



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Lázaro dos Reis Costa

Homotopia e Grupo Fundamental

São Luís - MA
2023

Lázaro dos Reis Costa 

Homotopia e Grupo Fundamental

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciado em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa

São Luís - MA

2023

Lázaro dos Reis Costa

Homotopia e Grupo Fundamental/ Lázaro dos Reis Costa. – São Luís - MA, 2023-
82 p. : il.(alguma color.); 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Matemática – Licenciatura
Plena

Universidade Federal do Maranhão, 2023.

1. Método dos Horizontes Móveis. 2. Defensivos Auto-replicantes. I. Orientador. II.
Universidade Federal do Maranhão. III. Curso de Matemática – Licenciatura Plena. IV.
Título

CDU XX:XXX:XXX.X

Lázaro dos Reis Costa

Homotopia e Grupo Fundamental

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho **SUBMETIDO**. São Luís - MA, ____/____/____

Prof. Dr. José Santana Campos Costa
DEMAT/UFMA
Orientador

Primeiro Examinador

Segundo Examinador

Á você que o lê, e às nossas crianças.

Agradecimentos

À Deus, pela minha vida, por ter permitido que eu tivesse saúde e determinação para não desanimar durante essa caminhada.

À Virgem Maria, que em seu manto me envolveu nos meus momentos de fragilidade e desânimo, pelas bênçãos concedidas, pela coragem e serenidade.

Aos meus pais, irmãos e sobrinhos, que foram minha força neste processo e também compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização deste trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Santana Campos Costa, pela paciência, pela assistência e pela gentileza ao longo deste processo, por todo conhecimento que tive acesso antes e durante este trabalho.

Aos meus amigos de curso e da residência universitária, em especial: Ariany Pereira, Aline Dourado, Sergielly Ferreira e Valéria Santos, pela amizade incrível, pelo apoio demonstrado, pela convivência e companheirismo, pela troca de experiências que me permitiram crescer como pessoa e como formando, e por toda gentileza prestada ao longo de todo o período de tempo em que me dediquei a este trabalho.

Ao GOU Siloé, pelo acolhimento e pela oportunidade de ver além das amarras acadêmicas.

Ao Núcleo de Acessibilidade da UFMA, por todo suporte prestado nesta formação.

E a todos aqueles que contribuíram, de alguma forma, para a execução deste projeto.

“Um fracassado superará um gênio com esforço e trabalho duro.”

Rock Lee

Resumo

Este trabalho, realizado por meio de uma revisão bibliográfica de livros clássicos de Topologia, teve como objetivo estudar a relação entre a Homotopia de Caminhos e o Grupo Fundamental. A Homotopia foi explorada como uma noção de equivalência entre aplicações contínuas que permitiu a análise da deformação em espaços topológicos. Além disso, foram apresentadas a caracterização e a base para o estudo do Grupo Fundamental $\pi_1(X, x)$, que é importante na identificação de homeomorfismos entre espaços. Verificou-se que o Grupo Fundamental do círculo ($\pi_1(S^1)$) é isomorfo ao grupo dos inteiros aditivos ($\mathbb{Z}$), o que possibilita a identificação de grupos fundamentais em outras estruturas.

Palavras-chave: Homotopia, Grupo Fundamental e Homeomorfismo.

Abstract

This work, carried out through a bibliographic review of classic books on Topology, aimed to study the relationship between Homotopy of Paths and the Fundamental Group. Homotopy was explored as a notion of equivalence between continuous applications that allowed the analysis of deformation in topological spaces. In addition, the characterization and basis for the study of the Fundamental Group $\pi_1(X, x)$, which is important in identifying homeomorphisms between spaces, were presented. It was found that the Fundamental Group of the circle ($\pi_1(S^1)$) is isomorphic to the group of additive integers ($\mathbb{Z}$), which enables the identification of fundamental groups in other structures.

Keywords: Homotopy, Fundamental Group and Homeomorphism.

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Ponto interior e fronteira.	15
Figura 2.2 – Topologias em X	19
Figura 2.3 – Conectividade.	20
Figura 2.4 – Conectividade.	20
Figura 2.5 – Homeomorfismo: transformação de uma xícara de café em um <i>donut</i>	24
Figura 2.6 – Transformação de uma folha de papel em um cilindro.	24
Figura 2.7 – Homeomorfismo: transformação de um cubo φ em uma esfera β	24
Figura 2.8 – Um não homeomorfismo	25
Figura 3.1 – Homotopia entre as aplicações contínuas f e g	28
Figura 3.2 – Homotopia no espaço vetorial.	29
Figura 3.3 – Bitoro $\mathcal{B}$ (superfície bidimensional)	30
Figura 3.4 – Deformação de um quadrado.	36
Figura 3.5 – Um caminho entre s_0 e s_1	47
Figura 3.6 – Caminhos homotópicos com extremidades fixas.	48
Figura 3.7 – Homotopia de Caminhos entre a e b	49
Figura 3.8 – Homotopia entre caminhos fechados.	50
Figura 3.9 – Homotopia entre caminhos fechados.	50
Figura 3.10 – Transitividade da relação “ $\cong$ ”	52
Figura 3.11 – Caminhos livremente homotópicos	53
Figura 3.12 – Homotopia livre entre dois caminhos fechados a e b no toro.	54
Figura 3.13 – Produto entre os caminhos a e b	55
Figura 3.14 – O caminho a e seu inverso a^{-1}	55
Figura 4.1 – classe de homotopia de um caminho que liga x_0 a x_1	61
Figura 4.2 – Caminhos livremente homotópicos.	63
Figura 4.3 – Transformação do bordo de I^2 em $I \times I$	63
Figura 4.4 – Retração de um quadrado sobre sua base horizontal.	64
Figura 4.5 – Diagrama Comutativo	66
Figura 4.6 – Aplicação de $S^1 \times I$ em x	67
Figura 5.1 – Os geradores de $\pi_1(T)$	75
Figura 5.2 – Os geradores de $T = S^1 \times S^1$	75
Figura 5.3 – S^2 e $T = S^1 \times S^1$ não são homeomorfos.	78
Figura 5.4 – Os cilindros $C = S^1 \times I$ e $\hat{C} = S^1 \times \mathbb{R}$	79

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	NOÇÕES PRELIMINARES	12
2.1	Espaços Métricos	12
2.2	Topologia e Espaços Topológicos	17
2.3	Noções de Continuidade	21
3	HOMOTOPIA	27
3.1	Aplicações homotópicas	27
3.2	Tipo de Homotopia	34
3.3	Espaços Contráteis	37
3.4	Extensão de aplicações contínuas	42
3.5	Homotopias de pares e relativas	43
3.5.1	Homotopias de pares	43
3.5.2	Homotopias relativas	45
3.6	Homotopia de Caminhos	47
4	O GRUPO FUNDAMENTAL	60
4.1	Homomorfismo induzido	62
4.2	Outras Descrições do Grupo Fundamental.	66
4.2.1	O Grupo Fundamental e as aplicações de S^1 em X	67
4.3	Espaços Simplesmente Conexos	68
5	EXEMPLOS DE GRUPOS FUNDAMENTAIS	70
6	CONCLUSÃO	81
	REFERÊNCIAS	82

1 Introdução

A matemática é um ramo da ciência que está sempre se renovando, juntamente com ela estão suas áreas singulares, que continuamente vem sendo estudadas e abrindo caminhos para novas áreas do conhecimento.

Nos anos 300 a.C., os círculos, quadrados e triângulos já vinham sendo estudados pelo grande matemático Euclides de Alexandria, seus estudos e conhecimentos geométricos foram reunidos no livro intitulado “*Os Elementos*”. Uma obra prima utilizada ao longo de séculos e que ainda hoje é usada como referência no estudo da Geometria. Em face disso, notou-se que a geometria que aprendemos no âmbito escolar não explica totalmente o comportamento da natureza. Neste cenário, destaca-se a Topologia e mais especificamente a Topologia Algébrica, que sucintamente falando, é uma extensão da Geometria que se ocupa no estudo dos conjuntos (geométricos) através das propriedades algébricas.

A Topologia é uma ciência muito vasta, conta com diversas subáreas. A sua classificação estrutural mais simples é: Topologia Geral, Topologia Algébrica, e Topologia Geométrica. Acredita-se que Leibniz (1646 – 1716), matemático, físico e filósofo alemão, foi o primeiro a estudar propriedades topológicas no ano de 1679. Subsequentemente, Euler (1707 – 1783), conhecido como o matemático mais prolífero da história, publica a resolução do problema das pontes da cidade de *Koenigsberg* em 1736, obra esta nomeada “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentes*” que foi considerada um dos primeiros resultados topológicos. Em 1908, durante o Congresso Internacional de Matemática (*International Congress of Mathematicians (ICM)*), em Roma, foram estabelecidas as bases da topologia moderna. Em 1914, Hausdorff formalizou o conceito de espaço topológico quando definiu o que hoje é conhecido como *Espaço de Hausdorff* (ou espaço separado), onde quaisquer dois pontos têm vizinhanças disjuntas. Em 1985, Henri Poincaré¹ (1854 – 1912), grande matemático francês, introduziu os conceitos de “*Homotopia*” e “*Homologia*” em seu livro “*Analysis Situs*” – dando uma importante contribuição para a Matemática – dado como marco da criação da Topologia Algébrica.

O presente estudo consiste em uma abordagem teórica desta área do conhecimento matemático que Poincaré considerava ser um instrumento indispensável para resolver problemas de todas as áreas da matemática. Nele, apresentamos teorias referentes à *Homotopia* - uma ferramenta que estuda as propriedades topológicas dos espaços e fornece uma maneira de medir quando dois objetos são “essencialmente os mesmos” em termos de sua forma e estrutura. Isso nos permite classificar objetos topológicos e definir invariantes

¹ Em (JAMES, 1999) é possível acompanhar a rica história da Topologia, além disso, o capítulo 06 traz uma abordagem mais completa das importantes contribuições de Poincaré para este ramo da matemática.

topológicos. Além disso, apresentamos o conceito de *Grupo Fundamental* - o primeiro dos grupos de homotopia e também o exemplo mais básico de *invariante topológico* (π_1). Este é um dos conceitos mais importantes da Topologia, pois permite, por exemplo, identificar quando dois espaços são homeomorfos. Na prática, podemos distinguir matematicamente a forma de uma superfície esférica e a forma da superfície de um toro - este último, devido à presença de um “furo”, tem uma topologia mais complexa e não simplesmente conexa. Topologicamente, dois espaços são considerados equivalentes se podemos deformá-los continuamente um no outro “sem quebrar ou rasgar”. As superfícies de uma xícara de café e de um *donut*² por exemplo, são equivalentes como espaços topológicos. Isso significa que há uma correspondência contínua e biunívoca que pode ser traçada no donut para transformá-lo na xícara de café e vice-versa, sem afetar a topologia do espaço. Em contrapartida, dois espaços que possuem grupos fundamentais diferentes não podem ser equivalentes.

A ferramenta basilar do presente estudo é construída por livros clássicos em Topologia. Dentre estes, destacamos o livro – “*Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*” – do matemático brasileiro Elon Lages Lima³. Nele, buscamos apresentar definições e terminologias que conversem com o leitor, afim de tornar o conteúdo abordado compreensível sem perder sua essencialidade ou rigor necessário para um melhor aproveitamento do estudo.

² Pequeno bolo em forma de rosca.

³ (LIMA, 1977b)

2 Noções Preliminares

Antes de estudar o grupo fundamental, é necessário ter uma base sólida em topologia geral, incluindo conceitos como: espaços topológicos, homeomorfismo, continuidade, compactação, conectividade, entre outros. Também é importante ter conhecimento sobre espaços métricos e suas propriedades, já que isso será utilizado na construção de caminhos contínuos. Além disso, é preciso entender o conceito de caminhos e laços em um espaço topológico, bem como suas propriedades - continuidade e homotopia; Conhecer o conceito de grupo e suas propriedades básicas; E, por fim, é importante ter familiaridade com a ideia de que dois espaços topológicos podem ser considerados “iguais” se forem homeomorfos, isto é, se houver uma correspondência biunívoca entre seus pontos que preserve as propriedades topológicas.

Para os conceitos introdutórios de álgebra, utilizou-se como aporte teórico LANG¹; Os livros de LIMA² e VILCHES³ serviram como sustentação para os conceitos preliminares do presente estudo. Neles, definiremos espaços métricos, topologia, espaços topológicos, conjuntos abertos e fechados de um espaço topológico qualquer, homeomorfismo e continuidade de aplicações, além de alguns exemplos de fácil entendimento.

2.1 Espaços Métricos

Os espaços métricos têm um papel fundamental no estudo da topologia algébrica e, principalmente, no estudo do grupo fundamental de um espaço topológico. Com esta ferramenta, podemos definir distâncias entre pontos em um espaço topológico por meio de funções chamadas “funções de distância” ou “funções métricas”, que cumprem uma série de propriedades matemáticas. A definição da função de distância em um espaço métrico permite a construção de caminhos contínuos e o cálculo das distâncias percorridas nesses caminhos. Isso, por sua vez, é essencial na definição do grupo fundamental, que é um objeto algébrico que mede as propriedades topológicas do espaço.

Definição 2.1. Um **espaço métrico** é um par (M, d) , onde M é um conjunto não vazio e d uma aplicação chamada **métrica**, tal que $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, definida em pares de pontos de M com valores reais. Em outras palavras, dizemos que a função d associa a cada par de pontos $x, y \in M$ um número real definido por $d(x, y)$, denominado a distância do ponto x ao ponto y , que satisfaz as seguintes condições:

¹ (LANG, 2008).

² (LIMA, 1970; LIMA, 1995; LIMA, 1977a).

³ (VILCHES, 2012)

1. $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$; ou seja $d(x, x) = 0$;
2. $d(x, y) > 0$ se $x \neq y, \forall x, y \in M$
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M$ (simetria);
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para quaisquer $x, y, z \in M$ (desigualdade triangular).

Exemplo 2.2. A aplicação $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, é uma métrica em $X = \mathbb{R}$, chamada **métrica usual**.

Exemplo 2.3. Espaço Euclidiano: Este é o espaço métrico mais comum. É definido por um conjunto de pontos em um plano ou no espaço, juntamente com a distância Euclidiana entre eles. A distância entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) no plano é dada por $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Em espaços métricos, uma métrica abstrai a noção de distância que nos permite dizer quando uma sequência de pontos se aproxima de algum lugar, e além disso, dizer quando uma função é contínua.

Definição 2.4. Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se **aberto** quando todo ponto $a \in X$ é centro de uma bola aberta inteiramente contida em X . Isto é, para cada $a \in X$ existe $r > 0$ tal que, se $x \in M$ e $d(x, a) < r$ então $x \in X$.

Em análise matemática, a bola aberta β de raio r , centro a , e métrica d , é definida como o conjunto de todos os pontos cuja distância do ponto a é menor que o raio r , $\beta(a, r) = \{x | d(x, a) < r\}$. Para qualquer ponto dentro da bola, podemos encontrar uma bola menor β_1 em torno desse ponto que ainda está totalmente contida na bola original. Assim, a bola original não contém seus pontos de *fronteira* (ver definição 2.11) e é completamente contida em seu interior, o que a torna um conjunto aberto.

Intuitivamente, dizemos que sempre que um conjunto aberto X contém um ponto a , este deve conter também todos os pontos de M suficientemente próximos de a .

Exemplo 2.5. O conjunto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1$ é um conjunto aberto, pois todos os seus pontos estão no interior (ver definição 2.7) da circunferência de raio 1 e centro na origem. Este conjunto não inclui a fronteira da circunferência ($x^2 + y^2 = 1$) e está contido no seu próprio interior (o interior da circunferência de raio $1/2$ e centro na origem).

Exemplo 2.6. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ não é aberto e nem fechado (ver definição 2.32).

i) O conjunto dos números racionais é denso⁴ nos números reais, ou seja, entre quaisquer dois números reais distintos existe sempre um número racional. Isso significa

⁴ Informalmente, um conjunto é denso em um espaço topológico se ele está “espalhado” por todo o espaço de tal maneira que, para qualquer ponto do espaço, existem elementos do conjunto arbitrariamente próximos a esse ponto.

que qualquer intervalo aberto de números reais contém pelo menos um número racional e, portanto, o conjunto dos números racionais não é aberto.

ii) Por outro lado, o conjunto dos números racionais não contém todos os seus pontos de acumulação (ver definição 2.16), pois existem números irracionais como raiz quadrada de 2, que é um limite de sucessões de números racionais, e não pertence ao conjunto dos números racionais. Portanto, o conjunto dos números racionais não é fechado nos números reais.

Definição 2.7. Um ponto $x \in A \subset X$ é chamado **ponto interior** de A se existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset A$. O conjunto de todos os pontos interiores de A é denotado por $\text{int}(A)$.

Em outras palavras, um ponto interior é um ponto que está estritamente contido dentro de uma forma ou conjunto e não está na sua fronteira. Isto é, um ponto interior é um ponto que tem uma vizinhança⁵ que está completamente contida na forma ou conjunto, sem intersecção com a fronteira. Um conjunto de pontos interiores juntos forma o interior do objeto.

Exemplo 2.8. Considere uma elipse com semi-eixos a e b , e centro C . Um ponto interior da elipse é aquele que não está na borda da elipse e está a uma distância menor que a e b do centro C .

Exemplo 2.9. Considere o intervalo aberto (a, b) na reta real, onde a e b são números reais e $a < b$. Todos os pontos x no intervalo, tal que $a < x < b$, são pontos interiores. Os pontos a e b não são pontos interiores, pois estão na fronteira do intervalo.

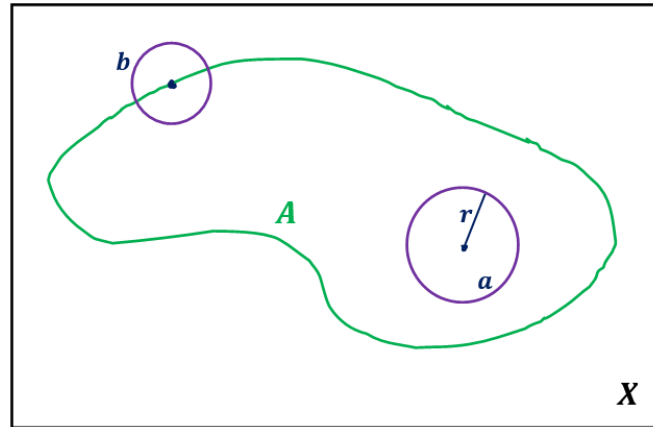
Exemplo 2.10. O conjunto das coordenadas cartesianas (x, y) no plano que satisfazem $x^2 + y^2 < 1$ (ou seja, o disco unitário) tem todos os pontos como pontos interiores.

Definição 2.11. A **fronteira** de $A \subset X$ é o conjunto ∂A , formado pelos pontos $x \in X$ tais que toda bola aberta centrada em x contém pelo menos um ponto de A e um ponto do complementar de A .

Enquanto os pontos interiores formam o interior de um objeto, a fronteira representa os limites do objeto. Isto é, o conjunto de pontos que define o limite de um objeto ou conjunto geométrico, separando o espaço em interior e exterior.

⁵ Intuitivamente, uma vizinhança de um ponto é uma região ao redor dele que contém esse ponto. Isto é, uma vizinhança de um ponto $x \in X$ é qualquer conjunto aberto que contém x .

Figura 2.1 – Ponto interior e fronteira.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Pela imagem, $a \in \text{int}(A)$ e $b \in \partial A$. Note ainda que, dado $A \subset X$, temos

$$X = \text{int}(A) \cup \partial A \cup \text{int}(X - A).$$

Exemplo 2.12. As quatro arestas ⁶ que conectam os vértices de um quadrado formam a sua fronteira. Os pontos na fronteira são aqueles que estão nos segmentos AB , BC , CD e DA .

Exemplo 2.13. A fronteira do intervalo aberto (a, b) é formada pelos pontos a e b , que estão nos limites do intervalo, mas não pertencem a ele.

Exemplo 2.14. Sejam $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números reais, respectivamente. O interior de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ é vazio, pois nenhum intervalo aberto pode ser formado apenas por números racionais. Em contrapartida, a fronteira de $\mathbb{Q}$ é toda a reta $\mathbb{R}$, já que qualquer intervalo aberto contém números racionais e números irracionais.

A seguinte definição é apenas uma formulação da Definição 2.4.

Definição 2.15. $A \subset X$ é dito **aberto** quando todos os seus pontos são interiores, ou seja, $\text{int}(A) = A$. $A \cup X$ é aberto se, e somente se, $A \cap \partial A = \emptyset$.

Definição 2.16. Um ponto p é um **ponto de acumulação** de um conjunto A se, para qualquer bola aberta β contendo p , existem infinitos pontos de A dentro dessa bola.

A saber, dizemos que a bola não é suficiente para separar o ponto p do conjunto A , e que o ponto p é algo como uma fronteira entre o conjunto A e o resto do espaço. Em outras palavras, um ponto de acumulação de um conjunto é um ponto que pode ser cercado por um número infinito de outros pontos pertencentes ao conjunto.

⁶ São os segmentos de reta resultantes do encontro entre duas faces.

Exemplo 2.17. Considere o conjunto $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \text{ é um número natural} \right\}$. Este conjunto consiste de valores decrescentes que se aproximam de zero sem nunca alcançá-lo. O ponto zero é um ponto de acumulação deste conjunto, pois qualquer bola aberta em torno de zero contém infinitos elementos do conjunto A (ou seja, a bola pode ser escolhida para conter qualquer um dos elementos ínfimos de A que se aproximam de zero). Portanto, zero é uma fronteira do conjunto A e um ponto de acumulação.

Exemplo 2.18. Considere o conjunto dos números racionais na reta real. Todo número real, tanto racional quanto irracional, é um ponto de acumulação desse conjunto. Isso ocorre porque, não importa quão próximo estejamos de um número real, sempre haverá um número racional por perto.

Definição 2.19. Um **espaço métrico** M é **compacto** se toda sequência em M possui uma subsequência convergente para um ponto em M . Em outras palavras, se (x_n) é uma sequência de elementos de M , então existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge para um ponto $x \in M$, isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$$

.

Um espaço métrico compacto é um espaço topológico⁷ compacto, ou seja, todo subconjunto fechado de M é compacto. Isso significa que toda sequência em M tem uma subsequência convergente em M .

Exemplo 2.20. Considere o conjunto $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|$. Mostraremos que X é compacto.

Para isso, observamos que:

1. X é limitado: pois 0 é o menor elemento de X e qualquer outro elemento de X é menor ou igual a 1.

2. X é fechado: pois se x_n é uma sequência convergente em X , então pelo teorema do limite pode-se mostrar que x_n converge a algum ponto no fecho de X . Mas o fecho de X é exatamente X , já que nenhum dos pontos limite pode estar fora de X .

3. Qualquer sequência em X possui uma subsequência convergente em X : como todo elemento de X é menor ou igual a 1, pelo menos um elemento deve aparecer infinitamente na sequência. Tomando essa subsequência, temos um subconjunto de X que é uma sequência convergente.

Portanto, concluímos que X é um espaço métrico compacto.

Exemplo 2.21. O intervalo fechado $[0, 1]$ com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|$ é um espaço métrico compacto.

⁷ ver definição 2.29

2.2 Topologia e Espaços Topológicos

Anteriormente, vimos que os espaços métricos são conjuntos dotados de uma noção de distância — uma métrica, e assim como os espaços métricos, os espaços topológicos são dotados de uma noção de proximidade, aberto e fechado, ou seja, uma topologia. Dizemos então que os espaços topológicos são os conjuntos munidos de uma topologia.

Definição 2.22. *Seja X um conjunto. Chama-se de **topologia** em X uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X , denominados os subconjuntos abertos da topologia ($\mathcal{T}$), que satisfaz as seguintes propriedades:*

- i) X e o conjunto vazio ($\emptyset$) pertencem a $\mathcal{T}$;*
- ii) A união de uma família arbitrária de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$;*
- iii) A interseção de uma família finita de elementos de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$.*

Os elementos de $\mathcal{T}$ são chamados abertos de X e os respectivos complementares são chamados fechados de X .

Exemplo 2.23. *Considere o conjunto $X = \{a, b, c\}$ e a coleção $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$.*

- 1. $\mathcal{T}$ é uma topologia em X , pois satisfaz os axiomas de topologia.*
- 2. $\mathcal{T}$ é composta por quatro conjuntos: o conjunto vazio, o conjunto $\{a\}$, o conjunto $\{a, b\}$ e o conjunto X .*
- 3. O conjunto $\{a, b\}$ é um elemento de $\mathcal{T}$, pois é uma união de dois elementos de $\mathcal{T}$: $\{a\} \cup \{a, b\}$. Além disso, a interseção de dois elementos de $\mathcal{T}$, $\{a, b\} \cap \{a\}$, é um elemento de $\mathcal{T}$: $\{a\}$.*

Note que existem muitas outras topologias possíveis para o conjunto X , mas essa é uma das mais simples e pode ajudar a entender os conceitos básicos de topologia.

