o segundo gráfico
def f_inverted(x):
    return np.where(x > z1[0], -0.5 * (x - z1[0])**2 + z1[1], np.nan)

def g_inverted(x):
    return np.where(x > z1[0], -0.3 * (x - z1[0])**2 + z1[1], np.nan)

# Gerando valores para x
x = np.linspace(z1[0], 15, 400)

# Calculando os valores de y para as funções
y_f = f(x)
```

```
y_g = g(x)
y_f_inverted = f_inverted(x)
y_g_inverted = g_inverted(x)

# Aplicando a rotação de 60 graus no sentido anti-horário em torno de z1
#para ambas as funções vermelhas
theta = np.radians(60) # Ângulo de rotação em radianos
cos_theta = np.cos(theta)
sin_theta = np.sin(theta)

# Rotacionando as coordenadas de g(x) ao redor do ponto z1
x_g_rot = z1[0] + (cos_theta * (x - z1[0]) - sin_theta * (y_g - z1[1]))
y_g_rot = z1[1] + (sin_theta * (x - z1[0]) + cos_theta * (y_g - z1[1]))

# Rotacionando as coordenadas de g_inverted(x) ao redor do ponto z1
x_g_inverted_rot = z1[0] + (cos_theta * (x - z1[0]) - sin_theta *
    (y_g_inverted - z1[1]))
y_g_inverted_rot = z1[1] + (sin_theta * (x - z1[0]) + cos_theta *
    (y_g_inverted - z1[1]))

# Aplicando a rotação de 30 graus no sentido anti-horário em torno de z1
#para ambas as funções azuis
theta_blue = np.radians(30) # Ângulo de rotação em radianos
cos_theta_b = np.cos(theta_blue)
sin_theta_b = np.sin(theta_blue)

# Rotacionando as coordenadas de f(x) ao redor do ponto z1
x_f_rot = z1[0] + (cos_theta_b * (x - z1[0]) - sin_theta_b * (y_f - z1[1]))
y_f_rot = z1[1] + (sin_theta_b * (x - z1[0]) + cos_theta_b * (y_f - z1[1]))

# Rotacionando as coordenadas de f_inverted(x) ao redor do ponto z1
x_f_inverted_rot = z1[0] + (cos_theta_b *
    (x - z1[0]) - sin_theta_b * (y_f_inverted - z1[1]))
```

```
y_f_inverted_rot = z1[1] + (sin_theta_b *
                        (x - z1[0]) + cos_theta_b * (y_f_inverted - z1[1]))

# Criando a figura com dois subplots
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(7, 3)) # Dois gráficos lado a lado

# Primeiro subplot (original com rotação nas parábolas)
axs[0].plot(x_f_rot, y_f_rot, color='blue')
axs[0].plot(x_g_rot, y_g_rot, color='red')
axs[0].axhline(y=z1[1], color='green', linestyle='--', linewidth=1)
axs[0].scatter(*z1, color='black', zorder=5)

# Ajustes no primeiro gráfico
axs[0].set_xlim(0, 7)
axs[0].set_ylim(0, 7)
axs[0].grid(True, color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[0].legend()
axs[0].set_title('Plano-z')

# Segundo subplot (concauidade invertida e rotação)
axs[1].plot(x_f_inverted_rot, y_f_inverted_rot, color='blue')
axs[1].plot(x_g_inverted_rot, y_g_inverted_rot, color='red')
axs[1].axhline(y=z1[1], color='green', linestyle='--', linewidth=1)
axs[1].scatter(*z1, color='black', zorder=5)

# Ajustes no segundo gráfico
axs[1].set_xlim(0, 7)
axs[1].set_ylim(0, 7)
axs[1].grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[1].legend()
axs[1].set_title('Plano-w')

axs[0].text(6.7, -0.5, '$x$', fontsize=12, ha='center')
```

```

axs[0].text(-0.5, 6.7, '$y$', fontsize=12, ha='center')

axs[1].text(6.7, -0.5, '$u$', fontsize=12, ha='center')
axs[1].text(-0.5, 6.7, '$v$', fontsize=12, ha='center')

# Anotações nos gráficos
axs[0].text(0.7, 2.3, '$z_0$', fontsize=12, ha='left')
axs[1].text(0.7, 2, '$w_0$', fontsize=12, ha='left')

axs[0].text(0.3, 5.9, '$C_1$', fontsize=12, ha='left')
axs[0].text(1.9, 4.2, '$C_2$', fontsize=12, ha='left')

axs[1].text(3, 3, '$S_1$', fontsize=12, ha='left')
axs[1].text(2.7, 0.75, '$S_2$', fontsize=12, ha='left')

# Adicionando uma seta entre os dois gráficos
fig.text(0.50,0.45,'$\Longrightarrow$',ha='center', va='center',fontsize=20)
fig.text(0.50, 0.4, 'f(z)', ha='center', va='center', fontsize=15)

# Adicionando setas nos eixos
for ax in axs:
    ax.spines['right'].set_color('none')
    ax.spines['top'].set_color('none')
    ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
    ax.yaxis.set_ticks_position('left')
    ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
    ax.spines['left'].set_position(('data', 0))

# Adicionando setas aos eixos
ax.annotate('', xy=(7, 0), xytext=(0, 0),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))
ax.annotate('', xy=(0, 7), xytext=(0, 0),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))

```

