

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA PLENA

ADONIAS COSTA SILVA

**ANÁLISE DE ERROS EM PRODUÇÕES DE ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO
EM PROVAS DA OBMEP NO ESTADO DO MARANHÃO**

São Luís

2024

ADONIAS COSTA SILVA

**ANÁLISE DE ERROS EM PRODUÇÕES DE ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO
EM PROVAS DA OBMEP NO ESTADO DO MARANHÃO**

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dra. Valdiane Sales Araújo.

São Luís

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Silva, Adonias Costa.

Análise de erros em produções de estudantes do Ensino Médio em provas da OBMEP no Estado do Maranhão / Adonias Costa Silva. - 2024.

52 p.

Orientador(a): Valdiane Sales Araújo.

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática,
Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2024.

1. Análise de Erro. 2. Obmep. 3. Ensino de
Matemática. 4. . 5. . I. Araújo, Valdiane Sales. II.
Título.

ADONIAS COSTA SILVA

**ANÁLISE DE ERROS EM PRODUÇÕES DE ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO
EM PROVAS DA OBMEP NO ESTADO DO MARANHÃO**

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dra. Valdiane Sales Araújo.

Trabalho **APROVADO** em 19 de setembro de 2024.

Prof. Dra. Valdiane Sales Araújo
DEMAT/CCET/UFMA
Orientadora

Adecarlos Costa Carvalho
DEMAT/CCET/UFMA
(Primeiro Examinador)

Leonardo Rogério da Silva Rodrigues
CCCO/UFMA
(Segundo Examinador)

Dedico este trabalho aos meus Pais, Abdias e Francisca.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, pois tem sido minha maior força para continuar e ter chegado até aqui.

Agradeço também aos meus Pais, Abdias e Francisca, pois graças à persistência de cada um deles eu consegui chegar até onde estou hoje.

À meu irmão Adenilson, que por mais que more longe, sempre me apoia no que faço.

À minha amiga Paula Lobato por todas as repreensões feitas a mim quando pensei em desistir do meu curso e por me ajudar nos momentos mais difíceis.

À Sophia, minha sobrinha linda, que me motiva a cada dia eu me tornar uma professor melhor e mais amável.

Ao Coordenador Prof. Cléber por sempre ter me auxiliado durante todo o processo de graduação, instruindo com muita paciência.

À minha Orientadora Profa. Dra. Valdiane Sales Araújo, por ser uma professora excepcional, motivadora e super atenciosa. Sou extremamente grato por a ter conhecido.

RESUMO

Esta monografia faz parte de uma pesquisa ampla, realizada por professores da Universidade Federal do Maranhão que tem por título “Análise de Erros em produções de estudantes do Ensino Médio em provas da OBMEP-2019 em São Luís – MA” e tem como objetivo analisar os erros cometidos por alunos nas provas de 2019 da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Embasado pela análise de conteúdo, este trabalho explora como a análise de erros pode ser utilizada como uma ferramenta pedagógica eficaz para melhorar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A pesquisa se concentra na taxonomia de uso dos erros proposta por Borasi (1996) e nas sugestões de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), propondo estratégias que podem auxiliar professores no diagnóstico e correção de equívocos comuns dos alunos. Além disso, são apresentadas recomendações práticas para integrar a análise de erros no cotidiano escolar, promovendo uma abordagem reflexiva e crítica no ensino de Matemática.

Palavras-chave: Análise de Erro. OBMEP. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This monograph is an excerpt from a research conducted by professors at the Federal University of Maranhão titled "Error Analysis in the Work of High School Students in the OBMEP-2019 Exams in São Luís – MA." Its objective is to analyze the errors made by students in the Combinatorial Analysis exams of the Brazilian Mathematics Olympiad for Public Schools (OBMEP). Based on content analysis, this work explores how error analysis can be used as an effective pedagogical tool to improve the teaching and learning process in Mathematics. The research focuses on the taxonomy of error usage proposed by Borasi (1996) and the suggestions of Ponte, Brocardo, and Oliveira (2003), proposing strategies that can help teachers diagnose and correct common student mistakes. Additionally, practical recommendations are presented to integrate error analysis into everyday school activities, promoting a reflective and critical approach to Mathematics teaching.

Keywords: Error Analysis. OBMEP. Mathematics Education.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	08
2. ENSINO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO.....	10
2.1 Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio	11
2.2 Aplicações da Análise Combinatória	12
2.3 Análise Combinatória na OBMEP.....	12
3. A ANÁLISE DE ERROS	14
3.1 Precusores da Análise de Erros na Educação Matemática	15
3.2 Alguns Exemplos de Trabalhos sobre Análise de Erros em Questões Matemáticas	19
3.3 Abordagens Construtivistas e Uso dos Erros como Ferramenta Pedagógica.....	20
3.4 Análise de Conteúdo das Respostas: Uma Visão da Metodologia Empregada	21
3.5 Etapas da Análise de Conteúdo	22
4. IMPORTÂNCIA DA ANÁLISE DE ERROS NO ENSINO	24
4.1 Metodologia de Ensino Baseada na Análise de Erros	24
4.2 Análise e Intervenção	24
4.3 Exemplos de Atividades Baseadas na Análise de Erros	24
5. A PESQUISA.....	27
5.1 Seleção da Amostra	28
5.2 Tratamento do Material.....	29
5.3 Análise de Conteúdo das Resoluções da Questão	30
5.4 A Análise quantitativa dos dados	33
5.5 Resultados e Discussões	37
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	41
REFERÊNCIAS	42
ANEXOS	

1. INTRODUÇÃO

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) se destaca como uma importante iniciativa para o fomento do interesse e da excelência em matemática entre os alunos do Ensino Fundamental e Médio em todo o Brasil. Desde sua criação, a OBMEP tem se consolidado como uma plataforma eficaz para identificar talentos, estimular o raciocínio matemático e promover a inclusão no ensino da matemática. Assim, a análise dos erros cometidos pelos alunos nas provas dessa olimpíada revela-se uma ferramenta valiosa para entender as dificuldades enfrentadas pelos estudantes e para aprimorar as estratégias de ensino e aprendizagem.

A análise de erros, conforme abordada por Borasi (1996), é fundamental para a compreensão dos processos cognitivos e das lacunas no conhecimento dos alunos. Segundo a autora, os erros podem ser vistos não apenas como falhas, mas como oportunidades para identificar deficiências conceituais e metodológicas. Neste contexto, a aplicação da taxonomia de uso dos erros proposta por Borasi e complementada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) se torna um recurso essencial para a interpretação dos resultados das provas da OBMEP. Através dessa abordagem, é possível categorizar os erros e compreender suas origens, fornecendo subsídios para intervenções pedagógicas mais eficazes.

O objetivo desta monografia é realizar uma análise detalhada dos erros presentes nas provas da OBMEP sobre o conteúdo de Análise Combinatória, com foco específico na identificação e classificação desses erros, bem como na sugestão de práticas pedagógicas para mitigar as dificuldades encontradas. O trabalho será estruturado com base em uma revisão bibliográfica aprofundada sobre a análise de erros, a taxonomia de erros e as características das provas da OBMEP. A metodologia incluirá a coleta e análise de um conjunto de provas da OBMEP, com o intuito de categorizar os erros e correlacioná-los com as dificuldades de aprendizagem dos alunos.

A relevância deste estudo reside na possibilidade de utilizar os dados obtidos para informar e melhorar as práticas pedagógicas no ensino da matemática. Compreender os padrões de erro dos alunos permite aos educadores adaptar suas estratégias de ensino e desenvolver intervenções direcionadas, aumentando a

eficácia do processo de ensino-aprendizagem e contribuindo para a formação de competências matemáticas mais sólidas.

A estrutura da monografia está organizada da seguinte forma: no segundo capítulo será feita uma breve apresentação sobre o Ensino de Matemática no Ensino Médio, Ensino de Análise Combinatória e OBMEP. No capítulo 2 fazemos um apanhado geral sobre o ensino de Matemática e a OBMEP. No capítulo 3, será apresentada uma revisão da literatura sobre a análise de erros e a taxonomia de erros. No capítulo 4, serão descritos os métodos e a abordagem utilizados para a análise das provas da OBMEP. O capítulo 5 trata da pesquisa realizada com as provas da OBMEP-2019 em 17 municípios maranhenses. Neste capítulo, abordaremos a análise dos resultados obtidos e a interpretação dos erros identificados. Por fim, serão discutidas as implicações pedagógicas dos resultados e apresentadas sugestões para a prática docente.

A importância da análise de erros no contexto da OBMEP vai além da identificação de falhas individuais; trata-se de um esforço para compreender as raízes das dificuldades enfrentadas pelos estudantes no aprendizado de matemática. Com este trabalho, espera-se contribuir para um melhor entendimento das necessidades dos alunos e para o aprimoramento contínuo das práticas educacionais no campo da matemática.

2. ENSINO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

O Ensino de Matemática no Ensino Médio tem como proposta, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, consolidar, ampliar e aprofundar as aprendizagens essenciais desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Além disso, essa proposta visa criar uma relação entre o conhecimento e a realidade do aluno. (BRASIL, 2018)

De acordo com a BNCC,

“...propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade.”

Enquanto na BNCC de Matemática do Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística), na BNCC de Matemática do Ensino Médio se dará continuidade a essas aprendizagens focando na construção de uma visão integrada da matemática aplicada à realidade, em diferentes contextos. Em consequência, tendo a realidade como referência, é preciso levar em conta a vivência cotidiana dos estudantes do Ensino Médio que são impactados constantemente pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho e etc. Assim como no Ensino Fundamental, no Ensino Médio destaca-se a importância do recurso a tecnologias digitais dando continuidade ao pensamento computacional e investigação matemática.

Diante dessas considerações a área de Matemática tem a responsabilidade de potencializar todo o conhecimento já constituído por esses alunos no Ensino Fundamental de forma que amplie o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que os novos conhecimentos devem estimular processos mais abstratos e bem elaborados.

Ainda de acordo com a BNCC,

“...isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar

que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos.”

2.1 Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio

A Análise Combinatória é um ramo fundamental da Matemática que se concentra na contagem, disposição e combinação de elementos em conjuntos finitos. Suas aplicações se estendem por diversas áreas, incluindo probabilidades, estatística, teoria dos números, e até mesmo a computação.