Exemplo 2.24. *Dado o conjunto $X = \{a, b, c\}$, dentre as seguintes coleções de subconjuntos apenas $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_3$ e $\mathcal{T}_5$ são topologias:*

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$$

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, X\}$$

$$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$$

$$\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$$

$$\mathcal{T}_5 = \{(\emptyset), \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$$

Pois, note que, $\{a\} \cup \{b\}$ não é um aberto de $\mathcal{T}_2$ e $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$ não é um aberto de $\mathcal{T}_4$.

Exemplo 2.25. (Topologia Discreta). Seja X um conjunto qualquer. Chamamos de Topologia Discreta, a topologia em que todos os subconjuntos de X são abertos, ou seja, se o subconjunto $U \subset X$, então $U \in \mathcal{T}$.

Exemplo 2.26. (Topologia Caótica ou Trivial). Seja X um conjunto qualquer. Chamamos de Topologia Caótica, a topologia em que somente $\emptyset$ e X são abertos ($\emptyset, X \in \mathcal{T}$). Ou seja, é a família que consiste apenas de X e do $\emptyset$.

Há também a possibilidade de compararmos duas topologias sobre um mesmo conjunto X . Veja a definição 2.27.

Definição 2.27. Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ topologias em um conjunto X .

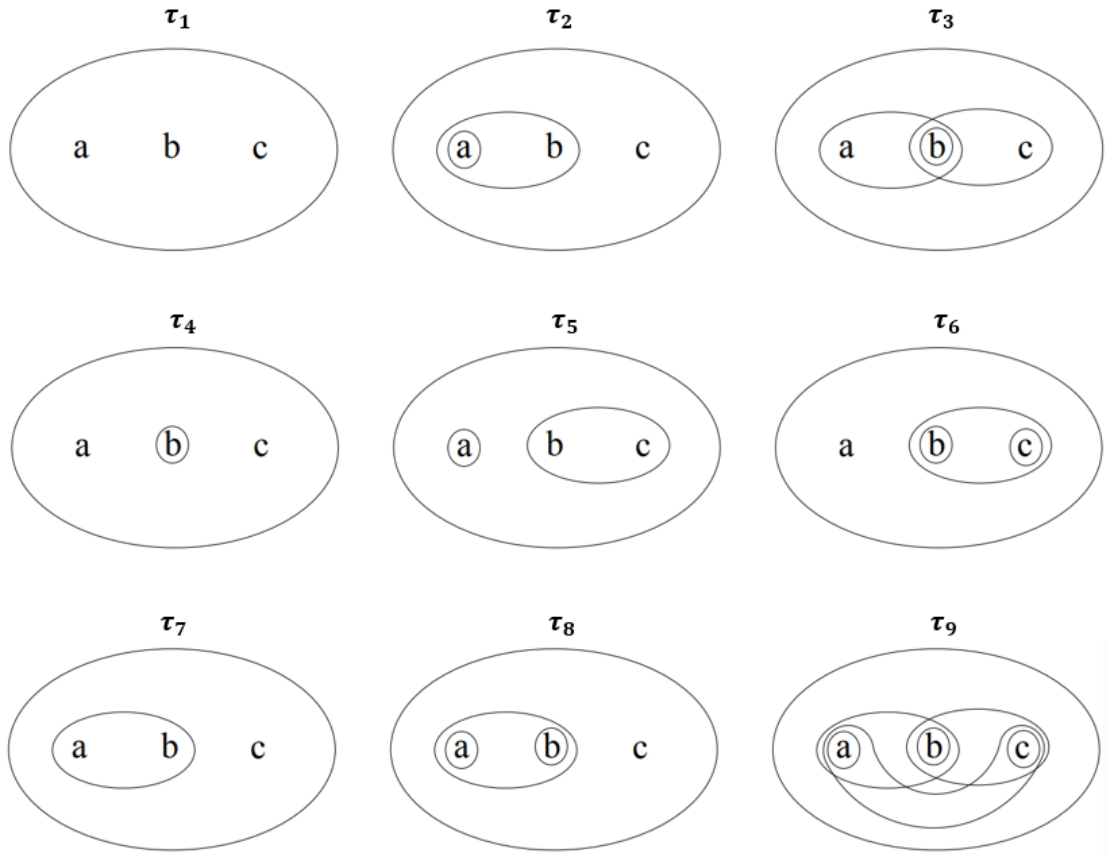
- a) Se $\mathcal{T}_2 \supset \mathcal{T}_1$, então $\mathcal{T}_2$ é **mais fina** que $\mathcal{T}_1$;
- b) Se $\mathcal{T}_2$ contém estritamente $\mathcal{T}_1$, então $\mathcal{T}_2$ é **estritamente mais fina** que $\mathcal{T}_1$;
- c) $\mathcal{T}_1$ é **comparável** a $\mathcal{T}_2$ se $\mathcal{T}_2 \supset \mathcal{T}_1$ ou $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$.

Também dizemos que $\mathcal{T}_1$ é **mais grossa** que $\mathcal{T}_2$, ou **estritamente mais grossa**, nas situações a e b, reciprocamente. Resumidamente, comparamos as topologias dizendo que uma tem mais abertos que a outra.

Exemplo 2.28. Seja $X = \{a, b, c\}$ um conjunto de três elementos. Podemos munir 9 topologias distintas em X , a menos de permutação entre os elementos. Observe a representação na Figura 2.7.

Segue que:

- A topologia $\mathcal{T}_8$ é mais fina do que $\mathcal{T}_7$, pois contém todos os subconjuntos de $\mathcal{T}_7$, e tem outros adicionais;
- A topologia $\mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_3$ não são comparáveis, pois cada uma das coleções contém algum subconjunto que a outra não tem.

Figura 2.2 – Topologias em X 

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Definição 2.29. Um **Espaço Topológico** é um par $(X, \mathcal{T})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{T}$ é uma topologia em X .

Definição 2.30. Um espaço topológico X chama-se um **Espaço de Hausdorff** quando, para cada par de pontos distintos x, y em X , existem abertos U, V tais que $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Exemplo 2.31. Num espaço de Hausdorff X , todo ponto x é um subconjunto fechado de X . De fato, para cada $y \in X - x$, existem abertos A_y, B_y tais que $x \in A_y, y \in B_y, A_y \cap B_y = \emptyset$. Em particular, $y \in B_y \subset X - x$ e, portanto, x é fechado em X . Segue-se que todo subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ é fechado. A recíproca não é verdadeira.

Definição 2.32. Dado o espaço topológico X , um subconjunto A de X é um **conjunto fechado** quando seu complementar $(X - A)$ é aberto. Para que A seja um subconjunto fechado de X , é suficiente que, para cada ponto de $x \in X - A$, exista um aberto U_x , com $x \in U_x \subset X - A$, em outros termos $x \in U_x$ e $U_x \cap A = \emptyset$.

Exemplo 2.33. Os intervalos fechados $(-\infty, a] = \mathbb{R} - (a, +\infty)$, $[b, +\infty) = \mathbb{R} - (-\infty, b)$ e $[a, b] = \mathbb{R} - [(-\infty, a) \cup (b, +\infty)]$; são subconjuntos fechados da reta, pois são complementares de conjuntos abertos.

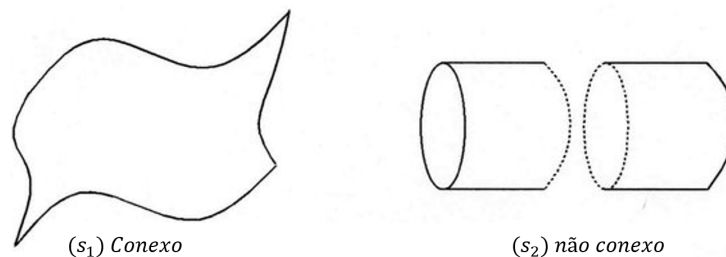
Exemplo 2.34. Uma reunião infinita de subconjuntos fechados de um espaço topológico X não é necessariamente um subconjunto fechado de X . Isto resulta, por passagem ao complementar, do fato de que a interseção de uma família infinita de abertos pode não ser um aberto. Observamos ainda que qualquer subconjunto de um espaço de Hausdorff é reunião de uma família de fechados, mas esse conjunto pode não ser fechado, por exemplo, o conjunto $\mathbb{Q}$ na reta $\mathbb{R}$.

Definição 2.35. Um espaço topológico X chama-se **conexo** quando o conjunto vazio ($\emptyset$) e X são os únicos subconjuntos de X simultaneamente abertos e fechados.

Intuitivamente, X é dito um espaço conexo se é formado por um só “pedaço”.

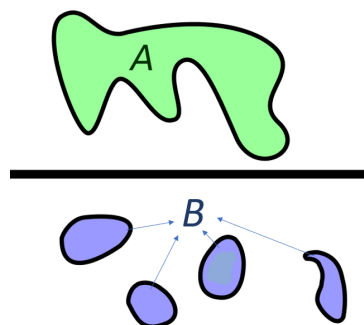
Exemplo 2.36. Pela Figura 2.3, dizemos que o espaço S_1 é conexo, isto é, está conectado, e que o espaço S_2 é não conexo. O mesmo vale para a Figura 2.4, onde A é conexo e B é não conexo.

Figura 2.3 – Conectividade.



Fonte: Researchgate, 2015.

Figura 2.4 – Conectividade.



Fonte: wikimedia, 2020.

Exemplo 2.37. O subconjunto vazio e o conjunto de um só ponto são conexos em qualquer espaço topológico. De fato, não há como decompor o espaço em dois conjuntos não vazios e disjuntos. O subconjunto vazio é conexo, e qualquer subconjunto com apenas um ponto será sempre conexo.

Exemplo 2.38. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, como subconjunto de $\mathbb{R}$, na topologia usual, não é conexo pois sempre há um irracional entre dois racionais. Pois,

$$\mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} | q < \sqrt{2}\} \cup q \in \mathbb{Q} | q > \sqrt{2},$$

que são conjuntos abertos disjuntos e não vazios.

2.3 Noções de Continuidade

Quando estudamos cálculo, vimos, de forma intuitiva, que uma função é contínua quando conseguimos desenhar seu gráfico completo sem tirar o lápis do papel, isto é, de maneira interrupta. Ou ainda, quando o gráfico da função não possui quebras no seu domínio. É importante destacar que a continuidade de uma função está fortemente vinculado com o estudo de limites, pois quando queremos saber se uma função é contínua, devemos analisar também a existência do limite.

Em topologia, a definição de continuidade é muito mais geral do que a definição de continuidade que usamos em cálculo. Podemos ter funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto, como é o caso da função de *Weierstrass* — contínua em todos os pontos, mas não é diferenciável em lugar nenhum. Além disso, podemos ter funções descontínuas que ainda são contínuas em um sentido topológico, como a função de *Dirichlet* — descontínua em todos os pontos, não é periódica, mas ainda assim pode ser integrada no sentido de *Riemann*.

Em resumo, a noção de continuidade em topologia é uma generalização da noção de continuidade que usamos em cálculo, que nos permite estudar funções mais complexas e propriedades geométricas dos espaços topológicos.

Definição 2.39. Uma aplicação entre dois espaços topológicos $f : X \rightarrow Y$ é uma **aplicação contínua**, se a pré-imagem $f^{-1}(B)$ de qualquer aberto B de Y é um aberto de X .

Isto é, $f^{-1}(B)$ é aberto em X para todo B aberto em Y . Isso significa que aplicações contínuas mapeiam conjuntos abertos em conjuntos abertos e conjuntos fechados em conjuntos fechados.

Lema 2.40. Sejam X e Y espaços topológicos, A e B subconjuntos fechados de X , tais que $A \cup B = X$. Sejam $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$ aplicações contínuas, de tal modo que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$. Então, a aplicação $h : X \rightarrow Y$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A, \\ g(x), & \text{se } x \in B, \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração: Seja C um subconjunto fechado de Y , isto é $C \subseteq Y$. Queremos mostrar que $h^{-1}(C)$ é um subconjunto fechado de X .

De fato, $h^{-1}(C)$ é a união de dois conjuntos: $A \cap h^{-1}(C)$ e $B \cap h^{-1}(C)$, isto é

$$h^{-1}(C) = (A \cap h^{-1}(C)) \cup (B \cap h^{-1}(C)).$$

Como A e B são fechados em X , temos que $A \cap h^{-1}(C)$ e $B \cap h^{-1}(C)$ são fechados em A e B , respectivamente, por i) e ii).

i) Note que $A \cap h^{-1}(C) = f^{-1}(C)$, é fechado em A por ser a pré-imagem contínua de um conjunto fechado em Y . Como A é fechado em X , a interseção de A com qualquer conjunto fechado de X é fechado em X , logo $A \cap h^{-1}(C)$ é fechado em X .

ii) Analogamente, podemos mostrar que $B \cap h^{-1}(C)$ é fechado em X . Basta observar que $B \cap h^{-1}(C) = g^{-1}(C)$, que é fechado em B , e que B é fechado em X .

Por hipótese, f e g são contínuas, então $f^{-1}(C)$ e $g^{-1}(C)$ são fechados em A e B , respectivamente. Assim, temos que

$$(A \cap h^{-1}(C)) = f^{-1}(C) \cap A;$$

$$(B \cap h^{-1}(C)) = g^{-1}(C) \cap B$$

são interseções finitas de conjuntos fechados, logo são fechados em X .

Assim, concluímos que $h^{-1}(C)$ é uma união finita de conjuntos fechados de X , e portanto é fechado em X para todo conjunto fechado C em Y . Logo, h é contínua.

Observação: O Lema 2.40 é também conhecido como **Lema da Colagem**, em resumo, ele diz que, dado um espaço topológico X e uma coleção de subespaços fechados $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$, é possível colar funções contínuas definidas nos A_α para obter uma função contínua em todo X .

Exemplo 2.41. Podemos construir uma aplicação $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 0; \\ \frac{x}{2}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Cada sentença desta aplicação é uma aplicação contínua, seus valores coincidem na interseção de seus domínios que são dois conjuntos fechados, cuja união é igual ao domínio de h . Logo, pelo lema 2.40, h é contínua.

Exemplo 2.42. Sejam A e B dois espaços topológicos e uma aplicação contínua $f : A \rightarrow B$. Então, f mantém propriedades topológicas como continuidade, aberto-fechado, conexidade, compactação etc. Isso significa que as relações entre os pontos e conjuntos em A são preservadas em B sob a aplicação f .

A continuidade de uma aplicação é uma propriedade fundamental na topologia que permite preservar muitos aspectos importantes da estrutura topológica.

Um dos problemas triviais da topologia é determinar se dois espaços topológicos dados são homeomorfos ou não. Mostrar que dois espaços são homeomórficos é uma questão de construir aplicações contínuas de um espaço para outro tendo uma inversa contínua.

Definição 2.43. *A aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é um **homeomorfismo**, se é uma bijeção contínua e sua aplicação inversa f^{-1} também é contínua.*

Essa aplicação preserva a topologia dos espaços, ou seja, as propriedades de abertura e fechamento são preservadas pela aplicação e sua inversa.

Definição 2.44. *Dois espaços topológicos são **homeomorfos** se existe um homeomorfismo entre eles.*

Espaços homeomorfos podem ser tratados como “iguais” pois, via homeomorfismo, seus abertos são equivalentes. Em outras palavras, os espaços topológicos homeomorfos possuem as mesmas propriedades topológicas. Isto é, considerando as classes de equivalência, temos que espaços homeomorfos são, basicamente, iguais em topologia, o que significa dizer que o homeomorfismo é uma relação de equivalência na família dos espaços topológicos.

Agora, para mostrar que dois espaços não são homeomorfos apresentaremos ferramentas e técnicas — ao longo dos seguintes capítulos — que irão nos ajudar a diferenciar estes espaços, isto é, devemos mostrar que não existe uma aplicação contínua com inversa contínua. Por exemplo, se encontrarmos alguma propriedade topológica válida para um espaço, mas não para o outro, então os espaços não são homeomorfos. Um clássico exemplo pode ser dado ao considerarmos o intervalo fechado $[0, 1]$ e o intervalo aberto $(0, 1)$, note que o primeiro espaço é compacto e o segundo não, portanto, não são homeomorfos.

Exemplo 2.45. *Listamos as seguintes transformações:*

a) *No plano, um quadrado e uma circunferência são homeomorfos.*

Isto é, podemos fazer uma deformação contínua do quadrado até que ele se torne uma circunferência. Começamos com o quadrado e gradualmente vamos arredondando seus vértices e suavizando suas arestas, até que ele se transforme em uma figura curva e contínua que tem a mesma topologia da circunferência.

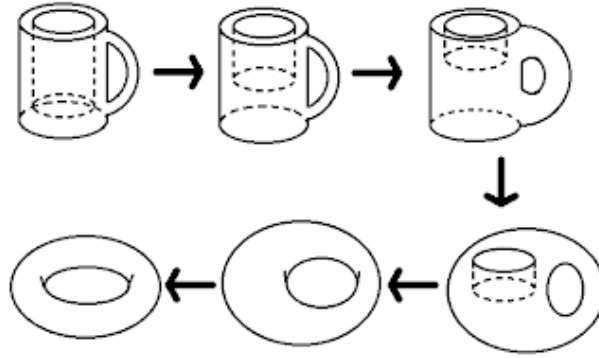
b) *No espaço, quaisquer duas curvas simples são homeomorfas se elas podem ser deformadas continuamente uma na outra sem quebrar ou cortar.*

Para entender isso, imagine duas cordas sendo desenhadas em um pedaço de papel. Se essas cordas podem ser torcidas e esticadas para se tornarem exatamente iguais sem quebrar ou cruzar, então elas são homeomorfas. Da mesma forma, se duas curvas no espaço

podem ser transformadas uma na outra sem que haja interseção ou quebra, então elas são homeomorfas. Isso significa que essas curvas compartilham as mesmas propriedades topológicas, como o número de buracos ou o número de componentes conexas.

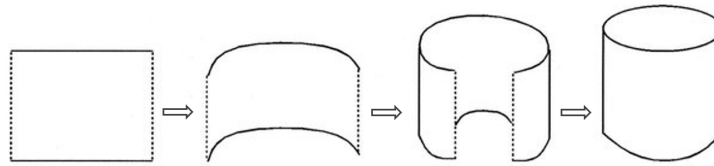
c) Para ilustrar:

Figura 2.5 – Homeomorfismo: transformação de uma xícara de café em um *donut*.



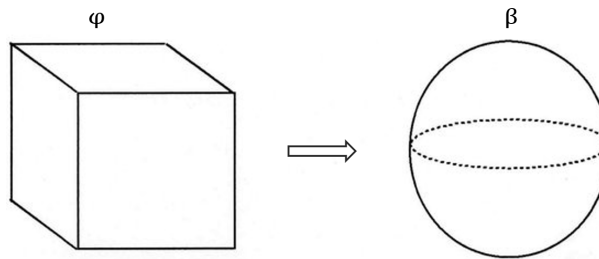
Fonte: Researchgate, 2020.

Figura 2.6 – Transformação de uma folha de papel em um cilindro.



Fonte: Researchgate, 2015.

Figura 2.7 – Homeomorfismo: transformação de um cubo φ em uma esfera β .



Fonte: Researchgate, 2015..

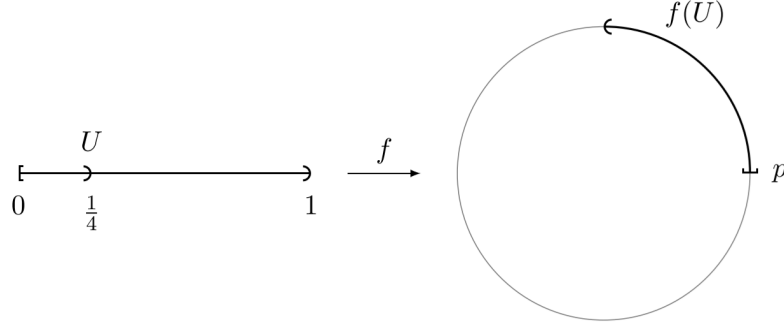
Exemplo 2.46. Considere S^1 o círculo de raio 1 e centro $(0,0)$, subespaço do $\mathbb{R}^2$, e seja $f : [0, 1) \rightarrow S^1$ a aplicação definida por $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

Pelas propriedades das uma aplicações trigonométricas, f é bijetora e contínua, no entanto, a sua inversa f^{-1} não é contínua. A imagem através de f do conjunto aberto

$$U = [0, 1/4) = [0, 1) \cap (-1, 1/4)$$

do domínio, por exemplo, não é aberto em S^1 , visto que não há nenhum aberto V do $\mathbb{R}^2$ tal que $V \cap S^1 = f(U)$; Portanto, segue que f não é um homeomorfismo (ver Figura 2.8).

Figura 2.8 – Um não homeomorfismo



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Observação: Note que, uma aplicação bijetora pode ser contínua sem ser um homeomorfismo.

Proposição 2.47. A relação $[g \circ f]^{-1}(B) = (f^{-1} \circ g^{-1})(B)$ expressa que a composta $g \circ f : X \rightarrow Z$ de duas aplicações contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ é uma aplicação contínua.

Demonstração: Para provar que a relação $[g \circ f]^{-1}(B) = (f^{-1} \circ g^{-1})(B)$, é necessário verificar que qualquer elemento $x \in [g \circ f]^{-1}(B)$ também está em $(f^{-1} \circ g^{-1})(B)$, e vice-versa.

Suponha que $x \in [g \circ f]^{-1}(B)$. Isto significa que $(g \circ f)(x) \in B$. Então, $g(f(x)) \in B$. Como g é contínua, $f(x) \in g^{-1}(B)$. Isto é, $x \in f^{-1}(g^{-1}(B))$. Portanto,

$$[g \circ f]^{-1}(B) \subseteq (f^{-1} \circ g^{-1})(B).$$

Agora, suponha que $x \in (f^{-1} \circ g^{-1})(B)$. Isto significa que $f(x) \in g^{-1}(B)$. Logo, $g(f(x)) \in B$. Como $[g \circ f]^{-1}$ é a inversa de $g \circ f$, temos que $x \in [g \circ f]^{-1}(B)$. Assim,

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(B) \subseteq [g \circ f]^{-1}(B).$$

Concluimos, portanto, que $[g \circ f]^{-1}(B) = (f^{-1} \circ g^{-1})(B)$. Isso mostra que a composta de duas aplicações contínuas é uma aplicação contínua.

Proposição 2.48. Uma aplicação biunívoca $f : M \rightarrow N$, de um espaço métrico M sobre um espaço métrico N , pode ser contínua sem que a sua inversa $g = f^{-1} : N \rightarrow M$ também o seja.

Demonstração: Vamos mostrar um exemplo de uma aplicação biunívoca $f : M \rightarrow N$, de um espaço métrico M sobre um espaço métrico N , que é contínua, mas cuja inversa $g = f^{-1} : N \rightarrow M$ não é contínua.

Considere os espaços métricos $M = (0, 1]$ e $N = [0, 1]$, ambos com a métrica usual (distância euclidiana).

Defina a aplicação $f : M \rightarrow N$ como

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1/2, \\ x - 1/2, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

A aplicação f é uma bijeção, pois ela mapeia cada elemento de M em um único elemento de N , e vice-versa.

Agora, vamos mostrar que f é contínua. Seja $x_0 \in M$, e seja $\epsilon > 0$. Se $x_0 \leq 1/2$, então para qualquer $x \in M$ com $|x - x_0| < \epsilon$, temos

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \epsilon.$$

Se $1/2 < x_0 \leq 1$, então para qualquer $x \in M$ com $|x - x_0| < \epsilon$, temos

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0 - 1/2| \leq |x - x_0| + 1/2 < \epsilon + 1/2.$$

Portanto, a aplicação f é contínua em todo ponto de M .

Porém, a sua inversa $g = f^{-1} : N \rightarrow M$ não é contínua. Para ver isso, observe que o conjunto $(1/2, 1]$ é fechado em M , mas a sua imagem sob f^{-1} , que é o intervalo $[0, 1/2)$, não é fechada em N . Portanto, f^{-1} não é contínua em $1/2$, que é um ponto de acumulação de $(1/2, 1]$ em M .

Com isso, temos um exemplo de uma aplicação biunívoca $f : M \rightarrow N$ que é contínua, mas cuja inversa $g = f^{-1} : N \rightarrow M$ não é contínua.

Exemplo 2.49. Considere as funções trigonométricas $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, dada por $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$, e $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x, y) = \arctan(y/x)$.

A função f é uma aplicação biunívoca e contínua, já que a circunferência S^1 é um espaço métrico compacto⁸ e a função trigonométrica é contínua. No entanto, a sua inversa g não é contínua, pois ela leva pontos antipodais⁹ em $\mathbb{R}$ para o mesmo ponto em S^1 , e portanto não pode ser contínua em uma vizinhança desses pontos. Assim, g não é um homeomorfismo e f não é uma aplicação contínua inversível.

