



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Ariany Pereira Lima

Rotação de Vetores no Espaço via Quatérnios

São Luís - MA
2022

Ariany Pereira Lima 

Rotação de Vetores no Espaço via Quatérnios

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciada em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Luís Fernando Coelho Amaral

São Luís - MA

2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Pereira Lima, Ariany.
Rotação de vetores no espaço via quatérnios / Ariany
Pereira Lima. - 2022.
44 f.

Orientador(a): Luis Fernando Coelho Amaral.
Monografia (Graduação) - Curso de Matemática,
Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2022.

1. Álgebra. 2. Números Complexos. 3. Quatérnios. 4.
Rotação. I. Coelho Amaral, Luis Fernando. II. Título.

Ariany Pereira Lima

Rotação de Vetores no Espaço via Quatérnios

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciada em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 20/12/2022

Prof. Dr. Luís Fernando Coelho Amaral
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof. Dr. José Santana Campos Costa
DEMAT/UFMA
Primeiro Examinador

Prof. Me. Ítalo Augusto Oliveira de Albuquerque
DEMAT/UFMA
Segundo Examinador

Dedico à minha família.

Agradecimentos

A Deus por ter permitido que mais esta realização da minha vida pudesse ser concluída.

Ao Prof. Dr. Luis Fernando Coelho Amaral pela paciência, apoio, dedicação e seu conhecimento para que houvesse o desenvolvimento do mesmo; além do auxílio quando necessário.

Ao meu companheiro Marcelo Augusto pela compreensão durante esse tempo, por algumas ausências, pelo apoio e incentivo para que eu chegasse até aqui.

A minha mãe, meu pai e minhas irmãs que sempre confiaram na minha capacidade e se sentem orgulhosos das minhas conquistas.

Aos meus colegas de graduação que estiveram comigo durante horas de estudo, em especial a Lázaro dos Reis e Aline Dourado, e compartilharam conhecimento e contribuíram para o meu crescimento intelectual.

A Isabelle Machado, Jhennyfer Belfort, Josivan Teixeira e Enderson Santos que me acolheram nesta fase.

A todos os professores do Departamento de Matemática com os quais tive o prazer em conviver e aprender durante o período em que estive na UFMA , visto que cada um contribuiu de alguma forma para o meu crescimento intelectual e minha prática docente.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.”

Paulo Freire (1921 – 1997)

Resumo

Neste trabalho, produzido através de uma revisão bibliográfica, pretendemos descrever o processo de construção da Álgebra dos Quatérnios e as rotações de vetores no plano, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ através dessa, uma extensão do conjunto $\mathbb{C}$. Além da interpretação da multiplicação desses objetos via rotações no espaço. Para isto, vimos a necessidade de iniciar com conceitos que formam a base da Álgebra, listando axiomas para o sistema de Números Complexos. Vamos mostrar que o estudo dos Números Complexos e dos Quatérnios foi de grande relevância para o desenvolvimento da Matemática ao longo de vários séculos, destaca-se a sua utilização em computação gráfica, a interpolação de pontos no espaço, fotogrametria e medicina.

Palavras-chave: Rotação, Números Complexos, Quatérnios, Álgebra.

Abstract

In this work, produced through a bibliographical review, we intend to describe the construction process of the Algebra of Quaternions and rotations of vectors in the plane, $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$ through this one, an extension of the set $\mathbb{C}$. In addition to the interpretation of the multiplication of these objects via rotations in space. For this, we saw the need to start with concepts that form the basis of algebra, listing axioms for the complex number system. We will show that the study of Complex Numbers and Quaternions was of great relevance to the development of mathematics over several centuries, its use stands out in computer graphics, the interpolation of points in space, photogrammetry and medicine.

Keywords: Rotation, Complex Numbers, Quaternions, Algebra.

Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Dizeres entalhados por Hamilton.	10
Figura 2.1 – Representação de $z = a + bi$ no plano Argand-Gauss	14
Figura 3.1 – Produto de z por i	16
Figura 3.2 – Representação geométrica da rotação do ponto P	20
Figura 5.1 – Representação do vetor $\overrightarrow{OP}$ em $\mathbb{R}^3$	27
Figura 5.2 – Coordenadas da projeção de P após rotação do referencial	28
Figura 5.3 – Representação geométrica da rotação do vetor $\vec{v}$	31
Figura 5.4 – Representação geométrica da rotação por um quatérnio	36
Figura 5.5 – Identificação do cubo	37
Figura 5.6 – Rotação com Quatérnio	37

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	OS NÚMEROS COMPLEXOS	12
2.1	Representação gráfica e forma trigonométrica	13
3	ROTAÇÕES NO PLANO $\mathbb{R}^2$	16
4	OS QUATÉRNIOS DE HAMILTON	21
4.1	Caracterização dos Quatérnios	21
4.2	Quatérnios representados por matrizes	25
4.3	Quatérnios nas formas trigonométrica e polar	26
5	ROTAÇÕES NO ESPAÇO $\mathbb{R}^3$	27
5.1	Rotações por matrizes	27
5.2	Rotação por quatérnios	31
5.3	Identidade de Grassmman	38
6	ROTAÇÕES NO ESPAÇO $\mathbb{R}^4$	40
6.1	Uso dos Quatérnios	42
7	CONCLUSÃO	43
	REFERÊNCIAS	44

1 Introdução

Segundo [Silva, Pereira e Saraiva \(2012, p.16\)](#) “Uma das motivações de Hamilton para procurar números complexos tridimensionais, era encontrar uma descrição de rotações no espaço, análoga ao caso complexo, onde a multiplicação corresponde a uma rotação e a uma mudança de escala”.

A Álgebra de Quatérnios teve origem nos números complexos, quando William Rowan Hamilton (1805-1865) apresentou o primeiro conceito dos complexos como pares ordenados de reais, interpretando-os como pontos xy . Decorrente disto, tentou generalizar para o espaço tridimensional fundamentando-se nos números complexos, $a + bi$, para ternas ordenadas,

$$a + bi + cj.$$

Hamilton assumiu naturalmente que

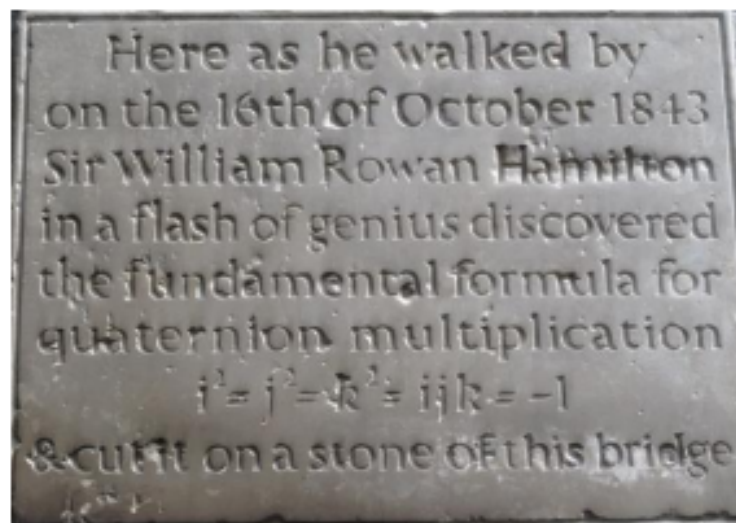
$$i^2 = j^2 = -1$$

mas a dificuldade estava em determinar qual deveria ser o valor para os produtos ij e ji . Após tentativas de se obter essa regra, Hamilton teve a ideia de usar quatro números,

$$a + bi + cj + dk$$

que ele denominou quatérnio, possuindo todas as propriedades dos números reais, salvo a comutatividade da multiplicação.

Figura 1.1 – Dizeres entalhados por Hamilton.



Fonte: UFABC

Com isso, ele descobriu os quatérnios, que é uma álgebra de dimensão quatro sobre o corpo dos números reais e que possui todas as propriedades de um corpo, exceto a comutatividade da multiplicação. Tornando-se a primeira álgebra não-comutativa da história.

Assim como Lobachevsky criara uma nova geometria consistente em si mesma, abandonando o postulado das paralelas, Hamilton criou uma nova álgebra, também consistente em si, abandonando o postulado da comutatividade para a multiplicação. [...] A descoberta chave fora súbita, mas o descobridor vinha trabalhando para ela havia uns quinze anos. Hamilton, muito naturalmente, sempre considerou a descoberta dos quatérnios como seu maior sucesso; em retrospecto é claro que não era tanto esse particular tipo de álgebra que era significativo, mas antes a descoberta da tremenda liberdade que tem a matemática de construir álgebras que não precisam satisfazer às restrições impostas pelas ditas leis fundamentais (BOYER, 1974).

