



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura

Fábio Almeida Ribeiro

O Teorema de Baire e Aplicações

São Luís - MA
2022

Fábio Almeida Ribeiro 

O Teorema de Baire e Aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciado em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho

São Luís - MA

2022

Fábio Almeida Ribeiro

O Teorema de Baire e Aplicações/ Fábio Almeida Ribeiro. – São Luís - MA, 2022-
49 p. : il.(alguma color.); 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho

– Curso de Matemática – Licenciatura
Universidade Federal do Maranhão, 2022.

1. Teorema de Baire. 2. Espaços de Banach I. Orientador. II. Universidade Federal
do Maranhão. III. Curso de Matemática – Licenciatura. IV. Teorema de Baire e
aplicações

CDU XX:XXX:XXX.X

Fábio Almeida Ribeiro

O Teorema de Baire e Aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho **SUBMETIDO**. São Luís - MA, ____/____/____

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho
DEMAT/UFMA
Orientador

Primeiro Examinador

Segundo Examinador

Agradecimentos

A cada dificuldade, sempre surgiam desafios. Uns pude superar sozinho, outros não. Não foi fácil, no entanto deu tudo certo e aqui faço meus agradecimentos pertinentes.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me conceder as condições necessárias para a elaboração deste trabalho e conclusão do curso, que representa a realização de um grande sonho.

Em segundo lugar, agradeço aos meus pais, Raimundo Ribeiro e Maria do Rosário. Muitas foram as dificuldades, mas eles preferiram ficar do meu lado e me ajudar naquilo que podiam. Assim como outros fizeram, aos quais agradeço imensamente.

Também agradeço de modo especial ao meu orientador Adecarlos Costa Carvalho pela sua dedicação, paciência e por sempre estar disposto a tirar minhas dúvidas.

Também não posso deixar de agradecer a todos meus professores (dos Ensino Básico e Superior) que realmente fizeram seu trabalho, pois, como professor, sei da importância que tiveram na construção dos meus conhecimentos e, portanto, para o êxito que conseguir alcançar em minha vida acadêmica.

Por último, mas não menos importante, agradeço de forma muito especial aos meus amigos que me ajudaram nessa jornada. Vários foram os trabalhos que precisei fazer em grupo na universidade e, felizmente, pude encontrar pessoas tão dedicadas. Agradeço-lhes pela amizade e pelos bons momentos que me proporcionaram ao longo da faculdade.

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos alguns saberes que nos permitirão enunciar e demonstrar o teorema de Baire e expor algumas das aplicações desse resultado à Análise Funcional. Essas aplicações consistirão em demonstrar o Teorema de Banach Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado.

Palavras-chave: Espaços Métricos, Espaços de Banach, Teorema de Baire

Abstract

In this work, we will present some knowledge that will allow us to enunciate and demonstrate Baire's theorem and expose some of the applications of this result to Functional Analysis. These applications will consist of proving the Banach Steinhaus Theorem, the Open Application Theorem and the Closed Graph Theorem.

Keywords: Metric Spaces, Banach Spaces, Baire's Theorem

Sumário

	INTRODUÇÃO	8
1	ESPAÇOS MÉTRICOS	9
1.1	Definições e exemplos de espaços métricos	9
1.2	Bolas e esferas	12
1.3	Distâncias em um espaço métrico	13
1.4	Funções contínuas	13
1.5	Continuidade uniforme	15
1.6	Sequências	16
1.7	Homeomorfismos e métricas equivalentes	18
1.8	Sequências de cauchy e espaços métricos completos	21
1.9	Noções básicas da Topologia	25
1.9.1	Conjuntos abertos	25
1.9.2	Conjuntos fechados	27
1.10	Teorema de Baire	30
2	OPERADORES LINEARES CONTÍNUOS	33
2.1	Espaços normados	33
2.2	Espaços de Banach	36
2.3	Operadores lineares contínuos	36
2.4	Conjuntos convexos	40
3	APLICAÇÕES DO TEOREMA DE BAIRE À ANÁLISE FUNCIONAL	42
3.1	Teorema de Banach-Steinhaus	42
3.2	Teorema da Aplicação Aberta	43
3.3	Teorema do Gráfico Fechado	46
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	48
	REFERÊNCIAS	49

INTRODUÇÃO

A Análise Funcional é o ramo da Matemática que estuda o espaço das funções. Esse ramo utiliza vários conceitos da Álgebra Linear e dá destaque ao estudo dos espaços vetoriais de dimensão infinita. Dessa forma, a Análise Funcional pode ser vista como uma generalização da Álgebra Linear Clássica. Além disso, essa área apresenta grande importância em alguns ramos da matemática como análise não-linear, equações diferenciais parciais.

Este texto tem como objetivo geral apresentar e demonstrar, usando o teorema de Baire, os seguintes resultados da Análise Funcional: Teorema da Limitação Uniforme, Teorema da Aplicação Aberta e Teorema do Gráfico Fechado. O Teorema de Baire, que é um resultado da Topologia Geral, é um teorema que possui diversas consequências em diversas áreas. Neste trabalho, abordaremos somente algumas aplicações na Análise Funcional.

A fim de cumprir com esse objetivo, inicialmente abordaremos alguns conceitos e resultados da teoria de espaços métricos que serão necessários para a demonstração do teorema de Baire e dos outros três teoremas citados. Isso será feito no capítulo um, onde apresentaremos a definição de métrica.

Com essa definição em mãos, poderemos construir uma teoria na qual poderemos falar de distâncias entre um ponto e um conjunto e entre conjuntos, sequências e convergência de sequências, funções contínuas e uniformemente contínuas, conjuntos abertos e fechados, etc. Esses três últimos tópicos terão grande revância para o texto. Por isso, boa parte do capítulo um será destinada a apresentação de conceitos e resultados referentes a esses assuntos.

Os conceitos e resultados que serão apresentados no capítulo um são essenciais para as demonstrações dos teoremas da Análise Funcional que serão abordados, mas não são suficientes. Estes, em suas hipóteses, abordam Espaços de Banach e operadores lineares contínuos. Por isso, elaboramos o capítulo dois, que aborda esses assuntos e apresentam resultados necessários para as demonstrações, como algumas caracterizações dos operadores lineares contínuos. Também abordaremos nesse capítulo os espaços normados, que nos permitirão estudar os operadores lineares contínuos, e conjuntos conexos em espaços normados.

Por fim, de posse do teorema de Baire e de uma bagagem de saberes, aplicaremos tal resultado à Análise Funcional. Essas aplicações consistem em demonstrar os três resultados citados acima, que são resultados clássicos e de fundamental importância para a Análise Funcional. Essas aplicações serão feitas no capítulo três. Com isso, evidenciaremos algumas

consequências e, portanto, a importância do teorema de Baire para a Matemática.

1 ESPAÇOS MÉTRICOS

Neste capítulo, apresentaremos a importante definição de espaço métrico e alguns conceitos associados a esses espaços. Como veremos, a todo espaço métrico existe uma função associada que nos permite calcular a distância entre dois elementos quaisquer do conjunto sobre o qual essa função está definida. Tal função será chamada de métrica e nos permitirá construir uma teoria na qual poderemos falar de distâncias entre um ponto e um conjunto e entre conjuntos, sequências e convergência de sequências, funções contínuas e uniformemente contínuas, conjuntos abertos e fechados, etc. Toda essa teoria é de grande importância, pois, por exemplo, é usada na Análise Funcional e Topologia. Também apresentaremos e demonstraremos neste capítulo o teorema de Baire. Toda a teoria apresentada neste capítulo tem por objetivo fornecer uma base de saberes para podermos provar o teorema de Baire e os resultados que serão apresentados nos capítulos 2 e 3. Para a elaboração deste capítulo usamos as referências [3], [4], [5] e [6].

1.1 Definições e exemplos de espaços métricos

Nesta seção, definiremos um dos conceitos fundamentais para este trabalho. Além disso, dada a importância desse conceito, exibiremos alguns exemplos importantes.

Definição 1.1. *Um espaço métrico é um conjunto M de objetos, que chamaremos de pontos, juntamente com uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par $(x, y) \in M \times M$ o número real $d(x, y)$. Além disso, a função d deve satisfazer as seguintes propriedades, para todos $x, y, z \in M$:*

1. **(Positividade Definida)** $d(x, y) \geq 0$ com $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.
2. **(Simetria)** $d(x, y) = d(y, x)$.
3. **(Desigualdade Triangular)** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

A função d assim definida é chamada de distância ou métrica. Por isso, chamaremos o número $d(x, y)$ de a distância entre x e y . Além disso, neste texto, referir-nos-emos muitas vezes ao espaço métrico (M, d) somente como o espaço métrico M . Nesses casos, estaremos tomando uma métrica d qualquer em M . Quando tomarmos uma métrica específica, faremos as indicações necessárias.

Naturalmente, dado (M, d) , podemos considerar $S \subset M$ um espaço métrico. Com efeito, a restrição de d ao conjunto $S \times S$ é uma métrica. Tomando a função $d_1 = d|_{S \times S}$ (a restrição de d ao subconjunto $S \times S$), segue de imediato que (S, d_1) é um espaço métrico.

Exemplo 1.2. (A métrica zero-um ou métrica discreta) Qualquer conjunto M pode se tornar um espaço métrico quando munido da seguinte métrica: $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, com

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Vemos facilmente que d é positiva definida e simétrica. Resta provar que d satisfaz a desigualdade triangular. Para tanto, tomemos $x, y, z \in M$ e observamos que ou $x = y$, ou $x \neq y$. Se $x = y$, usando que $d(x, z) \geq 0$ e que $d(z, y) \geq 0$, o resultado segue de imediato. No entanto, se $x \neq y$ deveremos comparar z com x e y . Para não analisarmos todos os casos possíveis, podemos notar que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ será verificada para $x \neq y$ se, e somente se, $d(x, z) > 0$ ou $d(z, y) > 0$. Pelo menos uma dessas opções sempre deverá ocorrer, pois, caso contrário, obteríamos $x = z$ e $z = y$, o que implica, por transitividade, que $x = y$, o que é um absurdo.

Para o próximo exemplo, usaremos o seguinte resultado, conhecido como Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a qual é exposta e demonstrada em [6] no capítulo um.

Se $x_1, \dots, x_n$ e $y_1, \dots, y_n$ são números reais, então

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Exemplo 1.3. O conjunto $\mathbb{R}^n$, que é formado por n -uplas de elementos de $\mathbb{R}$, é chamado de Espaço Euclidiano. Quando $n = 1$, temos o conjunto dos números reais. Esse conjunto munido da métrica $d(x, y) = |x - y|$, que associa o par (x, y) ao módulo de $x - y$, é o exemplo mais importante de espaço métrico. A métrica d é chamada de métrica euclidiana ou métrica usual da reta. Uma forma conveniente de se definir uma métrica em $\mathbb{R}^n$ é obtida quando generalizamos a métrica usual de $\mathbb{R}$. Dados $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, uma generalização possível é seguinte:

$$d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Provaremos que a função $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica. Para tanto, observamos que d_1 é positiva definida, pois ela é a raiz quadrada de uma soma de números positivos e

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow (x_i - y_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, $x = y$. A fim de provar que d_1 é simétrica, basta observar que

$$d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} = d_1(y, x)$$

Por fim, devemos provar que d_1 satisfaz a desigualdade triangular. Para tanto, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, notamos que

$$\begin{aligned}
 [d_1(x, y)]^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n [(x_i - z_i)^2 + 2(x_i - z_i)(z_i - y_i) + (z_i - y_i)^2] \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^n 2(x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| |z_i - y_i| + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \\
 &= \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} \right]^2 \\
 &= [d_1(x, z) + d_1(z, y)]^2
 \end{aligned}$$

Isso mostra que $[d_1(x, y)]^2 \leq [d_1(x, z) + d_1(z, y)]^2$. Como d_1 é positiva definida, temos

$$d_1(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(z, y).$$

Outras métricas que podem ser definidas em $\mathbb{R}^n$ são as seguintes:

$$d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|;$$

$$d_3(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

Exemplo 1.4. Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada quando existe uma constante real $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$, para todo $x \in X$. Denotaremos por $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas com domínio X . Dados $f, g \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$, podemos definir a métrica d em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ tal que

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Como a soma e o produto por um escalar de funções limitadas resulta em uma função limitada, essa métrica está bem definida em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$. A demonstração de que d é uma métrica pode ser feita de fácil modo usando as propriedades do módulo de um número real e do supremo de um conjunto.