⁸ Toda sequência em S^1 possui uma subsequência convergente para um ponto em S^1 .

⁹ São dois pontos de um espaço topológico que são equidistantes e diametralmente opostos.

3 Homotopia

Na Topologia Algébrica, a Homotopia ganha destaque por ser um dos conceitos basilares mais importante. Ela nos fornece informações sobre a natureza topológica de um determinado espaço. É uma ferramenta essencial para entender a conectividade de um espaço topológico e também para definir os invariantes homotópicos - que são características de um espaço topológico preservadas sob uma deformação contínua.

A homotopia é uma deformação contínua entre duas aplicações, que podem ser consideradas caminhos em um espaço topológico.

Em suma, enquanto o homeomorfismo descreve a equivalência de dois espaços topológicos, a homotopia descreve como duas aplicações podem ser continuamente transformadas uma na outra em um espaço topológico.

A definição de Homotopia, bem como alguns resultados gerais deste tópico, foram fundamentados em LIMA¹, também serviram de aportes teóricos ARMSTRONG², CROOM³, HATCHER⁴, LIMA⁵, MUNKRES⁶ e VILCHES⁷.

3.1 Aplicações homotópicas

Intuitivamente, aplicações homotópicas são noções que se definem para aplicações contínuas entre dois espaços topológicos. A priori, ela é pensada como a deformação de um objeto através de uma aplicação contínua.

Nesta sessão, o símbolo I indicará o *intervalo compacto (fechado)* $[0, 1]$ munido da topologia usual de $\mathbb{R}$.

Algumas proposições não serão aqui demonstradas, nos ocuparemos apenas em demonstrar as que serão essenciais para o estudo do *Grupo Fundamental*, o leitor poderá acompanhar as demonstrações na obra referência deste trabalho.

Definição 3.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ duas aplicações contínuas. Então, f e g são **homotópicas** quando existe uma aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow Y$, tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. A aplicação H chama-se uma **homotopia** entre f e g .*

¹ (LIMA, 1977b), capítulo 01 e 02.

² (ARMSTRONG, 2013), capítulo 05.

³ (CROOM, 2012), capítulo 04.

⁴ (HATCHER, 2005), capítulo 01.

⁵ (LIMA, 1970; LIMA, 1995)

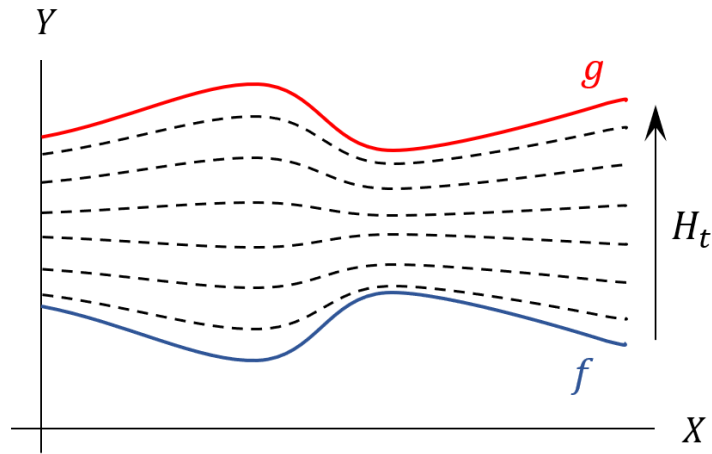
⁶ (MUNKRES, 2014), capítulo 09.

⁷ (VILCHES,), capítulo 01.

Notação. $H : f \simeq g$, ou apenas $f \simeq g$.

Se imaginarmos o parâmetro t , variando de 0 a 1, como sendo o tempo, então podemos nos referir a H como sendo uma deformação contínua da aplicação f para a aplicação g . Em outras palavras, sucintamente, podemos entender uma homotopia H entre duas aplicações contínuas f e g de um espaço topológico X num espaço topológico Y , como um método de deformar continuamente a aplicação f de forma a se obter g . A Figura 3.1 retrata uma homotopia entre as duas aplicações citadas, observe.

Figura 3.1 – Homotopia entre as aplicações contínuas f e g .



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Ao longo dessa homotopia, a imagem de cada ponto em X é “esticada” ou “comprimida” na direção de f e g . A ideia fundamental é que, à medida que t varia de 0 a 1, a imagem de cada ponto de X se move de forma “uniforme” em direção à imagem correspondente em g . Ou seja, em cada instante de tempo $t \in I$, a imagem de $H(x, t)$ é uma interpolação entre as imagens de $f(x)$ e $g(x)$. Na interpolação f e g são conectadas por uma família contínua de aplicações.

Definição 3.2. Dada a homotopia $H : f \simeq g$, definimos a aplicação contínua $H_t : X \rightarrow Y$, pondo $H_t(x) = H(x, t)$, para cada $t \in I$. Dessa forma, obtemos uma **família contínua a um parâmetro** $(H_t)_{(t \in I)}$ de aplicações contínuas de X em Y ordenados por I .

Assim, $(x, t) \mapsto H_t(x)$ é uma aplicação contínua, o que determina a continuidade da família. Como $H_0 = f$ e $H_1 = g$, deduz-se que a família $(H_t)_{(t \in I)}$ começa em f e termina em g .

Definição 3.3. Uma **homotopia linear** é uma função contínua $H : X \times I \rightarrow Y$, onde X e Y são espaços topológicos e I é o intervalo unitário $[0, 1]$, que pode ser escrita como

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

onde f e g são duas funções contínuas de X a Y .

Geometricamente, a homotopia linear é uma família contínua de funções entre f e g , que são interpoladas linearmente em cada intervalo de tempo t . Isso significa que, durante a homotopia, a imagem de cada ponto de X se move de forma “uniforme” em direção à imagem correspondente em g . Esse conceito é frequentemente usado para provar resultados na topologia algébrica e de grande valor na teoria da homotopia.

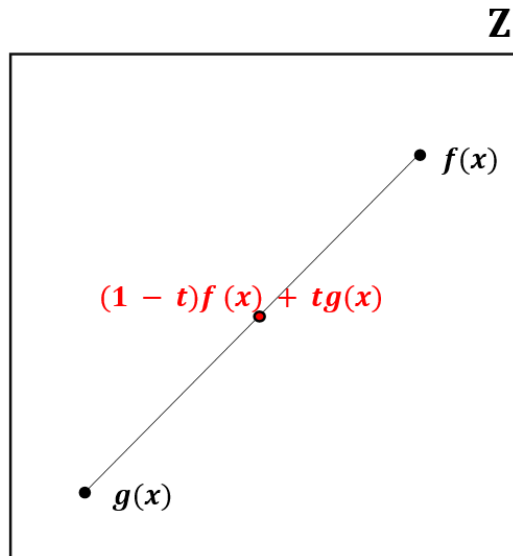
Exemplo 3.4. Suponhamos que Z seja um espaço vetorial e sejam f e $g : X \rightarrow Z$ aplicações contínuas. Podemos ligar qualquer valor $f(x)$ ao valor $g(x)$ por meio de um seguimento. Os pontos deste seguimento são dados por $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$, onde $t \in [0, 1]$.

Observe que,

$$H(x, t) = \begin{cases} H(x, 0) = f(x), & \forall t \in [0, 1]; \\ H(x, 1) = g(x), & \forall t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Assim, dizemos que H indica o movimento — isto é, a homotopia (observe a figura 3.2) — que é feito ao longo do seguimento que liga os valores de $f(x)$ a $g(x)$.

Figura 3.2 – Homotopia no espaço vetorial.

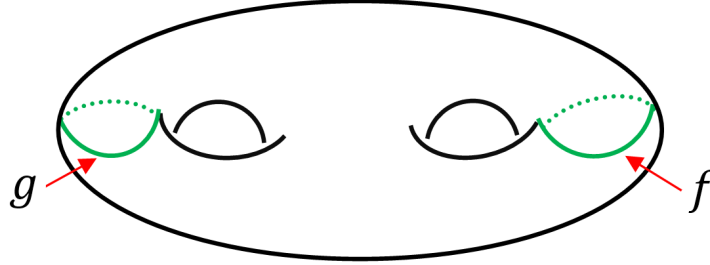


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Exemplo 3.5. Suponha que X é um espaço topológico convexo e que $f, g : X \rightarrow Y$ são duas funções contínuas. Então, podemos definir uma homotopia linear entre f e g da seguinte maneira: para cada ponto x em X e cada número real t em I , definimos $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$. Neste caso, a homotopia é linear porque X é convexo, o que significa que a linha que une $f(x)$ e $g(x)$ está contida em X para todo x em X .

Exemplo 3.6. Observe a Figura 3.3:

Figura 3.3 – Bitoro $\mathcal{B}$ (superfície bidimensional)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

As aplicações destacadas em verde, $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}$ e $g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}$, são aplicações contínuas que tomam valores no bitoro. Intuitivamente, podemos ver que não podemos levar continuamente uma aplicação na outra. Isto é, f e g não são homotópicas.

Exemplo 3.7. Consideremos o cilindro tridimensional $S^1 \times I$, onde S^1 é a esfera unitária de $\dim_1$ (dimensão um) e I é o intervalo unitário. Definamos $f, g : S^1 \times I \rightarrow S^2$ por

$$f(x, t) = (\cos(2\pi t)x, \sin(2\pi t)x, 0) \quad \text{e} \quad g(x, t) = (\cos(2\pi t)x, \sin(2\pi t)x, 1).$$

Então, a função $H : S^1 \times I \times I \rightarrow S^2$ definida por $H(x, s, t) = (\cos(2\pi st)x, \sin(2\pi st)x, t)$ é uma homotopia linear entre f e g na esfera unitária tridimensional S^2 , a interpolação ocorre apenas na direção vertical (z).

Proposição 3.8. Dados dois espaços topológicos, X e Y . A relação de homotopia, $f \simeq g$, é uma **relação de equivalência** no conjunto das aplicações contínuas de X em Y .

Demonstração: é necessário verificar se a relação acima é reflexiva, simétrica e transitiva.

Assim, para todas $f, g : X \rightarrow Y$ contínuas, temos:

(i) **Reflexiva:** $f \simeq f$.

De fato, definimos $H : X \times I \rightarrow Y$, dada por $H(x, t) = f(x)$. Assim, para todo $t \in I$, H é contínua e $H(x, 0) = H(x, 1) = f(x)$, $\forall x \in X$. Portanto, $f \simeq f$, isto é, a relação de homotopia é reflexiva.

(ii) **Simétrica:** $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$.

Seja $H : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g , tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in X$. Determinando $K : X \times I \rightarrow Y$ dada por $K(x, t) = H(x, 1 - t)$, de

imediatamente, obtemos uma homotopia entre g e f , logo, é evidente que, K é contínua e também:

$$\begin{cases} K(x, 0) = H(x, 1) = g(x), & \forall x \in X; \\ K(x, 1) = H(x, 0) = f(x), & \forall x \in X; \end{cases}$$

Portanto, $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$, o que significa dizer que a relação de homotopia é simétrica.

(iii) **Transitiva:** $f \simeq g$ e $g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$.

Sejam $H, K : X \times I \rightarrow Y$ aplicações contínuas, tais que $H : f \simeq g$ e $K : g \simeq h$, onde:

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x) & \text{e} & H(x, 1) = g(x), & \forall x \in X; \\ K(x, 0) = g(x) & \text{e} & K(x, 1) = h(x), & \forall x \in X; \end{cases}$$

Definimos $L : X \times I \rightarrow Y$, dada por:

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ K(x, 2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

Note que $(x, \frac{1}{2}) \in \text{Dom}(H)$ e $\text{Dom}(K)$, e para $t = (\frac{1}{2})$, temos:

$$H(x, 2t) = H(x, 1) = g(x) = K(x, 0) = K(x, 2t - 1).$$

Observe ainda que a aplicação L é uma homotopia entre f e h , pois:

$$L(x, t) = \begin{cases} L(x, 0) = H(x, 0) = f(x) \\ L(x, 1) = K(x, 1) = h(x) \end{cases}$$

Dado que $t = (\frac{1}{2})$ e H, K são contínuas, pelo Lema 2.40, L também é uma aplicação contínua. Logo, $L : f \simeq h$. Portanto, $f \simeq g$ e $g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$. Por fim, concluímos que $\simeq$ é uma relação de equivalência.

Exemplo 3.9. Qualquer subconjunto convexo de um espaço euclidiano é uma homotopia equivalente a um ponto.

Seja X um espaço euclidiano e A um subconjunto convexo de X . Vamos mostrar que A é homotopicamente equivalente a um ponto.

Para isso, seja a um ponto qualquer em A . Define-se a função contínua $f : A \rightarrow X$ dada por $f(x) = (1 - t)a + tx$, para todo $x \in A$ e $t \in [0, 1]$. Observe que $f(x)$ é uma média ponderada entre a e x , com o peso de a decrescendo linearmente de 1 a 0 conforme t varia

de 0 a 1, e o peso de x aumentando linearmente de 0 a 1. É fácil ver que $f(x) \in A$ para todo $x \in A$ e $t \in [0, 1]$, pois a convexidade de A garante que a reta que une a e x está toda contida em A . Além disso, temos $f(a) = a$ e $f(x) \rightarrow a$ quando $t \rightarrow 0$ ou $t \rightarrow 1$.

Por outro lado, para qualquer ponto $y \in X$, a função contínua $g : X \rightarrow A$ dada por $g(x) = (1 - t)a + ty$, para todo $x \in X$ e $t \in [0, 1]$, é tal que $g(x) \in A$ para todo $x \in X$ e $t \in [0, 1]$, pois a convexidade de A garante que a reta que une a e y está toda contida em A . Além disso, temos $g(y) = y$ e $g(x) \rightarrow a$ quando $t \rightarrow 0$ ou $t \rightarrow 1$.

Portanto, definindo $f : A \rightarrow X$ e $g : X \rightarrow A$ como acima, temos que $f \circ g$ e $g \circ f$ são homotopias de A ao ponto a , já que $f(x)$ se aproxima de a quando $t \rightarrow 0$ ou $t \rightarrow 1$, e $g(x)$ se aproxima de a quando $t \rightarrow 0$ ou $t \rightarrow 1$. Logo, A é homotopicamente equivalente a um ponto, como desejado.

Exemplo 3.10. Seja X um espaço topológico qualquer, e seja Y um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Então, qualquer par de aplicações $f, g \in C(X, Y)$ são homotópicas entre si. Basta definir

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x); \quad (x \in X, 0 \leq t \leq 1).$$

Como f e g são aplicações contínuas de X em Y , a aplicação $H(x, t)$ é contínua em $X \times [0, 1]$, pois é uma combinação linear contínua de duas aplicações contínuas em X . Além disso, temos que

$$H(x, t) = \begin{cases} H(x, 0) = (1 - 0)f(x) + 0g(x) = f(x), & \forall x \in X; \\ H(x, 1) = (1 - 1)f(x) + 1g(x) = g(x); & \forall x \in X. \end{cases}$$

Agora, falta mostrar que H é uma homotopia entre f e g . Para isso, precisamos verificar que $H(x, t)$ está em Y para todo $x \in X$ e $0 \leq t \leq 1$. Mas isso é verdade porque Y é um conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$, isto é, para quaisquer pontos y_1 e y_2 em Y , o segmento de reta que une esses pontos, dado por $\{(1 - t)y_1 + ty_2 : 0 \leq t \leq 1\}$, está todo contido em Y , mais geralmente, como Y é convexo, a imagem de $H(x, t)$ está contida em Y . Portanto, $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ está em Y para $x \in X$ e $0 \leq t \leq 1$. Isso vale para qualquer subconjunto convexo Y de $\mathbb{R}^n$.

Concluimos, assim, que f e g são homotópicas em X através de $H(x, t)$.

A partir desta sessão, denotaremos a classe de homotopia (ou classe de equivalência) de uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ por simplesmente $[f]$, sua notação usual. Assim, o conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas de X em Y será representado pelo símbolo $[X, Y]$. O conjunto $[X, Y]$ tem como elementos as classes de homotopia no conjunto $C(X, Y)$, conjunto formado pelas aplicações contínuas de X em Y com a topologia compacto-aberta (topologia definida num espaço de funções).

Notação. (A classe de equivalência de uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$): $[f]$.

Notação. (As classes de homotopias das aplicações contínuas de X em Y): $[X, Y]$.

A seguir, pretende-se tornar mais algébrico o conjunto das classes de homotopia, para tanto, definiremos uma operação de composição entre classes.

Proposição 3.11. Dadas as aplicações contínuas: $f, f' : X \rightarrow Y$ e $g, g' : Y \rightarrow Z$. Se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$, então $g \circ f \simeq g' \circ f'$. O que significa dizer que a composição de aplicações preserva homotopias.

Notação. (Composição entre duas aplicações $f(x)$ e $g(x)$): $(f \circ g)(x)$

Demonstração: Dadas as homotopias: $H : X \times I \rightarrow Y$ entre f, f' e $K : Y \times I \rightarrow Z$ entre g, g' . Definimos $L : X \times I \rightarrow Z$, homotopia entre $g \circ f$ e $g' \circ f'$, pondo $L(x, t) = K(H(x, t), t)$. Dadas as suas funções coordenadas contínuas, é fácil verificar que L também é contínua.

Podemos definir ainda uma aplicação φ , tal que $\varphi : X \times I \rightarrow I$, isto é $(x, t) \rightarrow \varphi(x, t) = t$, a projeção no segundo fator. Desta forma, com L é dada por

$$L(x, t) = K \circ (H, \varphi)(x, t),$$

isto é,

$$L(x, t) = K(H(x, t), \varphi(x, t)) \Rightarrow L(x, t) = K(H(x, t), t),$$

vê-se que L está bem definida.

Agora, note que:

- $L(x, 0) = K(H(x, 0), 0) = K(f(x), 0) = g(f(x)) = (g \circ f)(x);$
 - $L(x, 1) = K(H(x, 1), 1) = K(f'(x), 1) = g'(f'(x)) = (g' \circ f')(x).$
- Portanto, $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

Dada a Proposição 3.8, podemos agora introduzir a definição de composição entre classes de homotopia.

Definição 3.12. Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ aplicações contínuas, onde X, Y , e Z são espaços topológicos. Definimos a composição de $[f]$ e $[g]$ pondo $[f] \circ [g] = [f \circ g]$.

A saber, $[f] \in [X, Y]$ e $[g] \in [Y, Z]$, o que significa dizer que a classe $[f \circ g]$ não depende dos representantes f, g das classes $[f]$ e $[g]$, respectivamente. Assim, a operação de composição entre classes de homotopia está, de fato, bem definida.

3.2 Tipo de Homotopia

Definição 3.13. Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$, entre espaços topológicos X e Y , chama-se uma **equivalência homotópica** quando existe $g : Y \rightarrow X$ contínua, tal que $g \circ f \simeq id_X$ e $f \circ g \simeq id_Y$. Diz-se então que g é o **inverso homotópico** de f e que X e Y possuem o **mesmo tipo de homotopia**.

Notação. $f : X \equiv Y$ ou simplesmente $X \equiv Y$.

Lema 3.14. Todo homeomorfismo é uma equivalência homotópica.

Demonstração: Seja $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo entre os espaços topológicos X e Y . Para mostrar que f é contínua, basta notar que um homeomorfismo é definido como uma aplicação bijetora $f : X \rightarrow Y$ que preserva a topologia, isto é, para todo aberto $U \subset Y$, temos que $f^{-1}(U)$ é aberto em X . Como a definição de continuidade é que para todo aberto $V \subset X$, $f(V)$ é aberto em Y , temos que f é contínua.

Além disso, como f é um homeomorfismo, existe uma função inversa $g : Y \rightarrow X$ também bijetora e contínua, tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$ e $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Como g é contínua, temos que $g \circ f$ é contínua. E como $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, temos que $g \circ f \simeq id_X$, onde $id_X : X \rightarrow X$ é a identidade em X . Similarmente, temos que $f \circ g \simeq id_Y$, onde $id_Y : Y \rightarrow Y$ é a identidade em Y .

Portanto, f é uma equivalência homotópica. Logo, concluímos que todo homeomorfismo é uma equivalência homotópica.

Observação: Note que a recíproca deste lema não é verdadeira, pois, espaços do mesmo tipo de homotopia são equivalentes sob uma perspectiva homotópica. O Exemplo 3.15 prova que esta afirmação.

Exemplo 3.15. Considere os espaços topológicos:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Note que X e Y não são homeomorfos porque X é conexo e Y não é. No entanto, X e Y são espaços topológicos homotopicamente equivalentes.

Para mostrar que X e Y são homotopicamente equivalentes, podemos encontrar funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ que são inversas homotópicas. Uma escolha possível é:

- $f(x, y) = (x, \sqrt{x^2 - 1})$ para $(x, y) \in X$ (note que $\sqrt{x^2 - 1}$ está bem definido pois $x^2 - 1 \geq 0$ para $(x, y) \in X$);
 - $g(x, y) = (x, \sqrt{x^2 + 1})$ para $(x, y) \in Y$.

Note que f e g são funções contínuas e que $f \circ g$ é homotópico à identidade em Y e $g \circ f$ é homotópico à identidade em X , algebricamente $g \circ f \simeq id_X$ e $f \circ g \simeq id_Y$. Portanto, f é uma equivalência homotópica de X para Y e g é uma equivalência homotópica de Y para X , isto é $f : X \equiv Y$ e $g : Y \equiv X$, mas f não é um homeomorfismo porque f não é injetiva e g não é um homeomorfismo porque g não é contínua em $(0,0) \in Y$.

Conclusão: Existem espaços topológicos que são homotopicamente equivalentes, mas não são homeomorfos.

Portanto, a recíproca de “todo homeomorfismo é uma equivalência homotópica” não é verdadeira.

Outro exemplo clássico é o espaço topológico conhecido como “8 deitado”, que é formado pela união de dois círculos tangentes no mesmo ponto (ver Exemplo 3.16).

Exemplo 3.16. Considere a função $f : S^1 \rightarrow S^1$ que percorre o círculo uma vez no sentido horário e, em seguida, outra vez no sentido anti-horário. Esta função é claramente uma equivalência homotópica, pois sua inversa é dada por percorrer o círculo na ordem oposta. No entanto, f não é um homeomorfismo, pois não é injetora: a imagem de f contém o ponto da interseção dos dois círculos, que é atingido duas vezes.

Logo, nem toda equivalência homotópica é um homeomorfismo.

Exemplo 3.17. Todo espaço vetorial normado tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

Seja V um espaço vetorial normado e $x \in V$ um ponto fixo. Definimos a função $H : V \times [0, 1] \rightarrow V$ como:

$$H(v, t) = (1 - t)v + tx,$$

onde $v \in V$ e $t \in [0, 1]$. Observe que $H(v, 0) = v$ e $H(v, 1) = x$ para todo $v \in V$. Além disso, H é uma função contínua, pois é uma combinação linear de funções contínuas.

Agora, definimos a função $F : V \rightarrow V$ como $F(v) = x$ para todo $v \in V$. Observe que F é uma função constante e, portanto, também é contínua.

Temos então que $H(v, 0) = v$ e $H(v, 1) = F(v)$ para todo $v \in V$. Isso significa que H é uma homotopia entre a identidade em V (dada por $Id_V(v) = v$ para todo $v \in V$) e a função constante F . Portanto, V tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto, o que completa a demonstração.

Proposição 3.18. Se $X \equiv X'$ e $Y \equiv Y'$, então a cardinalidade de $[X', Y']$ é igual a cardinalidade de $[X, Y]$, isto é, $[X, Y]$ e $[X', Y']$ possuem o mesmo número cardinal.

Uma consequência da proposição 3.18 é que se $\varphi : X' \equiv X$ e $\Psi : Y \equiv Y'$, consequentemente, $[f] \mapsto [\Psi \circ f \circ \varphi]$ é uma bijeção de $[X, Y]$ sobre $[X', Y']$. É evidente

que $X \equiv X$ e $X \equiv Y \Rightarrow Y \equiv X$, e ainda $X \equiv Z, Y \equiv Z \Rightarrow X \equiv Z$. Em outras palavras, a relação denotada por “ $\equiv$ ”, é uma relação de equivalência. Salientamos ainda que a relação “ter o mesmo tipo de Homotopia” é uma relação de equivalência na categoria dos espaços topológicos.