Neste trabalho pretende-se descrever e analisar os trabalhos de Hamilton quanto aos quatérnios e que da mesma forma que a multiplicação complexa representa rotações bidimensionais, existe uma estrutura de quatro dimensões que também com uma multiplicação, representa rotações tridimensionais. Para isso, no Capítulo 2 tem-se como objetivo introduzir os Números Complexos na qual estão interligados ao alvo da pesquisa. No Capítulo 3, temos a rotação no plano $\mathbb{R}^2$.

No Capítulo 4, aprofundando a Matemática Quatérnionica. Bem como notação, propriedades (adição, subtração, multiplicação e multiplicação por um escalar). Definido o sistema dos quatérnios, trabalharemos com a sua álgebra e propriedades.

No Capítulo 5 e 6: inicia-se a Rotação de Vetores no Espaço Via Quatérnios e suas características. Sabendo que os quatérnios fornecem um sistema de representação adequado para operar sobre rotações, em que Hamilton buscou descrever rotações no espaço com os números complexos.

Esta pesquisa é de caráter exploratório. Ela visa uma maior proximidade com o tema, que é construído com base em dados bibliográficos recolhidos a partir de um livro (LIMA, 2013) e outros trabalhos.

2 Os Números Complexos

Os números que se apresentam na forma algébrica

$$z = a + bi \quad (2.1)$$

são chamados de Números Complexos, onde a é sua parte real designada por $\Re(z)$, e b , sua parte imaginária, $\Im(z)$ e, i é a unidade imaginária, com $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a = 0$ temos o número complexo $0 + bi$ ou simplesmente bi , denominado imaginário puro; se $b = 0$ temos $a + 0i$ ou apenas o número real a . Sendo assim, o conjunto dos números reais passa a ser um subconjunto do conjunto dos números complexos, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Dados os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos as seguintes definições:

1. Igualdade:

$$z_1 = z_2 \iff a = c \quad \text{e} \quad b = d$$

2. Adição:

$$z_1 + z_2 \implies (a + c) + (b + d)i$$

3. Multiplicação:

$$z_1 \cdot z_2 \implies (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

aplica-se a propriedade distributiva e

$$i^2 = -1;$$

4. Oposto :

$$z_1 = a + bi \implies -z_1 = -(a + bi)$$

5. Subtração

$$z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1) = (c + di) + (-a - bi) = (c - a) + (d - b)i$$

6. Módulo

$$z_1 = a + bi \implies |z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Segue que

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

7. Conjugado:

$$z_1 = a + bi \implies \bar{z}_1 = a - bi.$$

Segue que

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = |z_1|^2 = a^2 + b^2.$$

O complexo conjugado permite calcular o quociente de dois números complexos z_1 e z_2 .

8. Divisão:

$$z \cdot z_2 = z_1 \implies z = \frac{z_1}{z_2},$$

com $z_2 \neq 0$ multiplicando numerador e denominador pelo conjugado do denominador

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}.$$

As operações de Adição e Multiplicação em $\mathbb{C}$ possuem as propriedades:

- **Comutativa:** para todos z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$,

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ e } z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

- **Associativa:** para todos z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$,

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ e } (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

- **Distributiva:** para todos z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$,

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

- **Elemento neutro:** para todos z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$,

$$\text{com } z_2 = 0 + 0i \text{ e } z_3 = 1 + 0i,$$

na Adição

$$z_1 + z_2 = z_1$$

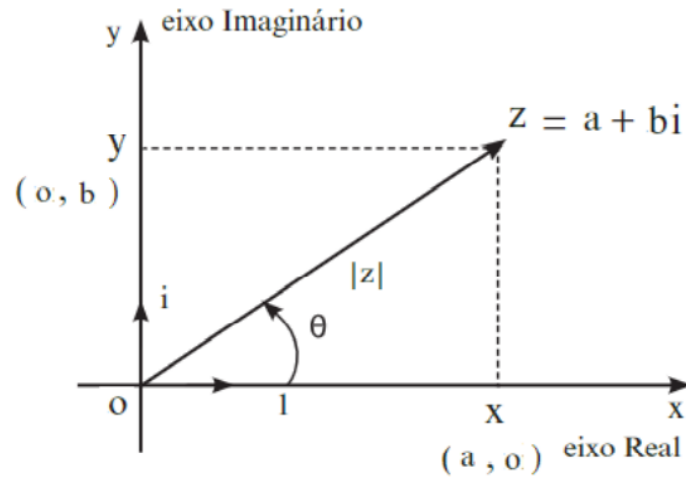
na Multiplicação

$$z_1 \cdot z_3 = z_1.$$

2.1 Representação gráfica e forma trigonométrica

Os números complexos foram representados graficamente em 1798 por Wessel (1745-1818) e em 1806 por Argand (1768-1822). Trinta anos mais tarde, Gauss (1777-1855), também passa a representar um número complexo como um par ordenado em um plano cartesiano, com a parte real no eixo horizontal e a imaginária no eixo vertical (BOYER, 1974). A representação de um número complexo $z = a + bi$ por um ponto $Z = (a, b)$ possibilitou que os matemáticos aceitassem com maior naturalidade os números complexos.

Cada ponto no plano identifica um número complexo de coordenadas (a, b) e cada número complexo pode ser representado por um vetor $\mathbf{Oz}$ onde $|z|$ é a distância do ponto Z a origem.

Figura 2.1 – Representação de $z = a + bi$ no plano Argand-Gauss

Fonte: a autora

A representação gráfica permitiu escrever o número complexo na forma trigonométrica. Na Figura 2.1 o triângulo OZX é retângulo em X , o vetor $\vec{Oz}$ é a hipotenusa desse triângulo e mede $|z|$, os segmentos OX medindo $|X| = a$ e $XZ = OY$ medindo $|Y| = b$ são os catetos e, θ é o argumento do número complexo z , definido somente quando $z \neq 0$. Usando as relações métricas temos:

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \implies a = |z| \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|} \implies b = |z| \sin \theta$$

esta é a forma trigonométrica do número complexo. Quando fazemos $r = |z|$ e o argumento θ variando entre $0 \leq \theta \leq 2\pi$ temos a forma Polar. A multiplicação e a divisão de dois números complexos na forma polar segue as definições (3.) e (8.) respectivamente. Assim, dados dois números complexos na forma polar

$$z_1 = r_1(\cos \theta + i \sin \theta)$$

e

$$z_2 = r_2(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

temos

$$\bullet z_1 \cdot z_2$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \alpha + i \sin \alpha)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [(\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) + i(\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha)]$$

resultado da adição de arcos trigonométricos, logo

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)]$$

▪ $\frac{z_1}{z_2}$ com $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \theta + i \sin \theta)}{r_2(\cos \alpha + i \sin \alpha)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \alpha - i \sin \alpha)}{r_2(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha - i \sin \alpha)}$$

Multiplicando e dividindo pelo conjugado de z_2 temos que o produto do denominador resulta em $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, então

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [(\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) + i(\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha)]$$

resultando em

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta - \alpha) + i \sin(\theta - \alpha)] \quad (\text{LIMA, 2013}).$$

3 Rotações no Plano $\mathbb{R}^2$

Algebricamente, o plano complexo $\mathbb{C}$ difere do plano euclidiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por causa da multiplicação dos números complexos, no plano euclidiano não temos tal operação com os pares ordenados (x, y) . Sendo assim, geometricamente podemos considerar os planos $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ como espaços isomorfos.

Considerando uma região do plano complexo, cada ponto dessa região identifica um número complexo $z = x + yi$ e será objeto de uma transformação resultante da multiplicação por $z' = 0 + i$ ou simplesmente i . Ao efetuarmos o produto de z por z' , obtemos:

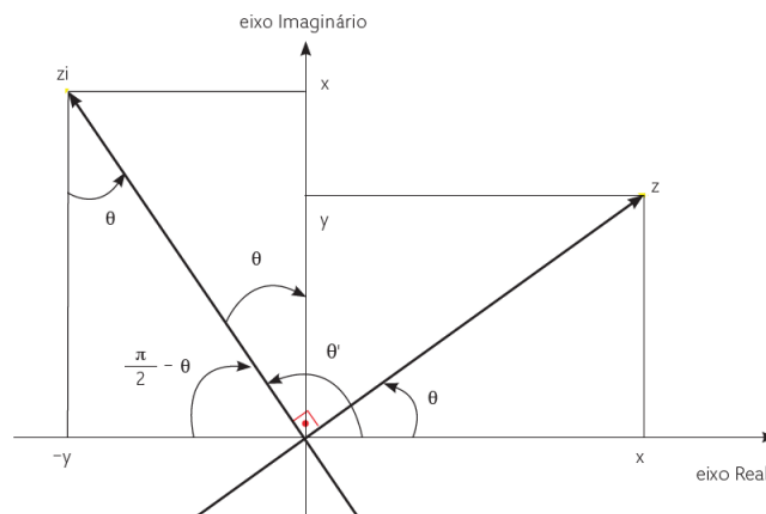
$$z \cdot z' = z \cdot i = xi + yi^2 = -y + xi \quad (3.1)$$

de 1 observamos que $|z| = |z \cdot i|$.