```
# Ocultando os números dos eixos
axs[0].set_xticks([])
axs[0].set_yticks([])
axs[1].set_xticks([])
axs[1].set_yticks([])

plt.tight_layout()
plt.show()
```

A.2.4 Código da Figura 4.2: Conformidade.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Arc

# Definindo o novo ponto de origem z1
z1 = (1, 2.5)

# Definindo as funções do segundo grau ajustadas para começar no ponto
#z1 com coeficientes diferentes
def f(x):
    return np.where(x > z1[0], 0.5 * (x - z1[0])**2 + z1[1], np.nan)

# Definindo as funções com concavidade invertida para o segundo gráfico
def f_inverted(x):
    return np.where(x > z1[0], -0.5 * (x - z1[0])**2 + z1[1], np.nan)

# Gerando valores para x
x = np.linspace(z1[0], 15, 400)

# Calculando os valores de y para as funções
y_f = f(x)
```

```
y_f_inverted = f_inverted(x)

# Aplicando a rotação de 85 graus no sentido anti-horário em torno de z1 para
# ambas as funções vermelhas
theta = np.radians(85) # Ângulo de rotação em radianos
cos_theta = np.cos(theta)
sin_theta = np.sin(theta)

# Aplicando a rotação de 20 graus no sentido anti-horário em torno de z1 para
# ambas as funções azuis
theta_blue = np.radians(20) # Ângulo de rotação em radianos
cos_theta_blue = np.cos(theta_blue)
sin_theta_blue = np.sin(theta_blue)

# Rotacionando as coordenadas de f(x) ao redor do ponto z1
x_f_rot = z1[0] + (cos_theta_blue * (x - z1[0]) -
sin_theta_blue * (y_f - z1[1]))
y_f_rot = z1[1] + (sin_theta_blue * (x - z1[0]) +
cos_theta_blue * (y_f - z1[1]))

# Rotacionando as coordenadas de f_inverted(x) ao redor do ponto z1
x_f_inverted_rot = z1[0] + (cos_theta * (x - z1[0]) - sin_theta *
(y_f_inverted - z1[1]))
y_f_inverted_rot = z1[1] + (sin_theta * (x - z1[0]) + cos_theta *
(y_f_inverted - z1[1]))

# Criando a figura com dois subplots
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(8, 3.5)) # Dois gráficos lado a lado

# Primeiro subplot (original com rotação nas parábolas)
axs[0].plot(x_f_rot, y_f_rot, color='blue')
axs[0].axhline(y=z1[1], color='green', linestyle='--', linewidth=1)
axs[0].scatter(*z1, color='black', zorder=5)
```

```
# Ajustes no primeiro gráfico
axs[0].set_xlim(0, 7)
axs[0].set_ylim(0, 7)
axs[0].grid(True, color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[0].legend()
axs[0].set_title('(a)')

# Segundo subplot (concauidade invertida e rotação)
axs[1].plot(x_f_inverted_rot, y_f_inverted_rot, color='blue')
axs[1].axhline(y=z1[1], color='green', linestyle='--', linewidth=1)
axs[1].scatter(*z1, color='black', zorder=5)

# Ajustes no segundo gráfico
axs[1].set_xlim(0, 7)
axs[1].set_ylim(0, 7)
axs[1].grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[1].legend()
axs[1].set_title('(b)')

axs[0].text(6.7, -0.5, '$x$', fontsize=12, ha='center')
axs[0].text(-0.5, 6.7, '$y$', fontsize=12, ha='center')

axs[1].text(6.7, -0.5, '$u$', fontsize=12, ha='center')
axs[1].text(-0.5, 6.7, '$v$', fontsize=12, ha='center')

# Anotações nos gráficos
axs[0].text(0.5, 2.1, '$z_0$', fontsize=12, ha='left')
axs[0].scatter(2.221, 5.29, color='black', zorder=5)
axs[0].text(2.332, 5.32, '$z_0+\Delta z$', fontsize=12, ha='left')

axs[0].text(1, 3.91, '$\Delta z$', fontsize=12, ha='left')
axs[1].text(2.2, 3.2, '$\Delta w$', fontsize=12, ha='left')
```

```

axs[1].text(0.5, 2.1, '$w_0$', fontsize=12, ha='left')
axs[1].scatter(2.853, 4.20, color='black', zorder=5)
axs[1].text(3, 4, '$w_0+\Delta w$', fontsize=12, ha='left')

axs[0].text(2.572, 6.74, '$C_0$', fontsize=12, ha='left')
axs[1].text(6.7, 5.7, '$S_0$', fontsize=12, ha='left')

# Vetor no gráfico da esquerda
axs[0].annotate('', xy=(2.221, 5.29), xytext=(z1[0], z1[1]),
                arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5, color='black'))

# Vetor no gráfico da direita
axs[1].annotate('', xy=(2.853, 4.20), xytext=(z1[0], z1[1]),
                arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5, color='black'))

# Adicionando uma seta entre os dois gráficos
fig.text(0.50, 0.45, '$\Longrightarrow$', ha='center',
va='center', fontsize=20)
fig.text(0.50, 0.4, 'f(z)', ha='center', va='center', fontsize=15)

# Adicionando setas nos eixos
for ax in axs:
    ax.spines['right'].set_color('none')
    ax.spines['top'].set_color('none')
    ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
    ax.yaxis.set_ticks_position('left')
    ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
    ax.spines['left'].set_position(('data', 0))

# Adicionando setas aos eixos
ax.annotate('', xy=(7, 0), xytext=(0, 0),