Exemplo 3.19. *Os espaços homeomorfos têm o mesmo tipo de homotopia.*

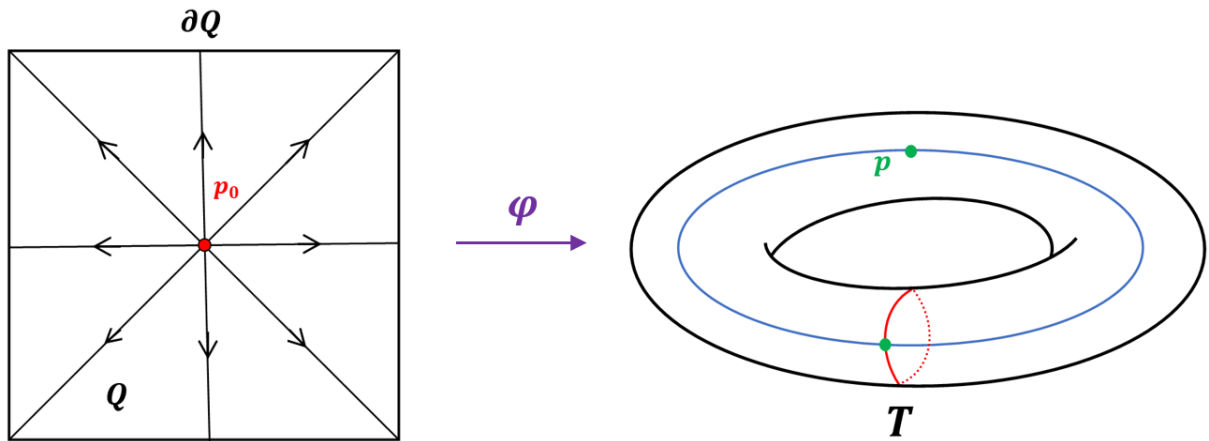
Seja X e Y dois espaços topológicos homeomorfos, com homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$. Suponha que $g : Y \rightarrow X$ seja uma função contínua tal que $f \circ g$ é homotópica à identidade em Y e $g \circ f$ é homotópica à identidade em X .

Para mostrar que X e Y têm o mesmo tipo de homotopia, precisamos mostrar que, para quaisquer dois pontos $x_0, x_1 \in X$, existe uma função contínua $h : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $h(0) = x_0$, $h(1) = x_1$ e h é homotópica à identidade em X . Para fazer isso, podemos usar o homeomorfismo f para transportar x_0, x_1 para pontos y_0, y_1 em Y , ou seja, definimos $y_0 = f(x_0)$ e $y_1 = f(x_1)$. Em seguida, usamos a homotopia $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ para encontrar uma função contínua $h' : [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $h'(0) = y_0$, $h'(1) = y_1$ e h' é homotópica à identidade em Y . Finalmente, usamos o homeomorfismo g para transportar h' de volta para X , ou seja, definimos $h = g \circ h'$. A função h satisfaz as propriedades desejadas, pois $h(0) = g(y_0) = g \circ f(x_0) = x_0$, $h(1) = g(y_1) = g \circ f(x_1) = x_1$ e $h \simeq \text{id}_X$ pela homotopia $g \circ f \simeq \text{id}_X$.

Portanto, concluímos que espaços homeomorfos têm o mesmo tipo de homotopia, já que um homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ e sua inversa $g : Y \rightarrow X$ fornecem as homotopias necessárias para provar a equivalência.

Exemplo 3.20. *Sejam $T = S^1 \times S^1$ o toro bidimensional e $p \in T$ ponto arbitrário. $T - \{p\}$ tem o mesmo tipo de homotopia da união de dois círculos com um ponto em comum.*

Figura 3.4 – Deformação de um quadrado.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Com efeito, o toro T é a imagem de um quadrado Q por uma aplicação contínua: $\varphi : Q \rightarrow T$ que transforma a fronteira ∂Q do quadrado na união $Y = S \cup S'$ de dois círculos com um ponto em comum, e é um homeomorfismo do interior de Q no complemento $T - Y$. Podemos assumir que o ponto $p \in T$ é a imagem por φ do centro p_0 do quadrado. Como o quadrado é homeomorfo a um disco unitário fechado, segue que $Q - \{p_0\}$ tem o mesmo tipo de homotopia que (do contorno) ∂Q . A deformação de $Q - \{p_0\}$ em ∂Q ocorre ao longo dos raios que começam em p_0 . Durante a homotopia, os pontos de ∂Q não se movem. Compondo esta homotopia com φ , obtemos uma deformação de $T - \{p\}$ em Y , o que nos dá $T - \{p\} \equiv Y$.

3.3 Espaços Contráteis

Um espaço contrátil é um espaço topológico em que é possível “contrair” qualquer conjunto fechado para um ponto “sem deixá-lo escapar” daquele conjunto.

Definição 3.21. Um espaço topológico é chamado de **contrátil** se ele for homotopicamente equivalente a um ponto, ou seja, exista uma aplicação contínua $f : X \rightarrow \{*\}$ e outra $g : \{*\} \rightarrow X$, tais que, $f \circ g$ é homotópica à identidade em $\{*\}$ e $g \circ f$ é homotópica à identidade em X .

Dizemos que o espaço topológico X tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto, isto é, X é dito um espaço topológico formado por apenas um elemento.

Exemplo 3.22. O intervalo $I = [0, 1]$ é um espaço contrátil.

Basta escolher $f : I \rightarrow \{*\}$ como a aplicação constante, e $g : \{*\} \rightarrow I$ como a aplicação que envia o único ponto de $\{*\}$ para qualquer ponto de I . É fácil ver que $g \circ f$ é homotópica à identidade em I por uma homotopia linear, e que a aplicação identidade em $\{*\}$ é homotópica a $f \circ g$ levando $\{*\}$ para 0.5 através de uma homotopia linear.

Exemplo 3.23. O espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço contrátil.

De fato, podemos escolher $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\}$ como a aplicação constante que leva todos os pontos em $\mathbb{R}^n$ para o ponto 0, e $g : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ como a aplicação que envia o único ponto de $\{0\}$ para qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$. Mais uma vez, é fácil verificar que $g \circ f$ é homotópica à identidade em $\mathbb{R}^n$, e a aplicação identidade em $\{0\}$ é homotópica a $f \circ g$ levando $\{0\}$ a qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$ através de uma homotopia linear.

Outros exemplos de espaços contráteis incluem: O cilindro em dimensões 2 ou 3; O disco fechado em dimensões 2 ou 3; O toro em dimensões 3 ou mais dimensões. Em suma,

qualquer espaço que pode ser deformado continuamente para um ponto (ou uma figura discreta⁸) é contrátil.

Exemplo 3.24. *Qualquer ponto é contrátil a um ponto.*

Para provar esta afirmação, precisamos mostrar que existe uma homotopia entre a identidade e a constante que leva todo o espaço nesse ponto. Vamos considerar um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e um ponto $x_0 \in X$. A identidade é uma aplicação $f : X \rightarrow X$ que leva cada ponto $x \in X$ a si mesmo, ou seja, $f(x) = x$. A constante é uma aplicação $g : X \rightarrow X$ que leva cada ponto $x \in X$ a x_0 , ou seja, $g(x) = x_0$.

Agora, vamos definir uma aplicação $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$, que é uma homotopia entre f e g . Para cada ponto $x \in X$ e $t \in [0, 1]$, definimos $H(x, t)$ como:

$$H(x, t) = (1 - t)x + tx_0$$

Observe que $H(x, 0) = x$, então $H(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in X$. Além disso, $H(x, 1) = x_0$, então $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Portanto, H é uma homotopia entre f e g .

H é contínua, pois a soma e a multiplicação por escalares são operações contínuas no espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e, já que $H(x, t)$ é uma combinação dessas operações, H é contínua e bem definida.

Dessa forma, encontramos uma homotopia contínua H entre a identidade e a constante que leva todo o espaço para x_0 . Isso prova que qualquer ponto é contrátil.

Exemplo 3.25. *Qualquer intervalo (aberto, fechado ou semi-aberto) é contrátil a um ponto.*

De fato. Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$ (pode ser aberto, fechado ou semi-aberto). Considere a aplicação constante $c(x) = a$, para um ponto fixo a em I . Então, para qualquer aplicação $f : I \rightarrow I$, podemos definir a aplicação $H : I \times [0, 1] \rightarrow I$ como:

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + ta.$$

Note que H é contínua por ser uma combinação linear de aplicações contínuas. Além disso, $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = a$, ou seja, H é uma homotopia entre f e c . Portanto, I é contrátil a um ponto fixo.

Proposição 3.26. *Seja X um espaço topológico. X é contrátil se, e somente se, a aplicação identidade em X , $id : X \rightarrow X$, é homotópica a uma aplicação constante em X , $c : X \rightarrow X$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha X contrátil. Se $f : X \rightarrow \{p\}$ é uma equivalência homotópica e $g : \{p\} \rightarrow X$ é inversa homotópica de f , então $g \circ f \simeq id_X$. Como $g \circ f$ é uma aplicação constante, provamos o que queríamos.

⁸ Conjunto de pontos que não possuem limites ou acumulações. Cada ponto da figura é isolado e não existe nenhum ponto próximo o suficiente para formar uma sequência convergente.

($\Leftarrow$) Se $id_X \simeq c$, então id_X e a aplicação constante c são equivalências homotópicas, uma inversa da outra.

Portanto, X é contrátil.

Corolário 3.27. *Todo espaço contrátil é conexo por caminhos.*

Para provar que todo espaço contrátil é conexo por caminhos, precisamos mostrar que para quaisquer dois pontos x e y no espaço, existe um caminho contínuo que os conecta.

Seja X um espaço contrátil e $f : X \rightarrow \{x_0\}$ uma homotopia entre a identidade em X e uma função constante em x_0 . Considere dois pontos arbitrários $x, y \in X$. Defina a função $F : [0, 1] \rightarrow X$ como $F(t) = f(x, t)$ para $t \in [0, 1/2]$ e $F(t) = f(y, 2 - 2t)$ para $t \in [1/2, 1]$. Note que F é contínua pois é composta de duas funções contínuas.

Agora, vamos verificar que F é um caminho contínuo de x para y . Temos que $F(0) = f(x, 0) = x$ e $F(1) = f(y, 0) = y$, portanto F conecta x e y . Além disso, para qualquer $t \in [0, 1]$, temos que:

$$F(t) = \begin{cases} f(x, t), & t \in [0, 1/2] \\ f(y, 2 - 2t), & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Se $t = 1/2$, então $F(t) = f(x, 1/2) = f(y, 1/2)$ pois X é contrátil. Caso contrário, se $t \neq 1/2$, então podemos verificar que $F(t)$ é contínuo em t :

$$\lim_{s \rightarrow t} F(s) = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow t} f(x, s) = f(x, t) = F(t), & t \in [0, 1/2] \\ \lim_{s \rightarrow t} f(y, 2 - 2s) = f(y, 2 - 2t) = F(t), & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Portanto, F é um caminho contínuo de x para y , mostrando que X é conexo por caminhos.

Demonstração: Suponha X um espaço contrátil conexo por caminhos. Ora, se H é uma homotopia entre id_X e a aplicação constante $X \rightarrow \{p\}$, $p \in X$, então, para cada ponto $x \in X$, a correspondência $t \mapsto H(x, t)$ determina um caminho ligando x a p .

Proposição 3.28. *Se X ou Y é contrátil, então toda aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é homotópica a uma constante.*

Demonstração: Se X for contrátil e $H : X \times I \rightarrow X$ for uma homotopia entre id_X e uma constante, de modo que, dada qualquer $f : X \rightarrow Y$, a aplicação $f \circ H : X \times I \rightarrow Y$ será uma homotopia entre f e uma constante.

Se Y for contrátil e $F : Y \times I \rightarrow Y$ for uma homotopia entre id_Y e uma constante, nesse caso, $G : X \times I \rightarrow Y$, definida por $G(x, t) = F(f(x), t)$, é uma homotopia entre $f : X \rightarrow Y$ e uma aplicação constante.

Corolário 3.29. *Se X é contrátil e Y é conexo por caminhos, então duas aplicações contínuas quaisquer $f, g : X \rightarrow Y$ são homotópicas. Caso Y seja contrátil, então qualquer que seja X , duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ serão sempre homotópicas.*

Demonstração: Para provar que f e g são homotópicas, basta mostrar que elas são homotópicas a uma aplicação constante. Como X é contrátil, existe uma homotopia $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ entre a identidade em X e uma aplicação constante $c : X \rightarrow \{x_0\}$ para algum $x_0 \in X$.

Definimos a aplicação $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ por $F(x, t) = f(H(x, t))$. Note que

$$F(x, t) = \begin{cases} F(x, 0) = f(H(x, 0)) = f(x), & \forall x \in X; \\ F(x, 1) = f(H(x, 1)) = f(x_0), & \forall x \in X. \end{cases}$$

Além disso, como Y é conexo por caminhos, existe um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ entre $f(x)$ e $f(x_0)$ para todo $x \in X$.

Definimos então a aplicação $G : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ pondo $G(x, t) = \gamma(t)$ para todo $x \in X$ e $t \in [0, 1]$. Note que

$$G(x, t) = \begin{cases} G(x, 0) = f(x), & \forall x \in X; \\ G(x, 1) = f(x_0), & \forall x \in X. \end{cases}$$

Agora definimos a aplicação contínua $H' : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ pondo

$$H'(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & \text{para } 0 \leq t \leq 1/2; \\ G(x, 2t - 1), & \text{para } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Note que

$$H'(x, t) = \begin{cases} H'(x, 0) = F(x, 0) = f(x), & \forall x \in X; \\ H'(x, 1) = G(x, 1) = f(x_0), & \forall x \in X. \end{cases}$$

Além disso, H' é contínua pois F e G são contínuas e coincidem em $X \times \{1/2\}$.

Portanto, f e g são homotópicas, pois g pode ser escrita como a composição de f com uma aplicação constante em $f(x_0)$ e ambas podem ser deformadas para uma aplicação constante em $f(x_0)$ através da homotopia H' .

Se Y é contrátil, então existe uma homotopia entre a identidade em Y e uma função constante em algum ponto $y_0 \in Y$. Podemos usar essa homotopia para deformar qualquer função contínua $f : X \rightarrow Y$ em uma função constante em y_0 , e portanto qualquer duas funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ serão homotópicas.

Proposição 3.30. *Todo conjunto convexo é contrátil. Em particular, um espaço vetorial normado E é convexo e, portanto, contrátil.*

Para provar que todo conjunto convexo é contrátil, basta construir uma homotopia entre a função identidade e uma função constante. Seja X um conjunto convexo e $x_0 \in X$ um ponto fixo. Defina $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ por

$$H(x, t) = (1 - t)x + tx_0.$$

Note que $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) = x_0$ para todo $x \in X$. Além disso, H é contínua pois a soma e multiplicação por escalares são operações contínuas em E . Portanto, X é contrátil.

Em particular, um espaço vetorial normado E é convexo e, portanto, contrátil. Para ver isso, basta notar que para qualquer $x, y \in E$ e $t \in [0, 1]$, temos

$$\|(1 - t)x + ty\| \leq (1 - t)\|x\| + t\|y\|.$$

Portanto, E é convexo e podemos aplicar o resultado anterior para concluir que é contrátil.

Exemplo 3.31. *Cada subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ é contrátil (Ver exemplo 3.10).*

Mais precisamente, cada subconjunto convexo X de $\mathbb{R}^n$ é homotopicamente equivalente a um ponto. Para ver isso, basta escolher um ponto $x_0 \in X$ e definir uma homotopia entre a identidade em X e a constante igual a x_0 . A aplicação

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow X,$$

definida por

$$H(x, t) = (1 - t)x + tx_0,$$

é contínua e satisfaz as condições necessárias para ser uma homotopia entre as aplicações identidade em X e constante igual a x_0 . Em particular, $H(x, 1) = x_0$, $\forall x \in X$. Portanto, o subconjunto convexo X é homotopicamente equivalente ao ponto $\{x_0\}$.

Note que essa propriedade não vale para todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, apenas para os convexos. Por exemplo, a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$, denotada por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, não é contrátil.

Exemplo 3.32. *Um subconjunto X de um espaço vetorial normado E chama-se uma estrela⁹ de vértice p quando, para todo $x \in X$, o segmento de reta $[p, x]$ está contido em X . Se X é uma estrela de vértice p , então $H : X \times I \rightarrow X$, definida por $H(x, t) = (1 - t)x + tp$, é uma homotopia entre id_X e a aplicação constante $X \rightarrow \{p\}$. Logo, toda estrela é contrátil.*

⁹ Um conjunto $\{x + \lambda(y - x) | \lambda \in [0, 1]\}$, onde x e y são pontos em um espaço topológico e “+” representa a operação de adição do espaço. O conjunto se estendem ao longo de uma linha reta que une dois pontos em um espaço topológico.

Exemplo 3.33. Se o espaço X é contrátil, então, para todo Y , o produto cartesiano $X \times Y$ tem o mesmo tipo de homotopia que Y .

Para provar esse fato, considere uma homotopia H entre id_x e a aplicação constante $X \rightarrow \{P\}$, $p \in X$. Então, as aplicações contínuas $f : X \times Y \rightarrow Y$, $f(x, y) = y$ e $g : Y \rightarrow X \times Y$, $g(y) = (p, y)$ são equivalências de homotopia, $f \circ g = id_y$ e, além disso, $K(x, y, t) = (H(x, t), y)$ define uma homotopia entre a aplicação identidade de $X \times Y$ e a aplicação $g \circ f : X \times Y \rightarrow X \times Y$. Em particular, se X e Y são ambos contráteis, o produto cartesiano $X \times Y$ também é contrátil.

3.4 Extensão de aplicações contínuas

Em seu livro “Curso de Análise”, Segundo LIMA¹⁰, uma extensão de aplicações contínuas é o processo de estender uma aplicação contínua de um subconjunto fechado de um espaço topológico para todo o espaço, de forma a preservar a continuidade, isto é, podemos aumentar o domínio de uma aplicação de maneira que ela continue a ser contínua.

Definição 3.34. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : A \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, onde A é um subconjunto fechado de X . Uma **extensão** de f é uma aplicação contínua $F : X \rightarrow Y$ tal que $\text{dom}(F) \supseteq A$ e $F|_A = f$

Notação. (A restrição de F para o conjunto A): $F|_A$.

Dessa maneira, a definição de extensão de uma aplicação contínua exige que a aplicação resultante seja a mesma daquela aplicação original em todo o subconjunto A e, além disso, que a aplicação resultante seja contínua em todo o espaço X em que a aplicação original f está definida.

Exemplo 3.35. (Teorema de Tietze-Urysohn): Seja $f : A \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação contínua de um espaço fechado A em um intervalo fechado $[0, 1]$. Então existe uma extensão contínua $F : X \rightarrow [0, 1]$ em todo o espaço X que contém A , ou seja, $F|_A = f$.

Exemplo 3.36. (Teorema de Hahn-Banach): Seja $f : E \rightarrow F$ uma aplicação linear contínua, onde E e F são espaços vetoriais normados. Seja g uma extensão linear de f em um subespaço vetorial de E . Então existe uma extensão linear contínua F de f em todo o espaço E que coincide com g no subespaço vetorial.

Uma retração é um exemplo de subdivisão de um espaço topológico, onde o espaço é dividido em partes menores, sendo que cada uma dessas partes é retratada de volta a um subconjunto propriamente contido em si.

¹⁰ (LIMA, 1995)

Definição 3.37. Uma **retração** é uma aplicação contínua $r : X \rightarrow A$ de um espaço topológico X em um subespaço A , tal que $r|_A = \text{id}_A$, ou seja, r é a identidade restrita a A .

Definição 3.38. Quando existe a retração $r : X \rightarrow A$, o subespaço A chama-se um **retrato** do espaço X .

A retração $r : X \rightarrow A$ satisfaz a condição de que, para todo $a \in A$, $r(a) = a$ e, para todo $x \in X$, $r(r(x)) = r(x)$. Isso significa que a imagem de X por r é um subespaço de A que é retratado de volta a si mesmo.

Em outras palavras, segundo MUNKRES¹¹, uma retração é uma aplicação contínua que preserva a identidade, e A chamada é uma sub-retração de X . Dizemos ainda que a retração r “recolhe” o espaço X para o subespaço A . Isto é, intuitivamente, a retração é uma deformação contínua do espaço X , que contrai todo o espaço (exceto A) para o subespaço A e mantém A fixo.

O conceito de retração é usado, por exemplo, para definir o conceito de deformação de espaços, que consiste em modificar um espaço topológico de forma contínua sem mudar sua topologia.

Exemplo 3.39. Um exemplo clássico de retração é dado pelo espaço euclidiano $X = \mathbb{R}^2$ e seu subespaço $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, que é o eixo x . A retração é dada pela função $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $r(x, y) = (x, 0)$.

De fato, podemos verificar que $r(x, 0) = (x, 0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que $r(\mathbb{R} \times \{0\}) = \mathbb{R} \times \{0\} = A$. Além disso, r é contínua, pois a restrição $r|_A = \text{id}_A$ é contínua. Portanto, r é uma retração de $\mathbb{R}^2$ para A .

Intuitivamente, a função r “aplaina¹²” toda componente vertical de cada ponto de $\mathbb{R}^2$ para 0, preservando sua componente horizontal. Desta função, observamos que a projeção da origem ao eixo x é um ponto fixo de r .

Observação: Este exemplo foi retirado do livro “Algebraic Topology” do HATCHER¹³, e também é discutido em “Topology” de MUNKRES¹⁴.

3.5 Homotopias de pares e relativas

3.5.1 Homotopias de pares

Homotopia de pares é um conceito da topologia que relaciona espaços topológicos e funções contínuas definidas entre eles. É uma extensão do conceito de homotopia, no qual

¹¹ (MUNKRES, 2014)

¹² Refere-se ao processo de encontrar um espaço topológico homeomorfo a um dado espaço, mas que é geometricamente mais simples e fácil de manipular.

¹³ (HATCHER, 2005), capítulo 0.1

¹⁴ (MUNKRES, 2014), capítulo 9.1

duas aplicações contínuas são consideradas “homotópicas” se uma pode ser continuamente transformada na outra.

Em homotopia de pares, consideramos uma classe especial de espaços topológicos chamados “pares topológicos”, que traduz-se em um espaço topológico X e um subespaço A . Ela é então definida como uma relação de equivalência entre aplicações contínuas f e g determinadas em X , com base na hipótese de transformar continuamente uma aplicação na outra em X , mantendo sempre as imagens de qualquer ponto em A fixas.

A homotopia de pares é um conceito importante para várias áreas da matemática, incluindo a topologia algébrica e a geometria diferencial. Ela permite estudar propriedades topológicas de espaços mais complicados do que apenas X sozinho, considerando a interação entre X e seu subespaço A .

Aqui, expressamos que (X, A) é um par de espaços topológicos somente quando A for um subespaço de X .

Definição 3.40. *Sejam os pares (X, A) e (Y, B) . Uma **aplicação de pares contínua** $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ tal que, $f(A) \subset B$.*

Definição 3.41. *Dadas as aplicações contínuas $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, uma **homotopia de pares** entre f e g , é uma aplicação contínua expressada por*

$$H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B),$$

tal que:

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x), & \forall x \in X; \\ H(x, 1) = g(x), & \forall x \in X; \end{cases}$$

Deve-se, portanto, ter $H_t \subset B$ para todo $t \in I$.

Essa ferramenta é útil para calcular o grupo fundamental relativo de um par de espaços que é uma generalização do grupo fundamental de um espaço, levando em conta relações entre caminhos que começam e terminam em A . Isso permite, por exemplo, descrever a estrutura topológica de uma superfície com borda, e, além disso, estudar questões de conectividade e cobertura de espaços com restrições adicionais.

Exemplo 3.42. *Suponha que X é um espaço topológico, $A \subseteq X$ e Y é um espaço topológico. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua e $h : A \times I \rightarrow Y$ é uma homotopia entre $f|_A$ e uma aplicação contínua $g : A \rightarrow Y$, então existe uma aplicação contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ e $F(a, t) = h(a, t)$ para todo $a \in A$ e todo $t \in I$.*

Exemplo 3.43. *A aplicação identidade $id : I \rightarrow I$ é homotópica a uma constante. Mas, considerando o subespaço $\partial I = \{0, 1\} \subset I$, a aplicação de pares $id : (I, \partial I) \rightarrow (I, \partial I)$ não é homotópica a uma constante. Isso significa que o intervalo I pode ser continuamente*

contraído até um ponto, mas, durante a deformação, pelo menos uma de suas extremidades deve passar pelo interior de I . De fato, qualquer homotopia H entre duas aplicações de pares $f, g : (I, \partial I) \rightarrow (I, \partial I)$ deve satisfazer $H_t(0) \in \partial I$ e $H_t(1) \in \partial I$ para todo $t \in I$. Como $\partial I = \{0, 1\}$ é discreto, segue-se que $H_t(0)$ e $H_t(1)$ não depende de t ; ou seja, os pontos extremos de I são fixos durante toda a homotopia.

Exemplo 3.44. Considere o espaço topológico X dado por uma esfera S^2 , e o subconjunto A dado pelo conjunto dos pontos (x, y, z) , tais que $x \geq 0$. Então, uma homotopia de pares entre a identidade id_X e a reflexão $\mathcal{R}$ em relação ao plano xy pode ser dada por:

$$H(x, t) = \begin{cases} (1 - 2tx, y, z), & \text{se } x \geq 0; \\ x, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x = 0 \text{ e } y < 0. \end{cases}$$

A homotopia de pares preserva o subconjunto A em todos os instantes da deformação. Isso significa que a homotopia pode ser vista como uma “deformação local” em torno de A , que é mantido invariante durante todo o processo.