Sendo θ o argumento de z e θ' o argumento de $z \cdot i$, segue que $\theta' + (\frac{\pi}{2} - \theta) = \pi$, isto é, $\theta' - \theta = \frac{\pi}{2}$. Assim os vetores $\vec{Oz}$ e $\vec{Ozi}$ são ortogonais, ambos possuem o mesmo módulo, mas $\vec{Ozi}$ foi rotacionado de $\frac{\pi}{2}$ radianos (90°) conforme Figura 3.1. Segue, que ao multiplicarmos todos os pontos de uma região pelo número complexo i seu tamanho não será alterado e sofrerá uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos.

Temos um conjunto de transformações lineares de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ que coincide com o próprio conjunto dos números complexos (SANTOS, 2012). Para definir uma transformação

Figura 3.1 – Produto de z por i



Fonte: a autora

linear em $\mathbb{C}$ vamos tomar z e $w \in \mathbb{C}$, temos:

$$T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (3.2)$$

$$w \longmapsto zw \quad (3.3)$$

Sendo $z = a + bi$ e $w = x + yi$, segue:

$$Tw = (a + bi)w = (a + bi)(x + yi) = ax - by + i(bx + ay)$$

Do fato de $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ serem espaços isomorfos a transformação $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ corresponde a uma transformação $T' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T'(x, y) = (ax - by, bx + ay)$$

que possui a matriz na base canônica

$$T' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Escrevendo na sua forma polar, temos:

$$\begin{aligned} T' &= r \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= r \cdot R_\theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

temos, então, um conjunto de rotações definido por $\mathfrak{R} = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, onde cada R_θ representa uma matriz de rotação no plano. O que nos leva a concluir que o produto do número complexo w por z , rotaciona w em θ radianos em relação à origem e o módulo de w será aumentado ou diminuído por r , que é o módulo de z .

Quando $r = 1$ em (3.5) temos

$$T' = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

com R_θ representando todas as matrizes ortogonais de rotação de dimensão 2, uma vez que satisfaz as condições:

- matrizes ortogonais são tais que $AA^t = A^tA = I$ e $\det A = 1$;

Definição 3.1. *O conjunto das matrizes ortogonais com determinante igual a 1 é representado por $SO(2)$ e denominado de grupo especial ortogonal de dimensão 2.*

Vamos mostrar o seguinte resultado:

Teorema 1. $SO_{(2)}$ é o conjunto das matrizes de rotação no plano, $SO_{(2)} = \mathfrak{R} = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Demonstração:

Primeiro vamos mostrar que:

$$\mathfrak{R} \subset SO_{(2)}$$

Para isso, seja $\theta \in \mathbb{R}$, temos

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

então

$$\det R_\theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Temos, também, que

$$\begin{aligned} R_\theta R_\theta^t &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R_\theta^t R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim $R_\theta \in SO_{(2)}$, logo $\mathfrak{R} \subset SO_{(2)}$;

Agora, por outro lado, vamos mostrar que

$$SO_{(2)} \subset \mathfrak{R}$$

Para isso, seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO_{(2)}$$

por definição temos que $A^t = A^{-1}$, então

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

segue que $a = d$ e $b = -c$, assim

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

como $A \in SO_{(2)}$, $\det A = a^2 + c^2 = 1$, então $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos \theta$ e $c = \sin \theta$, logo

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R_\theta$$

ou seja, $SO_{(2)} \subset \mathfrak{R}$.

As matrizes de rotação $R_\theta \in \mathfrak{R}$ são operadores ortogonais que preservam a norma e o ângulo entre os vetores, e a rotação resultante não depende da ordem de composição das rotações. A composição de rotações é uma rotação, e satisfaz:

$$R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = R_{\theta_1 + \theta_2}$$

Se considerarmos apenas os complexos z em $\mathbb{C}$ com $|z|=1$, este conjunto pertence, na geometria do plano, à circunferência unitária de centro na origem, esse conjunto de números será denominado de esfera $\mathbb{S}^1$.

Aplicando em um exemplo, temos:

EXEMPLO: O ponto $P(x, y)$ é rotacionado 180° em torno da origem no sentido anti-horário. Vamos determinar as novas coordenadas de P :

Como $\theta = 180^\circ$, temos que:

$$R_{(180^\circ)} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

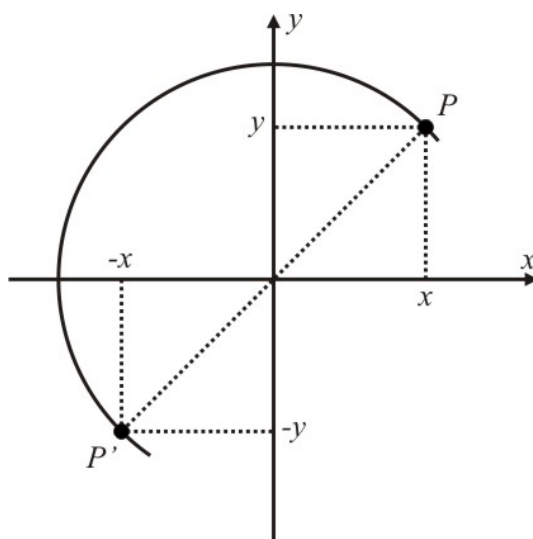
Portanto, $P' = R_{(180^\circ)} \cdot P$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x$$

$$y' = -y$$

Figura 3.2 – Representação geométrica da rotação do ponto P



Fonte: Iezzi, Dolce, et a

4 Os Quatérnios de Hamilton

Em 1833, o matemático irlandês Sir Willian Rowan Hamilton (1805-1865) apresentou à Academia Irlandesa, um artigo em que introduzia uma álgebra de pares de números complexos (BOYER, 1974). Nele continha a importante regra da multiplicação de pares de números complexos, que o autor interpretava como uma operação envolvendo rotação.

Hamilton tentou aplicar a ideia de número complexo binário $a + bi$ para três dimensões usando os ternos $a + bi + cj$ e trabalhou por dez anos na tentativa de resolver a multiplicação de números com essa formação, sem sucesso. Até que, em 1843, teve a inspiração de usar quádruplas para representar esse conjunto de números.

Em 1853 publica *Lectures on Quaternions*, uma obra volumosa na qual descrevia a aplicação dos quatérnios na Geometria, na Geometria Diferencial e na Física. Hamilton apresentou uma teoria detalhada de um sistema algébrico não comutativo, fato que contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Álgebra moderna.

4.1 Caracterização dos Quatérnios

Definição 4.1. *Um Quatérnio é um elemento de $\mathbb{R}^4$, sendo representado pela quádrupla*

$$q = a + b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k},$$

onde seus componentes a, b, c e d são números reais e seu conjunto é representado por $\mathbb{H}$.

Para desenvolver a álgebra dos quatérnios, Hamilton estabeleceu que:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = \vec{i}\vec{j}\vec{k} = -1$$

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{k} = -\vec{j}\vec{i}$$

$$\vec{j}\vec{k} = \vec{i} = -\vec{k}\vec{j}$$

$$\vec{k}\vec{i} = \vec{j} = -\vec{i}\vec{k}$$

Um quatérnio é um par de números complexos. Dados z e $w \in \mathbb{C}$ escritos na forma algébrica, temos:

$$q = z + w\vec{j}$$

segue que

$$q = (a + bi) + (c + di)\vec{j} = a + bi + c\vec{j} + d\vec{k}. \quad (4.1)$$

Assim, o conjunto de todos os quatérnios será dado por:

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k}; q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

e $\mathbb{H}^*$ é o conjunto dos quatérnios não nulos:

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{0\}.$$

Representando o quatérnio q com a forma

$$q = q_0 + \mathbf{q} \quad (4.2)$$

onde

$$q = q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k} \quad (4.3)$$

temos que: q_0 é a parte real do quatérnio, $q_0 = \Re(q)$ e $\mathbf{q}$ é a parte imaginária do quatérnio, $\mathbf{q} = \Im(q)$ também chamada de parte pura.

Quando $q_0 = 0$, o quatérnio $q = \mathbf{q} = q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k}$ é denominado de quatérnio puro e pertence ao conjunto

$$I\mathbb{H} = \{q = q_0 + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k} \in \mathbb{H} \mid q_0 = 0\}$$

e pode ser identificado com o espaço $\mathbb{R}^3$.

Portanto um quatérnio $q \in \mathbb{H}$ com $q = q_0 + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k}$ pode ser representado em uma base de $\mathbb{R}^4$ com

$$1 = (1, 0, 0, 0);$$

$$\vec{i} = (0, 1, 0, 0);$$

$$\vec{j} = (0, 0, 1, 0);$$

$$\vec{k} = (0, 0, 0, 1)$$

e um quatérnio $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ com $\mathbf{q} = q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k}$ pode ser representado em uma base de $\mathbb{R}^3$ com

$$\vec{i} = (1, 0, 0);$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0);$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1),$$

segue que q_0 é um escalar e $\mathbf{q}$ é um vetor de $\mathbb{R}^3$.

