



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Sabrina Ferreira Silva

Um Estudo das Relações entre a Matemática e a Teoria Musical

São Luís - MA
2023

Sabrina Ferreira Silva 

Um Estudo das Relações entre a Matemática e a Teoria Musical

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciada em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo

São Luís - MA

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Silva, Sabrina Ferreira.

Um Estudo das Relações entre a Matemática e a Teoria Musical / Sabrina Ferreira Silva. - 2023.

43 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo.

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2023.

1. Ensino-Aprendizagem. 2. Matemática e música. 3. Série de Fourier. 4. Teoria Musical. I. Araújo, Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de. II. Título.

Sabrina Ferreira Silva

Um Estudo das Relações entre a Matemática e a Teoria Musical

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 20/06/2023

Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof. Me. José Mairton Barros da Silva
DEMAT/UFMA
Primeiro Supervisor

Prof.^a Me.^a Sonia Rocha Santos Sousa
COLUN/UFMA
Segunda Supervisora

Aos meus pais, irmãos e amigos.

Agradecimentos

A Deus e aos guias que me proporcionaram viver esse momento, a todos os meus familiares, meu Pai Cláudio, minha mãe Magnólia e aos meus irmãos Roberta e Alex por serem minha base e por estarem sempre me apoiando.

A minha noiva Laís por me apoiar nas decisões e está ao meu lado sempre, me encorajando e dando forças para continuar lutando pelo meus objetivos.

As pessoas que, de alguma forma, estiveram no meu caminho e me ajudaram no decorrer minha vida pessoal e acadêmica.

Ao professor Marcos Antonio Ferreira Araújo pela orientação e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

“Existe muito por completar neste trabalho, mas infelizmente como em algum momento tenho que encarar, então que seja agora”.

Evariste Galois (1811 – 1832)

Resumo

Esse trabalho apresenta um estudo a cerca da união da matemática com a música, várias estruturas matemáticas estão presentes na música, as figuras rítmicas e as fórmulas do compasso por exemplo, podemos observar através das frações. Traçaremos um breve apanhado dos primórdios da música, enfatizando a importância das contribuições apresentadas por Pitágoras no decorrer da evolução musical, pois é da escola pitagórica a divisão das ciências matemáticas em quatro partes: a aritmética (quantidade discreta estática), a geometria (grandeza estacionária), a música (quantidade discreta em movimento) e a astronomia (grandeza dinâmica). Essas quatro frentes formavam aquilo que se denominava *Quadrivium*. Analisamos também onde se dão as ligações existentes entre a teoria musical e a série de Fourier, ponderando ainda a impotência da interdisciplinariedade das duas áreas para o ensino-aprendizagem de alunos, o que pode ser um meio interessante para instigar os alunos a entender que a matemática é uma ferramenta que explica vários fenômenos incluindo a música e que a partir da junção das duas áreas podemos deixar aulas mais dinâmicas e atraentes.

Palavras-chave: Matemática e música; Série de Fourier; Ensino-aprendizagem; Teoria musical.

Abstract

This work presents a study about the union of mathematics with music, several mathematical structures are present in music, rhythmic figures and compass formulas for example, we can observe through fractions. We will draw a brief overview of the beginnings of music, emphasizing the importance of the contributions made by Pythagoras in the course of musical evolution, since the division of mathematical sciences into four parts belongs to the Pythagorean school: arithmetic (static discrete quantity), geometry (stationary quantity), music (discrete quantity in motion) and astronomy (dynamic magnitude). These four fronts formed what was called *Quadrivium*. We also analyzed where the existing connections between music theory and the Fourier series take place, also considering the impotence of the interdisciplinarity of the two areas for the teaching-learning of students, which can be an interesting means to instigate students to understand that the Mathematics is a tool that explains various phenomena including music and that from the combination of the two areas we can make classes more dynamic and attractive.

Keywords: mathematics and music; Fourier series; teaching-learning; musical theory.