3.5.2 Homotopias relativas

A definição de homotopia relativa está diretamente relacionado à homotopia de pares. Ela dada por uma relação de equivalência entre funções contínuas f e g definidas em X , com base na hipótese de transformar continuamente uma função na outra em X , mantendo sempre as imagens de qualquer ponto em A fixas.

Definição 3.45. Dadas as aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$. Diz-se que f é **homotópica a g relativamente** a um subespaço $A \subset X$, e denotamos por $f \simeq g(\text{rel.}A)$, quando existe uma homotopia $H : f \simeq g$, onde $H(x, t) = f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Notação. (f é homotópica a g relativamente a um subespaço $A \subset X$): $f \simeq g(\text{rel.}A)$.

Claramente, para obtermos $f \simeq g(\text{rel.}A)$, primeiramente, é preciso que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$.

A homotopia relativa é usada principalmente na topologia algébrica para estudar propriedades topológicas de espaços mais complicados com restrições adicionais dadas por um subespaço A . Essa ferramenta é útil para calcular o grupo de homologia relativa de um par de espaços. Ela nos permite, por exemplo, descrever a estrutura topológica de um espaço com buracos, como um toro, em termos do grupo de homologia relativa desse espaço em relação a um subconjunto que contém a borda do toro. E assim como a de pares, ela também é usada para estudar questões de conectividade e cobertura de espaços com restrições adicionais.

Exemplo 3.46. Considere o espaço topológico X dado pelo disco unitário fechado em $\mathbb{R}^2$. Suponha que temos duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow X$ dados por $f(x) = x$ e $g(x) = -x$ (reflexão em relação ao centro do disco). Então, f e g têm o mesmo valor em todo ponto da circunferência S^1 que é o limite do disco. Podemos definir uma homotopia relativa entre f e g com respeito a S^1 deixando fixa a circunferência S^1 e deformando f e g em relação aos pontos interiores do disco. Por exemplo, podemos definir $h(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ para t variando de 0 a 1. Então, h é uma homotopia relativa entre f e g com respeito a S^1 . Observe que h mantém a circunferência S^1 fixa, tal que $h(x, t) = f(x)$ e $h(x, t) = g(x)$ para todo $x \in S^1$ e $t \in [0, 1]$.

Exemplo 3.47. Considere o espaço topológico X dado por S^1 , o subconjunto A dado por $\left\{\frac{1}{2}\right\}$, e a aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow X$ definida por $f(z) = z^n$ para algum inteiro n fixo. Então, uma homotopia relativa entre f e a aplicação constante $g : S^1 \rightarrow X$ definida por $g(z) = 1$, pode ser dada por:

$$H(z, t) = z^n t$$

Essa homotopia mantém o ponto $\left(\frac{1}{2}\right)$ no lugar durante toda a deformação, ou seja, $H(z, t) = z^n t$, $\forall t, z \in A$. Em essência, homotopia transforma círculo unitário em um ponto.

Exemplo 3.48. A aplicação identidade de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ é homotópica a aplicação $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$, $r(x) = x/|x|$, relativamente ao subespaço S^{n-1} .

Para provar esta afirmação, podemos definir uma homotopia $F : \mathbb{R}^n - \{0\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$, tal que $F(x, t) = (1 - t)x + tr(x)$.

Para verificar que essa homotopia satisfaz as condições para uma homotopia relativa a S^{n-1} , precisamos mostrar que:

- 1) $F(x, 0) = x$ e $F(x, 1) = r(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$;
- 2) $F(x, t) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e $t \in [0, 1]$;
- 3) $F(x, t) = x$, para todo $x \in S^{n-1}$ e $t \in [0, 1]$.

Para verificar 1), observe que

$$F(x, t) = \begin{cases} F(x, 0) = (1 - 0)x + 0r(x) = x, & \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}; \\ F(x, 1) = (1 - 1)x + 1r(x) = r(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}. \end{cases}$$

Para verificar 2), observe que $F(x, t)$ é uma combinação linear de x e $r(x)$, que são ambos não nulos para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Além disso, porque $|r(x)| = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, temos que $F(x, t) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e $t \in [0, 1]$.

Para verificar 3), note que, se $x \in S^{n-1}$, então $|x| = 1$, e assim $F(x, t) = (1 - t)x + tr(x) = x$, para todo $t \in [0, 1]$.

Portanto, F é uma homotopia entre a aplicação identidade e a aplicação r , relativamente ao subespaço S^{n-1} , como queríamos.

3.6 Homotopia de Caminhos

No estudo do Grupo Fundamental, a homotopia de caminhos – dita um caso particular da ideia de aplicações homotópicas – é uma ferramenta basilar de grande relevância.

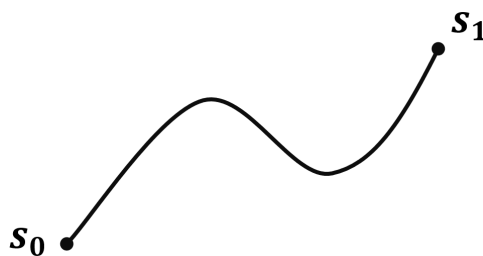
As homotopias de caminhos são aplicações contínuas do tipo $a : J \rightarrow X$, definidas em um intervalo compacto $J = [s_0, s_1]$. Os pontos $a(s_0)$ e $a(s_1)$ são chamados de extremidades do caminho, $a(s_0)$ é dito ponto inicial e $a(s_1)$ é o ponto final do caminho. Geometricamente, o conjunto de imagens $a(J)$ define uma curva contínua no espaço X : à medida que s se move de s_0 para s_1 , o ponto $a(s)$ se move por toda a extensão da curva, do ponto inicial ao ponto final.

Nesta sessão, atenção especial será dada as homotopias de caminhos fechados, caminhos cujo ponto inicial coincide com o ponto final, expressados por $a(s_0) = a(s_1)$. Aqui, os caminhos serão definidos no intervalo unitário $I = [0, 1]$.

Observação: os extremos denotados por s_0 e s_1 é apenas uma notação modelo, em muitos casos usaremos x_0 e x_1 .

Definição 3.49. Um **caminho** no espaço topológico X é uma aplicação do intervalo unitário I em X . Isto é, um caminho entre s_0 e s_1 em X , é uma aplicação contínua $a : I \rightarrow X$, tal que $a(0) = s_0$ e $a(1) = s_1$.

Figura 3.5 – Um caminho entre s_0 e s_1 .



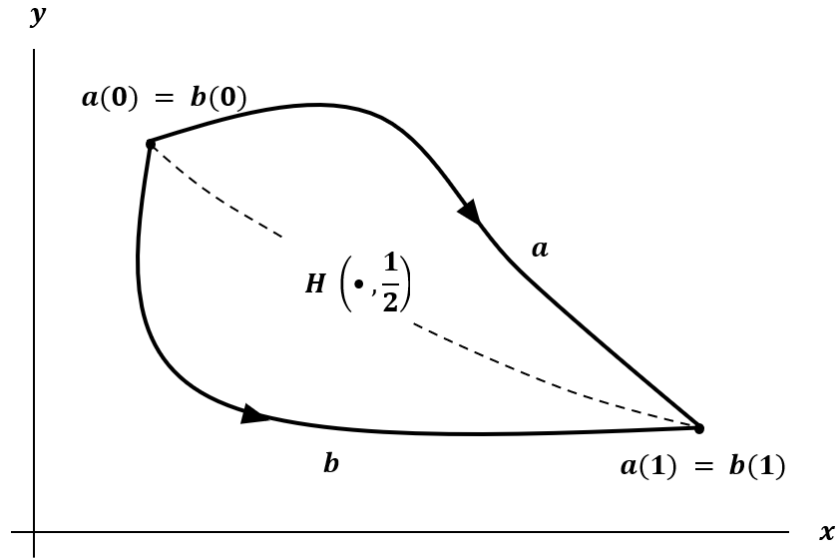
Como o intervalo $I = [0, 1]$ é contrátil, segue que todo caminho tomado em I (algebricamente $a : I \rightarrow X$) é homotópico a uma constante. Dizemos ainda que dois caminhos tomados em I são homotópicos (com extremidades fixas) se, e somente se, tiverem os mesmos pontos inicial e final.

Exemplo 3.50. Os caminhos a e b na Figura 3.6 são equivalentes. Uma homotopia H demonstrando a equivalência é definida por

$$H(t, s) = sb(t) + (1 - s)a(t), \quad (s, t) \in I \times I.$$

A homotopia essencialmente “puxa a para b ” sem perturbar os pontos finais. Se o espaço tivesse um “buraco” entre os intervalos de a e b , os caminhos não seriam equivalentes.

Figura 3.6 – Caminhos homotópicos com extremidades fixas.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Definição 3.51. Dadas as aplicações $a, b : I \rightarrow X$, caminhos no espaço topológico X . Dizemos que a e b são **caminhos homotópicos** quando tivermos $a \simeq b(\text{rel.}\partial I)$.

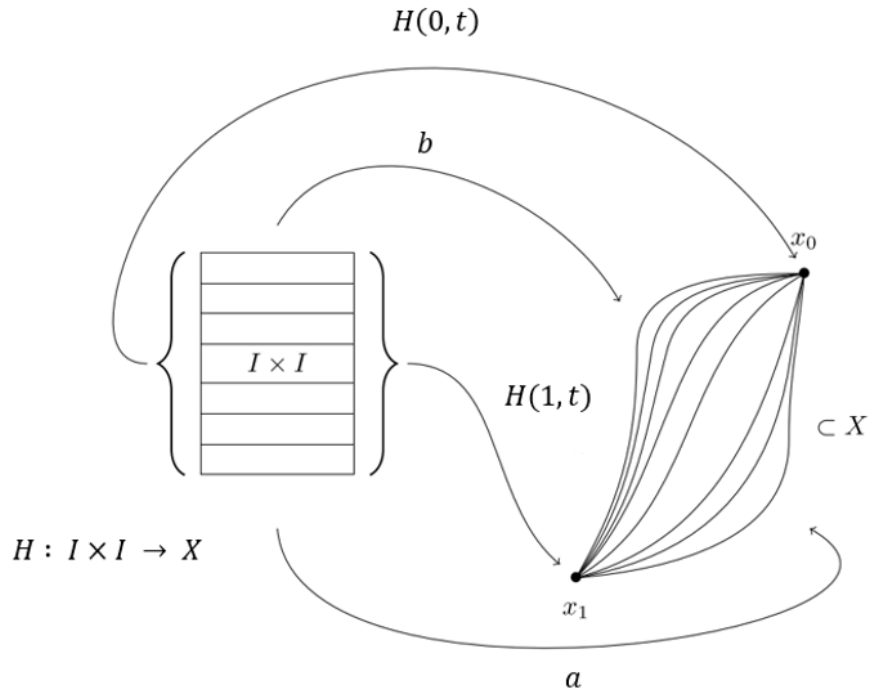
Notação. (caminhos homotópicos): $a \simeq b(\text{rel.}\partial I)$, ou apenas $a \cong b$

Definição 3.52. Uma **homotopia entre caminhos**, dada por $H : a \cong b$, é uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow X$ tal que, para todo $s, t \in I$, temos:

$$H(s, t) = \begin{cases} H(s, 0) = a(s); \\ H(s, 1) = b(s); \\ H(0, t) = a(0) = b(0); \\ H(1, t) = a(1) = b(1). \end{cases}$$

Uma representação gráfica pode ser vista na Figura 3.7.

Nesse caso, os caminhos a e b chamam-se caminhos homotópicos, que nada mais é do que uma homotopia de caminhos relativa ao bordo $\partial I = \{0, 1\}$ do espaço compacto I . Para efeito, afirmamos que os caminhos possuem as mesmas extremidades, ou seja: $a(0) = b(0) = x_0$ e $a(1) = b(1) = x_1$, isto é, ambos devem começar no mesmo ponto $a(0) = b(0)$ e ter o mesmo ponto final $a(1) = b(1)$. Além disso, observe que $H(0, t) = a(t)$,

Figura 3.7 – Homotopia de Caminhos entre a e b .

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

$H(1, t) = b(t)$, $H(s, 0) = x_0$, $H(s, 1) = x_1$, para qualquer $s, t \in I$. Assim, dizemos que a homotopia de caminhos é uma **homotopia de extremos fixos**.

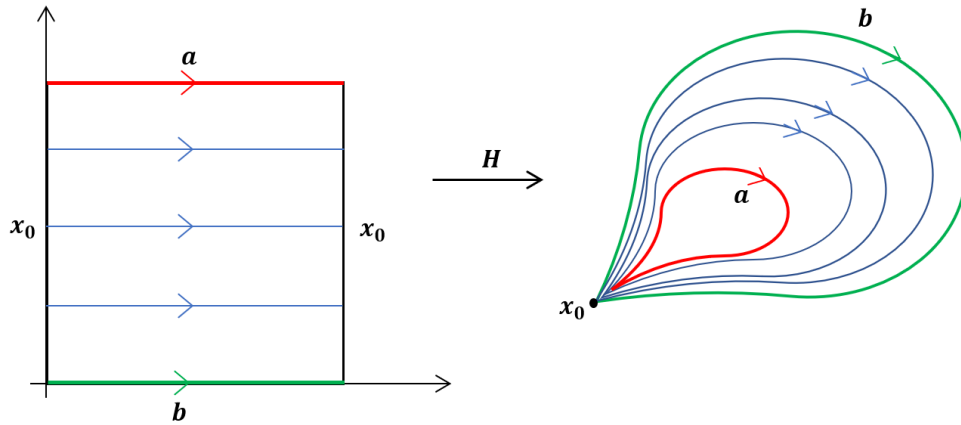
Definição 3.53. Chamamos de **caminho fechado**, o caminho $a: I \rightarrow X$ fechado em x_0 , onde $a(0) = a(1) = x_0$.

Definição 3.54. Singularmente, os **caminhos fechados** $a, b: I \rightarrow X$ são **homotópicos**, quando existe uma aplicação contínua $H: I \times I \rightarrow X$ tal que, para $a(0) = a(1) = b(0) = b(1) = x_0 \in X$, têm-se:

$$H(s, t) = \begin{cases} H(s, 0) = a(s); \\ H(s, 1) = b(s); \\ H(0, t) = H(1, t) = x_0; \end{cases}$$

para todo $s, t \in I$ (veja a Figura 3.8).

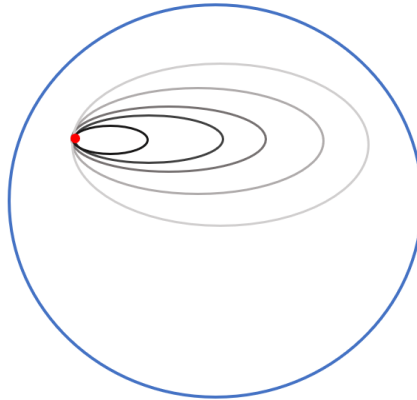
Figura 3.8 – Homotopia entre caminhos fechados.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Observe que a Figura 3.9 representa uma homotopia entre caminhos fechados, onde as aplicações tem o mesmo ponto(em vermelho) base.

Figura 3.9 – Homotopia entre caminhos fechados.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Note que, dado a Proposição 3.8, a relação $a \simeq b(\text{rel. } \partial I)$ também é uma relação de equivalência, satisfazendo as propriedades *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*, a demonstração é análoga a da proposição citada. Por via de regras:

Proposição 3.55. *A relação de homotopia de caminhos, $a \cong b$, é uma relação de equivalência.*

Demonstração: De fato, a relação “ $\cong$ ” possui as propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva.

(i) **Reflexiva:** $f \cong f$.

Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Definimos a aplicação $H : X \times I \rightarrow Y$ pondo $H(s, t) = f(s)$, $\forall s, t \in [0, 1]$. Note que H é contínua pela continuidade de f , e ainda que $H : f \cong f$ de x_0 para x_1 , pois, para todo $s, t \in [0, 1]$, temos:

$$H(s, t) = \begin{cases} H(s, 0) = f(s); \\ H(s, 1) = f(s); \\ H(0, t) = f(0) = x_0; \\ H(1, t) = f(1) = x_1, \end{cases}$$

Portanto, $f \cong f$.

(ii) **Simétrica:** $f \cong g \Rightarrow g \cong f$.

Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ duas aplicações contínuas. Sendo $H : X \times I \rightarrow Y$, $H : f \cong g$, e $K : X \times I \rightarrow Y$ dada por $K(s, t) = H(s, 1 - t)$. Então, $K : g \cong f$.

De fato, para todo $s, t \in [0, 1]$, temos:

$$K(s, t) = \begin{cases} K(s, 0) = H(s, 1) = g(s); \\ K(s, 1) = H(s, 0) = f(s); \\ K(0, t) = H(0, 1 - t) = x_0; \\ K(1, t) = H(1, 1 - t) = x_1. \end{cases}$$

Note que K é contínua pela continuidade de H e pelo Lema 2.40.

Portanto, $G : g \cong f$.

(iii) **Transitiva:** $f \cong g$ e $g \cong h \Rightarrow f \cong h$.

Suponha que $f \cong g$ e $g \cong h$. Vamos mostrar que $f \cong h$.

Seja $H : f \cong g$ e $K : g \cong f$. Definamos $L : X \times I \rightarrow Y$ por

$$L(s, t) = \begin{cases} H(s, 2t), & \forall t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ K(s, 2t - 1), & \forall t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

L está bem definida, pois, fazendo $t = \left(\frac{1}{2}\right)$, temos que

$$H(s, 2t) = H(s, 1) = g(s) = K(s, 0) = K(s, 2t - 1).$$

L é contínua nos subconjuntos fechados $X \times [0, \frac{1}{2}]$ e $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ de $X \times I$, então, pelo Lema 2.40, L é contínua em todo $X \times I$. Além disso, temos que:

$$L(s, t) = \begin{cases} L(s, 0) = H(s, 0) = f(s); \\ L(s, 1) = K(s, 1) = h(s). \end{cases}$$

$$L(0, t) = \begin{cases} H(0, 2t) = x_0, & \forall t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ K(0, 2t - 1) = x_0, & \forall t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

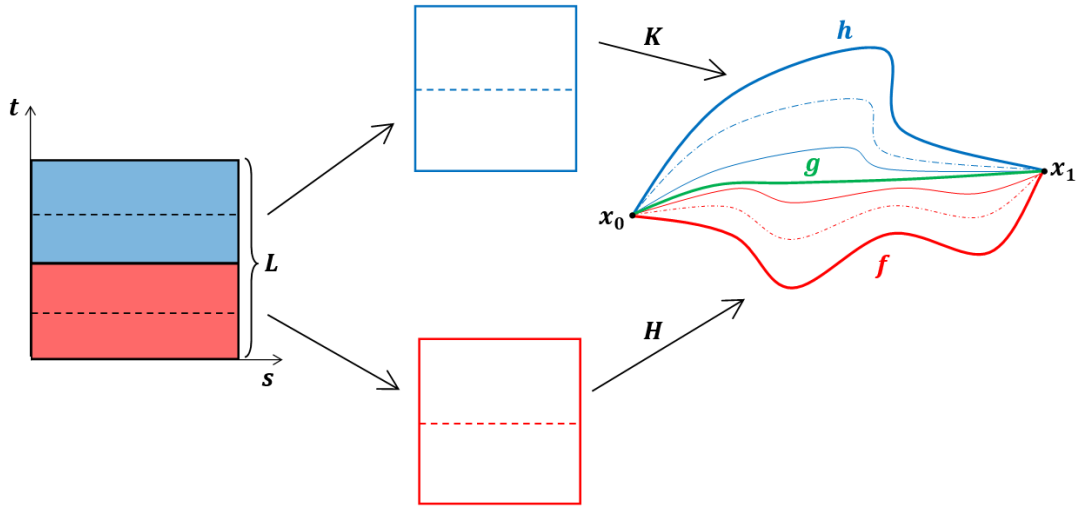
Logo, $L(0, t) = x_0$ para $t \in [0, 1]$. Além disso,

$$L(1, t) = \begin{cases} H(1, 2t) = x_1, & \forall t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ K(1, 2t - 1) = x_1, & \forall t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Logo, $K(1, t) = x_1$ para $t \in [0, 1]$.

Portanto, $f \cong h$.

Figura 3.10 – Transitividade da relação “ $\cong$ ”



Fonte: acervo do autor.

Exemplo 3.56. *Seja V um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado. Se $a, b : I \rightarrow V$ são caminhos com as mesmas extremidades, isto é, $a(0) = b(0) = x_0$ e $a(1) = b(1) = x_1$, então $a \cong b$.*

De fato, basta definir $H : I \times I \rightarrow X$ pondo

$$H(s, t) = (1 - t)a(s) + tb(s).$$

É fácil ver que H é uma homotopia entre a e b .

$$H(s, t) = \begin{cases} H(s, 0) = a(s), & \forall s \in I; \\ H(s, 1) = b(s), & \forall s \in I; \\ H(0, t) = x_0, & \forall t \in I; \\ H(1, t) = x_1, & \forall t \in I. \end{cases}$$

Além disso, H é claramente contínua, pois é uma combinação linear contínua de caminhos contínuos.

Note ainda que $H(s, t)$ está em X para todo $s, t \in I$, pois, como X é convexo, tem-se que $(1 - t)a(s) + tb(s) \in X$ para todo $s, t \in I$, pois cada ponto $a(s)$ e $b(s)$ pertence a X e X é fechado em relação a combinações lineares.

Portanto, H é uma homotopia entre a e b .

Eventualmente, mais especificamente quando nos depararmos com caminhos fechados, consideraremos homotopias livres entre estes caminhos.

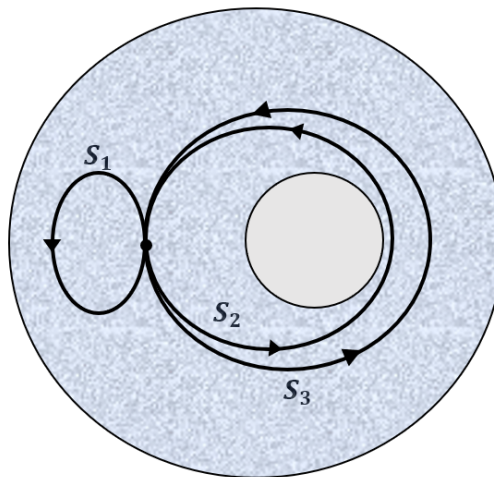
Observação: Em alguns casos, denotaremos a aplicação $H : (I \times I) \rightarrow X$ por $H : I^2 \rightarrow X$.

Definição 3.57. Sejam $a, b : I \rightarrow X$ caminhos fechados. Então, a e b dizem-se **caminhos livremente homotópicos** quando existe uma aplicação $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ contínua, tal que, para quaisquer $s, t \in I$, têm-se:

$$H(s, t) = \begin{cases} H(s, 0) = a(s); \\ H(s, 1) = b(s); \\ H(0, t) = H(1, t). \end{cases}$$

Podemos expressar ainda que, neste caso, $H : I \times I \rightarrow X$ é dita uma homotopia livre entre os caminhos a e b , assim, denotamos $H : a \cong b$, onde a relação $a \cong b$ e a homotopia livre gozam das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Figura 3.11 – Caminhos livremente homotópicos



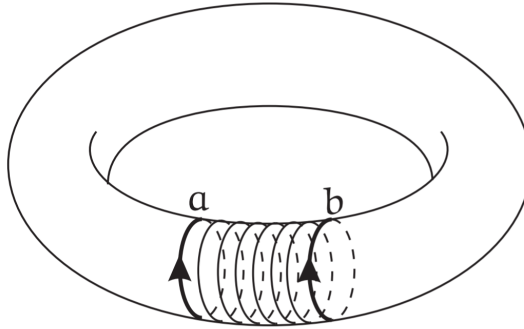
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Em particular, dois caminhos fechados em um espaço topológico são homotópicos, desde que cada um deles possa ser “continuamente deformado no outro”. Na Figura 3.11,

por exemplo, os caminhos S_2 e S_3 são homotópicos entre si e S_1 é homotópico a um caminho constante. O caminho S_1 não é homotópico para S_2 ou S_3 , pois nem S_2 nem S_3 podem ser puxados através do buraco que eles encerram.

A Figura 3.12 mostra uma homotopia livre entre dois caminhos fechados no toro bidimensional.

Figura 3.12 – Homotopia livre entre dois caminhos fechados a e b no toro.



Fonte: (LIMA, 2003), p. 28.

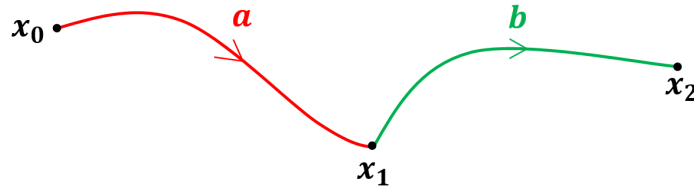
A seguir, iremos definir produto entre caminhos, uma definição de grande relevância na teoria do grupo fundamental, onde a concatenação de caminhos é usada para definir a operação de grupo, que é a chave para a definição do grupo fundamental de um espaço topológico.