```

```
        arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))
ax.annotate('', xy=(0, 7), xytext=(0, 0),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))

# Adicionando arcos para representar os ângulos entre os
#vetores e as linhas tracejadas
# Ângulo no gráfico da esquerda (entre linha tracejada e vetor  $\Delta z_0$ )
arc1 = Arc(z1, 1, 1, angle=0, theta1=0, theta2=37, color='red', lw=1.5)
axs[0].add_patch(arc1)
axs[0].text(1.97, 2.72, r' $\alpha$ ', fontsize=12, color='red')

# Ângulo no gráfico da direita (entre linha tracejada e vetor  $\Delta w_0$ )
arc2 = Arc(z1, 1, 1, angle=0, theta1=0, theta2=80, color='red', lw=1.5)
axs[1].text(1.572, 2.7, r' $\beta$ ', fontsize=12, color='red')
axs[1].add_patch(arc2)

# Ocultando os números dos eixos
axs[0].set_xticks([])
axs[0].set_yticks([])
axs[1].set_xticks([])
axs[1].set_yticks([])

#retas tangentes das curvas
axs[0].annotate('', xy=(4.31, 4.46), xytext=(z1[0], z1[1]),
                arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5, color='black'))
axs[1].annotate('', xy=(1.78, 6.56), xytext=(z1[0], z1[1]),
                arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5, color='black'))

plt.tight_layout()
plt.show()
```

A.2.5 Código da Figura 4.3: Preservação dos ângulos.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Arc

# Definindo o novo ponto de origem z1
z1 = (1, 2.5)

# Definindo as funções do segundo grau ajustadas para começar no ponto z1
# com coeficientes diferentes
def f(x):
    return np.where(x > z1[0], 0.5 * (x - z1[0])**2 + z1[1], np.nan)

def g(x):
    return np.where(x > z1[0], 0.3 * (x - z1[0])**2 + z1[1], np.nan)

# Definindo as funções com concavidade invertida para o segundo gráfico
def f_inverted(x):
    return np.where(x > z1[0], -0.5 * (x - z1[0])**2 + z1[1], np.nan)

def g_inverted(x):
    return np.where(x > z1[0], -0.3 * (x - z1[0])**2 + z1[1], np.nan)

# Gerando valores para x
x = np.linspace(z1[0], 15, 400)

# Calculando os valores de y para as funções
y_f = f(x)
y_g = g(x)
y_f_inverted = f_inverted(x)
y_g_inverted = g_inverted(x)
```

```
# Aplicando a rotação de 60 graus no sentido anti-horário em torno de z1 para  
# ambas as funções vermelhas
```

```
theta = np.radians(60) # Ângulo de rotação em radianos
```

```
cos_theta = np.cos(theta)
```

```
sin_theta = np.sin(theta)
```

```
# Rotacionando as coordenadas de g(x) ao redor do ponto z1
```

```
x_g_rot = z1[0] + (cos_theta * (x - z1[0]) - sin_theta * (y_g - z1[1]))
```

```
y_g_rot = z1[1] + (sin_theta * (x - z1[0]) + cos_theta * (y_g - z1[1]))
```

```
# Rotacionando as coordenadas de g_inverted(x) ao redor do ponto z1
```

```
x_g_inverted_rot = z1[0] + (cos_theta * (x - z1[0]) - sin_theta * (y_g_inverted - z1[1]))
```

```
y_g_inverted_rot = z1[1] + (sin_theta * (x - z1[0]) + cos_theta * (y_g_inverted - z1[1]))
```

```
# Aplicando a rotação de 30 graus no sentido anti-horário em torno de z1
```

```
# para ambas as funções azuis
```

```
theta_blue = np.radians(-20) # Ângulo de rotação em radianos
```

```
cos_theta_blue = np.cos(theta_blue)
```

```
sin_theta_blue = np.sin(theta_blue)
```

```
# Rotacionando as coordenadas de f(x) ao redor do ponto z1
```

```
x_f_rot = z1[0] + (cos_theta_blue * (x - z1[0]) - sin_theta_blue * (y_f - z1[1]))
```

```
y_f_rot = z1[1] + (sin_theta_blue * (x - z1[0]) + cos_theta_blue * (y_f - z1[1]))
```

```
# Rotacionando as coordenadas de f_inverted(x) ao redor do ponto z1
```

```
x_f_inverted_rot = z1[0] + (cos_theta_blue * (x - z1[0]) - sin_theta_blue *  
    (y_f_inverted - z1[1]))
```

```
y_f_inverted_rot = z1[1] + (sin_theta_blue * (x - z1[0]) + cos_theta_blue *  
    (y_f_inverted - z1[1]))
```

```
# Criando a figura com dois subplots
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(8, 4)) # Dois gráficos lado a lado

# Primeiro subplot (original com rotação nas parábolas)
axs[0].plot(x_f_rot, y_f_rot, color='blue', linestyle='--')
axs[0].plot(x_g_rot, y_g_rot, color='red', linestyle='--')
axs[0].axhline(y=z1[1], color='green', linestyle='--', linewidth=1)
axs[0].scatter(*z1, color='black', zorder=5)

# Ajustes no primeiro gráfico
axs[0].set_xlim(0, 7)
axs[0].set_ylim(0, 6)
axs[0].grid(True, color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[0].set_title('Plano-z')

axs[0].text(6.7, -0.5, '$x$', fontsize=12, ha='center')
axs[0].text(-0.4, 5.7, '$y$', fontsize=12, ha='center')

axs[1].text(6.7, -0.5, '$u$', fontsize=12, ha='center')
axs[1].text(-0.4, 5.7, '$v$', fontsize=12, ha='center')

# Segundo subplot (concauidade invertida e rotação)
axs[1].plot(x_f_inverted_rot, y_f_inverted_rot, color='blue', linestyle='--')
axs[1].plot(x_g_inverted_rot, y_g_inverted_rot, color='red', linestyle='--')
axs[1].axhline(y=z1[1], color='green', linestyle='--', linewidth=1)
axs[1].scatter(*z1, color='black', zorder=5)

# Ajustes no segundo gráfico
axs[1].set_xlim(0, 7)
axs[1].set_ylim(0, 6)
axs[1].grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
```

```

axs[1].set_title('Plano-w')