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Flauta feita de osso	13
Figura 2.2 – Repetição das notas musicais	16
Figura 2.3 – Pentagrama	16
Figura 2.4 – Pautas suplementares superiores e inferiores.	16
Figura 2.5 – Acidentes musicais.	17
Figura 2.6 – acidentes musicais.	17
Figura 2.7 – Figuras e pausas musicais.	17
Figura 2.8 – Representação do tempo de cada pausa e figura musical.	18
Figura 2.9 – Ponto de aumento.	18
Figura 2.10–Ponto de diminuição.	18
Figura 2.11–Ligadura.	19
Figura 2.12–Clave de Sol.	19
Figura 2.13–Clave de Fá.	19
Figura 2.14–Clave de Dó	20
Figura 2.15–Variações das claves ao longo do tempo.	20
Figura 2.16–Exemplo de um compasso musical.	21
Figura 2.17–Semínima	21
Figura 2.18–Monocórdio de Pitágoras	22
Figura 2.19–Divisão da corda feita por Pitágoras.	23
Figura 2.20–Marcações feita por Pitágoras no monocórdio.	23
Figura 3.1 – Escala	26
Figura 3.2 – Razão intervalar resultante.	28
Figura 3.3 – Espiral de quintas e Relógio cromático	29
Figura 4.1 – Distribuição do termo de uma potência	30
Figura 4.2 – Relação frequência de uma nota f_N de semitons k com relação à funda- mental Lá4 de 440Hz	31
Figura 4.3 – expansão de um pulso sonoro em uma série de Fourier	35
Figura 4.4 – Diagrama de espectro de amplitude	37

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Justificativa	11
1.2	Objetivos	11
1.2.1	Geral	11
1.2.2	Específicos	11
1.3	Metodologia	11
2	MATEMÁTICA E MÚSICA	13
2.1	Uma Breve História da Música	13
2.2	Conceitos Básicos de Teoria Musical	15
2.3	Contribuições de Pitágoras	21
3	ESCALAS MUSICAIS	25
3.1	Consonância e Dissonância	25
3.2	Surgimento das Primeiras Escalas	25
4	SÉRIE HARMÔNICA E A SÉRIE DE FOURIER	30
4.1	Sistema Temperado	30
4.2	Séries Harmônicas	31
4.3	Série de Fourier	32
4.4	A Função Harmônica Analisada pela Série de Fourier	36
5	IMPLICAÇÕES EDUCACIONAIS	39
5.1	Matemática e Música no Ensino	39
	CONCLUSÃO	41
	REFERÊNCIAS	42

1 Introdução

Ao longo do tempo, podemos encontrar que vários matemáticos se dedicaram ao estudo da música e buscaram as mais diversas conexões entre matemática e a música, dentre eles tem-se a ligação mais antiga e de grande importância que se deu no século VI a.C. quando Pitágoras se tornou responsável pelo primeiro experimento que uniu a matemática e a música, a partir de um monocórdio¹, onde provou que ao tocar a corda considerando sua metade, sua vibração gera o mesmo som com a mesma tonalidade produzida pela corda inteira, porém uma oitava acima, ou seja, o som produzido é mais agudo em relação ao som da corda inteira, continuando o experimento com novas divisões, Pitágoras estabelece os principais intervalos musicais, uma combinação de sons agradáveis (consonâncias perfeitas), respectivamente,- oitava, quinta e quarta -, a qual correspondem a relações simples, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, que são as divisões exatas da corda esticada fornecendo notas mais agudas do intervalo em relação as notas mais graves da corda inteira. Assim, Pitágoras elaborou a escala musical que é usada até hoje.

O som se comporta como uma onda, a altura (agudo e grave) está relacionado à frequência, a intensidade está diretamente relacionada à amplitude da onda e o timbre está diretamente relacionado à natureza do corpo sonoro. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) nos mostra que cada onda pode ser representada pela soma de várias outras ondas senoidais e, se a onda for periódica, a frequência do componente senoidal é um múltiplo da frequência de repetição da forma de onda, sendo assim os sons de frequência fundamental e harmônicos são ondas senoidal que se combinam para formar um som.