As operações com quatérnios são semelhantes às operações com os números complexos. Dados os quatérnios $q = q_0 + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k}$ e $p = p_0 + p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k}$, temos as seguintes definições:

1. Igualdade

$$q = p \iff q_0 = p_0, q_1 = p_1, q_2 = p_2 \text{ e } q_3 = p_3$$

2. Adição

$$q + p \implies (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)\vec{i} + (q_2 + p_2)\vec{j} + (q_3 + p_3)\vec{k}$$

3. Multiplicação

- por um escalar $c = c_0 + \mathbf{0}$

$$cq = cq_0 + cq_1\vec{i} + cq_2\vec{j} + cq_3\vec{k}$$

- por um quatérnio $\mathbf{p}$

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k})(q_0 + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k}) \\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\vec{i} \\ &\quad + (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)\vec{j} + (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)\vec{k} \end{aligned}$$

Segue que

$$pq = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (4.4)$$

onde $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ é o produto interno e $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ é o produto vetorial.

Segue que

$$\Re(pq) = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \text{ e } \Im(pq) = p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}$$

- entre dois quatérnios puros

$$\mathbf{p} = p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k} \text{ e } \mathbf{q} = q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k}$$

resulta em

$\mathbf{pq} = (-p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_2q_3 - p_3q_2)\vec{i} + (p_3q_1 - p_1q_3)\vec{j} + (p_1q_2 - p_2q_1)\vec{k}$
este resultado é a adição do produto vetorial com o simétrico do produto interno dos vetores $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$

$$\mathbf{pq} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \quad (4.5)$$

Como o produto vetorial $\mathbf{p} \times \mathbf{q} \neq \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ a multiplicação de quatérnios não é comutativa. **4. Norma**

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

A expressão $N(q)$ também é usada para representar a Norma de um quatérnio. Quando $|q| = 1$ o quatérnio é unitário. Segue da definição que

$$|pq| = |p| \cdot |q|$$

5. Conjugado

$$q = q_0 + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k} \implies \bar{q} = q_0 - q_1\vec{i} - q_2\vec{j} - q_3\vec{k} = q_0 - \mathbf{q}$$

e, da definição de conjugado temos

$$q\bar{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = |q|^2$$

6. Inverso Multiplicativo

$$q^{-1}q = qq^{-1} = 1 \text{ para } q \in \mathbb{H}^*$$

assim

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

7. Divisão

Para $\frac{q}{p}$ temos duas possibilidades:

$$\left(\frac{q}{p}\right)_l = p^{-1}q \quad \text{e} \quad \left(\frac{q}{p}\right)_r = qp^{-1}, \quad \text{com } q \in \mathbb{H} \text{ e } p \in \mathbb{H}^*$$

devido ao fato da multiplicação de quatérnios não ser comutativa temos a divisão à esquerda e a divisão à direita.

Dados os escalares c, c_1 e c_2 e os quatérnios p, q e $r \in \mathbb{H}$, as operações de Adição e Multiplicação possuem as propriedades:

- **Comutativa em relação à adição:**

$$p + q = q + p$$

- **Distributiva:**

$$(c_1 + c_2)q = c_1q + c_2q$$

$$c_1(p + q) = c_1p + c_1q$$

$$(p + q)r = pr + qr \text{ à direita}$$

$$p(q + r) = pq + pr \text{ à esquerda}$$

$$(cp)q = p(cq) = c(pq)$$

- **Associativa:**

$$(pq)r = p(qr)$$

$$(p + q) + r = p + (q + r)$$

- **Elemento Neutro:**

$$1q = q$$

$$q + \mathbf{0} = q$$

4.2 Quatérnios representados por matrizes

Os quatérnios também podem ser representados na forma de matrizes complexas de ordem 2 ou matrizes reais de ordem 4, em que as operações de adição e multiplicação de quatérnios correspondem às respectivas operações de matrizes. Dado o quatérnio $q = q_0 + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k} = z + w\vec{j}$, com $z = q_0 + q_1i$ e $w = q_2 + q_3i$, será associado à matriz

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 + q_1i & q_2 + q_3i \\ -q_2 + q_3i & q_0 - q_1i \end{pmatrix}$$

sendo assim, o conjunto $\mathbb{H}$ é isomorfo ao conjunto H

$$H = \left[\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right]$$

Temos, ainda, as identificações:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$A = q_0 1 + q_1 I + q_2 J + q_3 K$$

Segue que

- $\det A = |q|^2$
- se $q_2 = q_3 = 0$ então a matriz A é diagonal
- $\bar{q}$ corresponde à $(\bar{A})^t$.

A partir da representação do quatérnio q como a matriz complexa $A_{2 \times 2}$, em 8 obtemos sua representação como uma matriz real de ordem 4, bastando substituir os números complexos pelas suas matrizes reais correspondentes:

$$\begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

e a base de $\mathbb{H}$ para essa representação é:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Quatérnios nas formas trigonométrica e polar

Sendo um quatérnio $q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}^*$ podemos obter sua representação na forma trigonométrica a partir de:

$$\left(\frac{q_0}{|q|}\right)^2 + \left(\frac{|\mathbf{q}|}{|q|}\right)^2 = 1$$

segue que existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que

$$\cos \theta = \frac{q_0}{|q|} \text{ e } \sin \theta = \frac{|\mathbf{q}|}{|q|}$$

então

$$q = |q| \cos \theta + \frac{|q| \sin \theta}{|\mathbf{q}|} \mathbf{q}$$

$$\implies q = |q| \left(\cos \theta + \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \sin \theta \right) \quad (4.6)$$

se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ então o quatérnio será real, $q \in \mathbb{R}$. E, a adição e a multiplicação de quatérnios representados na forma trigonométrica serão efetuadas conforme a primeira definição de Hamilton.

Dados z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$ escritos na forma polar $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ e $z_2 = r_2 e^{i\alpha}$, o quatérnio $q = z_1 + z_2 \vec{j}$ será representado como segue:

$$q = r_1 e^{i\theta} + r_2 e^{i\alpha} \vec{j} \quad (\text{SANTOS, 2016})$$

5 Rotações no Espaço $\mathbb{R}^3$

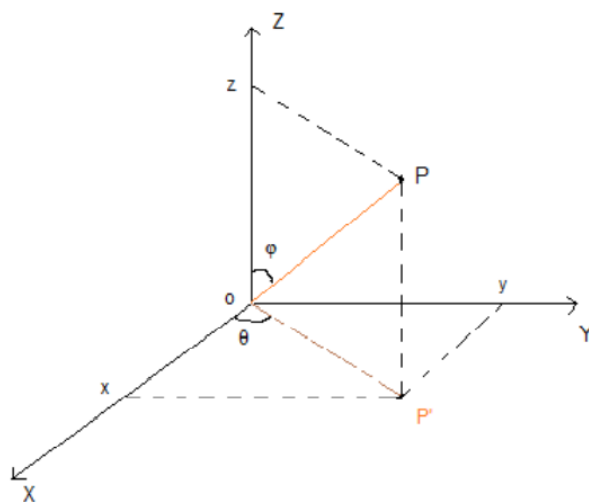
Neste capítulo, trataremos de rotações com uso de matrizes, uma extensão do Capítulo 2, e a ênfase será dada no uso de quatérnios como operadores de rotação no espaço.

5.1 Rotações por matrizes

Já sabemos que um quatérnio $p \in \mathbb{H}$ com $p = p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k}$, tal que $|p| = 1$, é um vetor de $\mathbb{R}^3$. Tomando um sistema de eixos $OXYZ$ ortogonais entre si para representar o espaço $\mathbb{R}^3$ e um ponto $P = (x, y, z)$ nessa representação, conforme Figura 5.1, o vetor $\vec{OP'}$ é a projeção do vetor $\vec{OP}$ no plano XOY .

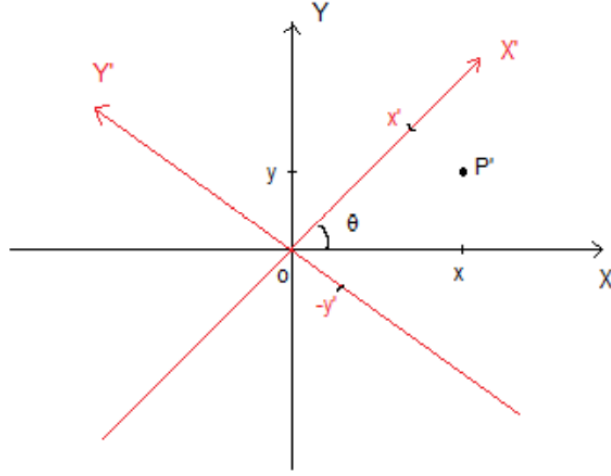
Se realizarmos uma rotação do ponto P em torno do eixo Z de 2π radianos, sua projeção P' descreve no plano XOY uma circunferência de raio igual a $|OP'|$. Ao realizar uma rotação no plano XOY de maneira que o semi-eixo OX coincida com o vetor $\vec{OP'}$, isto é, rotacionar o referencial no sentido anti-horário de um ângulo θ em torno do eixo Z , é o mesmo que rotacionar o vetor $\vec{OP}$ em sentido horário de um ângulo $-\theta$ até coincidir com o semi-eixo OX . Devido a este fato, ao escrevermos as matrizes dessas rotações, uma será a inversa da outra.