# Anotações nos gráficos
axs[0].text(0.45, 2.2, '$z_0$', fontsize=12, ha='left')
axs[1].text(0.45, 2.2, '$w_0$', fontsize=12, ha='left')

axs[0].text(0.7, 5.5, '$C_1$', fontsize=12, ha='left')
axs[0].text(6, 5.74, '$C_2$', fontsize=12, ha='left')

axs[1].text(4.7, 4, '$S_1$', fontsize=12, ha='left')
axs[1].text(2.2, 1, '$S_2$', fontsize=12, ha='left')

# Vetor no gráfico da esquerda
axs[0].annotate('', xy=(2.617, 4.64), xytext=(z1[0], z1[1]),
                arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5, color='black'))
axs[0].annotate('', xy=(3.519, 1.58), xytext=(z1[0], z1[1]),
                arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5, color='black'))

# Vetor no gráfico da direita
axs[1].annotate('', xy=(2.617, 4.64), xytext=(z1[0], z1[1]),
                arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5, color='black'))
axs[1].annotate('', xy=(3.519, 1.58), xytext=(z1[0], z1[1]),
                arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5, color='black'))

# Adicionando uma seta entre os dois gráficos
fig.text(0.50, 0.45, '$\Longrightarrow$', ha='center', va='center', fontsize=20)
fig.text(0.50, 0.4, 'f(z)', ha='center', va='center', fontsize=15)

# Adicionando setas nos eixos
for ax in axs:
    ax.spines['right'].set_color('none')
    ax.spines['top'].set_color('none')
    ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')

```

```
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
ax.spines['left'].set_position(('data', 0))

# Adicionando setas aos eixos
ax.annotate('',xy=(7,0),xytext=(0,0),arrowprops=dict(arrowstyle="->",lw=1.5))
ax.annotate('',xy=(0,6),xytext=(0,0),arrowprops=dict(arrowstyle="->",lw=1.5))

# Ocultando os números dos eixos
axs[0].set_xticks([])
axs[0].set_yticks([])
axs[1].set_xticks([])
axs[1].set_yticks([])

# Adicionando arcos para representar os ângulos
arc1 = Arc(z1, 1, 1, angle=0, theta1=0, theta2=54, color='red', lw=1.5)
axs[0].add_patch(arc1)
axs[0].text(1.618, 2.8, r'\alpha_1$', fontsize=12, color='red')

# Adicionando o segundo arco para o outro vetor no gráfico 1
arc2 = Arc(z1, width=1.8, height=1.8, angle=0, theta1=-20, theta2=1,
           color='blue', lw=1.5)
axs[0].add_patch(arc2)
axs[0].text(2.134, 2.27, r'\alpha_2$', fontsize=12, color='blue')

arc3 = Arc(z1, 1, 1, angle=0, theta1=0, theta2=54, color='red', lw=1.5)
axs[1].add_patch(arc3)
axs[1].text(1.618, 2.8, r'\beta_1$', fontsize=12, color='red')

# Adicionando o segundo arco para o outro vetor no gráfico 1
arc4 = Arc(z1, width=1.8, height=1.8, angle=0, theta1=-20, theta2=1,
           color='blue', lw=1.5)
axs[1].add_patch(arc4)
```

```
axs[1].text(2.134, 2.27, r'\beta_2$', fontsize=12, color='blue')
```

```
plt.tight_layout()
```

```
plt.show()
```

A.2.6 Código da Figura 4.4: Proposição 4.1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Arc

o = (0,0)
# Gerando valores para x
x = np.linspace(o[0], 15, 400)

# Criando a figura com dois subplots
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(6, 3))

# Ajustes no primeiro gráfico
axs[0].set_xlim(-3, 3)
axs[0].set_ylim(-2, 3)
axs[0].grid(True, color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[0].set_title('Plano-z (a)')

# Ajustes no segundo gráfico
axs[1].set_xlim(-3, 3)
axs[1].set_ylim(-2, 3)
axs[1].grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[1].set_title('Plano-w (b)')

# Adicionando setas nos eixos
for ax in axs:
```

```
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
ax.spines['left'].set_position(('data', 0))

# Adicionando setas aos eixos
ax.annotate('', xy=(3, 0), xytext=(-3, 0),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))
ax.annotate('', xy=(0, 3), xytext=(0, -2),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))

# Ocultando os números dos eixos
axs[0].set_xticks([])
axs[0].set_yticks([])
axs[1].set_xticks([])
axs[1].set_yticks([])

# Ajustando posição dos rótulos dos eixos e setas
axs[0].text(2.8, -0.5, '$x$', fontsize=17, ha='center')
axs[0].text(-0.5, 2.8, '$y$', fontsize=17, ha='center')

axs[1].text(2.8, -0.5, '$u$', fontsize=17, ha='center')
axs[1].text(-0.5, 2.8, '$v$', fontsize=17, ha='center')

x_fill = np.linspace(0, 4, 100)
axs[0].fill_between(x_fill, 0, 4, color='gray', alpha=0.3)
axs[0].fill_between(-x_fill, 0, 4, color='gray', alpha=0.3)

# Adicionando o ponto z_0
axs[0].scatter(1, 1, color='black')
```

```
axs[0].text(1.05, 1, '$z_0$', fontsize=17, ha='left')

#Desenhando o círculo
circle = plt.Circle((0, 0), 1, color='gray', alpha=0.3)
axs[1].add_patch(circle)

# Adicionando o ponto f(z_0)
axs[1].scatter(0, 0, color='black')
axs[1].text(0.1, 0.1, '$f(z_0)$', fontsize=12, ha='left')
axs[1].text(1, 0, 1, fontsize=17, ha='left')

# Adicionando labels e título
axs[1].axhline(0, color='black', lw=1)
axs[1].axvline(0, color='black', lw=1)
axs[1].set_title('Plano w')

plt.tight_layout()
plt.show()
```