O produto de caminhos a e b em um espaço topológico X com base em um ponto x_0 pode ser definido como:

Definição 3.58. *Sejam a e b dois caminhos em X , $a, b \rightarrow X$, respectivamente de x_0 a x_1 e de x_1 a x_2 . O **produto de caminhos** ab é o caminho de x_0 a x_2 definido por:*

$$ab(s) = \begin{cases} a(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ b(2s - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Geometricamente, o produto ab consiste em mover-se primeiro ao longo da trajetória a , e depois ao longo da trajetória b (ver Figura 3.13). Como o tempo de que dispomos para percorrer a trajetória ab é igual a $x_1 - x_0$, isto é, igual a 1, devemos dobrar a velocidade em a e em b . Neste caso, $a(2s)$ e $b(2s - 1)$ são as respectivas restrições dos caminhos a e b para o intervalo fechado $[0, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$, respectivamente, isto é, $ab|_{[0, \frac{1}{2}]}$ e $ab|_{[\frac{1}{2}, 1]}$. Note ainda que $a(1) = b(0)$. As regras acima bem definem uma aplicação contínua $ab : I \rightarrow X$ que começa em $a(0)$ e termina em $b(1)$.

Figura 3.13 – Produto entre os caminhos a e b 

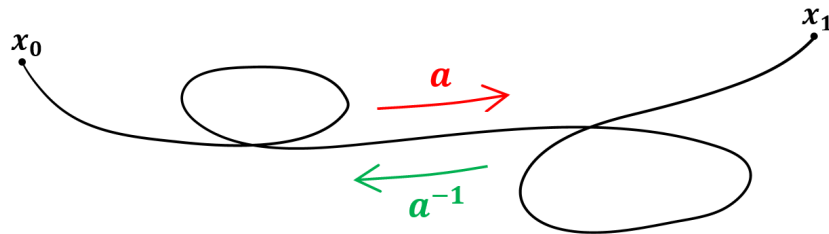
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Seguiremos indicando com $\alpha = [a]$ a classe de homotopia do caminho $a : I \rightarrow X$, melhor dizendo, o conjunto de todos os caminhos em X que possuem as mesmas extremidades que a , e são homotópicos a a com extremos fixos durante a homotopia.

Definição 3.59. *Seja $a : I \rightarrow X$ um caminho no espaço topológico X . O **caminho inverso** de a é, por definição, o caminho $a^{-1} : I \rightarrow X$ dado por*

$$a^{-1}(s) = a(1 - s); \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Note que o caminho inverso de a começa onde a termina e termina onde a começa (ver Figura 3.14).

Figura 3.14 – O caminho a e seu inverso a^{-1} .

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Seja ainda $j : I \rightarrow I$, o caminho $j(s) = 1 - s$. Então, o caminho inverso é uma composição de funções contínuas. Algebricamente, escrevemos $a^{-1} = a \circ j$.

Definição 3.60. *Seja e_x o **caminho constante**, talque $e_x(s) = x$ para todo $s \in [0, 1]$. Denotamos por ϵ_x a classe de homotopia do caminho e_x , isto é, $\epsilon_x = [e_x]$.*

Observações¹⁵:

- a) O produto ab não está definido para pares arbitrários a, b de caminhos, mas apenas para os pares que satisfazem $a(1) = b(0)$.

¹⁵ (LIMA, 1977a), capítulo 02.1

- b) A associatividade $(ab)c = a(bc)$ também não é válida.
- c) Não há elemento neutro para a multiplicação do caminho. Se $a(0) = x$ e $a(1) = y$, não temos $e_x a = a$ ou $a e_y = a$.
- d) Por fim, $aa^{-1} \neq e_x$ e $a^{-1}a \neq e_y$.

A seguinte proposição garante que o produto de caminhos e o inverso de um caminho podem ser definidos em X (conjunto das classes de homotopia de caminhos). Começaremos notando que se $a, b : I \rightarrow X$ são caminhos tais que $a(1) = b(0)$, então, vale que:

Proposição 3.61. *Sejam os caminhos $a, b, a', b' : I \rightarrow X$ tais que, se $a \cong a'$ e $b \cong b'$, então $ab \cong a'b'$ e $a^{-1} \cong (a')^{-1}$.*

Demonstração: Se $H : a \cong a'$ e $K : b \cong b'$, então $H, K : I \times I \rightarrow X$ satisfazem, $\forall s, t \in [0, 1]$:

$$H(s, t) = \begin{cases} H(s, 0) = a(s); \\ H(s, 1) = a'(s); \\ H(0, t) = a(0) = a'(0); \\ H(1, t) = a(1) = a'(1). \end{cases}$$

$$K(s, t) = \begin{cases} K(s, 0) = b(s); \\ K(s, 1) = b'(s); \\ K(0, t) = b(0) = b'(0); \\ K(1, t) = b(1) = b'(1). \end{cases}$$

Definimos $L : I \times I \rightarrow X$, pondo:

$$L(s, t) = \begin{cases} H(2s, t), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \quad t \in I; \\ K(2s - 1, t), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \quad t \in I. \end{cases}$$

Observe que, para $s = \left(\frac{1}{2}\right)$, temos

$$H(1, t) = K(0, t) = a(1) = b(0),$$

para todo $t \in I$. Assim, dizemos que L está bem definida. Além disso,

$$K(s, t) = \begin{cases} L(s, 0) = ab(s); \\ L(s, 1) = a'b'(s); \\ L(0, t) = H(0, t) = ab(0) = a'b'(0); \\ L(1, t) = K(1, t) = ab(1) = a'b'(1). \end{cases}$$

Como H e K são contínuas, através do Lema 2.40, tem-se que L também é uma aplicação contínua. E ainda, $L|_{\left([0, \frac{1}{2}] \times I\right)}$ e $L|_{\left([\frac{1}{2}, 1] \times I\right)}$, são contínuas. Portanto, L é uma homotopia de caminhos entre os caminhos ab e $a'b'$, isto é $L : ab \cong a'b'$.

Agora, para mostrar a segunda afirmação, definimos $G : I \times I \rightarrow X$, dada por $G(s, t) = H(1 - s, t)$, assim, temos:

$$G(s, t) = \begin{cases} G(s, 0) = a^{-1}(s); \\ G(s, 1) = (a')^{-1}(s); \\ G(0, t) = a^{-1}(0) = (a')^{-1}(0); \\ G(1, t) = a^{-1}(1) = (a')^{-1}(1). \end{cases}$$

Portanto, G é uma homotopia entre a^{-1} e $(a')^{-1}$, isto é $a^{-1} \cong (a')^{-1}$.

Definição 3.62. Num espaço topológico X , sejam $\alpha = [a]$ e $\beta = [b]$, onde α têm origem num ponto $x \in X$ e termina em um ponto $y \in X$, e β começa em $y \in X$ e termina num ponto $z \in X$. Definimos o **produto entre as classes de homotopias de caminhos** $\alpha\beta$, tomando os caminhos $a \in \alpha$ e $b \in \beta$, como sendo

$$\alpha\beta = [a][b] = [ab].$$

A saber, dizemos que α e β são classes de homotopias de caminhos, onde a é um caminho que liga x a y e b é um caminho que liga y a z , considerando $x, y, z \in X$.

A definição expressa que o produto entre α e β não depende das escolhas dos caminhos $a \in \alpha$ e $b \in \beta$. Portanto, $\alpha\beta$ está bem definido.

De modo análogo, definiremos a **classe inversa** de α pondo $\alpha^{-1} = [a^{-1}]$, onde $a \in \alpha$. Outra vez, a proposição 3.61 mostra que α^{-1} está bem definida, pois a classe de homotopia $\alpha^{-1} = [a^{-1}]$ é a mesma não importa o caminho a que tomarmos em α .

Definição 3.63. Sejam $a : I \rightarrow X$ um caminho e $\varphi : I \rightarrow I$ uma função contínua, tal que, $\varphi(\partial I) \subset \partial I$. O caminho $b : I \rightarrow X$ definido por $b = a \circ \varphi$, chama-se uma **reparametrização** do caminho a . Assim, a parametrização φ é

- i. Positiva, quando $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$;
- ii. Negativa, se $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(1) = 0$;

iii. Trivial ou simples, quando $\varphi(0) = \varphi(1)$.

Proposição 3.64. *Sejam $a : I \rightarrow X$ um caminho e $b = a \circ \varphi$ uma reparametrização do caminho a . Consideremos:*

1. Se φ for positiva, então $b \cong a$;
2. Se φ for negativa, então $b \cong a^{-1}$;
3. Se φ for trivial, dizemos que b é homotópico a uma constante relativamente ao bordo de I .

A saber, como o caminho a começa em $x = a(0)$ e termina em $y = a(1)$, neste caso, dizemos que a parametrização é homotópica ao caminho constante de x ou de y . Mais adiante, seguiremos com uma notação para expressar algebricamente este fato.

Demonstração¹⁶: Foi exposto anteriormente que dois caminhos em I são homotópicos (com extremidades fixas) se, e somente se, tiverem os mesmo ponto inicial e final.

Defina $i, j : I \rightarrow I$ dadas por $i(s) = s$ e $j(s) = 1 - s$. Temos, portanto $\varphi \cong i$, $\varphi \cong j$, ou $\varphi \cong$ constante, desde que seja, respectivamente, uma reparametrização positiva, negativa ou trivial.

De imediato, segue que $a \circ \varphi \cong a \circ i = a$, $a \circ \varphi \cong a \circ j = a^{-1}$, ou $a \circ \varphi \cong$ constante, respectivamente.

A proposição abaixo é o resultado que estávamos procurando.

Proposição 3.65. *Sejam $\alpha = [a]$, $\beta = [b]$, $\gamma = [c]$ classes de homotopia, onde $a, b, c : I \rightarrow X$ são caminhos com $a(0) = x$, $a(1) = b(0) = y$ e $b(1) = c(0) = z$, isto é, caminhos tais que um deles termina onde o seguinte começa, sendo $x, y, z \in X$. Tomando como os caminhos constantes sobre os pontos x e y , respectivamente, e $\epsilon_x = [e_x]$ e $\epsilon_y = [e_y]$ as classes de homotopias dessas constantes. Temos então:*

1. $\alpha\alpha^{-1} = \epsilon_x$;
2. $\alpha^{-1}\alpha = \epsilon_y$;
3. $\epsilon_x\alpha = \alpha = \alpha\epsilon_y$;
4. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

¹⁶ A demonstração deste tópico pode ser encontrada em (HATCHER, 2005), capítulo 02.2, e (LIMA, 1977a), capítulo 02.1.

Demonstração: Considere as parametrizações $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi'_3, \varphi_4$, definidas por:

$$\varphi_1(s) = \begin{cases} 2s, & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ 2 - 2s, & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$$\varphi_2(s) = \begin{cases} 1 - 2s, & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ 2s - 1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$$\varphi_3(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ 2s - 1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$$\varphi'_3(s) = \begin{cases} 2s, & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ 1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$$\varphi_4(s) = \begin{cases} 2s, & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{4}; \\ s + \frac{1}{4}, & \text{se } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{s}{2} + \frac{1}{2}, & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1; \end{cases}$$

Cálculos diretos mostram que $a \circ \varphi_1 = aa^{-1}$, $a \circ \varphi_2 = a^{-1}a$, $a \circ \varphi_3 = e_x a$, $a \circ \varphi'_3 = ae_y$, $[(ab)c] \circ \varphi_4 = a(bc)$. Agora, observe que as parametrizações φ_1 e φ_2 são triviais, enquanto φ_3 , φ'_3 e φ_4 são positivas. A Proposição 3.65 segue da Proposição 3.64.

Definição 3.66. *O conjunto das classes de homotopia (com extremos fixos) dos caminhos em um espaço topológico X , munido da lei de composição definida anteriormente, denomina-se grupóide fundamental de X .*

Notação: Em particular, $\Pi(x)$.

4 O Grupo Fundamental

Neste capítulo, definiremos “*Grupo Fundamental*”, um dos objetos centrais deste trabalho. Para este propósito, necessitaremos do conceito de aplicações homotópicas, classes de homotopia, tipos de homotopia, homotopia de caminhos, homotopias relativas e de alguns resultados gerais. As bases deste estudo, isto é, das proposições, definições, exemplos e resultados gerais aqui apresentados, foram fundamentadas em ARMSTRONG¹, CROOM², HATCHER³, LIMA⁴ — referência central, MASSEY⁵, MUNKRES⁶, e VILCHES⁷.

Nos capítulos anteriores, nos empenhamos em apresentar a base para o entendimento e estudo do grupo fundamental, dito ainda que para o estudo deste grupo, as homotopias mais interessantes são as homotopias de caminhos.

A definição de grupo fundamental, conhecida e utilizada atualmente, deve-se a Henri Poincaré. Dá-se importância a este assunto, devido ao grupo fundamental ser o exemplo mais básico de *invariante topológico*, o que intuitivamente significa dizer que: se dois espaços topológicos são homeomorfos, então eles possuem o mesmo grupo fundamental.

O grupo fundamental é dito o primeiro grupo de homotopia, razão pela qual a notação π_1 será usada neste trabalho.

Consideraremos pares do tipo (X, x_0) , onde X é um espaço topológico e $x_0 \in X$ é chamado ponto base do espaço topológico X . Os caminhos fechados $a : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ são denominados caminhos fechados com base no ponto x_0 , ou equivalentemente, laços com base em x_0 .

Proposição 4.1. *O subconjunto $\pi_1(X, x_0)$ do grupóide fundamental formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com base em x_0 constitui um grupo.*

Demonstração: De fato, tomando a Proposição 3.65, obtemos as seguintes informações:

- i. Para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \pi_1(X, x_0)$ temos $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$. Isto é, a propriedade associativa é válida;
- ii. ϵ_{x_0} é o elemento neutro de $\pi_1(X, x_0)$, pois, para todo $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ é válido que $\epsilon_{x_0}\alpha = \alpha = \alpha\epsilon_{x_0}$. Logo, o elemento neutro existe;

¹ (ARMSTRONG, 2013), capítulo 05.

² (CROOM, 2012), capítulo 04.

³ (HATCHER, 2005), capítulo 01.

⁴ (LIMA, 1977b), capítulo 02.

⁵ (MASSEY, 2019; MASSEY, 1967), capítulo 02, ambos.

⁶ (MUNKRES, 2014), capítulo 09.

⁷ (VILCHES,), capítulo 02.

- iii. Para todo $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, temos que $\alpha^{-1} \in \pi_1(X, x_0)$ é o elemento inverso, visto que $\alpha\alpha^{-1} = \epsilon_{x_0} = \alpha^{-1}\alpha$. Então, o elemento inverso existe.

Isso significa que a coleção das classes de homotopia de caminhos fechados com ponto base em x_0 é um grupo com a operação de produto de caminhos. Portanto, concluímos que $\pi_1(X, x_0)$ possui estrutura de grupo.

Vale ressaltar que o produto de dois caminhos fechados com base em x_0 sempre poderá ser efetuado.

Definição 4.2. Chamamos $\pi_1(X, x_0)$ de **grupo fundamental** de X com base em x_0 .

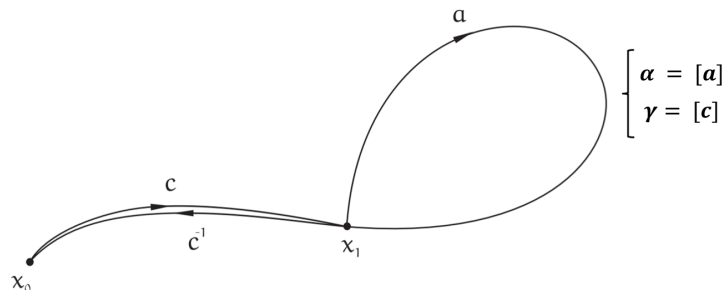
Definição 4.3. O **elemento neutro** do grupo fundamental é a homotopia $\epsilon = \epsilon_{x_0}$ do caminho constante no ponto x_0 .

Como a escolha do ponto base afeta a estrutura do grupo fundamental? A resposta a esta pergunta é dada pela seguinte proposição.

Proposição 4.4. Se x_0 e x_1 pertencem à mesma componente conexa por caminhos de X , então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos. Isto é, cada classe de homotopia γ de caminhos que ligam x_0 a x_1 induz um isomorfismo $\bar{\gamma} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, expressado por $\bar{\gamma}(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$.

Demonstração: Seja $\gamma = [c]$ a classe de homotopia de um caminho c que liga x_0 a x_1 (ver Figura 4.1). Se $\alpha = [a] \in \pi_1(X, x_1)$, então $\gamma\alpha\gamma^{-1} \in \pi_1(X, x_0)$. Além disso, $\gamma(\alpha\beta)\gamma^{-1} = (\gamma\alpha\gamma^{-1})(\gamma\beta\gamma^{-1})$. Portanto, $\bar{\gamma} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, dado por $\bar{\gamma}(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$, é um homomorfismo. E como $\bar{\gamma}(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$, é inverso bilateral de $\bar{\gamma}$, concluímos que $\bar{\gamma}$ é um isomorfismo.

Figura 4.1 – classe de homotopia de um caminho que liga x_0 a x_1



Corolário 4.5. Se X é conexo por caminhos, então para quaisquer pontos básicos $x_0, x_1 \in X$, os grupos fundamentais $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.

A saber, o isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ depende dos caminhos escolhidos, isto é, variando a classe γ , o isomorfismo $\bar{\gamma}$ também varia. Entretanto, excetua-se quando

$\pi_1(X, x_0)$ é abeliano, neste caso, o isomorfismo independe do caminho; isto é, dadas duas classes quaisquer γ, δ , ligando x_0 a x_1 , definem o mesmo isomorfismo: $\bar{\gamma} = \bar{\delta}$. De fato, neste caso, para todo $\alpha \in \pi_1(X, x_1)$, vale:

$$\bar{\gamma}(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1} = \gamma\delta^{-1} \cdot \delta\alpha\delta^{-1} \cdot \delta\gamma^{-1} = \gamma\delta^{-1} \cdot \delta\gamma^{-1} \cdot \delta\alpha\delta^{-1} = \gamma\alpha\delta^{-1} = \bar{\delta}(\alpha).$$

Uma vez que $\delta\alpha\delta^{-1}$ e $\delta\gamma^{-1}$ pertencendo ambas ao grupo abeliano $\pi_1(X, x_0)$, comutam.

Segue ainda, do Corolário 4.5, que sendo X um espaço topológico conexo por caminhos com $\pi_1(X, x_0)$ abeliano para algum $x_0 \in X$, o grupo $\pi_1(X, x_1)$ também será abeliano, para qualquer ponto base $x_1 \in X$. Ademais, escolhendo arbitrariamente, $x_0, x_1 \in X$, têm-se um isomorfismo natural entre os grupos $\pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$; o que significa dizer que, a cada $\alpha \in \pi_1(X, x_1)$ relaciona-se uma única classe $\bar{\alpha} \in \pi_1(X, x_0)$, esta é dita bem definida, pois não há ambiguidade nem escolhas arbitrárias.

De modo geral, em virtude da proposição acima, é natural escrever simplesmente $\pi_1(X)$, digo, o grupo fundamental de X , omitindo-se o ponto base e considerando apenas espaços conexos por caminhos, para denotar o grupo fundamental de um espaço X conexo por caminhos.

4.1 Homomorfismo induzido

Definição 4.6. Dada a aplicação $f : X \rightarrow Y$ contínua. Definimos o **homomorfismo induzido** por f como a aplicação

$$f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0); \quad y_0 = f(x_0),$$

dada por $f_{\#}(\alpha) = [f \circ a]$, em que $\alpha = [a]$.

Notação. Homomorfismo Induzido: $f_{\#}$

Se F é uma homotopia de caminhos entre os caminhos a e b , dizemos então que a aplicação $f_{\#}$ está bem definida, pois, verifica-se facilmente que $f \circ F$ é uma homotopia de caminhos entre os caminhos $f \circ a$ e $f \circ b$. Singularmente, vale que $f \circ (a \circ b) = (f \circ a)(f \circ b)$, e segue que $f_{\#}$ é, de fato, um homomorfismo.

Se dadas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ duas aplicações contínuas, e $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, e $g_{\#} : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$ pondo $y_0 = f(x_0)$ e $z_0 = g(y_0)$, são os homomorfismos induzidos por tais aplicações, então $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$. Além disso, se $id : X \rightarrow X$ é a aplicação identidade, então $id_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ é o homomorfismo identidade.

Para demonstrar esta afirmação, podemos considerar $\alpha = [a]$, caracterizando assim

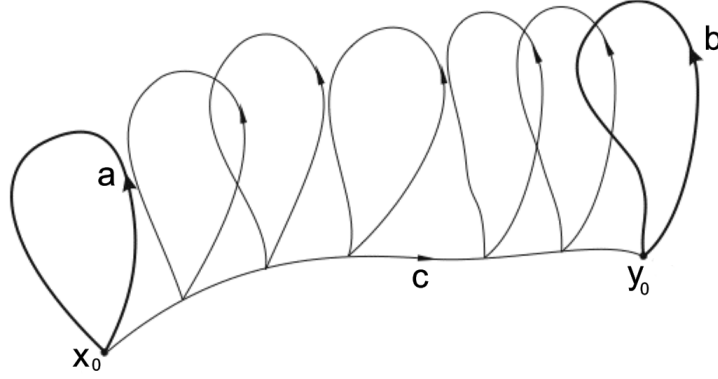
- i. $(g \circ f)_\#(\alpha) = [(g \circ f) \circ a]$
- ii. $(g \circ f)_\#(\alpha) = g_\#(f_\#(\alpha)) = g_\#([f \circ a]) = [g \circ (f \circ a)]$

De forma análoga, $id_\#(\alpha) = [id \circ a] = [a] = \alpha$.

Em particular, se $h : X \rightarrow Y$ for um homeomorfismo, então $h_\# : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, onde $y_0 = h(x_0)$, é um isomorfismo. Sendo mais específico, dizemos que espaços homeomorfos possuem grupos fundamentais isomorfos.

Proposição 4.7. *Sejam $a, b : I \rightarrow X$ caminhos fechados com bases nos pontos x_0, y_0 respectivamente. Os caminhos a e b são livremente homotópicos se, e somente existe um caminho $c : I \rightarrow X$, ligando x_0 a y_0 , tal que $a \cong (cb)c^{-1}$. A Figura 4.2 ilustra esse fato.*

Figura 4.2 – Caminhos livremente homotópicos.

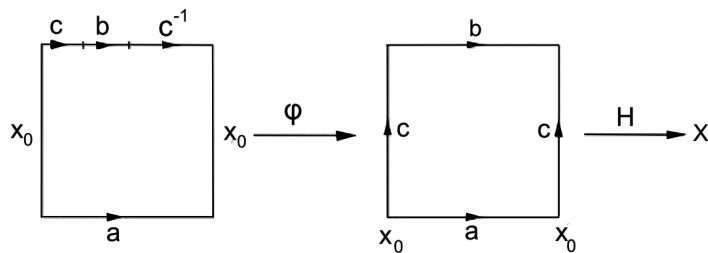


Fonte: (LIMA, 2003), p. 35.

Observação: por vezes, quando não houver ambiguidade, usaremos a notação I^2 ao invés de $I \times I$.

Demonstração: (Necessário.) Considere $H : I^2 \rightarrow X$ uma homotopia livre entre os caminhos a e b . Defina $c : I \rightarrow X$ por $c(t) = H(0, t) = H(1, t)$. Seja $\varphi : I^2 \rightarrow I \times I$ uma aplicação contínua que transforma o limite (bordo) do quadrado I^2 em si mesmo de tal forma (ver Figura): $\varphi(0, t) = (0, 0)$, $\varphi(1, t) = (1, 0)$, $\varphi(s, 0) = (s, 0)$ para qualquer $s, t \in I$,

Figura 4.3 – Transformação do bordo de I^2 em $I \times I$.



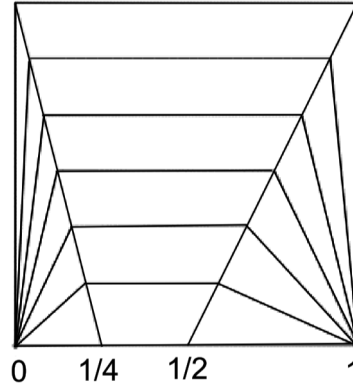
$$\varphi(s, 1) = \begin{cases} (0, 2s), & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2, \\ (4s - 2, 0), & \text{se } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ (1, 4 - 4s) & \text{se } 3/4 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

A aplicação φ existe, porque toda aplicação contínua $\varphi : \partial(I^2) \rightarrow I^2$ do limite do quadrado para I^2 se estende continuamente para uma aplicação φ de I^2 em $I \times I$ (já que $I \times I$ é contrátil; então, φ é homotópica a uma constante). Definindo $K = H \circ \varphi$, é fácil provar que K é uma homotopia de caminhos entre a e $(cb)c^{-1}$, digo $K : a \cong (cb)c^{-1}$.