Figura 5.1 – Representação do vetor $\vec{OP}$ em $\mathbb{R}^3$



Fonte: a autora

Rotacionando o referencial em torno do eixo Z a coordenada z do ponto não se altera, assim as alterações se darão no plano XOY . Após a rotação, as novas coordenadas

Figura 5.2 – Coordenadas da projeção de P após rotação do referencial

Fonte: a autora

do ponto P serão (x', y', z') com $z' = z$, obtidas por coordenadas polares, veja Figura 5.2. Logo, as novas coordenadas são

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta + z \cdot 0 \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta + z \cdot 0 \\ z' = x \cdot 0 + y \cdot 0 + 1 \cdot z \end{cases}$$

O sistema em acima pode ser representado na forma de produto de matrizes conforme segue

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Sendo assim, a matriz que representa a rotação do referencial em torno do eixo Z é

$$R_{(z,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, a matriz que representa a rotação do ponto P em torno do eixo Z é dada por

$$R'_{(z,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De maneira análoga, podemos representar a matriz de rotação do referencial em torno do eixo Y mediante um ângulo α e a matriz de rotação em torno do eixo X mediante um ângulo φ , segue-se

- rotação do referencial em torno do eixo Y

$$R_{(y,\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

- rotação do ponto P em torno do eixo Y

$$R'_{(y,\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

- rotação do referencial em torno do eixo X

$$R_{(x,\varphi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

- rotação do ponto P em torno do eixo X

$$R'_{(x,\varphi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Segue que $R'_{(z,\theta)}$ é a matriz inversa e também a matriz transposta de $R_{(z,\theta)}$

$$R'_{(z,\theta)} = (R_{(z,\theta)})^t = (R_{(z,\theta)})^{-1}$$

da mesma forma que

$$R'_{(x,\varphi)} = (R_{(x,\varphi)})^t = (R_{(x,\varphi)})^{-1}$$

e também

$$R'_{(y,\alpha)} = (R_{(y,\alpha)})^t = (R_{(y,\alpha)})^{-1}$$

Do fato acima, segue-se

$$R_{z,\theta}(R_{z,\theta})^t = (R_{z,\theta})^t R_{z,\theta} = I$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para matriz de ordem dois, a demonstração foi realizada na Teorema 1, o processo é análogo para as de ordem três $R_{(z,\theta)}$, $R_{(x,\varphi)}$ e $R_{(y,\alpha)}$. E, do fato que:

$$\det R_{(z,\theta)} = \det R_{(x,\varphi)} = \det R_{(y,\alpha)} = 1$$

podemos concluir que esse conjunto de matrizes de ordem 3 são ortogonais e representam o conjunto das matrizes de rotação no espaço

$$SO(3) = \{R_{z,\theta}, R_{x,\varphi}, R_{y,\alpha} \mid \theta, \varphi, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Como as rotações preservam a norma dos vetores e os ângulos, segue que o produto interno também não se altera com as rotações, visto que

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{q}| |\mathbf{p}| \cos(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

Dadas duas rotações de ângulos θ e β em torno do mesmo eixo, o resultado dessa composição será uma rotação com a soma dos ângulos

$$R_{(z,\theta)} \circ R_{(z,\beta)} = R_{(z,\theta+\beta)}$$

$$R_{(z,\theta+\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos \theta + \beta & \sin \theta + \beta & 0 \\ -\sin \theta + \beta & \cos \theta + \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fazendo a representação do vetor $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$, Figura 5, usando coordenadas esféricas temos:

$$\cos \theta = \frac{x}{\sin \varphi} \implies x = \sin \varphi \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\sin \varphi} \implies y = \sin \varphi \sin \theta$$

segue

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

que pode ser obtido pela composição das matrizes de rotação em $\mathbb{R}^3$ conforme segue

$$\mathbf{p} = R_{(z,\theta)} \circ R_{(y,\varphi)}(0, 0, 1)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} = \mathbf{p} \quad (5.1)$$

recebendo o nome de eixo de rotação.

Temos, também, que uma matriz de rotação A , de ordem 3, com determinante igual a 1, é um operador linear de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{w}$ será a imagem do vetor $\vec{v}$ conforme a equação a seguir:

$$\mathbf{w} = A\vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Aplicando em um exemplo, tem-se

Exemplo 5.1. Dado o vetor $\vec{v} = (3, 4, 5)$. Rotacione-o em 30° em torno do eixo X .

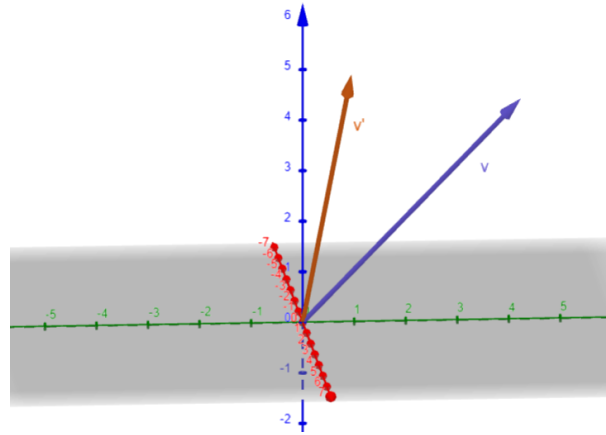
$$R_{(x,\varphi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ 0 & -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

Segue, $R_{(x,\varphi)} = R_{(x,30^\circ)} \cdot \vec{v} = \vec{v}'$

$$R_{(x,\varphi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 \\ -0,71 \\ 5,53 \end{pmatrix}$$

Representado geometricamente na Figura 5.3.

Figura 5.3 – Representação geométrica da rotação do vetor $\vec{v}$



Fonte: a autora

5.2 Rotação por quatérnios

A referência usada neste trabalho foi a de Marinho ([MARINHO, 2013](#)). Para rotacionarmos um vetor em $\mathbb{R}^3$ usando um quatérnio $q \in \mathbb{H}$ qualquer e vamos precisar determinar um operador de rotação. No capítulo 3 vimos que, o produto de dois quatérnios também é um quatérnio, pois o conjunto é fechado para a multiplicação. Também, que o produto de dois quatérnios puros nem sempre é um quatérnio puro.

Portanto, para efetuarmos uma rotação de quatérnios em $\mathbb{R}^3$ temos que garantir que, de um quatérnio puro $\mathbf{p}$ chegaremos a outro quatérnio, também puro, $\mathbf{w}$. Assim,

tomando três quatérnios $q, r \in \mathbb{H}$ quaisquer e $p \in I\mathbb{H}$ puro. E, sabendo que a multiplicação não é comutativa, os possíveis resultados são:

$$\mathbf{p}qr, \quad \mathbf{p}rq, \quad qr\mathbf{p}, \quad rq\mathbf{p}, \quad q\mathbf{p}r \quad \text{e} \quad r\mathbf{p}q.$$

As quatro primeiras possibilidades serão descartadas pois, o produto qr e rq não nos fornece quatérnios puros conforme Capítulo 3.

A análise será feita com as outras duas possibilidades: tomando $q = q_0 + \mathbf{q}$, $r = r_0 + \mathbf{r}$ e $p = 0 + \mathbf{p}$, temos que o produto $q\mathbf{p}r$ será:

$$\begin{aligned} q\mathbf{p}r &= (q_0 + \mathbf{q})(0 + \mathbf{p})(r_0 + \mathbf{r}) \\ &= (q_0\mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{p})(r_0 + \mathbf{r}) \\ &= [q_0\mathbf{p} + (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})](r_0 + \mathbf{r}) \\ &= -r_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) - q_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r} + \end{aligned}$$

$$r_0q_0\mathbf{p} + r_0(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r} + q_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{r} \quad (5.3)$$

para garantir que o resultado em 5.3 seja um quatérnio puro $w_0 = 0$, segue

$$-r_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) - q_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{r} = 0$$

nessa condição é necessário que $r_0 = q_0$ e $\mathbf{r} = -\mathbf{q}$, então

$$r = r_0 + \mathbf{r} = q_0 - \mathbf{q} = \bar{q},$$

e

$$r = \bar{q}.$$

Para o produto $r\mathbf{p}q$ o resultado é análogo.

Os produtos triplos dos quatérnios determinam, desta forma, dois operadores de rotação:

$$qp\bar{q} \quad \text{e} \quad \bar{q}pq \quad (5.4)$$

que produzirão um quatérnio puro $\mathbf{w}$ sempre que p também for um quatérnio puro, vale ressaltar que $|q| = 1$.