A.2.7 Código da Figura 4.5: Transformação $f(z) = z$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

o = (0,0)

# Gerando valores para x
x = np.linspace(-15, 15, 400)

# Criando a figura com dois subplots
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(6, 4)) # Dois gráficos lado a lado

# Ajustes no primeiro gráfico
axs[0].set_xlim(-0.5, 1)
axs[0].set_ylim(-0.5, 1)
```

```
axs[0].grid(True, color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[0].set_title('Plano-z (a)')
```

```
# Ajustes no segundo gráfico
```

```
axs[1].set_xlim(-0.5, 1)
axs[1].set_ylim(-0.5, 1)
axs[1].grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[1].set_title('Plano-w (b)')
```

```
# Adicionando setas nos eixos
```

```
for ax in axs:
    ax.spines['right'].set_color('none')
    ax.spines['top'].set_color('none')
    ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
    ax.yaxis.set_ticks_position('left')
    ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
    ax.spines['left'].set_position(('data', 0))
```

```
# Adicionando setas aos eixos
```

```
ax.annotate('', xy=(1, 0), xytext=(-0.5, 0),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))
ax.annotate('', xy=(0, 1), xytext=(0, -0.5),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))
```

```
# Ocultando os números dos eixos
```

```
axs[0].set_xticks([])
axs[0].set_yticks([])
axs[1].set_xticks([])
axs[1].set_yticks([])
```

```
# Ajustando posição dos rótulos dos eixos e setas
```

```
axs[0].text(0.8, -0.1, '$x$', fontsize=12, ha='center')
axs[0].text(-0.1, 0.8, '$y$', fontsize=12, ha='center')
```

```
axs[1].text(0.8, -0.1, '$u$', fontsize=12, ha='center')
axs[1].text(-0.1, 0.8, '$v$', fontsize=12, ha='center')

def f(x):
    return x

y= f(x)
axs[0].plot(x, y, color='red')
axs[1].plot(x, y, color='red')

axs[0].scatter(0.177, 0.177, color='black', zorder=5)
axs[0].text(0.35, 0.2, '$z_0$', fontsize=18, ha='center')

axs[1].scatter(0.55, 0.55, color='black', zorder=5)
axs[1].text(0.7, 0.58, '$w_0$', fontsize=18, ha='center')

z0 = (0.177, 0.177)
w0 = (0.55, 0.55)

# Adicionando a reta horizontal nos dois gráficos
axs[0].hlines(z0[1], xmin=-0.5, xmax=0.8, colors='blue', linestyle='--')
axs[1].hlines(w0[1], xmin=-0.5, xmax=0.8, colors='blue', linestyle='--')

fig.text(0.50, 0.45, '$\Longrightarrow$', ha='center', va='center', fontsize=20)
fig.text(0.50, 0.4, 'f(z)', ha='center', va='center', fontsize=20)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

A.2.8 Código da Figura 4.6: Transformação Exponencial.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Arc

o = (0,0)
# Gerando valores para x
x = np.linspace(o[0], 15, 400)

# Criando a figura com dois subplots
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(10, 5))

# Ajustes no primeiro gráfico
axs[0].set_xlim(-2, 3)
axs[0].set_ylim(-2, 3)
axs[0].grid(True, color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[0].set_title('Plano-z (a)')

# Ajustes no segundo gráfico
axs[1].set_xlim(-2, 3)
axs[1].set_ylim(-2, 3)
axs[1].grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[1].set_title('Plano-w (b)')

# Anotações nos gráficos
axs[0].text(1.07, 2.43, '$x=c_1$', fontsize=17, ha='left')
axs[0].text(2.5, 1.8, '$y=c_2$', fontsize=17, ha='left')

axs[0].text(-0.32, -0.5, '0', fontsize=17, ha='left')

axs[0].axhline(y=1.7, color='blue', linestyle='--', linewidth=1.5)

# Desenhando a linha vertical em x = 2
```

```
axs[0].axvline(x=1, color='red', linestyle='-', linewidth=1.5)
```

```
# Adicionando setas no meio das retas
```

```
axs[0].arrow(0, 1.701, 0.5, 0, head_width=0.1,  
            head_length=0.1, fc='blue', ec='blue')  
axs[0].arrow(1.001, 0, 0, 1.9, head_width=0.1,  
            head_length=0.1, fc='red', ec='red')
```

```
# Adicionando setas nos eixos
```

```
for ax in axs:  
    ax.spines['right'].set_color('none')  
    ax.spines['top'].set_color('none')  
    ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')  
    ax.yaxis.set_ticks_position('left')  
    ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))  
    ax.spines['left'].set_position(('data', 0))
```

```
# Adicionando setas aos eixos
```

```
ax.annotate('', xy=(3, 0), xytext=(-2, 0),  
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))  
ax.annotate('', xy=(0, 3), xytext=(0, -2),  
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))
```

```
# Ocultando os números dos eixos
```

```
axs[0].set_xticks([])  
axs[0].set_yticks([])  
axs[1].set_xticks([])  
axs[1].set_yticks([])
```

```
# Ajustando posição dos rótulos dos eixos e setas
```

```
axs[0].text(2.7, -0.5, '$x$', fontsize=17, ha='center')  
axs[0].text(-0.5, 2.7, '$y$', fontsize=17, ha='center')
```

```

axs[1].text(2.7, -0.5, '$u$', fontsize=17, ha='center')
axs[1].text(-0.5, 2.7, '$v$', fontsize=17, ha='center')