Outros filósofos e matemáticos como Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), também contribuíram para essa relação entre a matemática e a música. (FORTES, 2009) afirma que Leibniz vislumbrou a presença da matemática na música através da análise combinatória, dedicando espaços exclusivos para discorrer sobre isso em sua obra *Dissertatio*, evidenciando a combinatória presente na música, tanto na análise das possibilidades de arranjos e harmonias sonoras quanto na simbologia utilizada nas partituras.

A ideia de usar música e matemática em sala de aula também remonta à antiguidade com os sucessores de Pitágoras. Arquitas de Tarento (430-380 a.C.), que não só defendia a importância da matemática na educação, mas também apreciava o uso da música na educação: Arquitas atribuiu mais atenção a tal arte do que a maioria de seus predecessores, acreditando que a música deveria assumir um papel mais importante que a literatura na educação das crianças. (ABDOUNUR, 2006, p.14).

¹ inventado por Pitágoras, o monocórdio é um instrumento composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha ou mesa.

Existem inúmeros trabalhos científicos que enfatizam a importância de se trabalhar aplicando a interdisciplinaridade, isso possibilita a importante construção significativa de conhecimentos matemáticos, bem como conhecimentos em outras áreas, como a música, por exemplo. Os estudos de Luck (1994), Petraglia (1993) e Fazenda (1994) merecem menção especial, já que (JAPIASSU, 1976, p.52) afirma que “trata-se de um gigantesco, mas indispensável esforço que muitos pesquisadores realizam para superar o estatuto de fixidez das disciplinas” e para fazê-las convergir pelo estabelecimento de elos e de pontes entre os problemas que elas colocam.

1.1 Justificativa

A escolha do presente tema como objeto de estudo, justifica-se pela ligação entre as duas áreas, assim tem-se a necessidade de apresentar um estudo acerca da matemática e da música, buscando fatos históricos pensando na integração entre ambas, que nos permite uma aprendizagem mútua, além de nos proporcionar o auxílio no desenvolvimento do raciocínio, na criatividade, na memorização e principalmente na construção de concepções, o que contribui para a ampliação do conhecimento.

1.2 Objetivos

1.2.1 Geral

Pretende-se por meio deste, compreender a influência existente da matemática na música, através da série de Fourier com a teoria musical e a importância da interdisciplinaridade das duas áreas no ensino-aprendizado dos alunos.

1.2.2 Específicos

1. Analisar de forma sucinta a relação entre a música e a matemática com base no contexto histórico e nas teorias;
2. Compreender a importância de Pitágoras para a teoria musical;
3. Interpretar matematicamente a teoria musical através da série de Fourier;
4. Estabelecer como a relação entre as duas áreas pode ajudar no aprendizado da matemática;

1.3 Metodologia

Com a finalidade de realizar um estudo com o objetivo de compreender a influência da matemática e música, fora feito o uso da pesquisa bibliográfica sendo fundamentada em

ideias e pressupostos de teóricos que apresentam importância na definição e construção dos conceitos discutidos nesta análise. A classificação da pesquisa caracteriza-se de forma descritiva que tem como objetivo descrever as características e usar técnicas padronizadas para coletar as informações. As fontes de buscas foram restritas à livros, materiais em meio digital, disponibilizados em sites, bem como bibliotecas digitais de artigos e dissertações relacionados ao tema, de modo a reunir as informações necessárias para uma melhor compreensão da ciência exata com música no ensino aprendizagem.

2 Matemática e Música

Segundo (GRANJA, 2006) tanto a música como a matemática têm em comum a busca por padrões e regularidades, ambas as áreas utilizam símbolos e convenções próprias. Na música a regularidade apresenta-se no ritmo, na harmonia ou na estrutura do compasso, a notação musical tem uma estrutura lógico-matemática por base. Já na matemática as regularidades se apresentam de formas numéricas (pares, ímpares, progressões geométricas e aritméticas). Dito isto, podemos perceber que a relação entre a matemática e música é mais clara do que podíamos pensar, podendo ser analisada através das estruturas matemáticas presentes na música como por exemplo, a relação existente entre as figuras rítmicas e as fórmulas de compasso que são notadas através de frações. Desde da antiguidade o desenvolvimento da música esteve ligado a conceitos matemáticos e tomaram grande importância, com a criação da escala pitagórica que é usada até hoje, dessa forma muitos conceitos utilizados na música têm base sobre os pitagóricos.