A história da Análise Combinatória remonta aos tempos antigos, com os primeiros registros encontrados entre os geômetras gregos. Segundo Souza (2010), as origens da Análise Combinatória estão associadas aos estudos de números figurados realizados por matemáticos da escola pitagórica. Esses primeiros esforços foram motivados pela necessidade de contar e organizar elementos de forma mais eficiente, superando as limitações da contagem direta.

No entanto, foi somente com o avanço dos estudos de probabilidade que a Análise Combinatória começou a se firmar como um campo independente. De acordo com Helena Coronha Cury (2008), os problemas combinatórios foram impulsionados pela busca por soluções em jogos de azar, onde o cálculo de probabilidades demandava uma contagem precisa e sistemática dos eventos possíveis. Leibniz, em seu tratado "Dissertatio de Arte Combinatoria", foi um dos pioneiros a tratar a Combinatória como uma disciplina formal, estabelecendo as bases para o seu desenvolvimento posterior (CURY, 2008).

A inclusão da Análise Combinatória no currículo do ensino médio oferece aos estudantes ferramentas valiosas para desenvolverem habilidades de resolução de problemas e pensamento analítico. Souza (2010) destaca que o ensino de Análise Combinatória deve ser contextualizado, utilizando-se de problemas do cotidiano que estimulem o raciocínio lógico dos alunos.

Helena Coronha Cury (2008) sugere que a abordagem didática da Análise Combinatória deve ser prática e interativa, incorporando atividades que desafiem os alunos a pensar criativamente e a aplicar os conceitos em situações reais. Jogos, problemas de lógica e situações que envolvam decisões estratégicas são exemplos de contextos nos quais a Análise Combinatória pode ser aplicada efetivamente.

2.2 Aplicações da Análise Combinatória

A Análise Combinatória tem aplicações práticas em várias áreas, incluindo:

- **Teoria das Probabilidades:** Calculando a probabilidade de eventos complexos em jogos e apostas.
- **Informática:** Otimização de algoritmos e análise de dados.
- **Genética:** Estudo de combinações genéticas e variações.
- **Pesquisa Operacional:** Planejamento de recursos e logística.

A Análise Combinatória é uma disciplina rica e multifacetada, essencial para a matemática e suas aplicações práticas. Com uma abordagem pedagógica bem estruturada, ela pode se tornar uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento do pensamento crítico e analítico dos alunos. Conforme destacam Souza (2010) e Cury (2008), o ensino eficaz da Análise Combinatória requer uma combinação de fundamentos teóricos sólidos e aplicações práticas envolventes, promovendo um aprendizado significativo e duradouro.

2.3 A OBMEP e a Análise Combinatória

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um importante concurso que visa estimular o interesse dos alunos pela Matemática e promover a melhoria da educação matemática nas escolas públicas do Brasil. Fundada em 2005, a OBMEP tem como objetivo identificar talentos, promover a inclusão e fornecer um diagnóstico da educação matemática em diferentes níveis de ensino. Entre os vários temas abordados nas provas, a Análise Combinatória se destaca como um dos tópicos que frequentemente gera desafios para os participantes. Este trabalho visa realizar uma análise crítica dos erros mais comuns cometidos pelos alunos, com o intuito de oferecer insights para a melhoria do ensino e do aprendizado desta área da Matemática.

Contexto e Objetivos

A OBMEP é organizada pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) em colaboração com outras instituições acadêmicas e educacionais. O concurso é dividido em três etapas: a primeira é uma prova de múltipla escolha aplicada em sala de aula; a segunda etapa consiste em uma prova discursiva, e a

terceira etapa é um evento presencial para os alunos classificados, onde são realizadas novas provas e atividades complementares.

Os principais objetivos da OBMEP incluem:

- **Estimular o estudo da Matemática:** Incentivar o desenvolvimento de habilidades matemáticas e promover o interesse pela disciplina.
- **Identificar talentos:** Descobrir e apoiar alunos com potencial para a Matemática, possibilitando o ingresso em programas de formação avançada.
- **Promover a inclusão:** Oferecer oportunidades de aprendizagem para alunos de escolas públicas, contribuindo para a equidade educacional.
- **Avaliar o ensino:** Fornecer uma análise do desempenho dos alunos, ajudando na avaliação da qualidade do ensino de Matemática nas escolas.

A Análise Combinatória é um campo da Matemática que estuda as maneiras de contar e combinar elementos de um conjunto, sendo essencial para resolver problemas relacionados a contagem e probabilidade. Nas provas da OBMEP, questões de Análise Combinatória frequentemente envolvem conceitos como permutações, combinações, princípios de contagem e arranjos. Estas questões podem variar de problemas simples a desafios mais complexos, exigindo dos alunos um bom domínio dos conceitos e técnicas. Geralmente, a sexta questão da prova do Nível 3 da segunda fase da OBMEP envolve conceitos de Análise Combinatória.

A OBMEP desempenha um papel crucial no estímulo ao estudo da Matemática e na identificação de talentos em escolas públicas. A Análise Combinatória é uma área desafiadora que, quando bem compreendida e aplicada, pode ser uma fonte de sucesso nas provas. Com a análise cuidadosa dos erros cometidos pelos alunos e a adoção de estratégias efetivas, é possível melhorar o ensino e a aprendizagem dessa disciplina, contribuindo para o sucesso dos participantes na OBMEP e no desenvolvimento de suas habilidades matemáticas.

3. A ANÁLISE DE ERROS

Este capítulo é baseado em Cury (2008), todas as referências citadas aqui podem ser consultadas no texto original.

A análise de erros em Educação Matemática emerge como uma ferramenta indispensável, tanto para a pesquisa quanto para o ensino, proporcionando uma compreensão mais profunda do processo cognitivo dos estudantes. Como mencionado por Cury (1988), essa prática vai além de simplesmente identificar erros e acertos; ela se transforma em uma metodologia de ensino capaz de promover uma aprendizagem ativa. Ao empregar a análise de erros como estratégia pedagógica, o professor não apenas aponta falhas, mas utiliza essas ocorrências como um "trampolim para a aprendizagem" (BORASI, 1985), incentivando os alunos a refletirem sobre suas respostas e, assim, construírem conhecimento de maneira autônoma.

No contexto da sala de aula, essa metodologia de análise não deve ser um evento isolado, mas sim integrada aos planos pedagógicos das instituições e dos docentes. Ela permite que o ensino vá além da simples transmissão de conteúdos, abrindo espaço para o desenvolvimento de uma prática reflexiva, tanto por parte do professor quanto dos estudantes. De fato, a análise das produções escritas pelos alunos oferece uma oportunidade ímpar para entender as concepções matemáticas que guiam suas respostas, identificando não apenas o que foi compreendido de forma correta, mas também os obstáculos epistemológicos que podem estar impedindo uma aprendizagem mais aprofundada.

Entretanto, essa prática traz consigo desafios que tocam aspectos delicados da prática docente. Cury (1988) aponta que a correção de erros, muitas vezes, é vivida pelo professor como um momento de “pequena crucificação” (CHEVALLARD & FELDMANN, 1986), um processo que pode ser emocionalmente desgastante tanto para o docente quanto para o aluno. Isso porque o erro, ao ser exposto, toca em questões que transcendem o domínio cognitivo, envolvendo sentimentos de aprovação ou rejeição e trazendo à tona memórias de experiências anteriores com a crítica, que podem ter sido positivas ou negativas. Além disso, questões sociais e econômicas são frequentemente associadas à reprovação, criando um ambiente de tensão em torno do erro.

Apesar desses desafios, a análise de erros oferece um campo fértil para o desenvolvimento de práticas pedagógicas que valorizam a aprendizagem como um processo contínuo e não como um fim em si mesmo. Ao adotar uma postura investigativa frente às produções dos alunos, o professor pode reorientar o processo de ensino, utilizando o erro como uma ferramenta para promover o questionamento e a reflexão crítica. Essa abordagem permite que o estudante se aproprie do seu processo de aprendizagem, vendo o erro não como uma falha, mas como uma etapa natural do desenvolvimento de suas habilidades matemáticas.

Cury (1988) também destaca a relevância de fundamentar essa prática em uma base teórica sólida. Em sua própria trajetória de pesquisa, ele enfrentou dificuldades para encontrar referências que abordassem a análise de erros em Educação Matemática, especialmente durante os anos 1980, quando as facilidades de acesso à informação eram muito mais limitadas do que hoje. Através de suas investigações, com influências de estudiosos como Raffaella Borasi, Cury construiu um referencial que o permitiu aprofundar-se no estudo dos erros em áreas como Geometria Plana e Cálculo Diferencial e Integral. Sua pesquisa, ao longo de mais de duas décadas, resultou em contribuições significativas para o campo, consolidando a análise de erros como uma metodologia potente para o ensino e a pesquisa em Matemática.

Em síntese, a análise de erros proporciona uma compreensão mais ampla e integrada do processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Não se trata apenas de corrigir equívocos, mas de explorar as concepções que orientam as respostas dos alunos, utilizando essas descobertas para promover uma aprendizagem mais significativa. Essa metodologia permite ao professor agir como mediador do conhecimento, ajudando os estudantes a construir suas próprias estratégias e a compreender a Matemática de forma mais profunda. Assim, a análise de erros se torna um componente essencial na formação de uma prática educativa mais consciente e reflexiva.

3.1 Precursores da Análise de Erros na Educação Matemática

A análise de erros na educação matemática é um campo que explora o papel dos erros dos alunos como uma oportunidade para promover o aprendizado e melhorar as práticas pedagógicas. A compreensão de como e por que os erros

ocorrem, e como eles podem ser usados para aprimorar o processo de ensino-aprendizagem, foi profundamente influenciada por vários estudiosos ao longo do tempo. Entre esses precursores estão Edward Thorndike, Vadim Krutetskii, Allen Newell e Herbert Simon, e Raffaella Borasi. Cada um trouxe perspectivas distintas que ajudaram a moldar o entendimento moderno sobre a importância dos erros na aprendizagem matemática. Este texto explora detalhadamente as contribuições desses pesquisadores, destacando como suas ideias e metodologias influenciaram o campo da análise de erros.

Edward Thorndike: O Comportamentalismo e a Lei do Efeito

Edward Thorndike, um dos pioneiros da psicologia educacional, fez importantes contribuições para a compreensão da aprendizagem e do papel dos erros no processo educativo. No início do século XX, Thorndike desenvolveu suas teorias baseadas na psicologia comportamentalista, que se concentrava em como os comportamentos são adquiridos e mantidos através de reforços e punições.