Para representar esse operador de forma algébrica, tomamos $q = q_0 + \mathbf{q}$ um quatérnio tal que $|q| = 1$ e $v = 0 + v$ um quatérnio puro, segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= qp\bar{q} \\ &= (q_0 + \mathbf{q})(0 + \mathbf{v})(q_0 - \mathbf{q}) \\ &= (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} + q_0^2\mathbf{v} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{q} \end{aligned}$$

aqui será utilizada a igualdade de Grassmman.

$$(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p}$$

obtendo assim

$$\mathbf{w} = (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}). \quad (5.5)$$

A representação do operador $w = \bar{q}\mathbf{v}q$ é análoga. Agora, temos que verificar se esses operadores são operadores lineares, se eles preservam a norma do vetor e se eles realmente representam uma rotação.

Teorema 5.2. *Sejam $q = q_0 + \mathbf{q} = \cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta$ um quatérnio unitário com $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. A ação do operador*

$$\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v}) = q\vec{v}\bar{q}$$

e $\vec{v}$ pode ser interpretada geometricamente como a rotação do vetor $\vec{v}$ em torno de $\mathbf{q}$ como eixo de rotação e segundo um ângulo 2θ .

A demonstração do Teorema 5.2 foi dividida em três lemas em (MARINHO, 2013):

Lema 5.3. *O operador $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v}) = q\vec{v}\bar{q}$ é linear. Dados dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, k um número real e q um quatérnio unitário, então:*

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(k\vec{a} + \vec{b}) &= q(k\vec{a} + \vec{b})\bar{q} \\ &= (qk\vec{a} + q\vec{b})\bar{q} \\ &= qk\vec{a}\bar{q} + \vec{b}\overline{q} \\ &= k\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{a}) + \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{b}) \end{aligned}$$

Lema 5.4. *Seja q um quatérnio unitário. A norma de um vetor de $\mathbb{R}^3$ não se altera com a aplicação do operador $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v}) = q\vec{v}\bar{q}$.*

Demonstração: Seja $\vec{v}$ um vetor de $\mathbb{R}^3$ e q um quatérnio unitário, então

$$|\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v})| = |q\vec{v}\bar{q}| = |q| |\vec{v}| |\bar{q}| = |\vec{v}|$$

■

Lema 5.5. *O operador $|\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v})| = q\vec{v}\bar{q}$ representa uma rotação.*

Demonstração: Tomando $q = q_0 + \mathbf{q} = \cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta$ um quatérnio unitário com $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, dividindo $\vec{v}$ em duas componentes ortogonais, sendo $\vec{v}_q$ a componente na direção de $\mathbf{q}$, $\vec{v}_q = k\mathbf{q}$ para algum escalar k e a componente $\vec{v}_n$ normal ao vetor $\vec{q}$.

Segue a verificação que o vetor $\mathbf{v}_{\mathbf{q}} = k\mathbf{q}$ não sofre alterações pelo operador $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}$. De (5.5)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(k\mathbf{q}) &= q(k\mathbf{q})\bar{q} \\
 &= (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)k\mathbf{q} + 2(\mathbf{q} \cdot k\mathbf{q})\mathbf{q} \\
 &= kq_0^2\mathbf{q} + k|\mathbf{q}|^2\mathbf{q} \\
 &= k(q_0^2 + |\mathbf{q}|^2)\mathbf{q} \\
 &= k\mathbf{q}
 \end{aligned}$$

Assim, o vetor $\vec{q}$ poderá ser o eixo de rotação. Continuando, temos que $\vec{v}_n$ irá rotacionar em torno de $\vec{q}$, agora eixo de rotação, de um ângulo igual a 2θ . Novamente, tomando (5.5) e efetuando a substituição $\mathbf{q} = \mathbf{u}|\mathbf{q}|$ obtemos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v}_n) &= q(\vec{v}_n)\bar{q} \\
 &= (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\vec{v}_n + 2q_0(\mathbf{q} \times \vec{v}_n) \\
 &= (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\vec{v}_n + 2q_0|\mathbf{q}|(\mathbf{u} \times \vec{v}_n)
 \end{aligned}$$

sendo $(\mathbf{u} \times \vec{v}_n) = v_{n\perp}$, segue

$$\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v}_n) = (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)v_n + 2q_0|\mathbf{q}|v_{n\perp}. \quad (5.6)$$

Como $\vec{v}_n$ e $\vec{v}_{n\perp}$ tem a mesma norma

$$|\vec{v}_{n\perp}| = |\mathbf{u} \times \vec{v}_n| = |\mathbf{u}| |\vec{v}_n| \sin \frac{\pi}{2} = |\vec{v}_n|$$

e, substituindo na expressão (5.6) a representação trigonométrica (4.6) do quatérnio q , obtemos:

$$\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v}_n) = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\vec{v}_n + (2 \cos \theta \sin \theta)\vec{v}_{n\perp}$$

e das fórmulas de arco duplo, tem-se

$$\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v}_n) = \cos(2\theta)\vec{v}_n + \sin(2\theta)\vec{v}_{n\perp}.$$

Para concluir a demonstração do teorema, vimos que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} &= q \vec{v} \bar{q} \\
 &= \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v}) \\
 &= \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v}_q + \vec{v}_n) \\
 &= \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v}_q) + \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v}_n) \\
 &= \vec{v}_q + \vec{v}_m
 \end{aligned}$$

onde

$$\vec{v}_m = \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v}_n) = \cos(2\theta)\vec{v}_n + \sin(2\theta)\vec{v}_{n\perp}$$

Sendo fácil verificar que a $N(\vec{v}_m)$ é igual a $N(\vec{v}_n) = N(\vec{v}_{n\perp})$, como segue:

$$\begin{aligned} |\vec{v}_m|^2 &= \vec{v}_m \vec{v}_m \\ &= (\cos(2\theta)\vec{v}_n + \sin(2\theta)\vec{v}_{n\perp})(\cos(2\theta)\vec{v}_n + \sin(2\theta)\vec{v}_{n\perp}) \\ &= (\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta))|\vec{v}_n|^2 \\ &= |\vec{v}_n|^2 = |\vec{v}_{n\perp}|^2 \end{aligned}$$

logo,

$$|\vec{v}_m| = |\vec{v}_n| = |\vec{v}_{n\perp}|$$



A demonstração para o operador $\mathbf{W}_{\bar{q}}$ segue os mesmos passos apresentados acima, resultando em

$$\mathbf{W}_{\bar{q}}(\vec{v}) = \vec{v}_q + \cos(2\theta)\vec{v}_n - \sin(2\theta)\vec{v}_{n\perp}$$

isto é,

$$\mathbf{W}_{\bar{q}}(\vec{v}) = \vec{v}_q + \cos(-2\theta)\vec{v}_n + \sin(-2\theta)\vec{v}_{n\perp}$$

Podemos ver na Figura 5.4 o resultado da rotação após aplicação do operador quaterniônico $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}$ no vetor $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_q + \vec{v}_n, \\ \vec{w} &= q\vec{v}\bar{q} \quad \text{e} \\ \vec{w} &= \vec{v}_q + \vec{v}_m \end{aligned}$$

segue que os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ podem ser interpretados geometricamente como as geratrizes de um cone que tem como eixo o vetor $\vec{q}$ e sua base circular contém os vetores $\vec{v}_n$ e $\vec{v}_m$.

Para finalizar, é possível verificar que as rotações obtidas pelos operadores $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}$ e $\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{q}}}$ representam rotações inversas. Sendo a rotação do ponto obtida pelo operador $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v}) = q\vec{v}\bar{q}$ e a rotação do referencial obtida pelo operador $\mathbf{W}_{\bar{\mathbf{q}}}(\vec{v}) = \bar{q}\vec{v}q$.

E, que a composição de dois operadores quaterniônicos é um operador quaterniônico

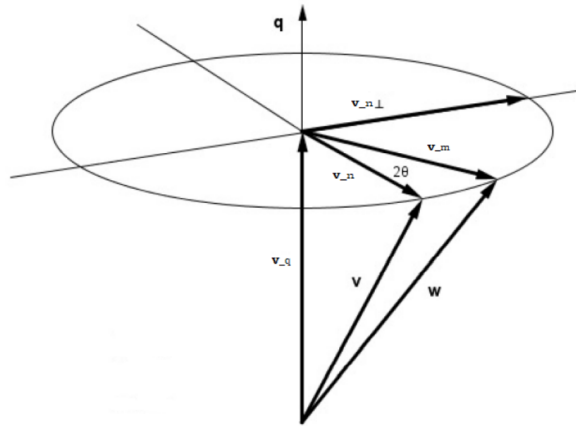
$$\mathbf{W}_{\mathbf{q}} \circ \mathbf{W}_{\mathbf{p}} = \mathbf{W}_{\mathbf{pq}}.$$

Teorema 5.6. *Sejam p e q dois quatérnios unitários que definem dois operadores quaterniônicos*

$$\mathbf{W}_{\mathbf{p}}(\vec{u}) = p\vec{u}\bar{p} \quad \text{e} \quad \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{v}) = q\vec{v}\bar{q}$$

então o produto pq define o operador quaterniônico $\mathbf{W}_{\mathbf{pq}}$ que representa a composição dos operadores $\mathbf{W}_{\mathbf{p}}$ seguido de $\mathbf{W}_{\mathbf{pq}}$, sendo o eixo e o ângulo de rotação representados pelo produto pq .