2.1 Uma Breve História da Música

Vestígios, como as pinturas rupestres nos recontam que o homem pré-histórico descobriu os sons do ambiente e utilizou a música em rituais, gritos, sons produzidos por pedras, madeira e até o próprio corpo. Outras pistas são fragmentos de instrumentos musicais encontrados nos Alpes Eslovacos em 1995, como um osso de urso entre 43.000 e 82.000 anos, que apresentava furos minuciosamente distribuídos capazes de produzir intervalos de tons e semitons (ABDOUNUR, 2006). Este é talvez o instrumento mais antigo conhecido.

Figura 2.1 – Flauta feita de osso de urso encontrado nos Alpes da Eslováquia em 1995



Fonte: <https://voc.link/o-instrumento-musical-mais-antigo-ja-encontrado/>

A música esteve profundamente presente nas civilizações antigas desde o nascimento das primeiras civilizações na Mesopotâmia, Egito, Grécia e Roma. Na Mesopotâmia, harpas e cítaras de origem assíria foram encontradas nas ruínas das cidades. Pelas pinturas antigas,

percebemos que este povo já utilizava instrumentos de sopro, percussão e arco. Além disso, os achados incluem registros cuneiformes contendo informações técnicas sobre as escalas utilizadas na época (KILMER, 2000). No Egito era associada ao culto dos deuses e praticada através do canto e de instrumentos musicais como a harpa, a lira, a flauta e os tambores. Na Grécia, a música era uma disciplina fundamental da educação dos jovens, pois era como uma arte e como ciência. Segundo (ABDOUNUR, 2006), um importante marco histórico foi estabelecido no desenvolvimento da música grega com a criação da escala com sete tons e dos tetracordes, teóricos da música como Pitágoras, Arquitas, Aristoxeno, Erastótenes contribuíram para a construção de diferentes escalas musicais. Influenciados pelas artes musicais gregas, os antigos romanos também tinham uma estreita ligação com a música, e os exemplos encontrados retratam uma riqueza de conhecimento sobre música, partituras e instrumentos usados em orquestras públicas, cerimônias e serviço militar.

A música medieval esteve intimamente associada ao cristianismo desde a queda do Império Romano até meados do século XV, quando o Vaticano unificou a prática litúrgica do chamado canto monofônico (melodia única) sem acompanhamento. No século XI, a notação musical começou a sofrer transformações, e os símbolos usados para indicar alterações no ritmo ou na melodia foram substituídos por símbolos de linha, que conhecemos hoje como pauta musical. Além disso, o monge italiano Guido D'Arezzo (992 -1050) atribuiu as notas conhecidas hoje, usando a primeira estrofe do hino a São João Batista escrito em latim por Paolo Deaconentre 720 e 799:

*Ut queantlaxis,
Resonarefibris,
Mira gestorum,
FamuliTuorum,
Solve Polluti,
Labiireatum,
SancteIohannes.*
(COTTA, 2008)

Assim, as notas musicais passaram a ser identificadas como Ut, Re, Mi, Fá, Sol, La, Si, e posteriormente a sílaba Ut para Dó, proposta pelo músico italiano Giovanni Battista Doni (1593-1647) para facilitar a pronúncia. Desde então, a música passou por diversas evoluções, com cada vez mais elementos foram sendo adicionado para desenvolver sua teoria, desde o Renascimento (1400-1600), que compunha melodias por transposição de notas, até o período Barroco (1600-1730), que se caracterizou pelo uso de harmonias tonais e pelo surgimento de diversas formas de música como a ópera, até a chamada música moderna (primeira metade do século XX), quando foram criados novos efeitos em harmonias vocais, instrumentos, escalas e combinações rítmicas, significando uma

linguagem musical que perdura até hoje. Além de estabelecer um padrão de frequência absoluta para as notas, o padrão de 440 Hz para a nota lá (acima do dó central do piano) que foi universalizado.