Thorndike conduziu experimentos com animais, como gatos em caixas-problema, para estudar a aprendizagem por tentativa e erro. Esses experimentos demonstraram que os animais aprendiam a resolver problemas progressivamente, através do processo de tentativas e ajustes, o que Thorndike chamou de "lei do efeito". De acordo com essa lei, comportamentos que resultam em consequências satisfatórias são mais propensos a serem repetidos, enquanto aqueles que resultam em consequências insatisfatórias tendem a desaparecer.

Na educação matemática, a abordagem de Thorndike enfatizou a importância da prática repetitiva e do reforço positivo para consolidar o conhecimento. No entanto, sua visão era criticada por focar excessivamente na prática e na repetição sem considerar os processos cognitivos subjacentes que levam aos erros. Thorndike acreditava que os erros eram oportunidades para reforçar comportamentos corretos, mas não se aprofundou na análise qualitativa dos processos que levam à formação de erros.

Vadim Krutetskii: Estrutura das Habilidades Matemáticas

Vadim Krutetskii, psicólogo russo, fez uma contribuição significativa para o campo da análise de erros ao desafiar as abordagens tradicionais da psicologia

educacional. Em seu trabalho "The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren", publicado em 1976, Krutetskii criticou a dependência excessiva de testes psicométricos para avaliar habilidades matemáticas. Ele argumentava que esses testes não capturavam adequadamente o nível potencial de desempenho dos alunos ou os processos mentais envolvidos na resolução de problemas.

Krutetskii introduziu uma abordagem qualitativa para a análise das habilidades matemáticas, focando na estrutura e formação dessas habilidades. Ele propôs que, em vez de avaliar os alunos apenas com base nos resultados dos testes, os educadores deveriam analisar detalhadamente os processos mentais envolvidos na resolução de problemas. Krutetskii destacou a importância de compreender como os alunos pensam e como eles cometem erros, em vez de simplesmente corrigir as respostas incorretas.

O trabalho de Krutetskii ajudou a estabelecer a importância da análise do processo de resolução de problemas na educação matemática. Ele enfatizou que os erros podem fornecer informações valiosas sobre a compreensão dos alunos e que uma análise detalhada desses erros pode ajudar a melhorar o ensino da matemática. Suas ideias influenciaram significativamente a forma como os educadores e pesquisadores abordam a análise de erros na educação matemática, promovendo uma visão mais profunda e abrangente do processo de aprendizagem.

Allen Newell e Herbert Simon: Processamento da Informação e Análise de Protocolos

Allen Newell e Herbert Simon foram pioneiros na psicologia cognitiva e no estudo do processamento da informação. Em sua obra "Human Problem Solving", publicada em 1972, eles exploraram como os seres humanos processam informações e resolvem problemas, utilizando modelos computacionais para simular o comportamento humano. Essa abordagem inovadora ajudou a avançar a compreensão sobre a resolução de problemas e a análise de erros.

Newell e Simon desenvolveram o programa Logic Theorist (LT), um dos primeiros programas de inteligência artificial, para simular a resolução de problemas matemáticos. O LT foi alimentado com axiomas dos Principia Mathematica e foi capaz de provar uma série de teoremas. Esse trabalho pioneiro demonstrou que o processamento da informação poderia ser modelado computacionalmente e que as

técnicas computacionais poderiam ser usadas para analisar o comportamento humano na resolução de problemas.

Uma das contribuições mais importantes de Newell e Simon foi a introdução da técnica de análise de protocolos verbais. Nessa técnica, os sujeitos verbalizam seus pensamentos enquanto resolvem problemas, e esses pensamentos são gravados e transcritos para análise posterior. Os pesquisadores então codificam e analisam os protocolos para entender o processo cognitivo envolvido na resolução de problemas e identificar padrões de erros.

A análise de protocolos verbais permitiu uma compreensão mais detalhada dos processos mentais envolvidos na resolução de problemas e na origem dos erros. Essa abordagem influenciou a psicologia cognitiva e a educação matemática, fornecendo ferramentas para investigar como os alunos pensam e como os erros podem ser usados para melhorar o ensino.

Raffaella Borasi: A Taxonomia do Uso dos Erros

Raffaella Borasi, na década de 1980 e 1990, desenvolveu uma abordagem inovadora para o uso dos erros na educação matemática. Influenciada por filósofos e historiadores da ciência como Lakatos e Kuhn, Borasi desafiou a abordagem tradicional de tratar os erros como simples falhas a serem corrigidas. Ela argumentou que os erros poderiam ser uma fonte valiosa de aprendizagem e reflexão.

Borasi propôs atividades didáticas que utilizam os erros como uma oportunidade para explorar conceitos matemáticos mais profundamente. Em vez de simplesmente corrigir erros, ela sugeriu que os professores deveriam incentivar os alunos a investigar e refletir sobre seus próprios erros. Por exemplo, se um aluno comete um erro ao somar frações, o professor pode pedir que o aluno explore se há outras frações para as quais a regra incorreta ainda se aplica.

Borasi introduziu a ideia de que os erros podem ser usados como "trampolins para a aprendizagem". Em vez de ver os erros como obstáculos, ela os considerou como pontos de partida para a exploração e a descoberta. Ao questionar e investigar erros, os alunos têm a oportunidade de aprofundar sua compreensão dos conceitos matemáticos e desenvolver habilidades de resolução de problemas mais robustas.

O trabalho de Borasi influenciou a forma como os erros são abordados na sala de aula, promovendo uma visão mais construtivista e reflexiva. Sua abordagem enfatiza a importância de usar os erros como oportunidades de aprendizado, ajudando os alunos a desenvolver uma compreensão mais profunda e criativa da matemática.

Os precursores da análise de erros, incluindo Edward Thorndike, Vadim Krutetskii, Allen Newell e Herbert Simon, e Raffaella Borasi, desempenharam papéis cruciais na formação do campo da educação matemática. Cada um trouxe contribuições valiosas que ajudaram a moldar a compreensão moderna sobre a importância dos erros no processo de ensino-aprendizagem. Enquanto Thorndike enfatizou a prática e o reforço positivo, Krutetskii destacou a importância da análise qualitativa dos processos mentais. Newell e Simon introduziram técnicas para examinar detalhadamente os processos cognitivos, e Borasi promoveu uma abordagem construtivista que usa os erros como oportunidades para explorar e aprofundar o conhecimento. Juntas, essas contribuições fornecem uma base sólida para práticas pedagógicas mais eficazes e uma compreensão mais rica do papel dos erros na aprendizagem matemática.

3.2 Alguns Exemplos de Trabalhos sobre Análise de Erros em Questões Matemáticas

Os primeiros estudos na área de análise de erros frequentemente se concentram na contagem e classificação de erros cometidos por alunos em tarefas matemáticas. Smith (1940) foi um dos pioneiros nesse campo, investigando erros em exercícios de geometria, desde construções até demonstrações. Um erro comum identificado por Smith era a suposição incorreta de congruência de ângulos com base apenas na aparência da figura. Este tipo de erro é frequentemente encontrado em trabalhos subsequentes, como os de Movshovitz-Hadar e colaboradores (1986), que também analisaram erros semelhantes em problemas de geometria.

Hutcherson (1975), em sua tese de doutorado, ampliou a pesquisa ao reaplicar testes de 1927 e incorporar o método de "pensar em voz alta". Este método, que continua a ser amplamente utilizado, permite aos pesquisadores captar o processo cognitivo dos alunos enquanto resolvem problemas, proporcionando uma visão mais detalhada sobre a natureza dos erros cometidos.

Outros pesquisadores, como Kent (1978), optaram por uma abordagem mais qualitativa, focando em discutir com os alunos as razões por trás dos erros, em vez de simplesmente quantificá-los. Esse tipo de análise busca entender o contexto e as razões subjacentes para os erros, proporcionando uma visão mais profunda sobre o pensamento dos alunos. Movshovitz-Hadar, Inbar e Zaslowsky (1986) também seguiram uma abordagem semelhante, classificando erros em demonstrações de geometria e considerando como a formulação das questões pelos professores pode influenciar os erros dos alunos.

Schechter (2006) é outro exemplo de pesquisador que se dedicou à coleta e classificação de erros, apresentando-os em sua página na internet. A análise de Schechter ajudou a identificar padrões de erro em diferentes tipos de problemas matemáticos e forneceu uma base para futuras investigações na área.

Radatz (1979) fez uma importante contribuição para a área ao realizar uma revisão abrangente das classificações de erros existentes. Seu trabalho, complementado por uma publicação em 1980, sintetizou a literatura existente e forneceu uma base sólida para a pesquisa subsequente em análise de erros. Trabalhos de outros pesquisadores, como Clements (1980), Sánchez (1990), Mancera (1998) e Engler et al. (2004), também se dedicaram a revisar e discutir classificações de erros, muitas vezes focando em áreas específicas como aritmética, álgebra, geometria e cálculo.

3.3 Abordagens Construtivistas e Uso dos Erros como Ferramenta Pedagógica

A abordagem construtivista na análise de erros, como proposto por Borasi (1985, 1989), enfatiza o uso dos erros como uma oportunidade para a construção do conhecimento. Borasi argumenta que, em vez de simplesmente corrigir erros, os professores devem explorar os erros como uma ferramenta para promover a compreensão e o raciocínio dos alunos. Ela sugere que, ao investigar os erros, os alunos podem desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos e melhorar suas habilidades de resolução de problemas.

Trabalhos como o de Bessot (1980), que investiga a construção da noção de número natural por crianças de 6 a 7 anos, e Galletti e colaboradores (1989), que exploram como erros ocultos podem levar a conclusões contraditórias, são exemplos

de como a análise de erros pode ser usada para desenvolver uma atitude mental favorável à crítica e à criatividade.

Os estudos sobre análise de erros em questões matemáticas oferecem uma rica fonte de informações sobre como os alunos enfrentam e resolvem problemas matemáticos. Desde a contagem e classificação de erros até abordagens qualitativas e construtivistas, esses trabalhos ajudam a entender as dificuldades dos alunos e a melhorar as práticas de ensino. Ao utilizar os erros como uma ferramenta para promover a compreensão e o raciocínio, os educadores podem criar ambientes de aprendizagem mais eficazes e apoiar o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos.