Figura 5.4 – Representação geométrica da rotação por um quatérnio



Fonte: (MARINHO, 2013)

Demonstração: Seja $\mathbf{u}$ um quatérnio puro em $\mathbb{R}^3$, então

$$\begin{aligned}
 w &= (\mathbf{W}_{\mathbf{q}} \circ \mathbf{W}_{\mathbf{p}})(\vec{u}) \\
 &= \mathbf{W}_{\mathbf{q}}(p\vec{u}\bar{p}) \\
 &= q(p\vec{u}\bar{p})\bar{q} \\
 &= qp\vec{u}\bar{p}\bar{q} \\
 &= pq\vec{u}\bar{p}\bar{q} \\
 &= \mathbf{W}_{\mathbf{pq}}(\vec{u})
 \end{aligned}$$

Sendo p e q quatérnios unitários, pq também é unitário. Segue que $\mathbf{W}_{\mathbf{pq}}$ é um operador quaterniônico de rotação com eixo e ângulo de rotação representados pelo produto pq .

E, para a composição do operador $\mathbf{W}_{\vec{q}}(\vec{v}) = \vec{q}\vec{v}\vec{q}$, a demonstração é análoga. ■

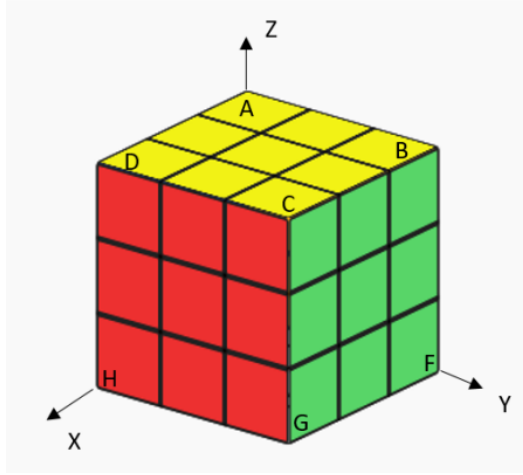
Aplicando em um exemplo, retirado de (ARAÚJO, 2019) tem-se

Exemplo 5.7. Para aplicar o operador $\mathbf{W}_{\mathbf{q}}(\vec{p}) = \mathbf{p}\bar{\mathbf{q}}$ no cubo da Figura 5.5, considerando sua aresta com uma unidade de medida e seus vértices com coordenadas: $A = (0, 0, 3)$, $B = (0, 3, 3)$, $C = (3, 3, 3)$, $D = (3, 0, 3)$, $O = (0, 0, 0)$, $F = (0, 3, 0)$, $G = (3, 3, 0)$ e $H = (3, 0, 0)$ com uma rotação $\frac{2\pi}{3}$ radianos em torno do eixo $\vec{OC} = \mathbf{q} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, segue que $|\mathbf{q}| = \sqrt{3}$.

Substituindo em $q = q_0 + \mathbf{q} = \cos \theta + \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \sin \theta$ os dados acima temos:

$$\begin{aligned}
 q &= \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \sin \frac{2\pi}{3} \\
 &= \frac{1}{2} + (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} (1 + \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})
 \end{aligned}$$

Figura 5.5 – Identificação do cubo



Fonte: (ARAÚJO, 2019)

Com isso, temos que o conjugado

$$\bar{q} = \frac{1}{2}(1 - \vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$$

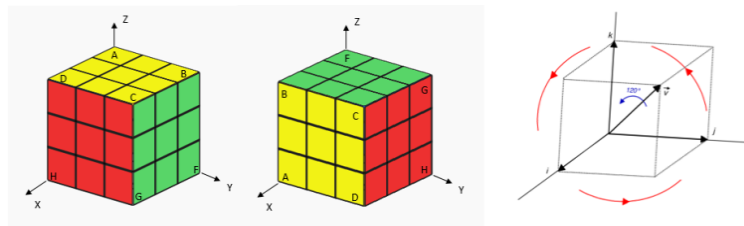
Aplicando o operador no quaternião puro $\vec{p} = H\vec{i} + F\vec{j} + A\vec{k}$ temos:

$$\mathbf{w} = (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\vec{p} + 2(\mathbf{q} \cdot \vec{p})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \vec{p})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_q(\vec{p}) &= q\vec{p}\bar{q} \\ &= \left[\frac{1}{2}(1 + \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\right] (H\vec{i} + F\vec{j} + A\vec{k}) \left[\frac{1}{2}(1 - \vec{i} - \vec{j} - \vec{k})\right] \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) (H\vec{i} + F\vec{j} + A\vec{k}) \\ &\quad + 2\left(\frac{H}{2} + \frac{F}{2} + \frac{A}{2}\right) (\vec{i} + \vec{k} + \vec{j}) \\ &\quad + \left(\frac{A}{2} - \frac{F}{2}\right)\vec{i} + \left(\frac{H}{2} - \frac{A}{2}\right)\vec{j} + \left(\frac{F}{2} - \frac{H}{2}\right)\vec{k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{W}_q(H\vec{i} + F\vec{j} + A\vec{k}) = (A\vec{i} + H\vec{j} + F\vec{k})$$

Figura 5.6 – Rotação com Quaternião



Fonte: (ARAÚJO, 2019)

5.3 Identidade de Grassmman

Teorema 5.8. *Dados $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$ quatérnios puros, tem-se*

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{r} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p} \quad (5.7)$$

Demonstração: sendo $\mathbf{p} = p_1i + p_2j + p_3k$, $\mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k$ e $\mathbf{r} = r_1i + r_2j + r_3k$, então

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} &= (p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3)(q_1i + q_2j + q_3k) \\ &= (p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3)q_1i + (p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3)q_2j + \\ &\quad + (p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3)q_3k \\ &= p_1r_1q_1i + p_2r_2q_1i + p_3r_3q_1i + p_1r_1q_2j + p_2r_2q_2j + p_3r_3q_2j + \\ &\quad + p_1r_1q_3j + p_2r_2q_3j + p_3r_3q_3j \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p} &= (q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3)(p_1i + p_2j + p_3k) \\ &= (q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3)p_1i + (q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3)p_2j + \\ &\quad + (q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3)p_3k \\ &= q_1r_1p_1i + q_2r_2p_1i + q_3r_3p_1i + q_1r_1p_2j + q_2r_2p_2j + q_3r_3p_2j + \\ &\quad + q_1r_1p_3k + q_2r_2p_3k + q_3r_3p_3k \end{aligned}$$

segue-se que

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p} &= p_1r_1q_1i + p_2r_2q_1i + p_3r_3q_1i + p_1r_1q_2j + p_2r_2q_2j + p_3r_3q_2j + \\ &\quad p_1r_1q_3k + p_2r_2q_3k + p_3r_3q_3k - (q_1r_1p_1i + q_2r_2p_1i + q_3r_3p_1i + \\ &\quad q_1r_1p_2j + q_2r_2p_2j + q_3r_3p_2j + q_1r_1p_3k + q_2r_2p_3k + q_3r_3p_3k) \\ &= p_2r_2q_1i - q_2r_2p_1i + p_3r_3q_1i - q_3r_3p_1i + \\ &\quad p_1r_1q_2j - q_1r_1p_2j + p_3r_3q_2j - q_3r_3p_2j + \\ &\quad p_1r_1q_3k - q_1r_1p_3k + p_2r_2q_3k - q_2r_2p_3k \\ &= (p_2q_1 - q_2p_1)r_2i + (p_3q_1 - q_3p_1)r_3i + \\ &\quad (p_1q_2 - q_1p_2)r_1j + (p_3q_2 - q_3p_2)r_3j + \\ &\quad (p_1q_3 - q_1p_3)r_1k + (p_2q_3 - q_2p_3)r_2k \end{aligned}$$

efetuando um pequeno ajuste nos sinais das parcelas, tem-se

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p} &= (p_3q_1 - q_3p_1)r_3i - (q_2p_1 - p_2q_1)r_2i + \\ &\quad (p_1q_2 - q_1p_2)r_1j - (q_3p_2 - p_3q_2)r_3j + \\ &\quad (p_2q_3 - q_2p_3)r_2k - (q_1p_3 - p_1q_3)r_1k \end{aligned}$$

substituindo i, j e k conforme estabelecido por Hamilton, segue-se

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p} &= (p_2q_3 - q_2p_3)r_2i \times j + (q_3p_2 - p_3q_2)r_3i \times k + \\
 &\quad (q_1p_3 - p_1q_3)r_1j \times i + (p_3q_1 - q_3p_1)r_3j \times k + \\
 &\quad (p_1q_2 - q_1p_2)r_1k \times i + (q_2p_1 - p_2q_1)r_2k \times j \\
 &= [(p_2q_3 - q_2p_3)i + (q_1p_3 - p_1q_3)j + (q_2p_1 - p_2q_1)k] \times (r_1i + r_2j + r_3k)
 \end{aligned}$$

repetindo o procedimento acima, no primeiro fator da segunda parte da igualdade obtemos $(\mathbf{p} \times \mathbf{q})$ e o segundo fator é $\mathbf{r}$, logo