# Adicionando o segundo arco para o outro vetor no gráfico 1
arc1 = Arc(o, width=2.5, height=2.5, angle=0, theta1=0,
theta2=360, color='red', lw=1.5)
axs[1].add_patch(arc1)
axs[1].text(1.25, 0.25, r'$e^{\{c_1\}}$', fontsize=17, color='black')

axs[1].scatter(1.24, 0, color='black', zorder=5)
axs[1].plot([0, 2.617], [0, 5.64], color='blue', linestyle='--',
            linewidth=1.5) # Linha pontilhada para o vetor
axs[1].annotate('', xy=(1.11, 2.37), xytext=(0.77, 1.64),
                arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5, color='blue'))

arc2 = Arc(o, width=1, height=1, angle=0, theta1=0,
theta2=65, color='black', lw=1.2)
axs[1].add_patch(arc2)
axs[1].text(0.51, 0.37, '$c_2$', fontsize=17, color='black')

plt.tight_layout()
plt.show()

```

A.2.9 Código da Figura 4.7: Transformação Logarítmica.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Arc

o = (0,0)
# Gerando valores para x
x = np.linspace(o[0], 15, 400)

```

```
# Criando a figura com dois subplots
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(6, 3)) # Dois gráficos lado a lado

# Ajustes no primeiro gráfico
axs[0].set_xlim(-1, 1)
axs[0].set_ylim(-1, 1)
axs[0].grid(True, color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[0].set_title('Plano-z (a)')

# Ajustes no segundo gráfico
axs[1].set_xlim(-1, 1)
axs[1].set_ylim(-1, 1)
axs[1].grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[1].set_title('Plano-w (b)')

# Adicionando setas nos eixos
for ax in axs:
    ax.spines['right'].set_color('none')
    ax.spines['top'].set_color('none')
    ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
    ax.yaxis.set_ticks_position('left')
    ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
    ax.spines['left'].set_position(('data', 0))

# Adicionando setas aos eixos
ax.annotate('', xy=(1, 0), xytext=(-1, 0),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))
ax.annotate('', xy=(0, 1), xytext=(0, -1),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))

# Ocultando os números dos eixos
axs[0].set_xticks([])
```

```
axs[0].set_yticks([])
axs[1].set_xticks([])
axs[1].set_yticks([])

# Ajustando posição dos rótulos dos eixos e setas
axs[0].text(0.8, -0.1, '$x$', fontsize=12, ha='center')
axs[0].text(-0.1, 0.8, '$y$', fontsize=12, ha='center')

axs[1].text(0.8, -0.1, '$u$', fontsize=12, ha='center')
axs[1].text(-0.1, 0.8, '$v$', fontsize=12, ha='center')

# Adicionando o segundo arco para o outro vetor no gráfico 1
arc1 = Arc(o, width=1, height=1, angle=0, theta1=0,
           theta2=360, color='red', lw=1.5)
axs[0].add_patch(arc1)
arc2 = Arc(o, width=0.8, height=0.8, angle=0, theta1=0,
           theta2=360, color='red', lw=1.5)
axs[0].add_patch(arc2)
arc3 = Arc(o, width=0.6, height=0.6, angle=0, theta1=0,
           theta2=360, color='red', lw=1.5)
axs[0].add_patch(arc3)
arc4 = Arc(o, width=0.4, height=0.4, angle=0, theta1=0,
           theta2=360, color='red', lw=1.5)
axs[0].add_patch(arc4)
arc4 = Arc(o, width=0.2, height=0.2, angle=0, theta1=0,
           theta2=360, color='red', lw=1.5)
axs[0].add_patch(arc4)

axs[0].plot([0.045, 2.10], [-0.033, -0.815],
            color='black', linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[0].plot([-0.045, -2.10], [0.033, 0.815],
            color='black', linestyle='-', linewidth=1.5)
```

```
axs[0].plot([0.022, 0.479], [-0.046, -0.675],
            color='black', linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[0].plot([-0.022, -0.479], [0.046, 0.675],
            color='black', linestyle='-', linewidth=1.5)

axs[0].plot([0.045, 2.10], [0.033, 0.815],
            color='black', linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[0].plot([-0.045, -2.10], [-0.033, -0.815],
            color='black', linestyle='-', linewidth=1.5)

axs[0].plot([0.022, 0.479], [0.046, 0.675],
            color='black', linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[0].plot([-0.022, -0.479], [-0.046, -0.675],
            color='black', linestyle='-', linewidth=1.5)

axs[1].axhline(y=0.7, color='red', linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].axhline(y=0.6, color='red', linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].axhline(y=0.5, color='red', linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].axhline(y=0.4, color='red', linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].axhline(y=0.3, color='red', linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].axhline(y=0.2, color='red', linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].axhline(y=0.1, color='red', linestyle='-', linewidth=1.5)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

A.2.10 Código da Figura 4.8: θ fixado e $r > 1$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Arc

# Ponto de origem
```

```
o = (0, 0)

# Gerando valores para x
x = np.linspace(-1, 1, 400)

# Criando a figura com dois subplots
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(8, 4)) # Ajustado o tamanho da figura

# Ajustes no primeiro gráfico
axs[0].set_xlim(-1, 1)
axs[0].set_ylim(-1, 1)
axs[0].grid(True, color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[0].set_title('Plano-z (a)')

axs[0].plot([0.045, 2.10], [0.033, 0.815],
            color='black', linestyle='-', linewidth=1.5)

# Ajustes no segundo gráfico
axs[1].set_xlim(-1, 1)
axs[1].set_ylim(-1, 1)
axs[1].grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[1].set_title('Plano-w (b)')

axs[1].plot([0, 0.8], [0.7, 0.7], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0, 0.8], [0.6, 0.6], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0, 0.8], [0.5, 0.5], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0, 0.8], [0.4, 0.4], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
```

```
axs[1].plot([0, 0.8], [0.3, 0.3], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0, 0.8], [0.2, 0.2], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0, 0.8], [0.1, 0.1], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0, 0.8], [-0.1, -0.1], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0, 0.8], [-0.2, -0.2], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0, 0.8], [-0.3, -0.3], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0, 0.8], [-0.4, -0.4], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0, 0.8], [-0.5, -0.5], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0, 0.8], [-0.6, -0.6], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0, 0.8], [-0.7, -0.7], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)

axs[0].text(0.9, 0.46, r'$\theta$(fixado)', fontsize=17, ha='left')
axs[1].text(0.6, 0.7, '$v = 2\pi$', fontsize=17, ha='left')

# Adicionando setas aos eixos em ambos os gráficos
for ax in axs:
    ax.spines['right'].set_color('none')
    ax.spines['top'].set_color('none')
    ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
    ax.yaxis.set_ticks_position('left')
    ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
    ax.spines['left'].set_position(('data', 0))
```

```

    # Adicionando setas aos eixos
    ax.annotate('', xy=(1, 0), xytext=(-1, 0),
                arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))
    ax.annotate('', xy=(0, 1), xytext=(0, -1),
                arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))

# Ocultando os números dos eixos
axs[0].set_xticks([])
axs[0].set_yticks([])
axs[1].set_xticks([])
axs[1].set_yticks([])

# Ajustando posição dos rótulos dos eixos e setas
axs[0].text(1, -0.1, '$x$', fontsize=17, ha='center')
axs[0].text(-0.1, 0.9, '$y$', fontsize=17, ha='center')

axs[1].text(1, -0.1, '$u$', fontsize=17, ha='center')
axs[1].text(-0.1, 0.9, '$v$', fontsize=17, ha='center')

# Ajustando layout
plt.tight_layout()
plt.show()