(Suficiente.) Suponha que $a \cong (cb)c^{-1}$. Queremos mostrar que a é livremente homotópico a b , para tanto, basta mostrar que b e $(cb)c^{-1}$ são livremente homotópicos.

Definimos então $H : I^2 \rightarrow X$ uma homotopia livre, dada por $H = ((cb)c^{-1}) \circ \varphi$, onde $\varphi : I^2 \rightarrow I$ é uma retração do quadrado sobre sua base horizontal, conforme mostrado na Figura abaixo:

Figura 4.4 – Retração de um quadrado sobre sua base horizontal.



Fonte: (LIMA, 2003), p. 36.

vê-se imediatamente que H é uma homotopia entre $(cb)c^{-1}$ e b , pois φ é a identidade na base e leva cada lado vertical no seu pé, transformando linearmente cada segmento horizontal (indicado na Figura 4.4) sobre o segmento $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ da base, cada segmento de origem 0 no segmento $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ e cada segmento com ponto de origem 1 no segmento $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Ademais, temos que

$$H(s, t) = \begin{cases} \varphi(0, t) = \left(\frac{t}{4}\right), \\ \varphi(1, t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right). \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} H(0, t) = c(4\varphi(0, t)) = c(t), \\ H(1, t) = c^{-1}(2\varphi(1, t) - 1) = c(t). \end{cases}$$

Logo, $H(0, t) = H(1, t)$ para cada $t \in I$, H é uma homotopia livre entre os caminhos supracitados. Segue que a é livremente homotópico a b .

Corolário 4.8. *Se um caminho fechado $a : I \rightarrow X$, de base x_0 , é livremente homotópico a uma constante, então $a \cong e_{x_0}$.*

Em outras palavras, a é homotópico a uma constante sem mover o ponto x_0 durante a homotopia.

De fato, suponha que a seja livremente homotópico a e_{y_0} , então:

$$a \cong (ce_{y_0})c^{-1} \cong cc^{-1} \cong e_{x_0}.$$

Corolário 4.9. *Considere $a, b : I \rightarrow X$ dois caminhos fechados com base em x_0 . Então, dizemos que a e b são livremente homotópicos se, e somente se, $[a]$ e $[b]$ são elementos conjugados do grupo $\pi_1(X, x_0)$.*

Demonstração: De fato, note que, neste caso, o caminho $c : I \rightarrow X$, da Proposição 4.7, é fechado com ponto base em x_0 ; portanto, $[c]$ pertence a $\pi_1(X, x_0)$, e $[a]$ e $[b]$ são conjugados de $\pi_1(X, x_0)$, então $[c][b][c]^{-1} = [cbc]^{-1}$ se, e somente se, a e b são livremente homotópicos com base em x_0 .

Elucidando, como consequência do Corolário 4.9, conclui-se que se a e b são caminhos fechados com o mesmo ponto de base x_0 , num espaço topológico arbitrário X , então os caminhos fechados ab e ba são livremente homotópicos. Dizemos ainda que as classes de homotopia $[ab]$ e $[ba]$ são conjugadas no grupo $\pi_1(X, x_0)$, pois $[ab] = [b]^{-1}[ba][b]$.

Entretanto, se faz necessário observar que nem todo grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ é abeliano.

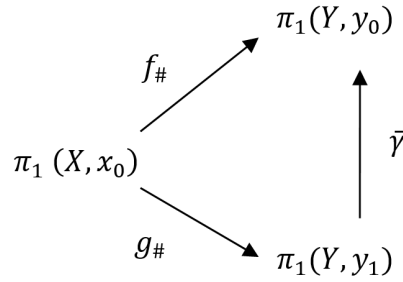
Genericamente, podemos associar a cada par topológico (X, x_0) e a cada $n \in \mathbb{N}$, um grupo $\pi_n(X, x_0)$, dito o n -ésimo grupo de homotopia de $\pi_1(X, x_0)$. Isso fundamenta o fato do grupo fundamental chamar-se o primeiro o grupo de homotopia, e ainda, sem grande rigor, diz-se que π_1 é o invariante algébrico mais simples associado a ideia de homotopia.

Corolário 4.10. *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas homotópicas. Os homomorfismos $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$; e $g_{\#} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(Y, y_1)$, com $y_0 = f(x_0)$ e $y_1 = g(x_0)$, são relacionados por $f_{\#} = \bar{\gamma} \circ g_{\#}$, onde $\bar{\gamma} : \pi_1(Y, y_1) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ é um isomorfismo definido da mesma forma “da Proposição 4.4”.*

Observe:

O Corolário 4.10 afirma que o diagrama dado é comutativo.

Figura 4.5 – Diagrama Comutativo



Note que, se $H : X \times I \rightarrow Y$ é uma homotopia entre f e g , então $c : I \rightarrow Y$, definido por $c(t) = H(x_0, t)$, é um caminho que liga $y_0 = f(x_0)$ a $y_1 = g(x_0)$. Diz-se então que, para todo caminho fechado $a : I \rightarrow X$ com base em x_0 , a aplicação $(s, t) \rightarrow H(a(s), t)$ é uma homotopia livre entre $(f \circ a)$ e $(g \circ a)$. Assim, pela Proposição 4.7, temos que $f \circ a \cong c(g \circ a)c^{-1}$. Fazendo $\gamma = [c]e\alpha = [a]$, temos

$$f_{\#}(\alpha) = [f \circ a] = [c(g \circ a)c^{-1}] = \gamma(g_{\#}(\alpha))\gamma^{-1} = \bar{\gamma}(g_{\#}(\alpha)).$$

Proposição 4.11. *Se dois espaços topológicos X e Y , conexos por caminhos, têm o mesmo tipo de homotopia, então seus grupos fundamentais são isomorfos.*

Proposição 4.12. *Se $f : X \rightarrow Y$ é uma equivalência homotópica, então o homomorfismo induzido $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, com $y_0 = f(x_0)$, é um isomorfismo.*

Em particular, a Proposição 4.12 é apenas uma forma mais precisa de se expressar o que foi dito na Proposição 4.11.

Corolário 4.13. *O grupo fundamental de um espaço contrátil possui apenas um elemento.*

4.2 Outras Descrições do Grupo Fundamental.

Proposição 4.14. *(Espaços com Grupo Fundamental Abelianos): Considere um espaço topológico conexo por caminhos, com $\pi_1(X, x_0)$ abeliano, para algum $x_0 \in X$, então, neste caso, $\pi_1(X, x_1)$ também é abeliano, para qualquer escolha do ponto base $x_1 \in X$.*

A Proposição 4.14 resulta das formulações feitas no Corolário 4.5, assim, pelas considerações que seguem o corolário, para quaisquer dois pontos arbitrários $x_0, x_1 \in X$, existe um isomorfismo natural $\pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

Corolário 4.15. *O grupo fundamental de um grupo topológico é abeliano.*

Em breve, poderemos afirmar que como S^1 é um grupo topológico com a operação multiplicação de números complexos, segue-se, através considerações feitas acima, que $\pi_1(S^1)$ é abeliano.

4.2.1 O Grupo Fundamental e as aplicações de S^1 em X

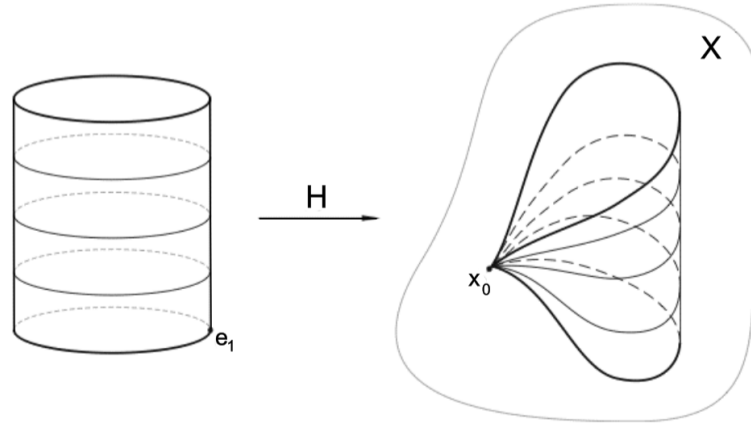
Existe uma sobrejeção contínua natural $\xi_0 : I \rightarrow S^1$, definida por

$$\xi_0(t) = e^{2\pi it} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Como I é compacto e S^1 é *Hausdorff*, ξ_0 é uma **aplicação quociente**. Isso significa que uma aplicação $\bar{a} : S^1 \rightarrow X$ é contínua se, e somente se, $\bar{a} = a \circ \xi_0 : I \rightarrow X$, é contínua. Ademais, um caminho $a : I \rightarrow X$ pode ser expresso na forma $a = \bar{a} \circ \xi_0$ se, e somente se, for fechado.

A correspondência $\bar{a} \mapsto a = \bar{a} \circ \xi_0$ define uma bijeção entre os caminhos fechados em X e as aplicações contínuas do círculo S^1 ao espaço X .

Figura 4.6 – Aplicação de $S^1 \times I$ em x .



Fonte: (LIMA, 2003), p. 40.

De forma análoga, seja a sobrejeção contínua $\zeta : I \times I \rightarrow S^1 \times I$, definida por $\zeta(s, t) = (\xi_0(s), t)$, têm-se:

- i) Existe uma bijeção entre as homotopias $H : S^1 \times I \rightarrow X$ e as homotopias livres de caminhos fechados $H = H \circ \zeta : I \times I \rightarrow X$;
- ii) Os caminhos fechados $a = (a \circ \xi_0)$ e $b = (b \circ \xi_0)$ são livremente homotópicos se, e somente se, as aplicações correspondentes $\bar{a}, \bar{b} : S^1 \rightarrow X$ são homotópicas.

Por fim, pondo $e_1 = (1, 0) \in S^1 \times I$ como ponto base, com $x_0 \in X$ fixo, os caminhos fechados $a, b : I \rightarrow X$, com base em x_0 , satisfazem $a \cong b$ (homotopia com extremidades fixas) se, e somente se, $\bar{a}, \bar{b} : (S^1, e_1) \rightarrow (X, x_0)$ são aplicações homotópicas entre pares. Nesse caso, as homotopias têm como domínio o cilindro $S^1 \times I$, e diz-se que a imagem de e_1 se mantém fixa durante a homotopia, como mostra a Figura 4.6.

4.3 Espaços Simplesmente Conexos

Definição 4.16. Um espaço topológico X , conexo por caminhos, chama-se simplesmente conexo quando $\pi_1(X, x_0) = 0$, $\forall x_0 \in X$.

Em palavras, dizemos que um espaço topológico X chama-se simplesmente conexo quando seu grupo fundamental é isomorfo ao grupo trivial (formado por um único elemento). Assim, para todo caminho fechado $a : I \rightarrow X$, com base em x_0 , tem-se $a \cong e_{x_0}$, equivalentemente, pelo Corolário 4.8, dizemos que X é conexo por caminhos e todo caminho $a : I \rightarrow X$ fechado é livremente homotópico a um caminho constante.

Proposição 4.17. A fim de que um espaço X seja simplesmente conexo, é necessário e suficiente que dois caminhos quaisquer em X , que possuem as mesmas extremidades, sejam homotópicos (com extremos fixos).

A saber, isso decorre do fato de que um caminho fechado e um caminho constante em seu ponto base têm as mesmas extremidades.

Demonstração: Considere $a, b : I \rightarrow X$ dois caminhos de x_0 para x_1 , pondo $x_0 = a(0) = b(0)$ e $a(1) = b(1)$. Então, ab^{-1} está bem definido e é um caminho fechado com base em x_0 . Como, por hipótese, X é simplesmente conexo, ab^{-1} é homotópico ao caminho fechado constante em x_0 , isto é, $ab^{-1} \cong e_{x_0}$. Então, $a \cong (ab^{-1})b \cong e_{x_0}b \cong b$. Portanto, $a \cong b$.

Lema 4.18. Seja $a : I \rightarrow S^n$ um caminho tal que $a(I) \neq S^n$. Então, $a \cong e_{x_0}$, se $a(0) = a(1) = x_0$, e $a \cong c$, onde $c : I \rightarrow S^n$ é um caminho injetivo, se $a(0) \neq a(1)$.

Demonstração: Como $a(I) \neq S^n$, então, existe $p \in S^n - a(I)$. Seja $\varphi : S^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, a projeção estereográfica. Logo, como $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo, $\varphi \circ a : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é homotópico (com extremos fixos) a uma constante ou a um segmento de reta (parametrizado injetivamente), conforme a seja fechado ou não. O mesmo ocorre com $a = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ a)$.

Lema 4.19. Seja $n > 1$. Se o caminho $a : I \rightarrow S^n$ é injetivo, sua imagem é um subconjunto fechado com interior vazio em S^n .

Demonstração: Como I é compacto, $a(I)$ é compacto e, portanto, fechado em S^n . Além disso, sendo injetivo, a é um homeomorfismo de I sobre sua imagem $a(I)$, a qual, se tivesse interior não vazio, conteria uma bola aberta B , de centro $x = a(s)$. Por conseguinte, temos $B = a(J)$, no qual J é um intervalo aberto que contém s . Portanto, o caminho a seria um homeomorfismo de J sobre B , o que é um absurdo, pois $J - s$ é desconexo, enquanto $B - \{x\}$ é conexo, em virtude de $n > 1$.

Lema 4.20. *Todo caminho $a : I \rightarrow S^n$ é homotópico (com extremos fixos) a um caminho $b : I \rightarrow S^n$ tal que $b(I) \neq S^n$.*

Demonstração: Devido a continuidade uniforme de a , podemos obter pontos $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ de tal forma que, tomando $I_i = [s_{i-1}, s_i]$ tenhamos $a(I_i) \neq S^n$, para todo $i = 1, \dots, k$. Pelo Corolário 4.13, temos $a \cong a_1 a_2 \dots a_k$, onde cada $a_i : I \rightarrow S^n$ é uma reparametrização de $a|_{I_i}$, com $a_i(I) = a(I_i)$. Pelos lemas anteriores, temos $a_i \cong b_i$, onde a imagem $b_i(I)$ é um fechado com interior vazio em S^n . Fazendo $b = b_1 b_2 \dots b_k$, temos que

$$a \cong a_1 a_2 \dots a_k \cong b = b_1 b_2 \dots b_k = b$$

e a imagem $b(I) = b_1(I) \cup \dots \cup b_k(I)$ é uma reunião finita de fechados com interior vazio em S^n . Segue, então, que $b(I)$ tem interior vazio. Em particular, $b(I) \neq S^n$.

Proposição 4.21. *Se $n > 1$, a esfera S^n é simplesmente conexa.*

Demonstração: Todo caminho fechado em S^n , pelo Lema 4.20, é homotópico a um caminho fechado cuja imagem não é a esfera S^n toda. Pelo Lema 4.18, tem-se que o último caminho é homotópico a uma constante. Portanto, S^n é simplesmente conexa.

Exemplo 4.22. *Se $n > 2$, então $\mathbb{R}^n - 0$ é simplesmente conexo. De fato, $\mathbb{R}^n - 0$ tem o mesmo tipo de homotopia da esfera S^{n-1} . Algumas considerações relevantes sobre este exemplo podem ser observadas no livro base, página 57.*

5 Exemplos de Grupos Fundamentais

Neste capítulo, apresentaremos o Grupo Fundamental do Círculo, este grupo é importante na topologia por ser um exemplo simples de um grupo fundamental não trivial. Isso significa que ele é um exemplo de um espaço topológico que não pode ser deformado continuamente em um ponto sem alterar sua estrutura topológica fundamental. Além disso, ele é um exemplo importante de um grupo abeliano¹, e é isomorfo ao grupo dos inteiros com a operação soma. Sua relevância também é notada por ser usado como um modelo para encontrar/calcular outros grupos fundamentais, por exemplo, o do cilindro e do toro.

A base do presente estudo segue sendo LIMA², e de suporte e fundamentação teórica temos: CROOM³, MASSEY⁴, MUNKRES⁵ e VILCHES⁶.

Nesta seção, mostraremos que o grupo fundamental do círculo S^1 é infinito cíclico e, portanto, existe um isomorfismo entre os grupos $\pi_1(S^1)$ e $\mathbb{Z}$. Para tanto, devemos associar a cada caminho fechado a no círculo um número $n(a)$, chamado o grau de a , tal que dois caminhos são homotópicos se, e somente se, possuem o mesmo grau. Além disso, todo número inteiro n é grau de algum caminho fechado em S^1 .

Para determinarmos $\pi_1(S^1)$, tomaremos inicialmente a **aplicação exponencial** $\xi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, dada por $\xi(t) = e^{it} = (\cos(t), \sin(t))$.

A aplicação ξ é contínua e sobrejetora, além de ser um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ para o grupo multiplicativo S^1 , pois $e^{i(s+t)} = e^{is} \cdot e^{it}$, que expressa a clássica fórmula do $\cos(s+t)$ e $\sin(s+t)$, portanto,

$$e^{i(s+t)} = (\cos(s+t), \sin(s+t)) = e^{is} \cdot e^{it}.$$

O núcleo de ξ é o grupo $2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi n; n \in \mathbb{Z}\}$, este é formado pelos múltiplos inteiros de $2\pi\mathbb{Z}$. Logo, dado $u \in S^1$, temos

$$\xi^{-1}(u) = \{t + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}\},$$

onde $t \in \mathbb{R}$ é um número real qualquer, tal que $\xi(t) = u$. Em particular, t é uma determinação em radianos do ângulo que se faz com o semieixo positivo das abscissas.

Entretanto, se definirmos $\xi(t) = e^{2\pi it}$, t deixa de ser a medida do ângulo que $\xi(t)$ forma com o semieixo positivo das abscissas. Disso vem a vantagem de simplificar o núcleo de ξ e torná-lo igual a $\mathbb{Z}$. É claro que ambas as definições de ξ são equivalentes.

¹ É um tipo especial de grupo com propriedades matemáticas distintas

² (LIMA, 1977b), capítulo 03.

³ (CROOM, 2012), capítulo 04.

⁴ (MASSEY, 2019; MASSEY, 1967), capítulo 02, ambos.

⁵ (MUNKRES, 2014), capítulo 09.

⁶ (VILCHES,), capítulo 03.

Lema 5.1. *A aplicação $\xi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é aberta.*

Demonstração: Para provar que ξ é uma aplicação aberta, precisamos mostrar que ela leva conjuntos abertos em $\mathbb{R}$ em conjuntos abertos em S^1 .

De fato, a aplicação $\xi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, dada por $\xi(t) = e^{it} = (\cos(t), \sin(t))$ é aberta.

Seja $U \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e $z = e^{i\theta} \in \xi(U)$, ou seja, existe $t \in U$ tal que $\xi(t) = z$. Queremos mostrar que existe um disco aberto $D_r(z) \subset S^1$ contido em $\xi(U)$.

Como ξ é contínua, sabemos que existe um $\epsilon > 0$ tal que se $|t - t_0| < \epsilon$, então $|\xi(t) - \xi(t_0)| < r$, onde r é o raio do disco $D_r(z)$.

Podemos escolher ϵ de forma que $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset U$, pois U é aberto. Além disso, podemos escrever z como $z = e^{i\theta} = \xi(t_0)$.

Assim, se escolhermos $t_1 = t_0 + \frac{\epsilon}{2}$, temos que $|\xi(t_1) - z| < r$. Portanto, o disco aberto $D_r(z)$ está contido em $\xi(U)$ e concluímos que ξ é uma aplicação aberta.

Proposição 5.2. *A restrição de ξ a todo intervalo aberto $(t, t + 2\pi)$ de comprimento 2π é um homeomorfismo sobre $S^1 - \{\xi(t)\}$.*

Demonstração Vamos mostrar que ξ é bijetora, contínua, com inversa contínua, e que preserva a topologia.

1) Bijetividade:

i) ξ é injetora. Suponha que existam $t_1, t_2 \in (t, t + 2\pi)$ tais que $\xi(t_1) = \xi(t_2)$. Então, temos $e^{it_1} = e^{it_2}$, o que implica em $t_1 - t_2 = 2n\pi$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Isso contradiz a escolha dos intervalos abertos $(t, t + 2\pi)$ de comprimento 2π , que não contém nenhum número inteiro múltiplo de 2π . Portanto, ξ é injetora.

ii) ξ é sobrejetora. Basta notar que $\xi(t)$ percorre todo S^1 à medida que t varia entre 0 e 2π . Portanto, todo ponto em S^1 é alcançado por ξ em algum ponto do intervalo $(t, t + 2\pi)$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Portanto, ξ é sobrejetora.

Assim sendo, ξ é bijetora.

2) Continuidade: As aplicações $\cos(t)$ e $\sin(t)$ (isto é, as funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ de ξ , respectivamente) são contínuas em $\mathbb{R}$, e como a composição de aplicações contínuas é contínua, temos que ξ é contínua (pelo Lema 2.40).

3) Inversa contínua: A inversa de ξ é dada por $\xi^{-1}(x, y) = \arctan(y/x)$. Note que, como $x \neq 0$ em $S^1 - \{\xi(t)\}$, a função $\arctan(y/x)$ é contínua em $S^1 - \{\xi(t)\}$, e portanto, ξ^{-1} é contínua.

4) Para mostrar que ξ preserva a topologia, precisamos mostrar que a imagem inversa $\xi^{-1}(U)$ de todo conjunto aberto $U \subset S^1 - \{\xi(t)\}$ é um conjunto aberto em $(t, t + 2\pi)$. Seja U um conjunto aberto em $S^1 - \{\xi(t)\}$, e seja $(a, b) = \xi^{-1}(U)$, isto é, todos os pontos

$p \in (a, b)$ satisfazem $\xi(p) \in U$. Queremos mostrar que (a, b) é um conjunto aberto em $(t, t + 2\pi)$. Para isso, vamos considerar um ponto $p \in (a, b)$ e mostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$(p - \epsilon, p + \epsilon) \subset (a, b).$$

Como $p \in (a, b)$, temos $\xi(p) \in U$, e como U é aberto, existe um raio $r > 0$ tal que $B(\xi(p), r) \subset U$, onde $B(x, r)$ representa a bola aberta de raio r centrada em x . Note que, como $S^1 - \{\xi(t)\}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$, podemos escolher r o suficientemente pequeno para que $B(\xi(p), r)$ não contenha $\xi(t)$, isto é,

$$B(\xi(p), r) \cap \{\xi(t)\} = \emptyset.$$

Agora, vamos escolher $\epsilon > 0$ tal que

$$\xi((p - \epsilon, p + \epsilon)) \subset B(\xi(p), r).$$

Para isso, basta escolher $\epsilon > 0$ tal que

$$\max\{\sin(p - \epsilon), \sin(p + \epsilon)\} - \sin(p) < r;$$

$$\max\{\cos(p - \epsilon), \cos(p + \epsilon)\} - \cos(p) < r.$$

Essa escolha é possível, pois $\sin(t)$ e $\cos(t)$ são contínuas em $\mathbb{R}$.

Com isso, temos $(p - \epsilon, p + \epsilon) \subset (a, b)$, mostrando que (a, b) é um conjunto aberto em $(t, t + 2\pi)$. Portanto, a restrição $\xi : (t, t + 2\pi) \rightarrow S^1 - \{\xi(t)\}$ é um homeomorfismo.

Logo, concluímos que a restrição $\xi(t) = e^{It} = (\cos(t), \sin(t))$ a todo intervalo aberto $(t, t + 2\pi)$ de comprimento 2π é um homeomorfismo sobre $S^1 - \{\xi(t)\}$.

Observação: Uma outra forma de ver que a restrição de ξ é um homeomorfismo sobre $S^1 - \{\xi(t)\}$ seria provando que ξ é uma aplicação aberta, e este fato já foi demonstrado no Lema 5.1 e em LIMA⁷.

Corolário 5.3. *Todo ponto $u = \xi(t) \in S^1$ possui uma vizinhança aberta $V = S^1 - \{u^*\}$, $u^* = -u$, cuja imagem inversa $\xi^{-1}(V)$ é a reunião dos intervalos abertos $I_n = (t + \pi(2n - 1), t + \pi(2n + 1))$, $n \in \mathbb{Z}$, cada um dos quais é aplicado homeomorficamente por ξ sobre V .*

Seja $a : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $J = [s_0, s_1]$, um caminho tal que $|a(s)| = 1$ para todo $s \in J$. Então, $a(s) \in S^1$ para todo s ; assim, escrevemos $a : J \rightarrow S^1$.

Definição 5.4. *Uma **função ângulo** para o caminho a é uma função $\tilde{a} : J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a(s) = (\cos(\tilde{a}(s)), \sin(\tilde{a}(s)))$ para todo $s \in J$. Como $\xi(s) = (\cos(s), \sin(s)) = e^{is}$, temos que $\tilde{a}$ é uma função ângulo para o caminho a se, e somente se, $a = \xi \circ \tilde{a}$.*

⁷ (LIMA, 1977a), capítulo 3.1, páginas 67 e 68.