3.4 Análise de Conteúdo das Respostas: Uma Visão da Metodologia Empregada

No cenário educacional, especialmente nas ciências exatas, a análise das respostas dos alunos a questões de matemática se revela uma ferramenta essencial para entender a compreensão e os desafios enfrentados pelos estudantes. A metodologia de análise de conteúdo oferece uma abordagem sistemática para essa investigação, permitindo insights profundos sobre a construção do conhecimento matemático pelos alunos. Neste capítulo, exploraremos as etapas e princípios da análise de conteúdo, conforme descrito por diversos autores e suas aplicações na análise de respostas matemáticas.

A análise de conteúdo é uma metodologia que visa examinar a comunicação escrita ou verbal de forma sistemática, com o intuito de extrair indicadores que reflitam as condições de produção e recepção das mensagens (Bardin, 1979). Esse método surgiu inicialmente para analisar artigos de jornais e foi intensificado durante as Grandes Guerras Mundiais para estudar propaganda. A técnica tem evoluído e é agora empregada em diversos campos, incluindo a educação matemática.

Laurence Bardin (1979) define análise de conteúdo como um conjunto de técnicas que busca obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos, descrições do conteúdo das mensagens e inferências sobre as condições de sua produção e recepção. Essa abordagem é fundamental para entender como os alunos constroem seu conhecimento matemático e identificar áreas de dificuldade e erro

3.5 Etapas da Análise de Conteúdo

A análise de conteúdo, conforme Bardin (1979), pode ser dividida em três etapas principais: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

1. Pré-Análise

A pré-análise envolve a organização inicial do material. Esta etapa inclui a escolha dos documentos a serem analisados, a formulação de hipóteses e a definição dos objetivos da análise. No contexto educacional, isso pode significar selecionar respostas de provas ou dissertações dos alunos, definir o que será analisado e estabelecer as perguntas de pesquisa. A leitura flutuante é utilizada para familiarizar-se com o material, possibilitando uma imersão inicial que guia a formulação das hipóteses e o delineamento do corpus, que é o conjunto de textos que serão analisados.

Moraes (2003) destaca que os textos não carregam um significado fixo, mas são significantes que exigem interpretação com base nas teorias e perspectivas do pesquisador. Isso é particularmente relevante em análises de respostas a questões matemáticas, onde a compreensão do aluno pode variar e requer uma interpretação cuidadosa.

2. Exploração do Material

Na fase de exploração do material, realiza-se a unitarização e a categorização. A unitarização refere-se à definição das unidades de análise, que podem ser palavras, frases ou documentos inteiros. Essa etapa envolve uma releitura detalhada do material, onde o pesquisador identifica e isola unidades significativas.

A categorização, por sua vez, envolve o agrupamento dessas unidades em categorias que representam temas ou padrões comuns. Bardin (1979) explica que a categorização visa fornecer uma representação simplificada dos dados brutos, permitindo uma análise mais clara e organizada.

Em uma pesquisa sobre respostas de alunos em matemática, isso pode envolver a identificação de tipos comuns de erros ou estratégias de resolução. Por exemplo, as respostas podem ser categorizadas de acordo com erros conceituais, erros de cálculo ou falhas na aplicação de fórmulas.

3. Tratamento dos Resultados

A última etapa da análise de conteúdo é o tratamento dos resultados, que inclui a descrição das categorias e a interpretação dos dados. Essa etapa pode envolver a apresentação dos dados em tabelas ou gráficos, bem como a realização de análises estatísticas para identificar padrões e tendências.

Triviños (1987) sugere que, além de analisar o conteúdo manifesto dos documentos, é essencial explorar o conteúdo latente, isto é, o significado subjacente das respostas dos alunos. A interpretação deve ir além da simples contagem de erros, buscando entender como os alunos chegaram a determinadas conclusões e o que isso revela sobre seu entendimento matemático.

4. IMPORTÂNCIA DA ANÁLISE DE ERROS NO ENSINO

A análise de erros, quando aplicada no contexto do ensino de Matemática, vai além da simples correção de provas. Ela se torna uma metodologia de ensino que pode transformar falhas em oportunidades de aprendizado. Borasi (1996) sugere que a análise de erros deve ser utilizada para descobrir e investigar, promovendo um ambiente de aprendizagem que valorize a exploração e a investigação. Este enfoque permite que os alunos não apenas corrijam suas respostas erradas, mas também compreendam os processos que levaram aos erros, facilitando a construção de conhecimento.

4.1. Metodologia de Ensino Baseada na Análise de Erros

Inspirados por Borasi (1996), os professores podem criar ambientes de aprendizagem que incentivem os alunos a explorar e investigar suas próprias ideias e soluções. Em vez de adotar uma abordagem puramente corretiva, os professores podem fomentar atividades que permitam aos alunos questionar e investigar as razões por trás de seus erros. Por exemplo, ao analisar uma resposta incorreta em sala de aula, o professor pode guiar os alunos para que reflitam sobre os conceitos envolvidos e testem diferentes abordagens para resolver o problema.

4.2. Análise e Intervenção

Para utilizar a análise de erros como uma estratégia pedagógica efetiva, é crucial que o professor saiba como interpretar e intervir de forma apropriada. Em situações em que um erro é identificado, o professor deve determinar se a dificuldade é comum entre vários alunos ou se é uma questão pontual. Caso a dificuldade seja generalizada, o professor pode introduzir atividades de grupo que abordem o conceito de forma mais aprofundada. Quando o erro é isolado, intervenções individuais podem ser mais apropriadas, oferecendo suporte personalizado para o aluno.

4.3. Exemplos de Atividades Baseadas na Análise de Erros

1. Atividades de Grupo

Quando um erro é identificado como um padrão comum entre os alunos, atividades de grupo podem ser uma excelente forma de promover a investigação colaborativa. Por exemplo, se vários alunos cometem o mesmo erro em uma operação matemática, o professor pode criar uma atividade onde os alunos trabalham juntos

para identificar o erro comum e encontrar a solução correta. Esse tipo de atividade não só permite que os alunos discutam e corrijam o erro, mas também fortalece a compreensão coletiva do conceito.

2. Atividades de Reflexão Individual

Para erros que são mais específicos de um aluno, atividades de reflexão individual podem ser eficazes. O professor pode pedir ao aluno que revise a resposta incorreta e escreva um breve ensaio explicando o raciocínio por trás de sua resposta original e o que ele aprendeu ao revisá-la. Essa atividade promove a autorreflexão e ajuda o aluno a internalizar o conceito de forma mais profunda.

A utilização da análise de erros no ensino de Matemática deve ser encarada como uma oportunidade para promover um aprendizado mais significativo e engajante. Ao transformar erros em ferramentas de investigação e descoberta, os professores podem criar ambientes de aprendizagem mais dinâmicos e interativos. Em vez de ver os erros apenas como falhas a serem corrigidas, é fundamental reconhecer o potencial deles para estimular a curiosidade e o entendimento dos alunos. Através de práticas pedagógicas baseadas na análise de erros, é possível não apenas melhorar o desempenho acadêmico dos alunos, mas também fomentar uma atitude positiva e investigativa em relação ao aprendizado de Matemática.

3. Exemplo de atividade aplicada em sala de aula do 8º ano do Ensino Fundamental II

Como professor de matemática, do 8º ano do Ensino Fundamental II, de uma escola particular de São Luís – MA, me deparei com uma situação interessante. Observei que muitos alunos cometiam alguns erros comuns quando se deparavam com expressões que envolviam o uso de frações, desde a soma até multiplicação e divisão. Com isso, vi uma oportunidade de aplicar a Análise de Erros como metodologia para usar estes erros como uma ferramenta de aprimoramento da aprendizagem dos alunos.

Diante disso, elaborei uma questão com quatro itens envolvendo a soma, multiplicação e divisão de frações conforme descrito abaixo.

Questão – Resolva as expressões abaixo descrevendo o passo a passo da resolução:

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2}$

b) $\frac{2}{3} + \frac{5}{5}$

d) $\frac{2}{4} \div \frac{1}{2}$

Os quatro itens acima foram selecionados cuidadosamente de acordo com as observações dos erros que os alunos cometiam ao longo de minhas aulas. No item a coloquei a soma de duas frações com denominadores iguais, no item b, a soma de duas frações com números primos nos denominadores, no item c, uma multiplicação de duas frações com denominadores iguais, e por fim, no item d, a divisão de duas frações. Vale ressaltar que todos receberam uma página com instruções de como resolver cada item passo a passo.

Como o processo ainda está em andamento, não tenho o levantamento dos resultados. Entretanto, este pode ser um exemplo a ser aplicado em sala de aula para utilizar-se da Análise de Erros como metodologia para o ensino-aprendizagem de matemática. Além disso, esta metodologia também pode ser estendida para a docência no Ensino Superior e demais níveis de ensino assim como em outras disciplinas não se limitando apenas à matemática.

5. A PESQUISA

Esta pesquisa é um recorte de uma pesquisa mais ampla que pretende investigar as dificuldades de ensino e aprendizagem da Matemática através da análise de erros cometidos por estudantes do Ensino Médio, no Estado do Maranhão, na prova da 15ª edição da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas-OBMEP, (ARAUJO et al) realizada pelos professores, Dr. Domício Magalhães Maciel, Drª Valdiane Sales Araújo, Drª Renata de Farias Limeira Carvalho e MS Rosani Brune de Almeida Dias. Apresentam-se os resultados da pesquisa referentes às cidades de Apicum-Açu, Bacuri, Bequimão, Cedral, Central do Maranhão, Cururupu, Guimarães, Lagoa Grande do Maranhão, Lima Campos, Marajá do Sena, Matões, Mirinzal, Olho D'água das Cunhãs, Paulo Ramos, Peri Mirim, Pinheiro e Santa Helena, Questão 6. Trata-se de uma pesquisa quali-quantitativa, tendo como base a Análise de Erros em Educação Matemática.

Na perspectiva de Cury (2019), a análise dos erros cometidos em produções de estudantes não deve ser vista apenas como exercício. O estudo dos erros em Matemática deve ser encarado de maneira a perceber como os estudantes pensam acerca dos conteúdos matemáticos que lhe são apresentados em sala de aula, como recebem determinadas informações e a capacidade que têm de produzir resultados através dessas informações. A partir dessa análise, professores, pedagogos e toda a comunidade acadêmica podem produzir formas de ensinar que sejam mais efetivas, além de reformular conceitos e metodologias de Ensino para novas gerações.