```

A.2.11 Código da Figura 4.9: θ fixado e $0 < r < 1$.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Criando a figura com um único gráfico
fig, ax = plt.subplots(figsize=(4, 4))

# Ajustes no gráfico

```

```
ax.set_xlim(-1, 1)
ax.set_ylim(-1, 1)
ax.grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
ax.set_title('Plano-w', fontsize = 15)

# Linhas no gráfico
ax.plot([-0.8, 0], [0.7, 0.7], color='black',
        linestyle='-', linewidth=1.5)
ax.plot([-0.8, 0], [0.6, 0.6], color='black',
        linestyle='-', linewidth=1.5)
ax.plot([-0.8, 0], [0.5, 0.5], color='black',
        linestyle='-', linewidth=1.5)
ax.plot([-0.8, 0], [0.4, 0.4], color='black',
        linestyle='-', linewidth=1.5)
ax.plot([-0.8, 0], [0.3, 0.3], color='black',
        linestyle='-', linewidth=1.5)
ax.plot([-0.8, 0], [0.2, 0.2], color='black',
        linestyle='-', linewidth=1.5)
ax.plot([-0.8, 0], [0.1, 0.1], color='black',
        linestyle='-', linewidth=1.5)
ax.plot([-0.8, 0], [-0.1, -0.1], color='black',
        linestyle='-', linewidth=1.5)
ax.plot([-0.8, 0], [-0.2, -0.2], color='black',
        linestyle='-', linewidth=1.5)
ax.plot([-0.8, 0], [-0.3, -0.3], color='black',
        linestyle='-', linewidth=1.5)
ax.plot([-0.8, 0], [-0.4, -0.4], color='black',
        linestyle='-', linewidth=1.5)
ax.plot([-0.8, 0], [-0.5, -0.5], color='black',
        linestyle='-', linewidth=1.5)
ax.plot([-0.8, 0], [-0.6, -0.6], color='black',
        linestyle='-', linewidth=1.5)
ax.plot([-0.8, 0], [-0.7, -0.7], color='black',
```

```
linestyle='-', linewidth=1.5)

# Texto explicativo
ax.text(-0.8, 0.76, '$v = 2\pi$', fontsize=17, ha='left')

# Adicionando setas aos eixos
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
ax.spines['left'].set_position(('data', 0))

# Adicionando setas aos eixos
ax.annotate('', xy=(1, 0), xytext=(-1, 0),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))
ax.annotate('', xy=(0, 1), xytext=(0, -1),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))

# Ocultando os números dos eixos
ax.set_xticks([])
ax.set_yticks([])

# Rótulos dos eixos
ax.text(1, -0.1, '$u$', fontsize=17, ha='center')
ax.text(-0.1, 0.9, '$v$', fontsize=17, ha='center')