Exemplo 1.5. Sejam $(M_1, d_1), (M_2, d_2), \dots, (M_n, d_n)$ espaços métricos. O produto cartesiano desses conjuntos é definido como sendo o conjunto

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in M_i, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Sendo $z_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $z_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ pontos de $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, então esse conjunto é um espaço métrico quando munido de alguma das seguintes métricas:

1. *Métrica da soma:* $d(z_1, z_2) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + \dots + d_n(x_n, y_n)$.
2. *Métrica do máximo:* $d(z_1, z_2) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \dots, d_n(x_n, y_n)\}$.
3. *Métrica euclidiana:* $d(z_1, z_2) = \sqrt{[d_1(x_1, y_1)]^2 + [d_2(x_2, y_2)]^2 + \dots + [d_n(x_n, y_n)]^2}$.

1.2 Bolas e esferas

Trataremos nesta seção de uma noção fundamental para o desenvolvimento da teoria dos espaços métricos.

Definição 1.6. *Sejam M um espaço métrico, a um ponto de M e ε um número real positivo. Definimos:*

1. *A bola aberta de centro a e raio ε é o conjunto $B(a; \varepsilon) \subset M$ que tem a seguinte propriedade: se $x \in B(a; \varepsilon)$, então $d(x, a) < \varepsilon$. Ou seja,*

$$B(a; \varepsilon) = \{x \in M; d(x, a) < \varepsilon\}$$

2. *A bola fechada de centro a e raio ε é o conjunto $B[a; \varepsilon] \subset M$ que apresenta a seguinte propriedade: se $x \in B[a; \varepsilon]$, então $d(x, a) \leq \varepsilon$. Ou seja,*

$$B[a; \varepsilon] = \{x \in M; d(x, a) \leq \varepsilon\}$$

3. *A esfera de centro a e raio ε é o conjunto $S(a; \varepsilon) \subset M$ que possui a seguinte propriedade: $x \in S(a; \varepsilon)$, então $d(x, a) = \varepsilon$. Ou seja,*

$$S(a; \varepsilon) = \{x \in M; d(x, a) = \varepsilon\}$$

As nomeclaturas usadas na definição acima nos remetem a algumas formas geométricas espaciais muito conhecidas. No entanto, dependendo do espaço métrico que estejamos considerando, as bolas e esferas definidas podem assumir aspectos bem inusitados. O próximo exemplo ilustra esse fato para o caso das bolas abertas.

Exemplo 1.7. *Seja M um espaço métrico munido da métrica zero-um. Nesse caso, para uma bola temos somente as duas opções seguintes:*

$$B(a; \varepsilon) = \begin{cases} \{a\} & \text{se } \varepsilon \leq 1 \\ M & \text{se } \varepsilon > 1 \end{cases}$$

De fato, tomando $x \neq a$ e $\varepsilon \leq 1$, teremos $d(a, x) = 1$ e $x \notin B(a; \varepsilon)$. Logo, se $\varepsilon \leq 1$, então $B(a; \varepsilon) = \{a\}$. Por outro lado, sendo $\varepsilon > 1$ e $d(x, a) \leq 1$, temos $B(a; \varepsilon) = M$.

Dado um espaço métrico M , dizemos que $a \in M$ é um ponto isolado de M quando existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a; \varepsilon) = \{a\}$. Por outro lado, um ponto $a \in M$ é chamado de não isolado se, para todo $\varepsilon > 0$, pode-se obter um ponto $x \in M$ tal que $x \in B(a; \varepsilon)$. Essas definições nos permitem definir o que é um espaço métrico discreto, que é um conjunto onde todos os pontos são isolados.

Seja M um espaço métrico munido de uma métrica d . Como iremos usar muito as bolas abertas, adotaremos a seguinte convenção: a notação $B_M(x; \varepsilon)$ indica que se trata de uma bola aberta em M de centro x e raio ε . Também convencionaremos que a notação $B_d(x; \varepsilon)$ indica uma bola aberta segundo a métrica d , de centro x e raio ε .

1.3 Distâncias em um espaço métrico

Agora que já sabemos calcular a distância entre dois pontos x e y de um espaço métrico M , podemos estender a esse espaço as noções existentes em $\mathbb{R}$ de conjunto limitado, diâmetro de um conjunto e distância de um ponto $x \in \mathbb{R}$ ao subconjunto $X \subset \mathbb{R}$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se limitado quando existe uma constante real $K > 0$ tal que $|x| \leq K$, para todo $x \in X$. Isso equivale a afirmar que existe $K_0 > 0$ satisfazendo $|x - y| \leq K_0$, para quaisquer $x, y \in X$. De fato, basta tomar $K_0 \geq 2K$, pois

$$|x| \leq K \text{ e } |y| \leq K \Rightarrow |x - y| \leq |x| + |y| \leq K + K = 2K, \forall x, y \in X.$$

Tomando um subconjunto $X \subset M$, diz-se que X é limitado quando existe $K > 0$ real tal que $d(x, y) \leq K$, $\forall x, y \in X$. Quando X é limitado, o conjunto $A = \{d(x, y) \in \mathbb{R}; x, y \in M\}$ é limitado. Definimos o diâmetro de X como sendo o número $\sup(A)$ (o supremo do conjunto A).

Já a distância entre um ponto $a \in M$ e $X \subset M$ é definida como sendo

$$d(a, X) = \inf_{x \in X} d(a, x)$$

1.4 Funções contínuas

O conceito de função contínua é o tema central da Topologia. Para funções definidas em espaços métricos podemos utilizar o fato de que esses espaços são dotados de uma métrica e usá-la para definir a continuidade de uma função em um ponto de seu domínio.

Definição 1.8. Dizemos que a função $f : (M, d_1) \rightarrow (N, d_2)$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo número real $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, é possível encontrar $\delta > 0$ tal que $x \in M$, $d_1(x, a) < \delta$ implique $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Simbolicamente, temos

$$f : M \rightarrow N \text{ é contínua em } a \in M \text{ se, e somente se,}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in M, d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Quando $f : M \rightarrow N$ não é contínua em $a \in M$, diz-se que f é descontínua nesse ponto.

Da definição de continuidade, decorre o seguinte fato.

Proposição 1.9. *Uma função $f : (M, d_1) \rightarrow (N, d_2)$ é contínua no ponto $a \in M$ se, e somente se, para toda bola $B(f(a); \varepsilon) \subset N$ existe uma bola $B(a; \delta) \subset M$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$.*

Demonstração: Dada uma bola qualquer $B(f(a); \varepsilon) \subset N$, para seu raio ε , temos que por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Observe que, se $y \in f(B(a; \delta))$, então $y = f(x)$, para algum $x \in B(a; \delta)$. Logo, $d_1(x, a) < \delta$ o que implica que $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Isso prova que $f(x) \in B(f(a); \varepsilon)$ e, portanto, $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$. Reciprocamente, observe que

$$d_1(x, a) < \delta \Rightarrow x \in B(a; \delta) \Rightarrow f(x) \in f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon) \Rightarrow d_2(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua em a . ■

Exemplo 1.10. *Dada uma função $f : M \rightarrow N$, dizemos que f é uma aplicação lipschitziana quando existe uma constante real c positiva (chamada de constante de Lipschitz) de forma que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, para todos $x, y \in M$. Afirmamos que toda função lipschitziana é contínua. De fato, devemos provar que f é contínua em cada $a \in M$ e, para tanto, dado um $\varepsilon > 0$ qualquer, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, onde c é uma constante de Lipschitz de f . Dessa forma, $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a) < c \cdot \delta = \varepsilon$.*

Exemplo 1.11. *Dados os espaços métricos $M = [-1, 0] \cup (1, \infty)$ e $N = (0, \infty)$ munidos da métrica usual da reta, que foi definida no exemplo 1.3, e $f : M \rightarrow N$ tal que $f(x) = x^2$, para todo $x \in M$. Temos que f é uma bijeção contínua de M sobre N . A inversa de f é*

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{se } y > 1 \\ -\sqrt{y} & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

A função f^{-1} é descontínua em $y = 1$. De fato, tomando $\varepsilon = 1$ e $y_n = 1 + \frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, vejamos que $d(1, y_n) = \frac{1}{n}$ e que

$$d\left(f^{-1}(1), f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \left|\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - f^{-1}(1)\right| = \left|\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right| > 2 > \varepsilon.$$

Dessa forma, para $\varepsilon = 1$, sempre que tomarmos um $\delta > 0$, poderemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ de modo que $d(1, y_n) = \frac{1}{n} < \delta \Rightarrow d(f^{-1}(1), f^{-1}(y_n)) > \varepsilon$. Portanto, f^{-1} é descontínua em $y = 1$.

O resultado seguinte é útil em alguns casos onde desejamos saber se uma certa função é contínua.

Proposição 1.12. *Sejam (M, d_1) , (N, d_2) , (P, d_3) espaços métricos, $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ funções contínuas em, respectivamente, $a \in M$ e $f(a) \in N$. Sendo assim, a função composta $g \circ f : M \rightarrow P$ é contínua em a .*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, a continuidade da função g no ponto $f(a)$ nos permite obter $\lambda > 0$ tal que $y \in N, d_2(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d_3(g(y), g(f(a))) < \varepsilon$. A continuidade de f no ponto a nos garante que, para $\lambda > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$x \in M, d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \lambda \Rightarrow d_3(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Portanto, $g \circ f : M \rightarrow P$ é contínua em a . ■

1.5 Continuidade uniforme

Na seção anterior, vimos a definição de funções contínuas. Pode ser demonstrado facilmente que, se uma função $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ e existe uma bola $B(a; \varepsilon) \subset M$, então $f|_B$ é contínua em a . A recíproca também é verdadeira. Devido a esse comportamento, dizemos que a continuidade (simples) é um fenômeno local.

Nesta seção, apresentaremos a definição de continuidade uniforme, que não é um fenômeno local, mas sim uma noção global.

Definição 1.13. *Sejam (M, d_1) e (N, d_2) espaços métricos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é uniformemente contínua quando, para cada $\varepsilon > 0$ dado, for possível encontrar um $\delta > 0$ de modo que, sejam quais forem $x, y \in M$, $d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$*

O comportamento global da continuidade uniforme deve-se ao fato de que pode ocorrer que cada ponto $a \in M$ seja centro de uma bola B tal que $f|_B$ seja uniformemente contínua, mas a função $f : M \rightarrow N$ não seja uniformemente contínua.

Pode-se provar facilmente que toda aplicação uniformemente contínua também é contínua. A recíproca não é verdadeira. Sendo assim, o Exemplo 1.8 expõe uma função que não é uniformemente contínua, pois ela não é contínua em um ponto. As aplicações lipschitziana são exemplos de funções uniformemente contínuas.

Proposição 1.14. *Se $f : (M, d_1) \rightarrow (N, d_2)$ e $g : (N, d_2) \rightarrow (P, d_3)$ são uniformemente contínuas, então $g \circ f : M \rightarrow P$ também é uniformemente contínua.*

Demonstração: Sendo g uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda > 0$ de forma que

$$\forall f(x_1), f(x_2) \in N, d_2(f(x_1), f(x_2)) < \lambda \Rightarrow d_3(g(f(x_1)), g(f(x_2))) < \varepsilon.$$

Para esse mesmo λ , sendo f uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x_1, x_2 \in M, d_1(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_2(f(x_1), f(x_2)) < \lambda \Rightarrow d_3(g(f(x_1)), g(f(x_2))) < \varepsilon.$$

Logo, $g \circ f : M \rightarrow P$ é uniformemente contínua. ■

1.6 Sequências

O estudo de sequências em espaços métricos é útil para simplificar vários problemas. Por exemplo, para provarmos que a função f^{-1} do exemplo 1.11 não é contínua em $x = 1$, usamos uma sequência de pontos em N . Além disso, usaremos um tipo especial de sequências para definir espaços métricos completos, que terão grande importância para este trabalho.

Dado um conjunto M , chamamos a função $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ de sequência (em M). A imagem de $n \in \mathbb{N}$ através da função x será indicada por x_n e será chamada de n -ésimo termo da sequência. Para simplificar, usaremos a notação (x_n) para denotar a sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow M$. Quando usarmos essa notação, deixaremos subentendido o conjunto M ao qual estaremos nos referindo.

Dada uma sequência (x_n) , quando restringimos seu domínio, que é Conjunto dos Números Naturais, a algum subconjunto infinito, passamos a ter uma nova função, que chamaremos de subsequência de (x_n) e denotaremos por (x_{n_k}) , onde $k = 1, 2, 3, 4, \dots$.

Abaixo exibiremos a importante definição de convergência de uma sequência em um espaço métrico, alguns resultados importantes relacionados a sequências e alguns exemplos.

Definição 1.15. *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M é dita convergente em M quando existe $a \in M$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo a seguinte implicação:*

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

O ponto a é chamado de limite de (x_n) . Representamos essa situação simbolicamente escrevendo $\lim x_n = a$ ou $x_n \rightarrow a$. Se não existe $a \in M$ tal que $\lim x_n = a$, dizemos que (x_n) é divergente em M .