Para realização deste trabalho cujo objetivo é analisar os erros cometidos por estudantes do Ensino Médio, no Estado do Maranhão, na prova da 15ª edição da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP (IMPA, 2019), contou-se com a colaboração de professores(as) pesquisadores(as) do Departamento de Matemática da UFMA e coordenadores regionais da OBMEP do Estado do Maranhão.

Para contribuir com os processos de Ensino-Aprendizagem-Avaliação, no contexto da Análise de Erros (Cury, 2019), este trabalho apresenta alguns resultados de uma pesquisa sobre o desempenho dos estudantes nas provas da segunda fase da olimpíada realizada em 2019, direcionada aos alunos do Ensino Médio, Nível 3, pela classificação da OBMEP.

Para atingir os objetivos propostos pelo projeto, foram utilizadas, como material de investigação, as provas do Nível 3 da segunda fase da OBMEP, realizadas em 2019, por estudantes do Ensino Médio do Maranhão. Dessas provas foram selecionadas três questões: Questão 2, Questão 4 e Questão 6 (ARAUJO, et al., 2024). Todavia este trabalho irá focar apenas na Questão 6. A escolha dessa questão tem relação com o conteúdo de Análise Combinatória e sua importância para a formação do estudante do Ensino Médio.

O próximo passo para a realização do trabalho foi determinar os critérios de seleção das provas que seriam incluídas no estudo. Para isso, ocorreram várias reuniões entre os pesquisadores até que se chegasse a um acordo. Ficou decidido, então, que a pesquisa seria dividida em duas etapas: na primeira, seriam analisadas apenas as provas da capital, São Luís, e, em um segundo momento, seriam avaliadas as provas dos demais municípios. Sendo as provas de alguns municípios do Maranhão o objetivo deste trabalho de conclusão de curso.

Abaixo, mostrarei como foi a determinação da amostra retirada do universo de provas aplicadas na Olimpíada da OBMEP.

5.1 Seleção da Amostra

Durante o processo de construção da amostra representativa para o estado do Maranhão, foi considerado o número de municípios onde as provas foram aplicadas. O Maranhão possui 217 municípios (IBGE, 2022). Entre eles, 204 foram identificados como participantes da segunda fase da olimpíada, pois alguns municípios não enviaram alunos para essa etapa. A partir desses 204 municípios, foi possível calcular o total de provas aplicadas, chegando ao número de 5.287. Com base nesse dado populacional, foi possível determinar o tamanho da amostra necessária para o estudo.

Para o cálculo da amostragem, utilizamos o total de 5.287 provas realizadas em todo o estado, considerando que apenas 204 dos 217 municípios participaram, ou seja, 13 municípios não contaram com a participação de alunos na OBMEP. Assim, considerando uma população de 5.287 provas, um erro amostral de 2%, um nível de confiança de 95% para determinar o valor de z , e uma proporção de 0,5, obtivemos o tamanho da amostra (n).

$$n = \frac{\frac{z^2 \cdot p(1-p)}{e^2}}{1 + \left(\frac{z^2 \cdot p(1-p)}{e^2 N} \right)} = 1652$$

Após o processo de estratificação, o número total de municípios cujas provas foram escolhidas para análise foi de 199. A diminuição ocorreu porque, em alguns municípios, apenas uma prova foi aplicada. Com o número final estabelecido, a amostra foi coletada seguindo este critério: as provas eram selecionadas a cada três exemplares, e o ponto de partida da coleta poderia ser aleatório, ou seja:

- Selecione a primeira avaliação e escolha o restante a cada 3;
- Selecione a segunda prova e escolha uma a cada três;
- Ou seja, o critério de início pode ser definido pela pessoa que irá selecionar. O importante é que se escolha uma prova a cada 3, a partir da primeira seleção.

5.2 Tratamento do Material

Depois de selecionadas as provas da amostra, estas foram digitalizadas para que pudessem ser analisadas pelos componentes de cada grupo.

Após a escolha da amostra e o começo da pesquisa, enfrentamos uma nova dificuldade: o tempo. Para conseguirmos examinar todo o material disponível, percebemos que precisaríamos de mais tempo do que inicialmente previsto. Diante disso, optamos por dividir os municípios conforme a divisão sugerida pela Secretaria de Educação do Estado (SEDUC). Vale ressaltar que o foco deste trabalho de conclusão de curso está na Análise de Erros das provas dos demais Municípios do Estado do Maranhão já citados.

Ao prosseguir o trabalho proposto, selecionou-se 17 municípios de acordo com as Unidades Regionais de Educação (URE) e foi feita a análise das provas de cada cidade. O quadro 1 mostra os municípios e a quantidade de provas analisadas neste estudo.

Quadro 1: Quantidade de provas por municípios e abreviação.

Cidades	Abreviação	Provas
Apicum-Açu	APC-6	9
Bacuri	BC-6	10
Bequimão	BE-6	7

Cedral	CD-6	7
Central do Maranhão	CLM-6	4
Cururupu	CU-6	14
Guimarães	GU-6	2
Lagoa Grande do Maranhão	LGM-6	4
Lima Campos	LC-6	3
Marajá do Sena	MS-6	2
Matões	MT-6	6
Mirinzal	MIR-6	2
Olho D'água das Cunhãs	ODC-6	7
Paulo Ramos	PR-6	2
Peri Mirim	PM-6	6
Pinheiro	PI-6	22
Santa Helena	SH-6	10
Total de Provas		117

Fonte: O autor

Dessa forma foram analisadas as provas de 17 municípios, somando o total de 117 provas, num total de 234 questões.

5.3 Análise de Conteúdo das Resoluções da Questão 6

Em relação à Questão 6, seguem abaixo os enunciados dos itens A e B, que geraram as situações práticas 1 e 2, conforme ilustrado nas figuras 1 e 2.

Figura 1 – Questão 6 – item A

6. Seis livros, numerados de 1 a 6, estão inicialmente distribuídos entre seis pessoas A, B, C, D, E e F, respectivamente. Cada uma delas pode trocar seu livro com o de outra pessoa uma única vez por dia. A tabela abaixo mostra um exemplo de possíveis trocas de livros entre as pessoas em dois dias. No 1º dia, as pessoas A e D, bem como B e E, trocaram livros entre si, e C e F não trocaram seus livros. No 2º dia, somente A e C trocaram livros entre si.

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia	4	5	3	1	2	6
Após o 2º dia	3	5	4	1	2	6

Trocas: A ↔ D e B ↔ E
Trocas: A ↔ C

Observe que, após o 2º dia, ocorreu a seguinte distribuição de livros:

- o livro que estava com A ficou com D, o livro que estava com D ficou com C, e o livro que estava com C ficou com A;
- o livro que estava com B ficou com E, e o livro que estava com E ficou com B;
- o livro que estava com F ficou com ele mesmo.

a) Complete a tabela abaixo de acordo com as trocas indicadas:

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia						
Após o 2º dia						

Trocas: B ↔ D
Trocas: A ↔ B e C ↔ E



Fonte: OBMEP (2019).

Figura 2 – Questão 6 – item B

b) Indique uma maneira de fazer as trocas para chegar na distribuição após o 2º dia indicada na tabela abaixo.

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia						
Após o 2º dia	6	1	2	3	4	5

Trocas: _____
Trocas: _____



Fonte: OBMEP (2019)

Na segunda fase, de exploração do material coletado, seguindo o método de Análise de Conteúdo (Bardin, 2016), foram estabelecidas as Unidades de Contexto (UC), que refletem as manifestações dos participantes da amostra ao responderem às questões propostas. Neste estudo, essas unidades são apresentadas por meio de imagens das respostas dos respondentes, acompanhadas por uma descrição correspondente. A partir das UC, foram formadas as Unidades de Registro (UR), que representam a interpretação das respostas, identificando os erros cometidos.

Dessa forma, tanto as UC quanto as UR foram geradas com base nas situações práticas definidas, recebendo uma codificação específica. Por exemplo: UCA1 (primeira Unidade de Contexto criada, relacionada ao item A). Da mesma maneira, as UR foram sendo desenvolvidas conforme a criação das UC.

Cada pesquisador designado para analisar a Questão 6 elaborou uma lista de Unidades de Contexto (UC) e Unidades de Registro (UR) com base nas respostas

fornecidas pelos estudantes. Durante essa fase da pesquisa, foram realizadas várias reuniões para revisar e padronizar as UC e UR desenvolvidas por cada pesquisador. Após a criação de um "banco de dados", esses dados foram utilizados para analisar as provas dos municípios selecionados.

Assim, foram definidas as seguintes URs, conforme apresentados nos quadros subsequentes, referentes à Questão 6. Vale destacar que, para os fins desta análise, serão apresentadas apenas as UC mais frequentes, que formaram a base para a categorização a ser interpretada posteriormente.

Quadro 1 – Unidades de Registro do item A

URA	UNIDADE DE REGISTRO
URA1	Passos da resolução executam trocas sugeridas pela questão e outras não.
URA2	O enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução.
URA3	Execução de trocas não sugeridas.
URA4	Realização integral de trocas sugeridas pela questão, mas contrariando o enunciado da questão no resultado final.
URA5	Regras da resolução não são obedecidas integralmente para chegar ao resultado.

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Quadro 2 – Unidades de Registro do item B

URB	UNIDADE DE REGISTRO
URB1	Regras da resolução não são obedecidas integralmente para chegar ao resultado.
URB2	O enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução.
URB3	Passo final correto, mas a partir de passos anteriores incorretos.
URB5	Citação de trocas sem executá-las e inadequadas para chegar ao resultado final.
URB7	Passos da resolução executam trocas citadas e outras não

URB8	Citação de trocas sem executá-las e o enunciado da questão não é tomado como orientação para resolução da questão.
URB9	Trocas corretas com ausência de algumas citações.

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Com base na Análise de Conteúdo e após revisar o material coletado, optamos por excluir as Unidades de Registro URB4 e URB6, pois essas não apresentavam relevância para os objetivos da pesquisa.