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p} = (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{r}$$

conforme desejado ■

6 Rotações no Espaço $\mathbb{R}^4$

No Capítulo 3, vimos que um quatérnio $q \in \mathbb{H}$ com $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ pode ser representado em uma base de $\mathbb{R}^4$ com

$$1 = (1, 0, 0, 0); i = (0, 1, 0, 0); j = (0, 0, 1, 0); k = (0, 0, 0, 1).$$

Os quatérnios unitários em $\mathbb{R}^4$ formam um conjunto de pontos $S^3 = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ que estão sobre a esfera $\mathbb{S}^3$ de raio 1 com centro na origem.

As rotações em quatro dimensões formam um grupo denominado de $SO(4)$, essas rotações podem ser de dois tipos, simples ou duplas ([ARAUJO, 2019](#)).

Uma rotação simples S sobre um centro de rotação O deixa um plano inteiro A fixo. Plano fixo é o plano que contém os vetores que permaneceram inalterados após uma rotação. Cada plano B que é completamente ortogonal ao plano A intersecta A em um ponto P . Cada um desses pontos P 's é o centro de uma rotação em duas dimensões ($2D$) induzida por S no plano B . Todas essas rotações em $2D$ tem o mesmo ângulo de rotação α .

Semi-eixos de O no plano A não são deslocados. Semi-eixos de O ortogonais ao plano A são deslocados de um ângulo α e, os demais semi-eixos são deslocados de um ângulo menor que α .

Rotações duplas de S em $\mathbb{R}^4$ (fixando a origem) produzem pelo menos um par de planos ortogonais A e B invariantes, com ângulo de rotação α no plano A e β no plano B , ambos não nulos e $-\pi < \alpha, \beta < \pi$. Planos invariantes são planos que tiveram seus vetores rotacionados mas estes permaneceram no mesmo plano.

Se os ângulos de rotação forem diferentes ($\alpha \neq \beta$), S é denominada de Rotação Dupla. Nesse caso A e B são o único par de planos invariantes. Semi-eixos de origem em A e B são deslocados de um ângulo α ou β , respectivamente. Já semi-eixos de origem fora de A e B serão deslocados de ângulos estritamente entre α e β .

Quando os ângulos de rotação forem iguais ($\alpha = \beta$), haverá uma infinidade de pares de planos invariantes e os semi-eixos de O serão deslocados pelo mesmo ângulo. Nesse caso as rotações recebem o nome de Isoclinicas ou Equiangulares (deslocamento de Clifford). Vale ressaltar que nem todos os planos através de O são invariantes sob rotações isoclinicas.

Rotações isoclinicas com sinais semelhantes são denotadas como isoclinicas à esquerda e aquelas com sinais opostos, como isoclinicas à direita. As rotações isoclinicas à

esquerda e à direita são representadas, respectivamente, pela multiplicação à esquerda e à direita por quatérnios unitários.

Uma rotação em $\mathbb{R}^4$ dada pela sua matriz A será decomposta em uma rotação isoclinica à esquerda e à direita como segue. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

uma matriz de base ortogonal arbitrária. Se A for de fato uma matriz de rotação em $\mathbb{R}^4$, existirão números reais a, b, c, d e p, q, r, s , tais que

$$M = \begin{pmatrix} ap & aq & ar & as \\ bp & bq & br & bs \\ cp & cq & cr & cs \\ dp & dq & dr & ds \end{pmatrix}$$

seja uma matriz de norma unitária euclidiana e

$$(ap)^2 + \cdots + (ds)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = 1$$

e, também, dois conjuntos opostos um do outro

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \text{ e } p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 1$$

que possibilitarão escrever a matriz de rotação como produto das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -d \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -q & -r & -s \\ q & p & s & -r \\ r & -s & p & q \\ s & r & -q & p \end{pmatrix}$$

O primeiro fator nesta decomposição representa uma rotação isoclinica esquerda e o segundo fator uma rotação isoclinica direita.

Ao rotacionar um quatérnio $v = v_0 + v_1i + v_2j + v_3k$ no espaço $\mathbb{R}^4$ vamos obter um quatérnio w por meio de uma rotação isoclinica esquerda:

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -d \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

e vamos obter um quatérnio w por meio de uma rotação isoclinica direita:

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q & -r & -s \\ q & p & s & -r \\ r & -s & p & q \\ s & r & -q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Efetuando a multiplicação com um operador quaterniônico, temos:

$$w = \mathbf{w}_L v \mathbf{w}_R$$

onde

$$\mathbf{w}_L = a + bi + cj + dk$$

e

$$\mathbf{w}_R = p + qi + rj + sk$$

são quatérnios unitários, conforme exposto acima.

Podemos observar que a multiplicação de quatérnios em $\mathbb{R}^4$ é associativa, assim

$$w = (\mathbf{w}_L v) \mathbf{w}_R = \mathbf{w}_L (v \mathbf{w}_R)$$

que possibilita concluir que as rotações isoclinica esquerda e isoclinica direita comutam.

6.1 Uso dos Quatérnios

Uma das vantagens de se usar quatérnios é que estes descrevem a rotação com um único movimento (MARINHO, 2013). Os quatérnios estão sendo utilizados nas áreas da computação gráfica, na robótica, rotações de objetos em três dimensões e movimentação de câmeras para filmagens levando qualidade para as telas de cinema nas animações em 3D (SILVA, 2014).

Os quatérnios eliminaram o problema do *Gimbal Lock*, que é a sobreposição dos eixos X e Z do instrumento Gimbal utilizado na aviação, causando a perda de um grau de liberdade e o bloqueio do sistema. Na medicina, a robótica tem possibilitado o uso de robôs nas cirurgias, inclusive nas cirurgias à distância. Tem sido empregado, também, em dinâmica molecular, navegação, dinâmica de vôo e mecânica orbital de satélites.

7 Conclusão

Os Quatérnions constituem uma teoria que, embora importante, é pouco difundida nos cursos de graduação em Matemática. Neste sentido, investigou-se e desenvolveu-se o tema de forma acessível. Considerando a discussão apresentada neste trabalho, foi possível perceber que o estudo dos Números Complexos e dos Quatérnions foi de grande relevância para o desenvolvimento da matemática ao longo de vários séculos.

Entre as várias aplicações com Números Quatérnions, destacamos a sua utilização em computação gráfica através da possibilidade de descrever movimentos tridimensionais abordados no campo da robótica, a interpolação de pontos no espaço para descrever movimentos de rotação suave em animações gráficas utilizadas no desenvolvimento de games, fotogrametria, além de outras aplicações.

Espera-se que este trabalho contribua de alguma maneira para que mais estudos possam ser desenvolvidos sobre o comportamento de corpos no espaço, uma vez que, o número de publicações sobre o assunto ainda é limitado, podendo ser vastamente explorado a fim de que possamos ter outras as aplicações envolvendo os Números Quatérnions.

Referências

- ARAÚJO, F. M. de. *Rotações em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ e a Álgebra dos Quatérnios*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT-SJC)) — Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), São José dos Campos–SP, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 36, 37 e 40.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974. Citado 3 vezes nas páginas 11, 13 e 21.
- LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 15.
- MARINHO, A. M. L. T. G. *Os quaterniões e suas aplicações*. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Faculdade de Ciências da Economia e da Empresa, Universidade Lusíada de Lisboa, Lisboa – Portugal, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 31, 33, 36 e 42.
- SANTOS, D. J. dos. *A álgebra dos complexos/quatérnios/octônios e a construção de Cayley-Dickson*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal de Goiás, Catalão–GO, 2016. Citado na página 26.
- SANTOS, M. V. dos. *Números complexos, quatérnios e rotações*. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso - Curso de Matemática – Licenciatura) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis–SC, 2012. Citado na página 16.
- SILVA, A. C. da; PEREIRA, J. M.; SARAIVA, L. F. L. *Os Complexos, Os Quatérnios e os Octônios: Os números imaginários*. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso - Curso de Licenciatura em Matemática) — Universidade Federal do Amapá, Macapá–AP, 2012. Citado na página 10.
- SILVA, A. M. da. *A representação das matrizes de rotações com o uso dos quatérnios: aplicações à fotogrametria*. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife–PE, 2014. Citado na página 42.