Note que a convergência de x_n (em M) está inteiramente relacionada à congruência de $y_n = d(x_n, a)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, (em $\mathbb{R}$). Podemos provar facilmente que $x_n \rightarrow a$ se, e somente se, $y_n \rightarrow 0$. Note também que podemos usar bolas abertas para caracterizar a convergência de sequências. Para tanto, basta observar que $d(x_n, a) < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in B(a; \varepsilon)$.

Dessa forma, para que $x_n \rightarrow a$, é necessário e suficiente que, para cada bola de raio $\varepsilon > 0$, exista n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a, \varepsilon)$

Exemplo 1.16. Tomando $\mathbb{R}$ munido da métrica euclidiana, sequência de números reais $x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$, converge para 0. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ para termos

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Uma pergunta interessante a se fazer é a seguinte: a sequência do exemplo acima converge somente para o número 0? O próximo resultado nos garante que sim.

Proposição 1.17. Uma sequência convergente em M não pode convergir para dois pontos diferentes.

Demonstração: Tomando uma sequência (x_n) em M e supondo que $\lim x_n = a$, $\lim x_n = b$, onde $a, b \in M$, observe que, dado $\varepsilon > 0$ existem $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad n > n_1 \Rightarrow d(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Se tomarmos $n \in \mathbb{N}$ maior do que n_0 e do que n_1 , então $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < \varepsilon$. Logo, $0 \leq d(a, b) < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Essas desigualdades garantem que $d(a, b) = 0$ e, portanto, $a = b$. ■

Em vários momentos necessitamos calcular o limite de uma sequência ou até mesmo simplesmente provar que determinada sequência converge. O próximo resultado nos ajuda a resolver alguns problemas como esses.

Teorema 1.18. Sejam x_n, y_n, z_n sequências em M tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim x_n = \lim z_n = a$, então $\lim y_n = a$

Demonstração: Com efeito, tomando $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon \Rightarrow x_n \in B(a; \varepsilon) \quad \text{e} \quad n > n_2 \Rightarrow d(z_n, a) < \varepsilon \Rightarrow z_n \in B(a; \varepsilon)$$

Pondo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que $n > n_0 \Rightarrow y_n \in B(a; \varepsilon)$. Suponha, por absurdo, que $\lim y_n \neq a$. Isso implicaria que existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $n_3 \in \mathbb{N}$, $d(y_n, a) \geq \varepsilon$ para algum $n > n_3$. Tomando $n_3 = n_0$, teríamos então que existe $n > n_3$ tal que

$$d(y_n, a) \geq \varepsilon \Rightarrow y_n \notin B(a; \varepsilon)$$

Mas isso é um absurdo. Deve-se ter então que $\lim y_n = a$ ■

Proposição 1.19. *Para que uma sequência (x_n, y_n) de pontos em $M \times N$ convirja para $(x, y) \in M \times N$ é necessário e suficiente que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$.*

Demonstração: Faremos a demonstração usando a métrica d da soma. Mas basta tomar qualquer métrica equivalente à d que obteremos o mesmo resultado. Indicaremos por d_1 e d_2 as métricas de M e N , respectivamente.

Dado $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d((x_n, y_n), (x, y)) = d_1(x_n, x) + d_2(y_n, y) < \varepsilon$$

Dessa forma, para $n > n_0$, temos $d(x_n, x) < \varepsilon$ e $d(y_n, y) < \varepsilon$. Isso implica que (x_n) e (y_n) convergem, respectivamente, para x e y .

Supondo agora que (x_n) e (y_n) convergem, respectivamente, para x e y , temos que existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad n > n_2 \Rightarrow d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, obtemos

$$n > n_0 \Rightarrow d_1(x_n, x) + d_2(y_n, y) = d((x_n, y_n), (x, y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. ■

1.7 Homeomorfismos e métricas equivalentes

No Exemplo 1.11, vimos um que a uma função $f : [-1, 0] \cup (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ possui inversa, que é descontínua em $y = 1$. A existência de funções como essa é algo normal na teoria de espaços métricos. As funções que são contínuas e possuem inversa contínua apresentam algumas propriedades úteis. Algumas dessas propriedades serão usadas neste texto, por isso discutiremos sobre essas funções nesta seção.

Definição 1.20. *Sejam M e N espaços métricos. A função $f : M \rightarrow N$ é chamada de homeomorfismo quando f for contínua, inversível e sua inversa f^{-1} for contínua. Neste caso, M e N se dizem homeomorfos.*

Sejam M um espaço métrico e d_1 e d_2 métricas em M . Por simplicidade, escreveremos $M_1 = (M, d_1)$, $M_2 = (M, d_2)$, $B_i(a, \varepsilon)$ = bola de raio ε e centro a segundo d_i , com $i = 1, 2$.

Definição 1.21. *Sejam M e N espaços métricos. A função $f : M \rightarrow N$ é chamada de homeomorfismo uniforme quando f for uniformemente contínua, inversível e sua inversa f^{-1} for uniformemente contínua. Neste caso, M e N se dizem homeomorfos uniformemente.*

Definição 1.22. *Dizemos que duas métricas d_1 e d_2 em M são equivalentes se a função identidade $i : M_1 \rightarrow M_2$ é um homeomorfismo.*

Da definição de homeomorfismo, temos que $i : M_1 \rightarrow M_2$ é contínua. Aplicando a Proposição 1.9, resulta que, para bola $B_2(a; \varepsilon) \subset M$, existe uma bola $B_1(a; \delta) \subset M$ tal que $i(B_1(a; \delta)) = B_1(a; \delta) \subset B_2(a; \varepsilon)$. De modo análogo, podemos provar que, para toda bola $B_1(a; \delta) \subset M$, existe uma bola $B_2(a; \varepsilon) \subset M$ tal que $B_2(a; \delta) \subset B_1(a; \varepsilon)$.

Proposição 1.23. *Seja $f : (M, d_1) \rightarrow (N, d_2)$ uma função contínua. Se d_1 e d_2 são equivalentes a, respectivamente, d' e d'' , então a função $f : (M, d') \rightarrow (N, d'')$ também é contínua.*

Demonstração: Mostraremos inicialmente que $f : (M, d_1) \rightarrow (N, d'')$ é contínua. Dados $x \in M$ e a bola $B = B_{d''}(f(x); \varepsilon)$, existe uma bola $B_1 = B_{d'}(f(x); \lambda) \subset B$ já que d_1 e d' são equivalentes. Como $f : (M, d_1) \rightarrow (N, d_2)$ é contínua, existe $\delta > 0$ de forma que $f(B_{d_1}(x; \delta)) \subset B_1 \subset B$. Segue da Proposição 1.9 que $f : (M, d_1) \rightarrow (N, d'')$ é contínua. Demonstra-se de modo análogo que $f : (M, d') \rightarrow (N, d_2)$ é contínua. Da continuidade dessas duas funções, obtemos o resultado. ■

Definição 1.24. *Dizemos que duas métricas d_1 e d_2 em M são uniformemente equivalentes se a função identidade $i : M_1 \rightarrow M_2$ for um homeomorfismo uniforme.*

Para este texto, a maior importância de algumas das definições e resultados apresentados nesta seção é a dedução dos seguintes resultados.

Proposição 1.25. *Sejam d_1 e d_2 métricas equivalentes em M . Para que uma sequência (x_n) em M convirja, para x digamos, em M_1 é necessário e suficiente que (x_n) também convirja em M_2 para x .*

Demonstração: Supondo que $\lim x_n = x$ em M_1 , então existe n_0 natural tal que

$$n_0 > n \Rightarrow x_n \in B_1(x, \delta)$$

Além disso, como d_1 e d_2 são equivalentes, para cada bola $B_1(x; \delta)$, existe uma bola $B_2(x; \varepsilon)$ de modo que

$$B_1(x; \delta) \subset B_2(x; \varepsilon)$$

Desse modo, $n > n_0 \Rightarrow x_n \in B_2(x; \varepsilon)$. Isso mostra que (x_n) converge em M_2 para x . A recíproca dessa proposição é demonstrada de forma inteiramente analoga. ■

De posse dessa proposição, em alguns momentos, tomaremos uma métrica que facilite as demonstrações em um sentido que se tonará claro na seção seguinte.

Proposição 1.26. *Sejam d_1 e d_2 métricas em M . Se existirem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y)$, para todo $x, y \in M$, então as métricas d_1 e d_2 serão uniformemente equivalentes.*

Demonstração: De fato, as desigualdades $\alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y)$ implicam que

$$d_1(x, y) \leq \frac{1}{\alpha} d_2(x, y) \text{ e } d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y)$$

Nesse caso, as aplicações identidades $i_{12} : M_1 \rightarrow M_2$ e $i_{21} : M_2 \rightarrow M_1$ serão ambas lipschitzianas e, portanto, uniformemente contínuas. ■

Exemplo 1.27. *No Exemplo 1.5, definimos as seguintes métricas em um espaço formado pelo produto cartesiano dos espaços métricos $(M_1, d_1), (M_2, d_2), \dots, (M_n, d_n)$. Sendo os pontos $z_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n), z_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, definimos:*

1. *Métrica da soma:* $d(z_1, z_2) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + \dots + d_n(x_n, y_n)$.
2. *Métrica do máximo:* $d'(z_1, z_2) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \dots, d_n(x_n, y_n)\}$.
3. *Métrica euclidiana:* $d''(z_1, z_2) = \sqrt{[d_1(x_1, y_1)]^2 + [d_2(x_2, y_2)]^2 + \dots + [d_n(x_n, y_n)]^2}$.

Usando a proposição anterior, provaremos que essas métricas são uniformemente equivalentes. Para isso, vejamos que

1.

$$\begin{aligned} d'(z_1, z_2) &= \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \dots, d_n(x_n, y_n)\} = d_i(x_i, y_i) \\ &\Rightarrow d''(z_1, z_2) = \sqrt{[d_1(x_1, y_1)]^2 + [d_2(x_2, y_2)]^2 + \dots + [d_n(x_n, y_n)]^2} \\ &\geq \sqrt{[d_i(x_i, y_i)]^2} = d_i(x_i, y_i) \\ &\Leftrightarrow d'(z_1, z_2) \leq d''(z_1, z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in M. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
d''(z_1, z_2) &= \sqrt{[d_1(x_1, y_1)]^2 + [d_2(x_2, y_2)]^2 + \cdots + [d_n(x_n, y_n)]^2} \\
&\leq \sqrt{[d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + \cdots + d_n(x_n, y_n)]^2} \\
&= d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + \cdots + d_n(x_n, y_n) = d(z_1, z_2) \\
&\Leftrightarrow d''(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in M.
\end{aligned}$$

A desigualdade $d(z_1, z_2) \leq n \cdot d'(z_1, z_2)$ é óbvia. Assim, para quaisquer $z_1, z_2 \in M$, valem as desigualdades:

$$d'(z_1, z_2) \leq d''(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_2) \leq n \cdot d'(z_1, z_2).$$

Essas desigualdades mostram que d' é uniformemente equivalente às métricas d'' e d . Segue-se daí que as aplicações $i_1 : (M, d') \rightarrow (M, d)$, $i_2 : (M, d) \rightarrow (M, d')$, $i_3 : (M, d') \rightarrow (M, d'')$ e $i_4 : (M, d'') \rightarrow (M, d')$ são uniformemente contínuas. De acordo com a Proposição 1.14, também são uniformemente contínuas as funções $i_3 \circ i_2 : (M, d) \rightarrow (M, d'')$ e $i_1 \circ i_4 : (M, d'') \rightarrow (M, d)$. Sendo $(i_3 \circ i_2)^{-1} = i_1 \circ i_4$, as métricas d'' e d são uniformemente equivalentes.

Em particular, as métricas definidas no Exemplo 1.3 para o $\mathbb{R}^n$ são uniformemente equivalentes.

1.8 Sequências de cauchy e espaços métricos completos

Muitas vezes precisamos calcular o limite de uma sequência e algumas vezes saber apenas se uma sequência converge ou não já é suficiente para resolver vários problemas. Dessa forma, determinar condições que garantam a convergência de uma sequência pode ajudar a resolver problemas. Essas condições são chamadas de critérios de convergência. Neste trabalho, para resolver alguns problemas tomaremos sequências de Cauchy em espaços métricos completos. Por isso, nesta seção, definiremos o que são sequências de Cauchy e espaços métricos completos, exibiremos e demonstraremos alguns resultados relacionados a estes conceitos.