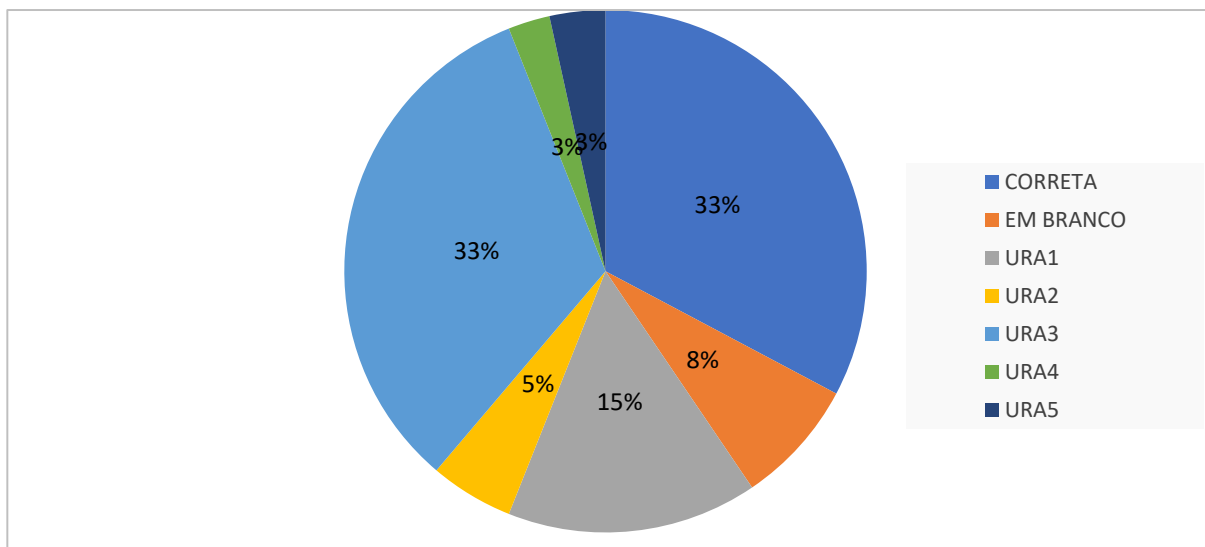
A interpretação dos dados foi realizada com base nas categorias estabelecidas e fundamentadas por estudos e autores relevantes. Inicialmente, analisaram-se as respostas e, em seguida, buscou-se compreender os erros identificados. O grupo focou na Questão 6, abordando apenas os itens A e B devido à complexidade do item C.

Para resolver os itens A e B da Questão 6, não era necessário um conhecimento específico, enquanto o item C exigia uma compreensão matemática mais avançada, não abordada no Ensino Médio. Por isso, o item C foi excluído da análise, pois não contribuía para avaliar o conhecimento básico dos estudantes sobre o tema. A seguir, apresentamos a análise quantitativa dos dados referentes aos itens A e B da Questão 6.

5.4 A Análise quantitativa dos dados

Nesta subseção, faz-se uma análise quantitativa dos dados relativos à Questão 6, itens A e B. A seguir, na Figura 3, apresenta-se a análise estatística relativa aos quantitativos referentes à Questão 6 – item A.

Figura 3 – Dados estatísticos referentes às UR associadas ao item A (%)



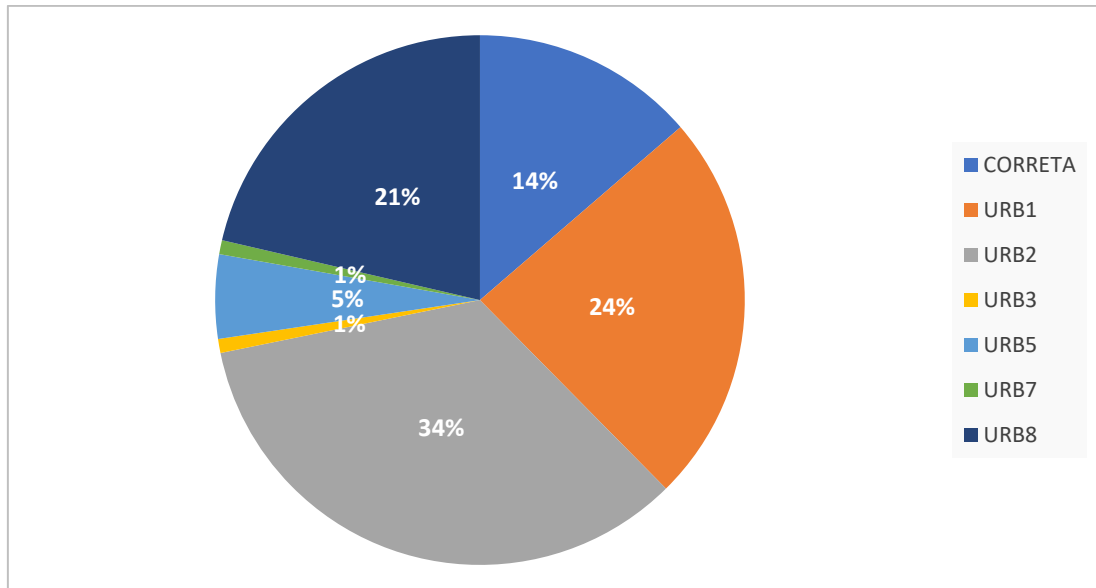
Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

No que se refere ao item A da questão, sua resolução não exige que o aluno possua conhecimentos específicos sobre o tema. Para resolver o problema corretamente, o estudante precisa apenas ler, interpretar e seguir as instruções da questão. Este item apresentou um índice de acertos de 33% do total de questões resolvidas como mostra a figura 3. As questões incorretas, significadas pelas URs, corresponderam a 59% do total e as provas em branco 8%.

Analisando os erros cometidos nas resoluções do item, observou-se que os erros mais frequentes foram aqueles correspondentes às seguintes unidades de registro: URA3, com 33% de ocorrência; URA1, com 15% de ocorrência; URA2, com 5% de ocorrência; URA5, com 3% de ocorrência; e URA4, com 3% de ocorrência. Vale ressaltar que não houve questões rasuradas.

A Figura 4 apresenta a análise estatística dos quantitativos relacionados ao item B da Questão 6.

Figura 4 – Dados estatísticos referentes às UR associadas ao item B (%)



Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

O item B da questão apresenta um grau de complexidade mais elevado que o item A, por essa razão o índice de acerto foi menor sendo 14%, como mostra a figura 4. Para resolver o problema, o estudante deveria sugerir trocas e fazer permutações que levassem ao resultado descrito na questão. As resoluções incorretas corresponderam a 86% do total. Diferente do item A que teve questões em branco e não teve rasuradas no item B não temos questões em branco e nem mesmo rasuradas.

Os erros mais frequentes foram significados pelas unidades de registro: URB2, com 34% de ocorrência; URB1, com 24% de ocorrência; URB8, com 21% de ocorrência; URB5, com 5% de ocorrência; e URB3 e URB7, com 1% de ocorrência respectivamente.

Neste trabalho, a partir dos erros significados relativos à Questão 6, itens A e B, foram constituídas três categorias que resumem os erros encontrados na análise das provas da OBMEP (IMPA, 2019). Dentre os quais, elencamos abaixo.

- C1 – A resolução apresenta trocas compatíveis ou não com o enunciado;
- C2 – O enunciado da questão não é tomado como base para a resolução da questão;
- C3 – Apresenta o resultado esperado, mas a partir de passos anteriores incorretos.

Com isso, inserimos abaixo o quadro de cada categoria e UR correspondentes.

Quadro 3 – Categoria 1 – A resolução apresenta trocas compatíveis ou não com o enunciado.

UR		CATEGORIAS
URA1	Passos da resolução executam trocas sugeridas pela questão e outras não	A resolução apresenta trocas compatíveis ou não com o enunciado
URA3	Execução de trocas não sugeridas pela questão	
URA4	Realização integral de trocas sugeridas, mas contrariando o enunciado da questão no resultado final	
URA5 e URB1	Regras da resolução não são obedecidas integralmente, para chegar ao resultado	
URB7	Passos da resolução executa trocas citadas pelo respondente e outras não	
URB9	Trocas corretas com ausência de algumas citações	

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Quadro 4 – Categoria 2 – O enunciado da questão não é tomado como base para a resolução da questão.

UR		CATEGORIAS
URA2 e URB2	O enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução	

URB8	Citação de trocas sem executá-las e o enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução	O enunciado da questão não é tomado como base para a resolução da questão.
URB5	Citação de trocas sem executá-la e inadequada para chegar ao resultado final	

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Quadro 5 – Categoria 3 – Apresenta o resultado esperado, mas a partir de passos anteriores incorretos.

UR		CATEGORIAS
URB3	Passo final correto, mas a partir de passos anteriores incorretos	Apresenta o resultado esperado, mas a partir de passos anteriores incorretos

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Diante do exposto até o momento, serão apresentados alguns resultados da pesquisa adiante.

5.5 Resultados e Discussões

A análise dos dados da pesquisa foi realizada com base nas categorias apresentadas e ilustradas. A base teórica para essa análise foi obtida através de estudos e autores que contribuem para a compreensão dos problemas identificados.

Primeiro, foram examinadas as respostas e, em seguida, procurou-se entender as possíveis causas dos erros encontrados.

Sendo assim, para este trabalho, são apresentados os resultados da análise focada na Categoria 2, que é intitulada “O enunciado da questão não é utilizado como base para a resolução da questão”.

No que se refere ao “Enunciado da questão não é utilizado como orientação para a resolução”, apresentamos as seguintes Unidades de Registro (UR), que serão examinadas por similaridade. As Unidades de Conteúdo (UC) estão representadas pela imagem da resposta do participante, e o título corresponde à descrição da UC.

- BC-6-2, ODC-6-7 (URA2), conforme Figuras 5 e 6;
- ODC-6-1 (URB2), conforme Figura 7; e
- PI-6-19 (URB8), conforme a Figura 8.

O item A sugere realizar algumas trocas nos livros com base em uma configuração inicial. Verifica-se que o respondente BC-6-2, figura 5, desconsiderou as instruções de troca, limitando-se a repetir alguns números no primeiro dia e no segundo repetindo um número e deixando espaços em branco.

Figura 5 (BC-6-2) – Após o 1º e 2º dia, não realizou as trocas e preencheu a tabela em desacordo com o enunciado. (UCA18)

a) Complete a tabela abaixo de acordo com as trocas indicadas:

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia	4	2	3	3	5	6
Após o 2º dia	3		4			6

Trocas: B → D
Trocas: A → B e C → E

00 Correção Nacional

Fonte: IMPA (2019).