# Ajustando layout
plt.tight_layout()
plt.show()
```

A.2.12 Código da Figura 4.10: r fixado e $\theta > 0$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Arc

# Ponto de origem
o = (0, 0)

# Gerando valores para x
x = np.linspace(-1, 1, 400)

# Criando a figura com dois subplots
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(8, 4))

# Ajustes no primeiro gráfico
axs[0].set_xlim(-1, 1)
axs[0].set_ylim(-1, 1)
axs[0].grid(True, color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[0].set_title('Plano-z (a)')

arc1 = Arc(o, width=1, height=1, angle=0, theta1=0, theta2=360,
           color='black', lw=1.5)
axs[0].add_patch(arc1)

axs[0].annotate('', xy=(0.293, 0.409), xytext=(0.319, 0.386),
                arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=2, color='black'))

# Ajustes no segundo gráfico
axs[1].set_xlim(-1, 1)
axs[1].set_ylim(-1, 1)
axs[1].grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
```

```
axs[1].set_title('Plano-w (b)')

# Alterar as linhas para serem verticais
axs[1].plot([0.7, 0.7], [0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0.6, 0.6], [0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0.5, 0.5], [0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0.4, 0.4], [0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0.3, 0.3], [0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0.2, 0.2], [0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0.1, 0.1], [0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([-0.1, -0.1], [0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([-0.2, -0.2], [0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([-0.3, -0.3], [0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([-0.4, -0.4], [0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([-0.5, -0.5], [0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([-0.6, -0.6], [0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([-0.7, -0.7], [0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
```

```
axs[1].plot([-0.8, 0.8], [0.8, 0.8], color='green',
            linestyle='--', linewidth=1.5)

axs[1].text(0.9, 0.8, '$v = -2\pi$',
            fontsize=19, ha='left')

# Adicionando setas aos eixos em ambos os gráficos
for ax in axs:
    ax.spines['right'].set_color('none')
    ax.spines['top'].set_color('none')
    ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
    ax.yaxis.set_ticks_position('left')
    ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
    ax.spines['left'].set_position(('data', 0))

    # Adicionando setas aos eixos
    ax.annotate('', xy=(1, 0), xytext=(-1, 0),
                arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))
    ax.annotate('', xy=(0, 1), xytext=(0, -1),
                arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))

# Ocultando os números dos eixos
axs[0].set_xticks([])
axs[0].set_yticks([])
axs[1].set_xticks([])
axs[1].set_yticks([])

# Ajustando posição dos rótulos dos eixos e setas
axs[0].text(1, -0.1, '$x$', fontsize=16, ha='center')
axs[0].text(-0.1, 0.9, '$y$', fontsize=16, ha='center')

axs[1].text(1, -0.1, '$u$', fontsize=16, ha='center')
axs[1].text(-0.1, 0.9, '$v$', fontsize=16, ha='center')
```

```
# Ajustando layout
plt.tight_layout()
plt.show()
```

A.2.13 Código da Figura 4.11: r fixado e $\theta < 0$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Arc

# Ponto de origem
o = (0, 0)

# Gerando valores para x
x = np.linspace(-1, 1, 400)

# Criando a figura com dois subplots
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(8, 4))

# Ajustes no primeiro gráfico
axs[0].set_xlim(-1, 1)
axs[0].set_ylim(-1, 1)
axs[0].grid(True, color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
axs[0].set_title('Plano-z (a)')

arc1 = Arc(o, width=1, height=1, angle=0, theta1=0,
           theta2=360, color='black', lw=1.5)

axs[0].add_patch(arc1)
```

```
axs[0].annotate('', xy=(0.293, 0.409), xytext=(0.319, 0.386),  
                arrowprops=dict(arrowstyle="<-", lw=2.5, color='black'))
```

```
# Ajustes no segundo gráfico
```

```
axs[1].set_xlim(-1, 1)  
axs[1].set_ylim(-1, 1)  
axs[1].grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)  
axs[1].set_title('Plano-w (b)')
```

```
# Alterar as linhas para serem verticais
```

```
axs[1].plot([0.7, 0.7], [-0.8, 0], color='black',  
            linestyle='-', linewidth=1.5)  
axs[1].plot([0.6, 0.6], [-0.8, 0], color='black',  
            linestyle='-', linewidth=1.5)  
axs[1].plot([0.5, 0.5], [-0.8, 0], color='black',  
            linestyle='-', linewidth=1.5)  
axs[1].plot([0.4, 0.4], [-0.8, 0], color='black',  
            linestyle='-', linewidth=1.5)  
axs[1].plot([0.3, 0.3], [-0.8, 0], color='black',  
            linestyle='-', linewidth=1.5)  
axs[1].plot([0.2, 0.2], [-0.8, 0], color='black',  
            linestyle='-', linewidth=1.5)  
axs[1].plot([0.1, 0.1], [-0.8, 0], color='black',  
            linestyle='-', linewidth=1.5)  
axs[1].plot([-0.1, -0.1], [-0.8, 0], color='black',  
            linestyle='-', linewidth=1.5)  
axs[1].plot([-0.2, -0.2], [-0.8, 0], color='black',  
            linestyle='-', linewidth=1.5)  
axs[1].plot([-0.3, -0.3], [-0.8, 0], color='black',  
            linestyle='-', linewidth=1.5)  
axs[1].plot([-0.4, -0.4], [-0.8, 0], color='black',  
            linestyle='-', linewidth=1.5)  
axs[1].plot([-0.5, -0.5], [-0.8, 0], color='black',
```

```
        linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([-0.6, -0.6], [-0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([-0.7, -0.7], [-0.8, 0], color='black',
            linestyle='-', linewidth=1.5)
axs[1].plot([0.8, -0.8], [-0.8, -0.8], color='green',
            linestyle='--', linewidth=1.5)
axs[1].text(0.9, -0.8, '$v = -2\pi$', fontsize=19, ha='left')
```

```
# Adicionando setas aos eixos em ambos os gráficos
```

```
for ax in axs:
```

```
    ax.spines['right'].set_color('none')
    ax.spines['top'].set_color('none')
    ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
    ax.yaxis.set_ticks_position('left')
    ax.spines['bottom'].set_position(('data', 0))
    ax.spines['left'].set_position(('data', 0))
```

```
# Adicionando setas aos eixos
```

```
ax.annotate('', xy=(1, 0), xytext=(-1, 0),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))
ax.annotate('', xy=(0, 1), xytext=(0, -1),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", lw=1.5))
```

```
# Ocultando os números dos eixos
```

```
axs[0].set_xticks([])
axs[0].set_yticks([])
axs[1].set_xticks([])
axs[1].set_yticks([])
```

```
# Ajustando posição dos rótulos dos eixos e setas
```

```
axs[0].text(1, -0.1, '$x$', fontsize=16, ha='center')
axs[0].text(-0.1, 0.9, '$y$', fontsize=16, ha='center')
```

```
axs[1].text(1, -0.1, '$u$', fontsize=16, ha='center')
axs[1].text(-0.1, 0.9, '$v$', fontsize=16, ha='center')

# Ajustando layout
plt.tight_layout()
plt.show()
```