Definição 1.28. Uma sequência (x_n) de pontos em um espaço métrico (M, d) é dita de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, for possível encontrar um número natural n_0 tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Proposição 1.29. Toda sequência convergente em (M, d) é de Cauchy.

Demonstração: Seja $(x_n) \rightarrow x$ uma sequência em M . Por definição, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Se tomarmos $m, n > n_0$ teremos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Assim, (x_n) é de Cauchy. ■

Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M será limitada quando o conjunto dos seus termos for limitado, isto é, quando existir uma constante $K > 0$ tal que $d(x_n, x_m) \leq K$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.30. *Toda sequência de Cauchy em M é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M . Tomando $\varepsilon = 1$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_n) < 1, \forall m, n > n_0.$$

Seja $A = \{d(x_n, x_m) \in \mathbb{R}; m, n \leq n_0\}$ então A é finito e existe $a = \max(A)$. Dessa forma,

$$d(x_m, x_n) \leq a + 1, \forall m, n \in \mathbb{N}. ■$$

Proposição 1.31. *Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy e (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) . Se (x_{n_k}) converge para $a \in M$, então (x_n) converge também para a .*

Demonstração: Como x_n é de Cauchy, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } m, n > n_1.$$

Além disso, como $\lim x_{n_k} = a$, para cada $\varepsilon > 0$, deve existir um $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n_k > n_2.$$

Pondo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e usando a desigualdade triangular, obtemos

$$n, n_k > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. ■$$

Portanto, $\lim x_n = a$.

Definição 1.32. *Dizemos que um espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

As duas últimas proposições expostas aliadas ao Teorema de Bolzano-Weierstrass, que pode ser encontrado no capítulo quatro da referência [5], o qual afirma que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente, podem ser usadas para provar que $\mathbb{R}$, munido da métrica euclidiana, é um espaço métrico completo, como exposto na proposição seguinte.

Proposição 1.33. *O Conjunto dos Números Reais é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Então (x_n) é limitada e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge para $a \in \mathbb{R}$, digamos. Pela Proposição 1.31, devemos ter $\lim x_n = a$. ■

Para provar as duas próximas proposições tomaremos nos espaços produtos a métrica da soma. No entanto, o resultado continuará válido se trocarmos essa métrica por qualquer outra que seja uniformemente equivalente a ela.

Proposição 1.34. *Sejam M e N espaços métricos. Para que uma sequência (x_n, y_n) em $M \times N$ seja de Cauchy nesse espaço é necessário e suficiente que (x_n) e (y_n) sejam de Cauchy em, respectivamente, M e N .*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d_1((x_m, y_m), (x_n, y_n)) = d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) < \varepsilon.$$

Assim, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ e $d(y_m, y_n) < \varepsilon$ sempre que $m, n > n_0$. Isso implica que (x_n) e (y_n) são de Cauchy.

Por outro lado, supondo que (x_n) e (y_n) são de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ de maneira que

$$m, n > n_1 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad m, n > n_2 \Rightarrow d(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) = d_1((x_m, y_m), (x_n, y_n)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isso prova que (x_n, y_n) é de Cauchy. ■

Proposição 1.35. *Sejam M e N métricos completos. Então o espaço $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Demonstração: Suponhamos que $M \times N$ seja completo. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M . Fixado $y \in N$, a sequência (x_n, y) é de Cauchy em $M \times N$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe um índice n_0 de modo que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d((x_m, y), (x_n, y)) = d_1(x_m, x_n) + d(y, y) = d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Logo, por ser de Cauchy, a sequência (x_n, y) converge para algum ponto $(x, y) \in M \times N$ e, pela Proposição 1.19, (x_n) converge para x . Isso implica que M é completo. De modo inteiramente análogo, podemos provar que N também é completo.

Reciprocamente, se (x_n, y_n) é uma sequência de Cauchy no espaço $M \times N$, então (x_n) e (y_n) também são de Cauchy em, respectivamente, em M e N pela Proposição 1.34. Da completude de M e N existem $x \in M$ e $y \in N$ tais que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Ainda de acordo com a Proposição 1.19, temos

$$\lim(x_n, y_n) = (x, y).$$

■

Esse fato pode ser generalizado para um produto $M = M_1 \times \cdots \times M_n$.

Proposição 1.36. *Sejam M e N espaços métricos, (x_n) uma sequência de Cauchy em M e $f : M \rightarrow N$ uma função uniformemente contínua. A sequência $(f(x_n))$ é de Cauchy (em N).*

Demonstração: Tomando $\varepsilon > 0$, por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Como (x_n) é de Cauchy, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \delta.$$

Dessa forma, $m, n > n_0 \Rightarrow d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$. Assim, $(f(x_n))$ é de Cauchy em N . ■

Corolário 1.37. *Se d_1 e d_2 são métricas uniformemente equivalentes sobre M , então as sequências de Cauchy de (M, d_1) e (M, d_2) são as mesmas.*

Demonstração: Sejam (x_n) uma sequência em (M, d_1) e $i : (M, d_1) \rightarrow (M, d_2)$ a aplicação identidade. Já sabemos que i é uniformemente contínua. Assim, de acordo com a proposição anterior, $(i(x_n)) = (x_n)$ é de Cauchy em (M, d_2) . De modo inteiramente análogo, podemos provar que toda sequência de Cauchy em (M, d_2) também é de Cauchy em (M, d_1) . ■

Esse resultado será muito útil para provarmos resultados que serão usados para demonstrarmos o Teorema Gráfico Fechado. Isso se deve ao fato de que esse corolário nos dá uma certa liberdade para escolhermos com qual métrica vamos trabalhar com as sequências de Cauchy dentre um conjunto de métricas uniformemente equivalentes. A vantagem disso é que algumas métricas tornam o nosso trabalho mais simples e outras não.

1.9 Noções básicas da Topologia

Estudaremos nesta seção as principais propriedades topológicas dos espaços métricos. Essas propriedades se baseiam nas noções de proximidade e limite. Para o estudo das propriedades topológicas de um espaço métrico M , usaremos as definições de bola aberta e sequência de pontos em M , que foram expostas em seções anteriores.

1.9.1 Conjuntos abertos

Definição 1.38. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Dizemos que um ponto $a \in X$ é interior a X quando existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a; \varepsilon) \subset X$. Todos os pontos interiores a X formam um conjunto chamado interior de X em M , que será denotado por $\text{int}X$.*

Se M é um espaço métrico e $X \subset M$, então, para que $a \in \text{int}X$, é necessário que $a \in X$. Isso mostra que $\text{int}X \subset X$. A inclusão $\text{int}X \supset X$ nem sempre é verdadeira. Um exemplo simples ocorre quando tomamos $\mathbb{R}$, munido da norma euclidiana, e $X = (0, 1) \cup \{10\}$. Para todo $\varepsilon > 0$ dado, tem-se $B(10, \varepsilon) = (10 - \varepsilon, 10 + \varepsilon) \not\subset X$, ou seja, $10 \notin \text{int}X$. Logo, $X \not\subset \text{int}X$. Quando $X = \text{int}X$, diz-se que X é aberto em M .

Exemplo 1.39. *O uso de bolas abertas é muito recorrente ao se estudar conjuntos abertos. Além disso, as bolas abertas de qualquer espaço métrico (M, d) apresentam uma propriedade muito útil: em M qualquer $B(a; r)$ é um conjunto aberto. De fato, para cada $x \in B(a; r)$, basta expor um $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset B(a; r)$. Para tanto, note que, se $x \in B(a; r)$, então $d(a, x) < r$. Assim, $r - d(a, x) > 0$ e podemos tomar $\varepsilon = r - d(a, x)$. Para esse valor, vejamos que, se $y \in B(x; \varepsilon)$, então $d(x, y) < \varepsilon$. Isso implica que $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \varepsilon = r$. Logo $y \in B(a; r)$, o que implica $B(x; \varepsilon) \subset B(a; r)$. Particularmente, todo intervalo aberto em $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto, pois todo intervalo (a, b) pode ser visto como uma bola $B(\frac{b+a}{2}; \frac{b-a}{2})$ em $\mathbb{R}$.*

Proposição 1.40. *Seja C a coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico M . Então:*

1. $M \in C$ e $\emptyset \in C$;
2. Se $A_1, \dots, A_n \in C$, então $\bigcap_{i=1}^n A_i \in C$;
3. Se $A_\lambda \in C$ para todo $\lambda \in L$, então $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in C$.

Demonstração: Fixado um espaço métrico M , então M é aberto em si próprio, pois toda bola aberta em M contém apenas pontos de M . O conjunto vazio também é aberto, pois, caso não fosse, deveria existir um $a \in \emptyset$ tal que $B(a; \varepsilon) \not\subset \emptyset$, para todo $\varepsilon > 0$, o que é um absurdo. A fim de provar a segunda afirmação é necessário e suficiente mostrar que, para

todo $a \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$, existe algum $\varepsilon > 0$ satisfazendo a inclusão $B(a; \varepsilon) \subset A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Como A_i é aberto então existe $\varepsilon_i > 0$, para cada $i = 1, \dots, n$, tal que $B(a; \varepsilon_i) \subset A_i$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, tem-se então $B(a; \varepsilon) \subset B(a; \varepsilon_i)$, para todo $1 \leq i \leq n$. Isso implica que $B(a; \varepsilon) \subset A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Por fim, para provar que A é aberto, tomamos $a \in A$ e notamos que existe um índice $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Como esse conjunto é aberto, há uma bola $B(a; \varepsilon) \subset A_\lambda$. Isso mostra que $B(a; \varepsilon) \subset A$ e, portanto, A é aberto. ■

Corolário 1.41. *Um conjunto $A \subset M$ é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.*

Demonstração: Com efeito, se $A = \bigcup B_\lambda$, onde $\lambda \in L$ e B_λ é uma bola aberta em A , então, pela proposição anterior, A é aberto em M . Por outro lado, sendo A aberto, para cada $a \in A$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $a \in B(a; \varepsilon) \subset A$. Assim, $\{a\} \subset B(a; \varepsilon) \subset A$. Como $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$, tomando reuniões, temos que

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \subset \bigcup_{a \in A} B(a; \varepsilon) \subset A \Leftrightarrow A = \bigcup_{a \in A} B(a; \varepsilon)$$

■

O próximo resultado envolve a definição de imagem inversa de uma função. Por isso, expomos abaixo essa definição.

Definição 1.42. *Sejam $f : M \rightarrow N$ uma função e $A \subset N$. Definimos a imagem inversa do conjunto A pela função f como o conjunto $f^{-1}(A) = \{a \in M; f(a) \in A\}$.*

Proposição 1.43. *Sejam M e N espaços métricos. A fim de que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa de todo subconjunto aberto $A \subset N$ seja um aberto em M .*

Demonstração: Suponhamos que f seja contínua. Dado $A \subset N$, devemos provar que $f^{-1}(A)$ é aberto em M . Para tanto, observamos que, para cada $a \in f^{-1}(A)$, têm-se que $f(a) \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ satisfazendo $B(f(a); \varepsilon) \subset A$. Além disso, por f ser contínua em a , para a bola $B(f(a); \varepsilon)$ existe uma bola $B(a; \delta) \subset M$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon) \subset A$. Pela definição de imagem inversa, temos que $B(a; \delta) \subset f^{-1}(A)$ e, portanto, $f^{-1}(A)$ é aberto.

Por outro lado, suponhamos agora que a imagem inversa de cada aberto $A \subset N$ seja um conjunto aberto de M . Dado $a \in M$ e um $\varepsilon > 0$, temos que a bola $A = B(f(a); \varepsilon)$ é um aberto em N . Por hipótese, $f^{-1}(A)$ é aberto em M , que contém a . Dessa forma, existe $\delta > 0$ tal que $B(a; \delta) \subset f^{-1}(A)$, o que implica $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$. Isso mostra que f é contínua em a . ■

1.9.2 Conjuntos fechados

Dizemos que um ponto $a \in M$ é aderente ao subconjunto $X \subset M$ quando $d(a, X) = 0$. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que $a \in X$ ou que existam pontos arbitrariamente próximos de a , ou seja, para cada $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Indicaremos o conjunto formado pelos pontos aderentes ao subconjunto X por $\overline{X}$ e o chamaremos de fecho de X .

Pela observação feita acima, tem-se que $X \subset \overline{X}$. Além disso, se $d(a, X) \neq 0$, então a não será aderente a A e existirá uma bola centrada em a que não conterá pontos de X . Basta tomar, por exemplo, uma bola de raio $\varepsilon = \frac{d(a, X)}{2}$. A proposição abaixo expõem uma condição equivalente à definição de ponto aderente a um conjunto.