Proposição 5.5. *Dados um intervalo $J = [s_0, s_1]$, uma função contínua $a : J \rightarrow S^1$ e um número real t_0 com $a(s_0) = e^{it_0}$, existe uma única função contínua $\tilde{a} : J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a(s) = e^{i\tilde{a}(s)}$, para todo $s \in J$ (isto é, $a = \xi \circ \tilde{a}$) e $\tilde{a}(s_0) = t_0$.*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em LIMA⁸.

A partir da função ângulo $\tilde{a} : J \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir o grau de um caminho fechado $a : I \rightarrow S^1$ como a variação total da função ângulo ao longo do caminho. Neste caso, fixado t_0 com $a(s_0) = \xi(t_0)$ e obtida $\tilde{a}(s_0) = t_0$, as demais funções para a , que devem ter início nos pontos $t_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tem a forma $\hat{a}(s) = \tilde{a}(s) + 2k\pi$.

Definição 5.6. *Seja $a : I \rightarrow S^1$ um caminho fechado. Então, toda função ângulo $\tilde{a} : J \rightarrow \mathbb{R}$ para a deve ser tal que o número*

$$n(a) = \frac{\tilde{a}(1) - \tilde{a}(0)}{2\pi},$$

*é inteiro (positivo, negativo ou nulo). O número inteiro $n(a)$, associado ao caminho fechado $a : I \rightarrow S^1$, chama-se o **grau do caminho fechado a** , e indica quantas voltas o ponto $a(s)$ dá ao longo de S^1 quando o tempo s varia de 0 a 1.*

O grau de um caminho fechado mede quantas vezes o caminho percorre o círculo unitário no sentido anti-horário (ou seja, quantas voltas ele dá em torno da origem), considerando a orientação do caminho. Se o grau for positivo, o caminho percorre o círculo no sentido anti-horário; se for negativo, percorre no sentido horário; se for zero, o caminho não envolve a origem.

Observação: A definição acima assume que o caminho não passa pela origem. Se o caminho passar pela origem, podemos definir o grau como a soma dos graus dos caminhos que vão da origem até os pontos em que o caminho cruza o eixo real (o ponto em questão), tomando cuidado com a orientação do caminho.

Proposição 5.7. *Sejam $a, b : I \rightarrow S^1$ caminhos fechados. Então:*

1. *Se a e b têm o mesmo ponto base, vale $n(ab) = n(a) + n(b)$;*
2. *Se a e b são livremente homotópicos, tem-se $n(a) = n(b)$;*
3. *Se $n(a) = n(b)$, então a e b são livremente homotópicos. Além disso, $a \cong b$ quando a e b tiverem o mesmo ponto base.*
4. *Dados $p \in S^1$ e $k \in \mathbb{Z}$, existe um caminho fechado $a : I \rightarrow S^1$, com base no ponto p , tal que $n(a) = k$.*

⁸ (LIMA, 1977a), capítulo 3.1, páginas 69 e 70.

As demonstrações de cada item da proposição acima, podem ser encontradas em LIMA⁹, aqui, seguiremos apenas com os resultados.

Lembrando que nosso objetivo é mostrar que $\pi_1(S^1)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$. Com base nas definições e considerações apresentadas acima, a existência de tal isomorfismo poderá ser provada através da proposição a seguir.

Proposição 5.8. *O grupo fundamental do círculo S^1 é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Z}$ dos inteiros.*

Demonstração: A cada classe de homotopia $\alpha = [a]$ de caminhos fechados em S^1 , associamos o inteiro $n(a)$.

1. Pelo item 2 da Proposição 5.7, o grau $n(a)$ depende apenas da classe α , mas não do caminho fechado a que escolhemos para representá-la. Assim, podemos falar no grau $n(\alpha)$ da classe α e obtemos uma aplicação $n : \pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$.
2. Pelo item 1 da proposição acima, temos que n é um homomorfismo;
3. Pelo item 3, n é injetivo;
4. Por fim, pelo item 4, n é sobrejetivo.

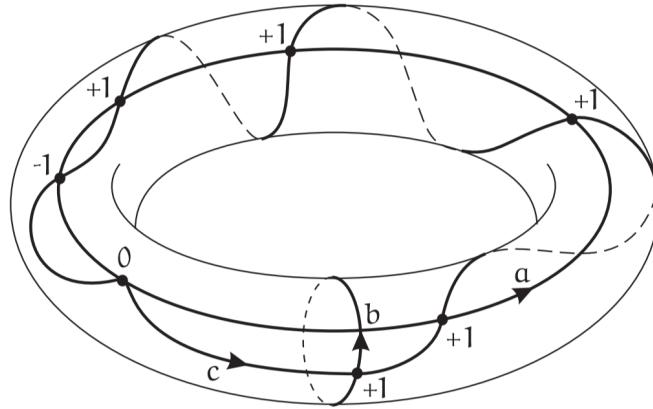
Portanto, n é um isomorfismo entre $\pi_1(S^1)$ sobre $\mathbb{Z}$.

Corolário 5.9. *O grupo fundamental do toro $T = S^1 \times S^1$ é abeliano livre com dois geradores.*

Observação: Um dos geradores de $\pi_1(T)$ é a classe de homotopia de um paralelo a e o outro é a classe de um meridiano b . Um caminho fechado c no toro é homotópico a $ma + nb$ se n é o número líquido de vezes que o caminho c corta (isto é, cruza de um lado para o outro) o paralelo a , e m é o número líquido¹⁰ de vezes que c corta o meridiano b . Por exemplo, o caminho c mostrado na Figura 5.1 é homotópico a $a + 3b$.

⁹ (LIMA, 1977a) capítulo 3.1, páginas 71 a 73.

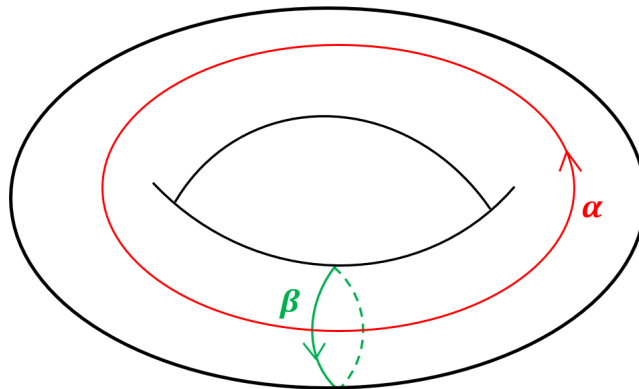
¹⁰ Neste caso, significa que contamos apenas quando c cruza de um lado para o outro de a ou b : não basta tocar. Além disso, devemos contar positivamente os cruzamentos de um lado e negativamente do outro lado.

Figura 5.1 – Os geradores de $\pi_1(T)$ 

Fonte: (LIMA, 2003), p. 58.

Demonstração: Para provar que o grupo fundamental do toro é abeliano livre com dois geradores, precisamos encontrar dois laços simples e não homotópicos que geram todo o grupo. Considere o toro $T = S^1 \times S^1$. Vamos escolher dois geradores para o grupo fundamental de T da seguinte forma:

1. Um laço α que circunda uma das circunferências que formam o toro uma vez, no sentido horário. Isto é, α começa em $(1, 0)$, percorre a circunferência em torno do eixo y e termina novamente em $(1, 0)$.
2. Um laço β que circunda a outra circunferência que forma o toro uma vez, no sentido horário também. Isto é, β começa em $(1, 0)$, percorre a circunferência em torno do eixo x e termina novamente em $(1, 0)$.

Figura 5.2 – Os geradores de $T = S^1 \times S^1$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Agora, vamos verificar que esses laços geram todo o grupo fundamental do toro. Seja γ um laço baseado em $(1, 0)$ no toro. Então, podemos escrever γ como $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, onde γ_1 é um laço baseado em $(1, 0)$ na circunferência em torno do eixo y e γ_2 é um laço

baseado em $\gamma_1(1)$ na circunferência em torno do eixo x . Esses laços γ_1 e γ_2 podem ser escritos como concatenações dos laços α e β , já que cada um desses laços dá uma volta inteira em torno da sua respectiva circunferência. Portanto, podemos escrever:

$$\gamma_1 = \alpha^m \beta^n$$

para alguns inteiros m, n ; e:

$$\gamma_2 = \alpha^p \beta^q$$

para alguns inteiros p, q . Assim, podemos escrever o laço γ como:

$$\gamma = (\alpha^m \beta^n, \alpha^p \beta^q)$$

Podemos reorganizar essa expressão como:

$$\gamma = \alpha^m \beta^n \alpha^{-p} \beta^{-q} \alpha^p \beta^q = \alpha^{m+p} \beta^{n+q-pm}$$

Ou seja, todo laço baseado em $(1, 0)$ no toro pode ser escrito como uma concatenação de potências de α e β (e inversas desses laços). Em particular, isso significa que o grupo fundamental do toro é gerado por α e β . Além disso, como estamos trabalhando em um espaço topológico abeliano, temos que todos os laços são comutativos. Portanto, o grupo fundamental do toro é abeliano.

Para mostrar que é livre, basta mostrar que não existem relações entre α e β . De fato, se existisse uma relação do tipo $\alpha^a \beta^b = 1$ para alguns inteiros a, b , então poderíamos escrever $\beta^b = \alpha^{-a}$. Isso implicaria que β é homotopicamente equivalente a um laço baseado em $\alpha(1)$, o que é falso.

Portanto, concluímos que o grupo fundamental do toro é abeliano livre com dois geradores.

Corolário 5.10. *O cilindro $C = S^1 \times \mathbb{R}$ tem grupo fundamental cíclico infinito.*

Para provar que o cilindro $C = S^1 \times \mathbb{R}$ tem grupo fundamental cíclico infinito, podemos usar o fato de que o grupo fundamental de um produto de espaços é o produto direto dos grupos fundamentais de cada espaço. Como o grupo fundamental de S^1 é isomorfo a $\mathbb{Z}$, temos que o grupo fundamental de $C = S^1 \times \mathbb{R}$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \{e\}$, onde e é o elemento neutro do grupo $\mathbb{R}$.

Para ver mais detalhadamente, podemos usar a definição de grupo fundamental. Seja $p : C \rightarrow S^1$ a projeção canônica dada por $p(z, t) = z$. Tomemos um ponto base $(1, 0) \in S^1$ e um laço $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$ baseado nesse ponto, dado por $\gamma(t) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), t)$. Queremos calcular a classe de homotopia $[\gamma]$ em $\pi_1(C, (1, 0))$.

Considere a aplicação $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{\gamma}(t) = t$. É fácil verificar que essa aplicação é uma elevação de γ em relação a p , ou seja, $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Além disso, $\tilde{\gamma}(0) = 0$,

que é o elemento neutro de $\mathbb{Z}$. Portanto, a classe de homotopia $[\gamma]$ em $\pi_1(C, (1, 0))$ é dada por $[(\tilde{\gamma}, e)]$, onde e é o elemento neutro de $\mathbb{Z}$.

Isso mostra que $\pi_1(C, (1, 0))$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \{e\}$, que é um grupo cíclico infinito. Portanto, o cilindro $C = S^1 \times \mathbb{R}$ tem grupo fundamental cíclico infinito.

Exemplo 5.11. O toro $T = S^1 \times S^1$ e a esfera S^2 não são homeomorfos.

Vamos supor, por absurdo, que o grupo fundamental do toro e da esfera são homeomorfos. Isso quer dizer que existe uma correspondência biunívoca entre as classes de equivalência de laços no toro e na esfera, de modo que uma aplicação contínua entre as classes de equivalência de laços¹¹ no toro preserva a relação de equivalência se, e somente se, a correspondente aplicação entre as classes de equivalência de laços na esfera preserva a relação de equivalência.

Vamos definir π_1^T como o grupo fundamental do toro e π_1^S como o grupo fundamental da esfera. É bem conhecido que $\pi_1^T \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (produto direto de dois grupos cíclicos isomorfos a $\mathbb{Z}$), e que $\pi_1^S \simeq \{1\}$ (o grupo trivial). Portanto, para que π_1^T e π_1^S sejam homeomorfos, deve existir uma aplicação ϕ tal que:

1. $\phi(\{1\}) = \{1\}$ (o elemento neutro de π_1^S).
2. $\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2)$, para todo $g_1, g_2 \in \pi_1^T$ (a aplicação deve preservar a estrutura de grupo).
3. A aplicação ϕ deve ser uma bijeção.

Vamos mostrar que isso é impossível, levando em consideração a existência de laços distintos em π_1^T . É possível provar que o toro tem dois laços distintos, um que envolve a circunferência maior e outro que envolve a circunferência menor. Denotaremos estes laços por α e β , respectivamente.

Suponha que ϕ é uma aplicação que satisfaz os requisitos acima. Como ϕ é uma bijeção, existe um laço $\gamma \in \pi_1^S$ que é a imagem de α sob ϕ (ou seja, $\phi([\alpha]) = [\gamma]$), e um laço $\delta \in \pi_1^S$ que é a imagem de β sob ϕ (ou seja, $\phi([\beta]) = [\delta]$). Como ϕ preserva a relação de equivalência, temos que:

$$[\gamma]^n = \phi([\alpha])^n = \phi([n \cdot \alpha]) = [\phi(n \cdot \alpha)]$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ (onde $[n \cdot \alpha]$ é o laço que percorre n vezes a circunferência maior do toro). Mas como ϕ é um homomorfismo de grupos, temos também que:

$$[\delta]^m = \phi([\beta])^m = \phi([m \cdot \beta]) = [\phi(m \cdot \beta)]$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$ (onde $[m \cdot \beta]$ é o laço que percorre m vezes a circunferência menor do toro).

¹¹ Caminhos fechados.

Observemos que, no toro, o laço $(\alpha \cdot \beta)^n$ é homotópico ao laço α^n , e o laço $(\alpha \cdot \beta)^{-n}$ é homotópico ao laço α^{-n} . Isso quer dizer que, em π_1^T , temos as igualdades:

$$[\alpha^n] = [\alpha \cdot \beta]^n \cdot [\beta^{-n}]$$

e

$$[\alpha^{-n}] = [\alpha \cdot \beta]^{-n} \cdot [\beta^n]$$

Usando essas igualdades, podemos escrever:

$$\phi([\alpha])^n \cdot \phi([\beta])^{-n} = [\gamma^n] \cdot [\delta^{-n}] = [\phi([\alpha \cdot \beta])^n] \cdot [\phi([\beta^{-1}])^n] = \phi([\alpha^n]) \cdot \phi([\beta^{-n}])$$

e

$$\phi([\alpha])^{-n} \cdot \phi([\beta])^n = [\gamma^{-n}] \cdot [\delta^n] = [\phi([\alpha \cdot \beta])^{-n}] \cdot [\phi([\beta^{-1}])^{-n}] = \phi([\alpha^{-n}]) \cdot \phi([\beta^n])$$

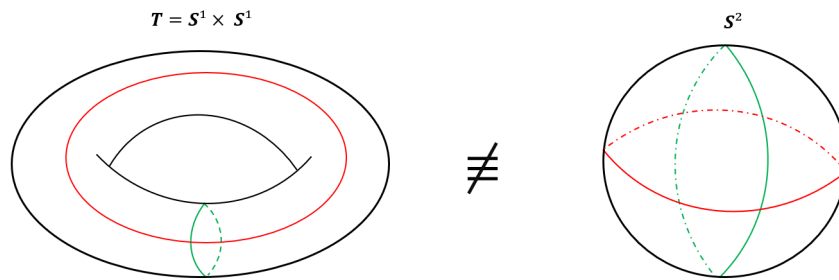
Multiplicando essas igualdades, temos:

$$\phi([\alpha])^n \cdot \phi([\alpha])^{-n} \cdot \phi([\beta])^n \cdot \phi([\beta])^{-n} = \phi([\alpha^n \cdot \alpha^{-n}]) \cdot \phi([\beta^{-n} \cdot \beta^n]) = \phi([\alpha^0]) \cdot \phi([\beta^0]) = \{1\}$$

Mas isso implica que $\phi([\alpha])$ e $\phi([\beta])$ comutam em π_1^S (ou seja, que $\phi([\alpha]) \cdot \phi([\beta]) = \phi([\beta]) \cdot \phi([\alpha])$). No entanto, isso é impossível no grupo trivial π_1^S , onde toda classe de equivalência comuta consigo mesma.

Concluimos que a suposição inicial de que π_1^T e π_1^S são homeomorfos é falsa, e que, portanto, os grupos fundamentais do toro e da esfera não são homeomorfos.

Figura 5.3 – S^2 e $T = S^1 \times S^1$ não são homeomorfos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A esfera e o toro são topologicamente diferentes. A esfera é um exemplo de um espaço simplesmente conexo porque qualquer laço desenhado na superfície pode se contrair até um ponto. O toro é um exemplo de espaço multiconexo porque há laços no toro que não podem ser reduzidos a um ponto.

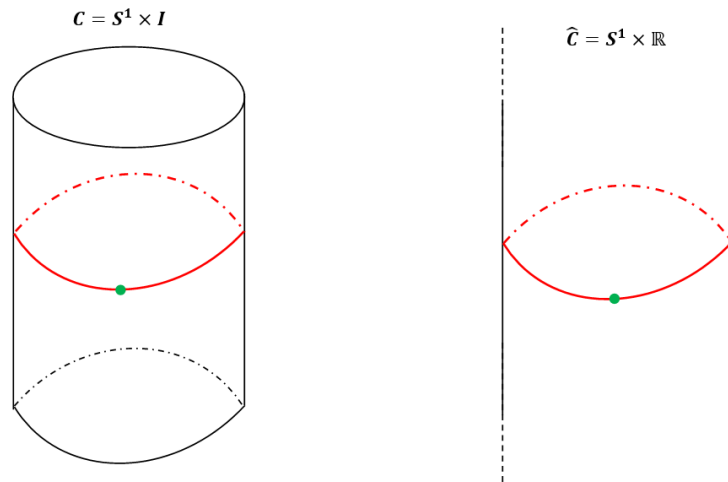
Exemplo 5.12. Os cilindros $C = S^1 \times I$ e $\hat{C} = S^1 \times \mathbb{R}$ não são homeomorfos. Com efeito, os dois cilindros possuem o mesmo grupo fundamental (ver Figura 5.4)

$$(\pi_1(C = S^1 \times I) = \pi_1(\hat{C} = S^1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{Z}).$$

Entretanto, diferem pela compacidade: $C = S^1 \times I$ é compacto e $\hat{C} = S^1 \times \mathbb{R}$ não.

Uma maneira de ver isso é observar que o cilindro $\hat{C} = S^1 \times \mathbb{R}$ contém uma sequência infinita de loops fechados $S^1 \times \{n\}$, cada um homotopicamente distinto do outro. Por outro lado, qualquer caminho em $C = S^1 \times I$ deve ser homotopicamente equivalente a um caminho que se mantém em uma das extremidades do cilindro (por exemplo, em $S^1 \times \{0\}$), já que não há caminhos fechados em C que vão de uma extremidade à outra. Isso implica que não há uma bijeção contínua entre os conjuntos de loops baseados em pontos distintos de $C = S^1 \times I$ e $\hat{C} = S^1 \times \mathbb{R}$, o que por sua vez implica que eles não são homeomorfos.

Figura 5.4 – Os cilindros $C = S^1 \times I$ e $\hat{C} = S^1 \times \mathbb{R}$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Exemplo 5.13. S^1 não é simplesmente conexo. Em particular, S^1 não é contrátil. Analogamente para o cilindro $\hat{C} = S^1 \times \mathbb{R}$.

(1) Para provar que S^1 não é simplesmente conexo, vamos encontrar um laço não trivial (ou seja, um laço que não pode ser continuamente deformado em um ponto) em S^1 . Considere o laço $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$ dado por $\gamma(t) = e^{2\pi it}$, que percorre uma circunferência completa em torno de S^1 . Esse laço não pode ser deformado continuamente em um ponto, pois qualquer deformação que o deixe fixo em um ponto não percorrerá todo o círculo. Portanto, concluímos que S^1 não é simplesmente conexo.

(2) Agora, para provar que S^1 não é contrátil, suponha por absurdo que S^1 é contrátil. Então, existe uma homotopia $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ entre a identidade id_{S^1} e uma

constante $c \in S^1$. Escolha um ponto $p \in S^1$, e considere a imagem inversa de p através de H :

$$H^{-1}(p) = \{(x, t) \in S^1 \times [0, 1] \mid H(x, t) = p\}$$

Sabemos que $(p, 0) \in H^{-1}(p)$, já que $H(p, 0) = p$. Seja $U = S^1 \times [0, 1[\setminus H^{-1}(p)$ e $V = H^{-1}(p) \cup \{p\}$. Observe que: - U é um aberto em S^1 , pois é a imagem inversa de um aberto por uma função contínua (lembre-se que H é contínua); - V é uma união de fechados em S^1 , e portanto é um fechado em S^1 . - U e V são disjuntos, pois para todo $(x, t) \in H^{-1}(p)$, temos $H(x, t) = p \notin U$. - $S^1 = U \cup V$, já que para todo $(x, t) \in S^1 \times [0, 1]$, ou bem temos $H(x, t) \neq p$, o que implica em $(x, t) \in U$, ou bem temos $H(x, t) = p$, o que implica em $(x, t) \in V$. Observe agora que p não tem vizinhança simplesmente conexa em S^1 , pois: - se p pertence a algum dos dois arcos de S^1 definidos por U (isto é, se U não é um conjunto conexo), então a vizinhança em questão contém pontos que não são percorridos pela constante na homotopia H . - se p não pertence a nenhum dos dois arcos de S^1 definidos por U (isto é, se U é um conjunto conexo), então a vizinhança em questão é simplesmente conexa, mas não é possível encontrar uma homotopia entre id_{S^1} e uma constante c que percorra todo U sem passar por p . Por tanto, concluímos que S^1 não é contrátil.

6 Conclusão

O estudo da Homotopia e do Grupo Fundamental é de extrema importância para a compreensão e análise de diversos fenômenos matemáticos e não-matemáticos, em diversas áreas do conhecimento. Compreender essas teorias permite que sejam feitas análises e previsões mais precisas acerca da forma do espaço considerado, contribuindo para um melhor entendimento do mesmo.

Ao longo deste trabalho, foram apresentadas definições, exemplos e aplicações das teorias abordadas, de forma a tornar seu estudo mais acessível e compreensível. Foi possível observar que o Grupo Fundamental fornece informações algébricas sobre a forma do espaço, sendo um importante instrumento para se entender as propriedades topológicas do objeto analisado.

Dessa forma, espera-se que este trabalho possa servir como uma base para futuras pesquisas e aprofundamentos sobre o tema, contribuindo para a produção de novo conhecimento e desenvolvimento de soluções em diversas áreas de aplicação. Por fim, pode-se afirmar que o estudo da Homotopia e do Grupo Fundamental é um tema desafiador e instigante, que exige habilidades de abstração e raciocínio abstrato por parte do estudante. No entanto, a compreensão e internalização dessas teorias é fundamental para qualquer interessado em se aprofundar no campo da Topologia e suas aplicações.

Referências

- ARMSTRONG, M. A. *Basic Topology*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 60.
- CROOM, F. H. *Basic Concepts of Algebraic Topology*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 27, 60 e 70.
- HATCHER, A. *Algebraic Topology*. [S.l.]: Tsinghua University Press Co., Ltd., 2005. Citado 4 vezes nas páginas 27, 43, 58 e 60.
- JAMES, I. M. *History of Topology*. [S.l.]: Elsevier, 1999. Citado na página 10.
- LANG, S. *Álgebra para Graduação*. [S.l.]: Ed. Ciencia Moderna, 2008. Citado na página 12.
- LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. [S.l.]: Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo, 1970. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 27.
- LIMA, E. L. *Espaços Métricos, Projeto Euclides*. [S.l.: s.n.], 1977. v. 954. Citado 6 vezes nas páginas 12, 55, 58, 72, 73 e 74.
- LIMA, E. L. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CNPq., 1977. Citado 4 vezes nas páginas 11, 27, 60 e 70.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise*. [S.l.: s.n.], 1995. Citado 3 vezes nas páginas 12, 27 e 42.
- LIMA, E. L. *Fundamental Groups and Covering Spaces*. [S.l.: s.n.], 2003. Citado 5 vezes nas páginas 54, 63, 64, 67 e 75.
- MASSEY, W. S. *Algebraic Topology: An Introduction*. [S.l.: s.n.], 1967. v. 56. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 70.
- MASSEY, W. S. *A Basic Course in Algebraic Topology*. [S.l.: s.n.], 2019. v. 127. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 70.
- MUNKRES, J. R. *Topology*. [S.l.]: Pearson Higher Ed, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 27, 43, 60 e 70.
- VILCHES, M. A. *Introdução à Topologia Algébrica*. [S.l.: s.n.]. Citado 3 vezes nas páginas 27, 60 e 70.
- VILCHES, M. A. *Topologia geral*. [S.l.: s.n.], 2012. Citado na página 12.