Já o respondente ODC-6-7 (UCA6), na Figura 6 abaixo, apresenta uma solução que inicialmente parece estar de acordo com o enunciado da questão, pois ele realiza a troca sugerida após o primeiro dia corretamente. Todavia, realiza trocas não sugeridas após o primeiro dia que induz a uma certa confusão. Já após o segundo dia realiza trocas em desacordo com o enunciado, pois considera novamente a disposição inicial dos livros.

Figura 6 (ODC-6-7) - Após o primeiro dia realiza a troca sugerida mas preenche a

linha em desacordo com o enunciado. Após o segundo dia realiza as trocas compatíveis com a disposição inicial. (UCA23)

a) Complete a tabela abaixo de acordo com as trocas indicadas:

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F	
No início	1	2	3	4	5	6	
Após o 1º dia	5	4	3	2	6	1	Trocas: B → D
Após o 2º dia	2	1	5	4	3	6	Trocas: A → B e C → E

Fonte: IMPA (2019).

Com isso podemos supor que o estudante não entendeu o enunciado da questão o que levou-o a cometer os erros citados.

Como já foi dito anteriormente, o item B, exige um raciocínio matemático mais elaborado e exige uma atenção maior pois, a solução correta irá levar à combinação final disposta na tabela.

Figura 7 (ODC-6-1) - Não cita trocas e preenche a tabela em desacordo com o enunciado. (UCB11).

b) Indique uma maneira de fazer as trocas para chegar na distribuição após o 2º dia indicada na tabela abaixo.

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F	
No início	1	2	3	4	5	6	
Após o 1º dia	3	4	6	5	2	1	Trocas: _____
Após o 2º dia	6	1	2	3	4	5	Trocas: _____

Fonte: IMPA (2019)

Na solução fornecida pelo respondente ODC-6-1, o comando da questão não é seguido, pois não indica as trocas que deveriam ser feitas após o primeiro e o segundo dia ao lado da tabela. Com isso, não se sabe qual o raciocínio o aluno utilizou para preenchimento da tabela e não fica claro se houve a realização de trocas.

Figura 8 (PI-6-19) - Após o primeiro dia cita trocas em desacordo com o enunciado, não realiza as trocas citadas e preenche a tabela em desacordo com o enunciado. (UCB14)

b) Indique uma maneira de fazer as trocas para chegar na distribuição após o 2º dia indicada na tabela abaixo.

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F	
No início	1	2	3	4	5	6	
Após o 1º dia	5	1	3	4	5	6	Trocas: B → C e D → B
Após o 2º dia	6	1	2	3	4	5	Trocas: A → C

Fonte: IMPA (2019)

Em relação à resposta do PI-6-19 (UCB3), percebe-se que há a citação de duas trocas que levam ao resultado se realizadas em situações evento distinto que no caso é a B-C e B-D, trocas que não podem ocorrer no mesmo dia, pois contraria o enunciado da questão. Assim, o aluno só chegaria à condição ideal para o segundo dia se com a troca B-C fizesse a troca A-E ou a troca B-D com a troca A-E. Além disso, o aluno cita as trocas e realiza outras. A discordância com o enunciado está evidente pois o aluno escreve o número 5 duas vezes.

Diante de tudo isso, pode-se perceber que os alunos, nessa categoria, de algum modo, não levaram em conta o enunciado da questão para a solução de problemas. Isso pode ocorrer quando o estudante tem dificuldade para ler e interpretar o enunciado das questões.

Outras pesquisas envolvendo análise de erros em provas de Matemática apontam que a interpretação errada do enunciado das questões é um dos fatores que mais conduzem ao insucesso nas resoluções, (ARAUJO et al., 2024). Dessa forma percebe-se que as dificuldades na compreensão e execução dos comandos em exercícios envolvendo matemática não se limitam apenas a falta de conhecimento matemático, mas também na deficiência em leitura e em outras áreas do conhecimento.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As investigações realizadas ao longo deste trabalho reforçam a importância da análise de erros como uma ferramenta essencial no ensino de Matemática, especialmente no contexto da Análise Combinatória em provas da OBMEP. A análise dos equívocos cometidos pelos alunos não deve ser limitada a um diagnóstico de suas falhas, mas sim vista como uma oportunidade para explorar novas abordagens pedagógicas, que ampliem a compreensão dos conceitos e favoreçam a construção de conhecimentos sólidos.

Ao examinar cuidadosamente os erros, os educadores podem identificar padrões recorrentes, que revelam não apenas dificuldades de assimilação de conteúdos, mas também possíveis lacunas no processo de ensino. Esses dados oferecem subsídios para a criação de estratégias de intervenção mais eficazes, ajustadas às necessidades específicas dos alunos. A prática de discutir erros em sala de aula, além de promover o engajamento, permite que os estudantes reflitam sobre suas próprias abordagens e desenvolvam uma atitude mais proativa frente à resolução de problemas.

Ademais, a aplicação das ideias de Borasi (1996) e de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) evidencia que os erros podem ser utilizados como uma poderosa ferramenta didática, estimulando o pensamento crítico e a capacidade de análise dos alunos. Esse processo de reflexão conduz à melhoria contínua das práticas pedagógicas, permitindo que os professores ajustem suas metodologias com base em uma compreensão mais profunda das dificuldades enfrentadas pelos estudantes.

Conclui-se, portanto, que a análise de erros, quando bem aplicada, não só contribui para a melhoria do desempenho dos alunos, mas também desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de uma prática docente mais reflexiva e adaptada às reais necessidades da sala de aula. Ao transformar erros em oportunidades de aprendizado, cria-se um ambiente mais dinâmico e inclusivo, que valoriza o processo de construção do conhecimento e incentiva o crescimento contínuo de todos os envolvidos.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, V. S.; CARVALHO, R. F. L.; DIAS, R. B. A. MACIEL, D. M. **Análise de Erros em produções de estudantes do Ensino Médio em provas da OBMEP-2019 em São Luís, Maranhão.** Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão-PR, v. 13, n. 31, p. 1-21, maio-ago. 2024. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/8997/6328>. Acesso em: 01 set. 2024.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** 1. ed. 3. reimp. Lisboa: Edições 70, 2016.
- BORASI, R., **Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors**, Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.
- CURY, H.C. **A Didática da Matemática: Reflexões e Práticas.** São Paulo: Autêntica, 2008.
- CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.** Belo Horizonte: Autêntica, 2019.
- IBGE. **Censo de 2022.** Municípios por estado: Maranhão. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/ma/panorama>. Acesso em: 29 jul. 2024.
- IMPA. **OBMEP: Provas e Soluções,** 2019: Disponível em <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 29 jul. 2024.
- KOSHY, T. **Discrete Mathematics with Applications.** Burlington: Elsevier, 2004.
- LIPSCHUTZ, S. **Combinatorics.** New York: Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1997.
- PONTE, J. P. da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003. Coleção Tendências em Educação Matemática.
- SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas.** 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2010.
- TUCKER, A. **Applied Combinatorics.** New York: Wiley, 2002.

ANEXOS

ANEXO A – QUADRO DAS UCA's e URA's DA CIDADE DE APICUM-AÇU - MA

QUESTÃO	TIPO UC	ITEM A	TIPO UR	ITEM A
		UC		UR
APC6-1	UCA4	Após o primeiro dia realizou trocas sugeridas. Após o 2º realizou uma troca sugerida e outra não.	UR1	Passos da resolução executa trocas sugeridas e outras não.
APC6-2	UCA1	No primeiro e segundo dias realiza trocas não sugeridas.	UR3	Execução de trocas não sugeridas.
APC6-3	UCA27	Após o 1º dia realiza as trocas sugeridas e no segundo dia realiza trocas em desacordo com o enunciado	UR5	Regras da resolução não são obedecidas integralmente, para chegar ao resultado
APC6-4	CORRETA	CORRETA	CORRETA	
APC6-5	CORRETA	CORRETA	CORRETA	
APC6-6	CORRETA	CORRETA	CORRETA	
APC6-7	CORRETA	CORRETA	CORRETA	
APC6-8	UCA1	No primeiro e segundo dias realiza trocas não sugeridas.	UR3	Execução de trocas não sugeridas.
APC6-9	UCA28	Após o 1º dia realiza trocas sugeridas, porém repete número. Após o 2º dia realiza trocas sugeridas, mas também repete números o que inviabiliza o resultado esperado.	UR5	Regras da resolução não são obedecidas integralmente, para chegar ao resultado

ANEXO B – QUADRO DAS UCB's e URB's DA CIDADE DE APICUM-AÇU - MA

TIPO UC	ITEM B	TIPO UR	ITEM B
	UC		UR
UCB6	Após o primeiro e o segundo dia, não cita e nem efetua trocas	URB2	O enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução.
UCB11	Não cita trocas e preenche a tabela em desacordo com o enunciado.	URB2	O enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução.
UCB6	Após o primeiro e o segundo dia, não cita e nem efetua trocas	URB2	O enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução.
UCB11	Não cita trocas e preenche a tabela em desacordo com o enunciado.	URB2	O enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução.
CORRETA	CORRETA	CORRETA	
UCB6	Após o primeiro e o segundo dia, não cita e nem efetua trocas	URB2	O enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução.
UCB16	Sugere trocas após o 1º dia, mas faz outras, inviabilizando a solução, apesar de citar uma troca após o 2º que leva ao resultado	URB5	Citação de trocas sem executá-la e inadequada para chegar ao resultado final.
UCB5	Após o primeiro dia cita uma troca, mas não efetua e preenche a tabela em desacordo com o enunciado, inviabilizando a troca citada após o segundo dia para chegar ao resultado esperado.	URB8	Citação de trocas sem executá-las e o enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução.
UCB11	Não cita trocas e preenche a tabela em desacordo com o enunciado.	URB2	O enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução.