Proposição 1.44. *Dados um espaço métrico M e um subconjunto $X \subset M$. Tem-se que $x \in \overline{X}$ se, e somente se, existe uma sequência de pontos (x_n) em X com $\lim x_n = x$.*

Demonstração: Com efeito, se $x \in X$, então, por exemplo, podemos tomar $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. No entanto, se $x \notin X$ e $x \in \overline{X}$, então, para todo $\varepsilon = \frac{1}{n}$, podemos tomar $x_n \in X$ de tal maneira que $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Como $d(x_n, x) \geq 0$ e $\lim \frac{1}{n} = 0$, pelo Teorema 1.11, temos $\lim d(x_n, x) = 0$, o que implica $x_n \rightarrow x$. Reciprocamente, se existe (x_n) em X com $\lim x_n = x$, então existe, para todo $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in X$, $d(x_n, x) < \varepsilon$. Novamente pelo teorema acima citado, temos que $x \in \overline{X}$. ■

Outra propriedade relacionada ao fecho de conjuntos é a seguinte:

$$\text{Se } X \subset Y, \text{ então } \overline{X} \subset \overline{Y}.$$

A prova para esse fato é simples se levarmos em conta que toda sequência (x_n) em X também pode ser tomada em Y . Para concluir, basta aplicar a Proposição 1.44.

Abaixo expomos e demonstramos alguns resultados relacionados ao fecho de um conjunto X .

Proposição 1.45. *Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Os diâmetros de X e de $\overline{X}$ são iguais.*

Demonstração: Devemos provar que $\text{diam}(\overline{X}) = \text{diam}(X)$. Para tanto, mostraremos que:

$$\text{diam}(\overline{X}) \geq \text{diam}(X) \text{ e } \text{diam}(\overline{X}) \leq \text{diam}(X).$$

Da definição de diâmetro de um conjunto, segue diretamente que

$$X \subset \overline{X} \Rightarrow \text{diam}(\overline{X}) \geq \text{diam}(X).$$

Como $\text{diam}(\overline{X}) = \sup\{d(x, y) \in \mathbb{R}; x, y \in M\}$, então, da definição de supremo de um conjunto, existem $x_0, y_0 \in \overline{X}$ tais que

$$\text{diam}(\overline{X}) \leq d(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Além disso, a definição de fecho nos garante que existem $x_1, y_1 \in X$ de modo que

$$d(x_0, x_1) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad d(y_0, y_1) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Aplicando a desigualdade triangular, obtemos que

$$\begin{aligned} \text{diam}(\overline{X}) &\leq d(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, y_0) + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, y_1) + d(y_1, y_0) + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \text{diam}(X) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Dessa forma, $\text{diam}(\overline{X}) \leq \text{diam}(X) + \varepsilon$. Como ε pode assumir qualquer valor positivo, necessariamente tem-se $\text{diam}(\overline{X}) \leq \text{diam}(X)$. ■

Seja M espaço métrico, dizemos que $X \subset M$ é denso em M quando $\overline{X} = M$. Isso acontece quando toda bola aberta em M contém algum ponto de X .

Exemplo 1.46. O conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, porque qualquer intervalo aberto em $\mathbb{R}$ contém números racionais. Para mais detalhes, consulte o capítulo um da referência [5]. Fixado $n \in \mathbb{N}$, ponhamos $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$. O Conjunto $\mathbb{Q}^n$ é denso em $\mathbb{R}^n$ quando munido da métrica euclidiana. Com efeito, tomando $\varepsilon > 0$ qualquer e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, basta provar que $B(x; \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$. Para isso, basta escolher $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ como segue. Para cada $i \in \mathbb{N}$, escolha q_i de modo que $|x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Essa escolha é possível porque $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} d(x, q) &= \sqrt{(x_1 - q_1)^2 + \cdots + (x_n - q_n)^2} \\ &\Rightarrow d(x, q) < \sqrt{n \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} \\ &\Rightarrow d(x, q) < \varepsilon \\ &\Rightarrow q \in B(x; \varepsilon) \end{aligned}$$

Os resultados seguintes serão de grande importância para o estudo que será feito sobre a Análise Funcional neste trabalho.

Proposição 1.47. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de um espaço métrico é fechado.*

Demonstração: Seja $F \subset M$, com M completo. Tomando uma sequência de Cauchy (x_n) em F , temos que existe $\lim x_n \in M$. Como F é fechado, então toda sequência convergente em M cujos termos estão em F converge em F (veja a Proposição 1.9.2). Logo, $a \in F$ e, portanto, F é completo. Reciprocamente, sejam M é um espaço métrico qualquer e $F \subset M$ fechado. Dada a sequência (x_n) em F tal que $\lim x_n = x \in M$, tem-se que (x_n) é de Cauchy, pois toda sequência convergente é de Cauchy. Dessa forma, existe $a \in F$ tal que $x_n \rightarrow a$. Da unicidade do limite de uma sequência, temos que $x = a$ e, portanto, F é fechado. ■

Proposição 1.48. *Sejam M um espaço métrico e $F \subset M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. F é fechado em M .
2. F^c é aberto em M .

Demonstração: Suponhamos que F é fechado. Assim, se $x \in F^c$, então $x \notin \overline{F}$. Isso implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x; \varepsilon) \subset F^c$, o que prova que F^c é aberto. Suponhamos agora que F^c é aberto. Se $x \in \overline{F}$, então $x \notin F^c$. De fato, se $x \in F^c$, então existiria $\varepsilon > 0$ de forma que $B(x; \varepsilon) \subset F^c$. Mas isso contraria o fato de que $x \in \overline{F}$. Fica demonstrado assim que $x \in F$. Onde $\overline{F} \subset F$. ■

Corolário 1.49. *Para todo $X \subset M$, seu fecho $\overline{X}$ é um conjunto fechado.*

Demonstração: De acordo com a proposição precedente, é suficiente provar que $M - \overline{X}$ é aberto. Tomando $x \in M - \overline{X}$, observe que $x \notin \overline{X}$. Isso implica que existe uma bola $B(x; \varepsilon)$ que não contém pontos de X . Ora, mas isso implica que $B(x; \varepsilon) \subset M - \overline{X}$. Logo, o complementar de $\overline{X}$ é aberto. ■

Proposição 1.50. *Suponha que M seja um espaço métrico e $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma coleção de subconjuntos fechados $F_\lambda \subset M$. Sendo assim, as afirmações seguintes são verdadeiras:*

1. Os conjuntos $\emptyset$ e M são fechados.
2. Se L é finito, então $F = \bigcup_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechado em M .
3. O conjunto $A = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechado em M para L finito ou infinito.

Demonstração: Como $\emptyset^c = M$ e $\emptyset, M$ são abertos em M , têm-se que $\emptyset, M$ são fechados de acordo com a Proposição 1.48. Ainda de acordo com essa proposição, os conjuntos $A_i = F_i^c$ são abertos em M , com $1 \leq i \leq n$. Dessa forma,

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n F_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^n F_i \right)^c.$$

Afim de provar o item 3, ponhamos $A_\lambda = F_\lambda^c$ para cada $\lambda \in L$. Segue-se daí que cada A_λ é aberto e portanto sua reunião

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} F_\lambda^c = \left(\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \right)^c$$

é um aberto em M . Assim, $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechado. ■

Proposição 1.51. *Sejam M e N espaços métricos. A função $f : M \rightarrow N$ será contínua se, e somente se, a imagem inversa de todo subconjunto fechado $F \subset N$ for um subconjunto fechado de M .*

Demonstração: Supondo que $f : M \rightarrow N$ é contínua, para cada $F \subset N$ fechado, tem-se que F^c é aberto e, de acordo com a Proposição 1.43, $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ é aberto. Mas isso implica que $(f^{-1}(F))$ é fechado. Por outro lado, se a imagem inversa de todo fechado em N é um fechado em M então, para cada $A \subset N$ aberto, $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ é fechado em M . Daí $f^{-1}(A)$ é aberto. Segue da Proposição 1.43 que f é contínua. ■

1.10 Teorema de Baire

Finalmente, de posse de alguns resultados e definições contidas neste texto, estamos próximos de poder apresentar e demonstrar detalhadamente o teorema de Baire. Para nos auxiliar nessa demonstração, apresentamos abaixo uma definição e um resultado.

Definição 1.52. *Seja M um espaço métrico. Dizemos que um subconjunto $X \subset M$ é magro em M quando X pode ser expresso como uma reunião, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, de modo que $\text{int} \overline{X_n} = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Equivalentemente, X é magro em M quando $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado e tem interior vazio em M .

Usando o fato de que toda união enumerável de conjuntos enumeráveis é também enumerável, demonstra-se facilmente que toda união enumerável de conjuntos magros é também um conjunto magro.

Proposição 1.53. *Um espaço métrico M é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ de subconjuntos fechados não vazios $F_n \subset M$, com $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} F_n = 0$, existe um ponto $a \in M$ de forma que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.*

Demonstração: Suponhamos que M seja completo e que (F_n) seja uma sequência que satisfaz as condições do enunciado da proposição. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $x_n \in F_n$. Dessa forma, podemos construir uma sequência de pontos em M . Essa sequência tem a propriedade de que, dado $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_m, x_n \in F_{n_0}$ desde que $m, n > n_0$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} F_n = 0$, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $\text{diam} F_n < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$. Desse modo, se $m, n > n_0$, então $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ e, portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy. Da completude de M , segue que (x_n) converge para algum $a \in M$. Por construção, para qualquer $q \in \mathbb{N}$, tem-se $x_n \in F_q$ se $n \geq q$. Isso implica que $a \in F_q$, para todo q . Logo, $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Resta mostrar agora que a é único. Para tanto, suponha que exista $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, com $a \neq b$. Sendo assim, $0 \leq d(a, b) \leq \text{diam} F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas isso é um absurdo, pois, de acordo com o Teorema 1.18, $d(a, b) = 0$, ou seja, $a = b$. Portanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.

Reciprocamente, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M . Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponhamos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Por construção, temos $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$. Já sabemos que, se $X \subset Y$, então $\overline{X} \subset \overline{Y}$. Daí decorre que $(\overline{X}_n)$ é uma sequência de subconjuntos fechados encaixados não vazios de M .

Da Proposição 1.45, sabemos que $\text{diam} X_n = \text{diam} \overline{X}_n$. Como (x_n) é de Cauchy, temos

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} \overline{X}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} X_n.$$

Por hipótese, existe $a \in M$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}_n = \{a\}$. Provaremos que $x_n \rightarrow a$. Para isso, observe que, fixando $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\text{diam} X_{n_0} < \varepsilon$, temos que $x_{n_0+n}, a \in \overline{X}_{n_0}$, para todo $n \geq n_0$. Isso implica que $d(x_{n_0+n}, a) < \text{diam} X_{n_0} < \varepsilon$ e, portanto, $x_n \rightarrow a$. ■

Teorema 1.54. (Teorema de Baire) *Seja M um espaço métrico completo. Todo conjunto magro em M possui interior vazio. Equivalentemente: se $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M e tem interior vazio, então $\text{int} F = \emptyset$. Ou então: Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ são abertos em M , então a intersecção enumerável $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é subconjunto denso em M .*

Demonstração: Provaremos a terceira afirmação. Devemos provar que, dada uma bola $B \subset M$ então $B \cap A \neq \emptyset$. Para isso, observamos inicialmente que, como cada A_n é denso em M , toda bola aberta em M contém algum ponto de A_n . Dessa forma, tomando qualquer bola $B \subset M$, tem-se que $B \cap A_1$ é não-vazio e aberto. Logo, existe uma bola $B_1 \subset B \cap A_1$. Podemos tomar o raio de B_1 de modo que não seja superior a $\frac{1}{2}$ e $\overline{B}_1 \subset B \cap A_1$.

Como A_2 também é aberto e denso, podemos garantir que $B_1 \cap A_2$ é não-vazio e aberto. Desse modo, $B_1 \cap A_2$ contém uma bola B_2 . Podemos tomar o raio de B_2 de forma que seja inferior a $\frac{1}{3}$ e $\overline{B}_2 \subset B_1 \cap A_2$.

Defini-se indutivamente B_{n+1} da seguinte forma: como A_n é denso, $B_n \cap A_{n+1}$ é aberto e não-vazio. Logo, podemos tomar uma bola aberta $B_{n+1} \subset B_n \cap A_{n+1}$ de tal forma que seu raio seja menor que $\frac{1}{n+2}$ e $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap A_{n+1}$.

Assim, construímos uma sequência (B_n) tal que

$$\overline{B_1} \supset \overline{B_2} \supset \cdots \supset \overline{B} \supset \cdots, \overline{B_{n+1}} \subset \overline{B_n} \cap A_{n+1} \text{ e } \lim \text{diam} B_n = 0.$$

De acordo com a Proposição 1.53, temos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} = \{a\}$, isto é, $a \in B_n \subset A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, $a \in B_1 \subset B$ e, portanto, $a \in A \cap B$. ■

Corolário 1.55. *Seja M um espaço métrico completo. Se $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M , então existe pelo menos um n tal que $\text{int} F_n \neq \emptyset$.*

Demonstração: Se não existisse $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int} F_n \neq \emptyset$, então, pelo Teorema de Baire, a reunião dos F_n teria interior vazio em M , mas isso é um absurdo, pois, por hipótese, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = M$. ■

2 OPERADORES LINEARES CONTÍNUOS

Neste capítulo, abordaremos alguns conceitos e resultados relativos aos espaços vetoriais. Esses espaços, como sabemos da Álgebra Linear, são dotados de uma estrutura algébrica. Já os espaços métricos são dotados de uma estrutura topológica, que advém de uma métrica. Veremos que um espaço vetorial normado é um conjunto dotado dessas duas estruturas. Veremos também que faz sentido falar da continuidade de um operador linear quando este for definido sobre espaços vetoriais normados e caracterizaremos os operadores lineares contínuos. Além disso, também serão apresentados as definições de espaços de Banach e de conjuntos conexos em um espaço vetorial normado. Todas essas definições e resultados terão grande relevância no próximo capítulo quando formos aplicar o teorema de Baire à Análise Funcional. Para a elaboração deste capítulo, usamos as referências [1], [2] e [7].

2.1 Espaços normados

Todo operador linear é definido sobre espaços vetoriais. Neste trabalho, serão abordados os operadores lineares definidos sobre espaços vetoriais normados. Por isso, dedicaremos esta seção a um breve estudo desses espaços.

Consideraremos os espaços vetoriais normados definidos tanto sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ como sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Quando não houver necessidade de especificar sobre qual corpo o espaço foi definido, apenas indicaremos o corpo dos escalares por $\mathbb{F}$. O vetor nulo de cada espaço vetorial será denotado por 0.

Definição 2.1. *Uma norma em um espaço vetorial E definido sobre $\mathbb{F}$ é uma função $\| \cdot \|: E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. **(Positividade Definida)** $\| x \| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\| x \| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.
2. **(Dilatação)** $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$ para todo $x \in E$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{F}$, onde $| \alpha |$ representa o módulo de α .
3. **(Desigualdade Triangular)** $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$, $\forall x, y \in E$.

O par $(E, \| \cdot \|)$ é chamado de espaço normado. Assim como no caso dos espaços métricos, em muitos casos, refirir-nos-emos ao espaço normado E e deixaremos subentendido a qual norma estaremos nos referindo. Um espaço vetorial munido de uma norma será chamado de espaço vetorial normado ou simplesmente espaço normado.

Exemplo 2.2. Como já sabemos da Álgebra Linear, $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial. Quando munimos $\mathbb{R}$ da norma $\| \cdot \|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada número real associa seu módulo, temos um espaço normado. O conjunto $\mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Com qualquer uma das normas abaixo, esse conjunto torna-se um espaço normado.

1. Norma Euclidiana: $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
2. Norma da Soma: $\| x \| = \sum_{i=1}^n |x_i|$
3. Norma do Máximo: $\| x \| = \max\{|x_i|; 1 \leq i \leq n\}$

Todo espaço normado E pode ser considerado naturalmente um espaço métrico quando tomamos a seguinte métrica em E :

$$d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } d(x, y) = \| x - y \|$$

Esse fato segue diretamente das propriedades que definem uma norma. Para demonstrá-lo, tomamos $x, y, z \in E$ e observamos que:

1. Se $x \neq y$, então $x - y \neq 0$ e $d(x, y) \geq 0$. Teremos $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \| x - y \| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = \| x - y \| = \| (-1) \cdot (y - x) \| = |-1| \cdot \| y - x \| = \| y - x \| = d(y, x)$;
3. $d(x, z) = \| x - z \| = \| x - y + y - z \| \leq \| x - y \| + \| y - z \| = d(x, y) + d(y, z)$.

Quando uma métrica d é definida a partir de uma norma $\| \cdot \|$, dizemos que d é induzida ou que provém de $\| \cdot \|$.

Seja E um espaço vetorial definido sobre $\mathbb{F}$. Podemos somar elementos de E e multiplicá-los por elementos $\mathbb{F}$ e, se E for normado, também poderemos calcular a distância entre dois elementos quaisquer de E considerando a métrica induzida por sua norma. Essa observação será importante para tratarmos da continuidade de um operador linear definido sobre espaços normados.

Exemplo 2.3. Se A é um subconjunto de um espaço normado E definido sobre $\mathbb{F}$ e $\alpha \in \mathbb{F}$, então podemos definir o conjunto $\alpha A = \{\alpha x; x \in A\}$. Esse conjunto pode ser normado com a norma induzida do espaço E e, portanto, com a métrica que provém dessa norma. Uma propriedade interessante desse conjunto é que $\overline{\alpha A} = \alpha \overline{A}$, para todo escalar $\alpha \in \mathbb{F}$. De fato, se $\alpha x \in \overline{\alpha A}$, então existe uma sequência (x_n) de pontos em A que converge para x . Afirmação: $\lim \alpha x_n = \alpha x$. Para ver isso, note que $\| \alpha x_n - \alpha x \| = \| \alpha(x_n - x) \| =$

$|\alpha| \|x_n - x\|$. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, a convergência de (x_n) para x nos garante que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \Leftrightarrow |\alpha| \|x_n - x\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim \alpha x_n = \alpha x$$

Logo, $\alpha x \in \overline{\alpha A}$ e, com isso, $\alpha \overline{A} \subset \overline{\alpha A}$.

Seja $y \in \overline{\alpha A}$. Então existe uma sequência (αx_n) em αA que converge para y . Mostraremos que $y \in \alpha \overline{A}$. Para isso, observe que, se $(\alpha x_n) \rightarrow y$, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|\alpha x_n - y\| < \varepsilon \Leftrightarrow |\alpha| \left\|x_n - \frac{y}{\alpha}\right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \left\|x_n - \frac{y}{\alpha}\right\| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \Leftrightarrow \lim x_n = \frac{y}{\alpha}$$

Note que $x_n \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se daí que $\frac{y}{\alpha} \in \overline{A}$, o que implica $y = \alpha \cdot \frac{y}{\alpha} \in \alpha \overline{A}$. Isso demonstra que $\overline{\alpha A} \subset \alpha \overline{A}$.

Proposição 2.4. Toda norma é uma função contínua.

Demonstração: Seja E munido de uma norma $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ qualquer. Por simplicidade, tomaremos em E a métrica induzida da norma e em $\mathbb{R}$ a métrica euclidiana.

Da desigualdade triangular, para todos $x, y \in E$, temos que

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \\ &\Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|y\| &= \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \\ &\Leftrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| \\ &\Leftrightarrow -\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|. \end{aligned}$$

Logo, $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|y - x\| \Leftrightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. Essa última desigualdade implica que norma é uma função lipschitziana, que é sempre contínua.

Observe que tomamos métricas particulares em E e $\mathbb{R}$. Mas, de posse da Proposição 1.23, temos que esse resultado continua válido se trocarmos as métricas usadas por métricas equivalentes.



No Exemplo 1.5, definimos os espaços produtos e exibimos algumas métricas para esses espaços. Agora abordaremos o conjunto formado pelo produto de espaços normados.

Sejam $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_i, \|\cdot\|_i), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ espaços normados sobre $\mathbb{F}$, o conjunto formado pelo produto cartesiano destes conjuntos é um espaço normado quando munido de qualquer uma das normas abaixo.

1. Norma da soma: $\|(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)\| = \|a_1\|_1 + \dots + \|a_i\|_i + \dots + \|a_n\|_n$.
2. Norma euclidiana: $\|(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)\| = \sqrt{\|a_1\|_1^2 + \dots + \|a_i\|_i^2 + \dots + \|a_n\|_n^2}$.
3. Norma do máximo: $\|(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)\| = \max\{\|a_1\|_1, \dots, \|a_i\|_i, \dots, \|a_n\|_n\}$.

2.2 Espaços de Banach

Definição 2.5. Diremos que um espaço vetorial normado é um espaço de Banach se for completo com a métrica induzida da sua norma.

Exemplo 2.6. Na Proposição 1.35, vimos que o produto cartesiano de dois espaços métricos completos é também um espaço métrico completo. Podemos usar esse resultado para mostrar facilmente que, dados os espaços normados $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$, o conjunto $E_1 \times \dots \times E_n$ é completo se, e somente se, E_i é completo, com $i = 1, \dots, n$. De acordo com a Proposição 1.33, $\mathbb{R}$ é completo quando munido da métrica euclidiana, que provém da norma euclidiana. Então $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach quando munido dessa norma. O espaço $\mathbb{R}^n$ também o é quando munido de qualquer uma das normas definidas no Exemplo 2.2.

2.3 Operadores lineares contínuos

Da Álgebra Linear, sabemos que um operador linear é uma função T entre espaços vetoriais E e F definidos sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$ tal que, dados $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{F}$, $T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y)$. Se E e F forem espaços normados, então podem naturalmente ser dotados da métrica induzida da norma e fará sentido nos questionarmos sobre a continuidade de T . Caso T seja contínua, isto é; para todo $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ sempre que $\|x - x_0\| < \delta$; então será chamado de operador linear contínuo.

O conjunto formado por todos os operadores lineares contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{L}(E; F)$. Esse conjunto é um espaço vetorial quando munido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar de funções. Um dos elementos desse espaço é a aplicação nula. Dados E e F espaços normados, $T : E \rightarrow F$ é nula se $T(E) = \{0\}$. Uma propriedade interessante de todo operador linear T é que $T(0) = 0$.

Dado $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo, o conjunto $T(E) \subset F$ é ilimitado desde que T não seja a aplicação nula. Isso é óbvio se levarmos em conta que $T(E)$ é

um subespaço vetorial de F . A próxima proposição exhibe algumas caracterizações dos operadores lineares contínuos.

Como fizemos no início da seção, cometeremos alguns abusos na distinção das normas. indicaremos todas por $\| \cdot \|$. No entanto, o contexto nos permitirá determinar sobre qual espaço a norma em questão estará definida em função de seus elementos. Por exemplo, sejam E e F espaços normados e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Se $x \in E$, então $\| x \|$ indicará a norma de x segundo a qual E é normado e $\| T(x) \|$ indicará a norma de $T(x)$ segundo a qual F é normado. Já $\| T \|$ indicará a norma do operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Proposição 2.7. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{F}$ e $T : E \rightarrow F$ linear. As propriedades seguintes são equivalentes:*

1. T é lipschitziano.
2. T é uniformemente contínuo.
3. T é contínuo.
4. T é contínuo em algum ponto de E .
5. T é contínuo na origem.
6. $\sup\{\| T(x) \|; x \in E \text{ e } \| x \| \leq 1\} < \infty$.
7. Existe uma constante $C > 0$ de forma que $\| T(x) \| \leq C \| x \|$, para todo $x \in E$.

Demonstração: Já mostramos que uma função lipschitziana é também uniformemente contínua. As implicações (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (4) também são óbvias. A fim de provar que (4) $\Rightarrow$ (5), suponha que T seja contínuo no ponto x_0 . Então, por definição, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in E, \| x - x_0 \| < \delta \Rightarrow \| T(x) - T(x_0) \| < \varepsilon$. Se $x \in E$ é tal que $\| x - 0 \| = \| x \| < \delta$, então $\| (x + x_0) - x_0 \| = \| x \| < \delta$. Assim,

$$\begin{aligned} \| T(x) - T(0) \| &= \| T(x) \| = \| T(x) + T(x_0) - T(x_0) \| \\ &= \| T(x + x_0) - T(x_0) \| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra que T é contínuo em 0.

(5) $\Rightarrow$ (6) Se T é contínuo em $x = 0$, então, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ de forma que $\| T(x) - T(0) \| = \| T(x) \| < 1$ sempre que $\| x - 0 \| = \| x \| < \delta$. Observe que, se $\| x \| < 1$, então $\| \frac{\delta}{2}x \| < \delta$. Dessa forma, $\frac{\delta}{2} \| T(x) \| = \| T(\frac{\delta}{2}x) \| < 1$ e necessariamente devemos ter $\sup\{\| T(x) \|; x \in E \text{ e } \| x \| \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty$.

(6) $\Rightarrow$ (7) Seja $x \in E$. Se $x = 0$, então o resultado é óbvio. Supondo $x \neq 0$, temos

$$\frac{\| T(x) \|}{\| x \|} = \left\| T \left(\frac{x}{\| x \|} \right) \right\| \leq \sup\{\| T(y) \|; \| y \| \leq 1\}.$$

Isso implica que $\|T(x)\| \leq (\sup\{\|T(y)\|; \|y\| \leq 1\}) \|x\|$.