ANEXO C – UNIDADES DE CONTEXTO DA QUESTÃO A

UNIDADES DE CONTEXTO DA QUESTÃO A	
UCA1	No primeiro e segundo dias realiza trocas não sugeridas.
UCA2	Após o 1º e o 2º dia realizou trocas sugeridas e outras não sugeridas.
UCA3	Após o 1º e o 2º dia, realizou as trocas sugeridas, mas no 2º escreveu um número repetido.
UCA4	Após o primeiro dia realizou trocas sugeridas. Após o 2º realizou uma troca sugerida e outra não.
UCA5	Não realiza troca no primeiro dia e preenche em desacordo com o enunciado. No segundo dia realiza as trocas sugeridas compatível com o início em desacordo com o enunciado.
UCA6	Não realizou trocas após o primeiro dia, e deixa células em branco. Após o 2º dia preenche apenas duas células que não correspondem a uma troca.
UCA7	No primeiro dia faz a troca não sugerida e completa em desacordo com o enunciado. No segundo dia não faz as trocas sugeridas.
UCA8	No primeiro dia faz a troca sugerida e completa a linha em desacordo com o enunciado. No segundo dia faz as trocas sugeridas e outras não sugeridas.
UCA9	No primeiro dia faz a troca sugerida e completa a linha em desacordo com o enunciado. No segundo dia não faz as trocas.
UC10	No primeiro dia não realiza troca. No segundo dia realiza troca não sugerida.
UCA11	Após o primeiro dia realiza a troca sugerida. Após o segundo dia realiza as trocas sugeridas compatíveis com o início em desacordo com o enunciado
UCA12	Após o primeiro e segundo dias faz as trocas sugeridas mas não completa a tabela.

UCA13	Após o primeiro dia realiza a troca sugerida. Após o segundo dia realiza as trocas sugeridas compatíveis com o início em desacordo com o enunciado e repete um número
UCA14	Após o primeiro dia realiza a troca sugerida mas preenche a linha em desacordo com o enunciado. Após o segundo dia realiza as trocas compatíveis com o início e preenche a linha em desacordo com o enunciado
UCA15	Após o 1º dia realiza troca sugerida e outra não sugerida, após o 2º dia realiza as trocas sugeridas corretamente.
UCA16	Executou o passo sugerido após o 1º dia, mas repetiu números. Após o 2º dia, executa um passo, mas mantém números repetidos
UCA17	Não seguiu as orientações de trocas da questão
UCA18	Após o 1º e 2º dia, não realizou as trocas e preencheu a tabela em desacordo com o enunciado.
UCA19	Após o primeiro dia realizou trocas sugeridas. Após o 2º realizou uma troca sugerida e outra não. Preenche a tabela em desacordo com o enunciado.
UCA20	Após o 1º dia realiza troca sugerida e deixa o restante dos espaços em branco, no 2º dia preenche a tabela em desacordo com o enunciado e deixa um espaço em branco.
UCA21	Após o 1º dia não realizou a troca sugerida e preencheu a linha em desacordo com o enunciado. Após o 2º dia, faz trocas conforme o que foi realizado no 1º dia.
UCA22	Apesar de ter realizado a troca sugerida após o 1º dia, após o 2º dia, realizou apenas uma troca sugerida pela questão e seguiu a outra sugestão de troca, mas com dados compatíveis com o início.
UCA23	Após o 1º dia realizou trocas sugeridas e outras não. Após o segundo dia realizou trocas sugeridas e outras não mas, compatível com o início em desacordo com o enunciado
UCA24	Após o 1º dia preenche em desacordo com o enunciado e após o segundo dia deixa as células em branco.

ANEXO D – UNIDADES DE REGISTRO DA QUESTÃO A

UNIDADES DE REGISTRO DA QUESTÃO A		COD. UR
URA1	Passos da resolução executa trocas sugeridas e outras não.	1
URA2	O enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução.	2
URA3	Execução de trocas não sugeridas.	1
URA4	Realização integral de trocas sugeridas, mas contrariando o enunciado da questão no resultado final.	3
URA5	Regras da resolução não são obedecidas integralmente, para chegar ao resultado	3
URA6	O enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução. Troca realizada não sugerida pela questão.	2

ANEXO E – UNIDADES DE CONTEXTO DA QUESTÃO B

UNIDADES DE CONTEXTO DA QUESTÃO B	
UCB1	Afirma que não há necessidade de trocas após o 1º dia. Após o 2º dia, cita trocas que contrariam o enunciado da questão.
UCB2	Após o 1º dia, não citou nem efetuou trocas, não preencheu a tabela. As trocas citadas após o segundo dia contrariam o enunciado da questão
UCB3	Após o primeiro dia cita trocas, mas não efetua e preenche a tabela em desacordo com o enunciado, inviabilizando a troca citada após o segundo dia para chegar ao resultado esperado.
UCB4	Após o primeiro dia cita uma troca, mas não efetua e efetua outra sem citar. Além disso, preenche a tabela em desacordo com o enunciado sem citar troca após o segundo dia.
UCB5	Após o primeiro dia cita uma troca, mas não efetua e preenche a tabela em desacordo com o enunciado, inviabilizando a troca citada após o segundo dia para chegar ao resultado esperado.
UCB6	Após o primeiro e o segundo dia, não cita e nem efetua trocas
UCB7	Cita e efetua trocas após o 1º dia que inviabilizam o resultado após o segundo dia. Além disso, cita trocas no segundo dia em desacordo com o enunciado.
UCB8	Cita e efetua trocas após o 1º dia que inviabilizam o resultado após o segundo dia. Além disso, cita trocas no segundo dia que não levam ao resultado esperado.
UCB9	Cita e efetua trocas corretamente após o primeiro dia, mas preenche o restante da tabela em desacordo com o enunciado, inviabilizando a troca citada após o segundo dia para chegar ao resultado esperado.
UCB10	Cita e efetua uma troca após o 1º dia que inviabiliza o resultado após o segundo dia. Além disso, cita trocas no segundo dia que não levam ao resultado esperado.
UCB11	Não cita trocas e preenche a tabela em desacordo com o enunciado.
UCB12	Não cita trocas, apesar de efetuar uma. Além disso, preenche a tabela em desacordo com o enunciado
UCB13	Não efetuou as trocas citadas e não preencheu a tabela após 1º dia. Além disso, após o 2º dia cita trocas que contrariam o enunciado da questão.
UCB14	Propõe trocas corretas após o 1º dia, mas não as segue totalmente. Com a dist. incorreta após o 1º dia, faz uma troca correta e chegaria à dist. desejada após o 2º se não tivesse errado as indicações anteriores.

UCB15	Questão rasurada.
UCB16	Sugere trocas após o 1º dia, mas faz outras, inviabilizando a solução, apesar de citar uma troca após o 2º que leva ao resultado
UCB17	Após o 1º dia realizou as trocas citadas. Contudo, para chegar ao resultado não cita trocas após o 2º dia. Para atingir o resultado necessitaria mais de um dia.
UCB18	Realizou a troca citada após o 1º dia e após o 2 dia, cita uma troca que não leva ao resultado.
UCB19	Citou trocas, mas não as realizou, além de não seguir as orientações do enunciado na sugestão de trocas
UCB20	Citou e efetuou trocas após o 1º dia, mas não completou a tabela, inviabilizando a finalização da questão
UCB21	Após o primeiro dia cita trocas em desacordo com o enunciado, não realiza as trocas citadas e preenche a tabela em desacordo com o enunciado.
UCB22	Após o primeiro dia, cita e efetua trocas corretas que levariam ao resultado, contudo no segundo dia cita troca em desacordo com o enunciado.
UCB23	Após o primeiro, dia cita e efetua trocas que não levariam ao resultado. Após o segundo dia não cita trocas.
UCB24	Cita trocas após o 1º dia, mas só faz uma corretamente e cita em desacordo com o enunciado após o 2º dia
UCB25	Cita e efetua trocas após o 1º dia e realiza outra não citada inviabilizando o resultado após o segundo. Além disso, cita troca no segundo dia que não levam ao resultado esperado.
UCB26	Após o 1º dia, citou uma troca mas não preencheu a tabela. As trocas citadas após o segundo dia contrariam o enunciado da questão
UCB27	Cita e efetua uma troca após o 1º dia e preenche a tabela em desacordo com o enunciado inviabilizando o resultado após o segundo dia. Além disso, cita trocas no segundo dia que não levam ao resultado esperado.
UCB28	Cita e efetua trocas no 1º dia que é possível chegar no resultado correto, mas cita troca no 2º dia que não levam ao resultado esperado
UCB29	Cita e efetua uma troca após o 1º dia e realiza outras sem citar que inviabiliza o resultado após o segundo dia. Além disso, cita trocas no segundo dia que não levam ao resultado esperado.
UCB30	Após o primeiro dia cita uma troca, mas não efetua, efetua outra sem citar e preenche a tabela em desacordo com o enunciado, inviabilizando a troca citada após o segundo dia para chegar ao resultado esperado.
UCB31	Cita e efetua uma troca após o 1º dia e realiza outras sem citar que inviabiliza o resultado após o segundo dia. Além disso, cita trocas no segundo dia em desacordo com o enunciado.

UCB32	Após o primeiro dia cita uma troca, mas não efetua e preenche a tabela em desacordo com o enunciado, inviabilizando o resultado após o segundo dia. Além disso não cita trocas no segundo dia.
UCB33	Efetua trocas após o 1º dia sem citá-las e inviabiliza o resultado após o 2º dia. Além disso, cita trocas no 2º dia em desacordo com o enunciado.
UCB34	Efetua trocas corretas, citando algumas corretamente e outras não.
UCB35	Não cita trocas, apesar de efetuar uma. Além disso, deixa restante da tabela sem preencher
UCB36	Cita e efetua trocas, mas preenche a tabela em desacordo com o enunciado.
UCB37	Cita e efetua troca após o 1º dia que inviabiliza o resultado após o 2º dia. Cita trocas corretas após O 2º dia
UCB38	Após o 1o dia e 2o dias cita mas não efetua trocas, nem preenche a tabela.
UCB39	Após o 1 dia cita e efetura uma troca e cita outra sem efetuar e preenche a tabela em desacordo com o enunciado e inviabiliza chegar ao resultado, apesar de citar e efetuar uma troca após o 2º dia

ANEXO F – UNIDADES DE REGISTRO DA QUESTÃO B

UNIDADES DE REGISTRO DA QUESTÃO B		COD. UR
URB1	Regras da resolução não são obedecidas integralmente, para chegar ao resultado.	3
URB2	O enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução.	2
URB3	Passo final correto, mas a partir de passos anteriores incorretos.	4
URB4	Passos incompatíveis com a proposição de trocas	1
URB5	Citação de trocas sem executá-la e inadequada para chegar ao resultado final.	5
URB6	Erro não identificado por causa de rasuras	
URB7	Passos da resolução executa trocas citadas e outras não.	3
URB8	Citação de trocas sem executá-las e o enunciado da questão não é tomado como orientação para a resolução.	2
URB9	Trocas corretas com ausência de algumas citações	3