(7) $\Rightarrow$ (1) Se $x_1, x_2 \in E$, então

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq C \|x_1 - x_2\|.$$

Isso prova que T é lipschitziano com constante C . ■

A afirmação (6) desse teorema nos ensina como normar o espaço vetorial $\mathcal{L}(E, F)$. Para tanto, podemos definir

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}. \quad (2.1)$$

Pelo teorema anterior esse valor sempre existirá desde que $T \in \mathcal{L}(E, F)$, pois o conjunto das normas consideradas é limitado. Mostraremos agora que (2.1) define uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$. Com efeito, observamos que $\|T(x)\| \geq 0$ para todo $x \in E$. Assim, $\|T\| \geq 0$. Observe também que $\|T\| = 0 \Leftrightarrow \|T(x)\| = 0$, para todo x de modo que $\|x\| \leq 1$. Se $x \neq 0$, então

$$\|T(x)\| = \|x\| \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \|x\| \cdot 0 = 0.$$

Isso prova que T é a aplicação nula.

Seja $x \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Vejamos que

$$\|\alpha T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\alpha T(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\alpha| \|T(x)\| = |\alpha| \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = |\alpha| \|T\|.$$

Por fim, basta mostrar que vale a desigualdade triangular. Para tanto, tomamos $T, H \in \mathcal{L}(E, F)$ e notamos que

$$\begin{aligned} \|T + H\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(T + H)(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x) + H(x)\| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|T(x)\| + \|H(x)\|) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| + \sup_{\|x\| \leq 1} \|H(x)\| \\ &= \|T\| + \|H\|. \end{aligned}$$

O item 7 desse teorema também nos indica como podemos definir outra norma em $\mathcal{L}(E, F)$. Esse item afirma que, se $T : E \rightarrow F$ é contínua, então existe $C > 0$ de forma que

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < C, \quad \forall x \in E, \text{ com } x \neq 0.$$

Usando esse fato, podemos definir a seguinte norma em $\mathcal{L}(E, F)$:

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}; x \in E \text{ e } x \neq 0 \right\}. \quad (2.2)$$

Como no caso das métricas, também definiremos o que são normas equivalentes. Por simplicidade, escreveremos $E_1 = (E, \|\cdot\|_1)$ e $E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$.

Definição 2.8. Dizemos que duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em E são equivalentes se a função identidade $i : E_1 \rightarrow E_2$ for um homeomorfismo.

Exemplo 2.9. Se a função identidade da definição acima é um homeomorfismo, certamente ela também será um homeomorfismo uniforme, pois, como vimos na Proposição 2.7, um operador linear contínuo é também uniformemente contínuo. Além disso, essa mesma proposição garante que i e sua inversa serão lipschitzianas se i for um homeomorfismo. Mostraremos que métricas induzidas por normas equivalentes são uniformemente equivalentes.

Com efeito, sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ normas equivalentes no espaço vetorial E . Então as aplicações identidades $i_{12} : E_1 \rightarrow E_2$ e $i_{21} : E_2 \rightarrow E_1$ são lipschitzianas. Daí, existem constantes positivas α e β , para todos $x, y \in E$, tais que

$$\|i_{12}(x) - i_{12}(y)\|_2 \leq \alpha \cdot \|x - y\|_1 \quad \text{e} \quad \|i_{21}(x) - i_{21}(y)\|_1 \leq \beta \cdot \|x - y\|_2$$

e, por conseguinte,

$$\|x - y\|_2 \leq \alpha \cdot \|x - y\|_1 \quad \text{e} \quad \|x - y\|_1 \leq \beta \cdot \|x - y\|_2.$$

Isso implica que

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \|x - y\|_2 \leq \|x - y\|_1 \leq \beta \cdot \|x - y\|_2,$$

ou seja, as métricas induzidas pelas normas equivalentes são uniformemente equivalentes.

Particularmente, esse resultado nos diz que E_1 e E_2 possuem as mesmas sequências de Cauchy e, portanto, se um deles for completo, então o outro também será. Valem também os vários resultados que expomos no Capítulo um para métricas equivalentes e uniformemente equivalentes. As normas definidas no Exemplo 2.2 são equivalentes. Por isso, geram métricas uniformemente equivalentes. Também são equivalentes as normas da soma, do máximo e euclidiana definidas sobre um espaço normado obtido a partir do produto cartesiano de outros espaços normados.

O próximo exemplo será usado na demonstração o teorema da aplicação aberta.

Exemplo 2.10. Sejam E e F espaços normados e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Se $(0, \varepsilon) \subset E$, então

$$\overline{T(B(0, \varepsilon))} = -\overline{T(B(0, \varepsilon))}$$

Inicialmente, observe que

$$-T(B(0, \varepsilon)) = \{-T(x); \|x\| < \varepsilon\} = \{T(-x); \|-x\| < \varepsilon\}.$$

Assim, $-T(x) \in -T(B(0, \varepsilon))$ se, e somente se, $\| -x \| < \varepsilon$. Mas isso acontece só, e só se, $-T(x) \in T(B(0, \varepsilon))$. Segue-se daí que $T(B(0, \varepsilon)) = -T(B(0, \varepsilon))$. Por essa igualdade e pela Posição 2.3, segue que

$$\overline{T(B(0, \varepsilon))} = \overline{-T(B(0, \varepsilon))} = \overline{-T(B(0, \varepsilon))}.$$

2.4 Conjuntos convexos

Na demonstração do Teorema da Aplicação Aberta, usaremos resultados relacionados aos conjuntos convexos em um espaço vetorial normado. Por isso, dedicaremos esta seção aos conjuntos convexos em um espaço vetorial normado.

Definição 2.11. *Seja A um subconjunto do espaço vetorial normado E . Diz-se que A é convexo quando*

$$tx + (1 - t)y \in A, \quad \forall x, y \in A, \quad \forall t \in [0, 1]$$

Exemplo 2.12. *Sejam E um espaço normado, $a \in E$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$. A bola aberta de centro a e raio ε contida em E é um conjunto convexo. Para mostrarmos isso, basta provar que, dados quaisquer $x, y \in B(a; \varepsilon)$, tem-se $tx + (1 - t)y \in B(a; \varepsilon)$, $\forall t \in [0, 1]$. Notamos que*

$$\begin{aligned} \| a - [tx + (1 - t)y] \| &= \| a - tx - y + ty \| \\ &= \| a - tx + (ta - ta) - y + ty \| \\ &= \| ta - tx + a - y - ta + ty \| \\ &= \| t(a - x) + (1 - t)(a - y) \| \\ &\leq t \| a - x \| + (1 - t) \| a - y \| \\ &< t\varepsilon + (1 - t)\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Isso mostra que $tx + (1 - t)y \in B(x; \varepsilon)$, $\forall t \in [0, 1]$.

Proposição 2.13. *Sejam E e F espaços normados e $T : E \rightarrow F$ uma aplicação linear. Se $A \subset E$ é convexo, então $T(A)$ também o é.*

Demonstração: Tomando $T(x_1), T(x_2) \in T(A)$, onde $x_1, x_2 \in A$, temos que, para todo $t \in [0, 1]$, $tx_1 + (1 - t)x_2 \in A$. Logo,

$$tT(x_1) + (1 - t)T(x_2) = T(tx_1 + (1 - t)x_2) \in T(A).$$

■

Proposição 2.14. *Se E é um espaço normado e $A \subset E$ é convexo, então $A + A = 2A$.*

Demonstração: Seja $x \in 2A$. Então existe $y \in A$ de maneira que $2y = x$ e, consequentemente, $x \in A + A$. Isso prova que $2A \subset A + A$. Por outro lado, sejam $x, y \in A$. Da convexidade de A , tem-se que $a = \frac{1}{2}(x + y) \in A$. Desse modo,

$$x + y = 2 \cdot \frac{1}{2}(x + y) = 2a \in 2A.$$

Isso prova que $A + A \subset 2A$. Segue das duas inclusões que $2A = A + A$. ■

Proposição 2.15. *Se E é um espaço normado e $A \subset E$ é convexo, então $\overline{A}$ é convexo.*

Demonstração: Sejam $x, y \in \overline{A}$. Existem sequências (x_n) e (y_n) em A tais que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Assim, para todo $t \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} \| [xt + (1 - t)y] - [x_nt + (1 - t)y_n] \| &= \| t(x - x_n) + (1 - t)(y - y_n) \| \\ &\leq |t| \|x - x_n\| + |1 - t| \|y - y_n\|. \end{aligned}$$

Como $\|x - x_n\| \rightarrow 0$ e $\|y - y_n\| \rightarrow 0$, temos que $xt + (1 - t)y \in \overline{A}$ e, portanto, $\overline{A}$ é convexo. ■

Exemplo 2.16. *Com os resultados apresentados nesta seção, podemos mostrar que, se E e F são espaços normados e $T : E \rightarrow F$ uma aplicação linear, então o fecho da imagem de uma bola aberta $B(x; \varepsilon) \subset E$ por T , $\overline{T(B(x; \varepsilon))}$, é um conjunto convexo. De fato, a bola $B(x; \varepsilon)$ é convexa. Logo, $T(B(x; \varepsilon))$ também é convexo. Como $T(B(x; \varepsilon)) \subset F$, decorre da última proposição que $\overline{T(B(x; \varepsilon))}$ é convexo.*

3 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE BAIRE À ANÁLISE FUNCIONAL

Qual a relevância de saber que, se M é um espaço métrico completo e $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde cada F_n é fechado em M , então existe pelo menos um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}F_n \neq \emptyset$? Esse resultado, como já vimos no Capítulo 1, é um corolário do teorema de Baire. Chaim Samuel Hönig, em seu livro Aplicações da Topologia à Análise, destaca que "o teorema de Baire é um teorema muito importante e apesar de sua forma inocente ele dá resultados muitos fortes" (Hönig, 1976, pág. 59). Neste capítulo, usaremos o teorema de Baire para demonstrar três resultados centrais da Análise Funcional e, dessa forma, responderemos a pergunta feita acima. Para a elaboração deste capítulo, usamos a referência [2].

3.1 Teorema de Banach-Steinhaus

O teorema de Banach-Steinhaus ou da limitação uniforme é um dos resultados mais importantes da Análise Funcional. Nesta seção, apresentaremos e demonstraremos esse resultado.

Teorema 3.1. (*Teorema de Banach-Steinhaus ou da Limitação Uniforme*)

Sejam E um espaço de Banach, F um espaços normado e $(T_i)_{i \in I}$ uma família de operadores lineares e contínuos. Se essa família é pontualmente limitada, isto é,

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty, \forall x \in E, \quad (3.1)$$

então ela é uniformemente limitada, ou seja, temos $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$A_n = \{x \in E; \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq n\} = \{x \in E; \|T_i(x)\| \leq n \forall i \in I\}.$$

É imediato que

$$A_n = \bigcap_{i \in I} \{x \in E; \|T_i(x)\| \leq n\} \text{ e } B_n = \{x \in E; \|T_i(x)\| \leq n\} = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0, n]).$$

Observe que a função $\|\cdot\| \circ T_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $[0, n]$ é fechado em $\mathbb{R}$. Uma vez que $[0, n]$ está contido na imagem de $\|\cdot\| \circ T_i$, a imagem inversa desse conjunto por essa função é um fechado. Isso prova que B_n é fechado. Por conseguinte, A_n também é fechado por ser escrito como intersecção de fechados.

Afirmção: $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Observe que, por construção, $A_n \subset E$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso implica que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset E$. Por outro lado, se $x \in E$, por (3.1), existe $C_x > 0$ de forma que $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < C_x$. Tomando $n > C_x$, necessariamente temos que $x \in A_n$. Isso mostra que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Sendo assim, podemos aplicar Corolário 1.55. Segue-se desse resultado que existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\text{int}(A_{n_0}) \neq \emptyset$ e, conseqüentemente, existem $a \in \text{int}(A_{n_0})$ e $\varepsilon > 0$ tais que $B[a; \varepsilon] \subset \text{int}(A_{n_0})$. Seja $y \in E$, com $\|y\| \leq 1$. Se $x = a + \varepsilon y$, então $\|x - a\| = \|\varepsilon y\| \leq \varepsilon$. Logo, $x \in B[a; \varepsilon] \subset \text{int}(A_{n_0}) \subset A_{n_0}$ e

$$\begin{aligned} \|T_i(x - a)\| &\leq \|T_i(x)\| + \|T_i(a)\| \leq n_0 + n_0 \\ &\Rightarrow \|T_i(\varepsilon y)\| = \|T_i(x - a)\| \leq 2n_0 \\ &\Rightarrow \|T_i(y)\| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon}, \quad \forall i \in I. \end{aligned}$$

Portanto, $\sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon}$. ■

3.2 Teorema da Aplicação Aberta

Provaremos agora o teorema da aplicação aberta, que estabelece condições para que um operador linear limitado entre espaços de Banach seja uma aplicação aberta.

Definição 3.2. *Sejam M e N espaços métricos e $T : M \rightarrow N$ uma aplicação. Dizemos que T é uma aplicação aberta se a imagem, por T , de qualquer aberto $A \subset M$ é um aberto em N .*

Para demonstrar o teorema da aplicação aberta, precisamos do lema exposto abaixo. Para demonstrá-lo, usaremos os critérios de comparação e de Cauchy para séries, os quais podem ser encontrados em [5] no capítulo quatro.

Lema 3.3. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo. Se existirem $\varepsilon, \delta > 0$ de modo que $\overline{T(B_E(0; \varepsilon))} \supset B_F(0; \delta)$, então $T(B_E(0; \varepsilon)) \supset B_F(0; \frac{\delta}{2})$.*

Demonstração: Dado $X \subset E$ e $\alpha \in \mathbb{F}$, sabemos que $\alpha \overline{X} = \overline{\alpha X}$ (veja o Exemplo 2.3). Além disso, da linearidade de T , temos que $\alpha T(B_E(0, \varepsilon)) = T(\alpha B_E(0, \varepsilon)) = T(B_E(0, \alpha \varepsilon))$. Sendo assim, segue da hipótese que

$$\overline{T(B_E(0; \alpha \varepsilon))} = \overline{\alpha T(B_E(0; \varepsilon))} = \alpha \overline{T(B_E(0; \varepsilon))} \supset \alpha B_F(0; \delta) = B_F(0; \alpha \delta), \quad (3.2)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ positivo.

Tomamos $\alpha = \frac{1}{2}$ e $y \in B_F(0, \frac{\delta}{2})$. Da Relação (3.2), decorre que existe $x_1 \in B_E(0, \frac{\varepsilon}{2})$ de forma que $\|y - T(x_1)\| < \frac{\delta}{4}$. Da definição de bola aberta, temos que $y - T(x_1) \in B_F(0; \frac{\delta}{4})$. Usando a Relação (3.2) novamente, temos que existe $x_2 \in B_E(0, \frac{\varepsilon}{4})$ tal que

$$\|(y - T(x_1)) - T(x_2)\| < \frac{\delta}{8}$$

A Relação (3.2) vale para todo $\alpha > 0$. Assim, podemos construir uma sequência de pontos (x_n) em E executando esse processo indefinidamente. Por construção, cada termo x_n dessa sequência é tal que $x_n \in B_E(0; \frac{\varepsilon}{2^n})$ e

$$\|y - T(x_1) - \cdots - T(x_n)\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}, \quad (3.3)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

A série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{2} < 1$. Como $\|x_n\| < \frac{\varepsilon}{2^n}$, para todo n natural, a série $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\|$ também converge pelo critério da comparação para séries. Dessa forma,

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^m x_i \right\| = \left\| \sum_{i=n}^m x_i \right\| \leq \sum_{i=n}^m \|x_i\|.$$

Como $\sum_{i=n}^m \|x_i\|$ converge, pelo critério de Cauchy para séries, para cada $\varepsilon > 0$, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sum_{i=n}^m \|x_i\| < \varepsilon.$$

Desse modo, a sequência $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$ é de Cauchy. Sendo E de Banach, essa sequência converge para algum $x \in E$ e

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|x_i\| \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso prova que $x \in B_E(0; \varepsilon)$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (3.3), temos que

$$\begin{aligned} \|y - T(x)\| &= \left\| y - T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i\right) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y - T(x_1) - \cdots - T(x_n)\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta}{2^{n+1}} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, necessariamente devemos ter $y = T(x)$. Isso implica que $y \in T(B_E(0, \varepsilon))$, o que prova o lema. ■

Teorema 3.4. (Teorema da Aplicação Aberta) *Toda aplicação linear contínua e sobrejetiva entre dois espaços de Banach é uma aplicação contínua aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetivo entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Demonstração: Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo. Por E ser normado, é verdade que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_E(0; n)$. Esse fato, aliado à sobrejetividade de T , garante que

$$F = T(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_E(0; n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_E(0; n))}$$

Como F é completo, segue do Corolário 1.55 que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $\overline{T(B_E(0; n_0))}$ tem interior não-vazio. Isso é equivalente a afirmar que existem $a \in F$ e $\varepsilon > 0$ tais que $B_F(a, \varepsilon) \subset \overline{T(B_E(0; n_0))}$. Do Exemplo 2.10, sabemos que

$$\overline{T(B_E(0; n_0))} = -\overline{T(B_E(0; n_0))}.$$

Isso resulta que

$$B_F(-a; \varepsilon) = -B_F(a; \varepsilon) \subset -\overline{T(B_E(0; n_0))} = \overline{T(B_E(0; n_0))}$$

Seja $x \in B_F(0; \varepsilon)$. Podemos escrever $x = \frac{1}{2}(a + x) + \frac{1}{2}(-a + x)$. Logo, x pode ser escrito como uma soma de um elemento de $\frac{1}{2}B_F(a; \varepsilon)$ e de um elemento de $\frac{1}{2}B_F(-a; \varepsilon)$. Desse Modo, temos que

$$\begin{aligned} B_F(0; \varepsilon) &\subset \frac{1}{2}B_F(a; \varepsilon) + \frac{1}{2}B_F(-a; \varepsilon) \\ &\subset \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0; n_0))} + \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0; n_0))} = \overline{T(B_E(0; n_0))}. \end{aligned}$$

A última igualdade advém da convexidade do conjunto $\overline{T(B_E(0; n_0))}$. De acordo com o lema precedente, sabemos que

$$\overline{T(B_E(0; n_0))} \supset B_F(0; \varepsilon) \Rightarrow T(B_E(0; n_0)) \supset B_F(0; \frac{\varepsilon}{2}).$$

Assim, $T(B_E(0; \alpha n_0)) \supset B_F(0; \alpha \frac{\varepsilon}{2})$, para todo $\alpha > 0$ real.

Afirmção: $T(B_E(x; \alpha n_0)) \supset B_F(T(x); \alpha \frac{\varepsilon}{2})$, para todo $x \in E$ e todo $\alpha > 0$. Com efeito, $B_E(x; \alpha n_0) = x + B_E(0; \alpha n_0)$. Daí, segue-se que

$$T(B_E(x; \alpha n_0)) = T(x) + T(B_E(0; \alpha n_0)) \supset T(x) + B_F(0; \alpha \frac{\varepsilon}{2}) = B_F(T(x); \alpha \frac{\varepsilon}{2}).$$

Seja $A \subset E$ um aberto. Provaremos que $T(A)$ é aberto em F . De fato, sejam $x \in A$ e $\alpha > 0$ tais que $B_E(x; \alpha n_0) \subset A$. Dessa forma, sabemos que $T(A) \supset T(B_E(x; \alpha n_0)) \supset B_F(T(x); \alpha \frac{\varepsilon}{2})$. Isso prova que $T(A)$ é aberto em F .

Por fim, provaremos a última afirmação. Seja $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo e bijetivo entre espaços de Banach. Sendo assim, existe a inversa T^{-1} de T . Seja $A \subset E$ aberto. Por T ser aberto, temos que $T(A) \subset F$ também é aberto. Segue-se daí que T^{-1} é contínuo, pois a imagem inversa de todo aberto $A = T^{-1}(T(A)) \subset E$ por T^{-1} é aberto em F . ■

3.3 Teorema do Gráfico Fechado

Demonstraremos agora o teorema do gráfico fechado, que estabelece uma relação entre a continuidade de um operador linear e o seu gráfico ser fechado.

Definição 3.5. *Sejam E, F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. O gráfico de T é o conjunto*

$$G(T) = \{(x, y); x \in E \text{ e } y = T(x)\} \subset E \times F.$$

Podemos ver facilmente que $G(T)$ é um subespaço vetorial de $E \times F$. Para facilitar a demonstração do teorema abaixo, tomaremos a norma da soma, que foi definida no Exemplo 2.2, em $G(T)$. Resaltamos que o resultado continua válido se tomarmos uma norma equilateral à norma da soma em $G(T)$. A justificativa para este fato se baseia na Proposição 1.23.

Teorema 3.6. (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam $(E, \|\cdot\|_1), (F, \|\cdot\|_2)$ espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. A fim de que T seja contínuo, é necessário e suficiente que $G(T)$ seja fechado em $E \times F$.*

Demonstração: Suponhamos que T seja contínuo. Então a função

$$f : E \times F \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \|T(x) - y\|$$

é contínua por ser obtida por meio de operações envolvendo funções contínuas. O conjunto $\{0\}$ é fechado (em $\mathbb{R}$) e $G(T) = f^{-1}(\{0\})$ também é fechado, pois é a imagem inversa de $\{0\}$ pela função contínua f .

Por outro lado, assumimos $G(T)$ fechado. Uma vez que E e F são espaços de Banach, $E \times F$ também é de Banach (Veja o Exemplo 2.6). Como $G(T) \subset E \times F$, segue da Proposição 1.47 que $G(T)$ é de Banach (munido da métrica da soma). A função $g : G(T) \rightarrow E$, $g(x, T(x)) = x$ é linear e bijetiva.

Afirmção: g é contínua. Com efeito, sejam $x, y \in E$, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \varepsilon$, pois

$$\begin{aligned} \|(x, T(x)), (y, T(y))\| &= \|x, y\|_1 + \|T(x), T(y)\|_2 < \delta \\ &\Rightarrow \|x, y\|_1 + \|T(x), T(y)\|_2 < \varepsilon \\ &\Rightarrow \|x, y\|_1 < \varepsilon \\ &\Rightarrow \|g(x, T(x)), g(y, T(y))\|_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Com essas hipóteses, podemos aplicar o Teorema da Aplicação Aberta, que garante que g^{-1} é contínua e, portanto, existe uma constante real $C > 0$ tal que $\|x, T(x)\| \leq C \|x\|$, para todo $x \in E$. Assim, temos que

$$\|T(x)\| \leq \|T(x)\| + \|x\| = \|x, T(x)\| \leq C \|x\|$$

para todo $x \in E$. Pela Proposição 2.7, T é contínuo.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao elaborar este trabalho pude perceber o quão fundamental é a noção de distância para a Matemática. Através dessa noção, que formalizamos usando a definição de métrica, podemos calcular a distância entre dois elementos quaisquer de um conjunto.

Esse fato pode parecer um tanto ingênuo à primeira vista. No entanto, tal noção é tão forte que nos permite definir e até caracterizar funções contínuas definidas sobre espaços métricos, entre outros conceitos. Por exemplo, os operadores lineares são funções com propriedades muito interessantes. Mais interessante ainda é quando estes são definidos sobre espaços normados. Nesse caso, podemos tomar a métrica induzida da norma e obter funções cujas as propriedades são notáveis.

Além disso, também foi possível notar a importância das sequências. Por meio destas, pudemos apresentar conceitos e resultados que envolvem propriedades topológicas. Em particular, o estudo de convergência envolvendo sequência de Cauchy foi de fundamental importância.

Outro fato que pode parecer ingênuo à primeira vista é o próprio Teorema de Baire. Todavia, tal resultado é usado, por exemplo, para demonstrar três resultados de grande relevância da Análise Funcional. A importância dessa dimensão é compreendida quando levamos em conta que a Análise Funcional é um ramo da Matemática que possui muitas aplicações e é de fundamental importância na obtenção de novos resultados da Análise como, por exemplo, a demonstração do Teorema da Existência e Unicidade de Soluções para equações diferenciais ordinárias (EDO).

REFERÊNCIAS

- [1] BREZIS, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations., Universitext. Springer, New York, 2010. Citado na página 33.
- [2] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., TEIXEIRA, E. Fundamentos de análise funcional, Rio de janeiro: SBM, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 42.
- [3] DOMINGUES, H. H. Espaços Métricos e Introdução à Topologia. São Paulo: Atual, 1982. Citado na página 9.
- [4] HONIQ, C.S. – Aplicações da Topologia à Análise, Coleção Projeto Euclides, CNPq, 1976. Citado na página 9.
- [5] LIMA, E. L. Curso de Análise Vol. 1. 10 ed. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 9, 22, 28 e 43.
- [6] LIMA, E. L. Espaços Métricos, 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- [7] OLIVEIRA, C. R. de Introdução à análise funcional. 1 ed. Rio de Janeiro : IMPA, Projeto Euclides, 2014. Citado na página 33.