2.2 Conceitos Básicos de Teoria Musical

Antes de darmos continuidade, devemos compreender alguns conceitos e elementos básicos da música. Bohumil (1996) nos diz que a música é a arte de combinar os sons simultaneamente e sucessivamente com ordem, equilíbrio e proporção dentro do tempo, para isso compreende-se como partes fundamentais da música:

- a) **melodia:** é o estudo dos sons tocados separadamente, em sequência. Um canto ou um solo de guitarra, por exemplo, são exemplos de melodias.
- b) **harmonia:** é o estudo das combinações de sons tocados simultaneamente. Duas ou mais notas musicais tocadas ao mesmo tempo constituem uma harmonia. Numa composição musical, a harmonia é o conjunto de acordes, que podem ser executados por diversos instrumentos.
- c) **ritmo:** é a parte da música que determina o tempo de duração de cada nota.

O som é a sensação produzida no ouvido pela vibração de corpos elásticos. As vibrações movem o ar na forma de ondas sonoras, espalhando-se em todas as direções ao mesmo tempo. Estes atingem o tímpano fazendo vibrar. As vibrações que se convertem em impulsos nervosos são enviadas ao cérebro e são classificadas como vibrações regulares - são os sons com altura definida (notas musicais), e vibrações irregulares que são sons com altura indefinida (ruídos).

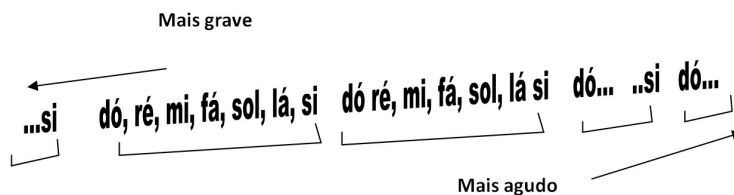
As características principais do som são:

- a) **Altura:** é a frequência das vibrações, ou seja, da velocidade, quanto mais rápido a velocidade da vibração, mais agudo o som será.
- b) **Duração:** determinada pelo tempo de emissão das vibrações.
- c) **Intensidade:** amplitude das vibrações é o grau de volume sonoro, caracteriza-se como um som mais forte ou mais fraco.
- d) **Timbre:** identifica a origem do som produzido. Através dele podemos diferenciar um som produzido por diferentes instrumentos.

Embora sejam inúmeros sons empregados na música, usamos apenas sete para representá-los, DÓ(C), RÉ(D), MI(E), FÁ(F), SOL(G), LÁ(A) e SI(B), que se repetem de sete em sete da seguinte maneira.

E são representados pelo símbolo gráfico de forma oval, em um sistema formado por um arranjo de cinco linhas paralelas e horizontais e quatro espaços intermediários,

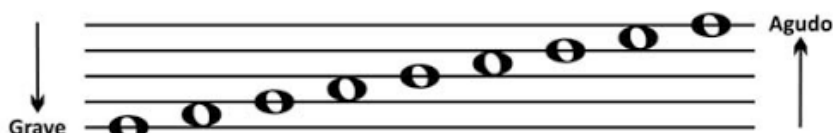
Figura 2.2 – Repetição das notas musicais das mais graves e mais agudas.



Fonte: Própria

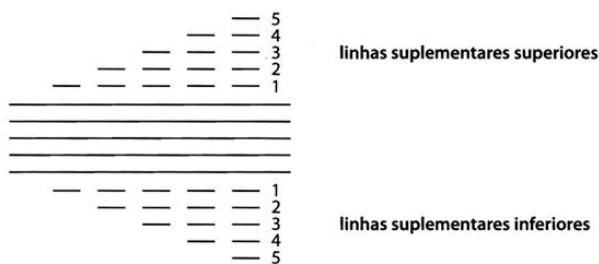
chamados de pentagrama ou pauta. As linhas e espaços são contados de baixo para cima e são usados para indicar o nome e a altura da nota escrita.

Figura 2.3 – Representação de um pentagrama com notas musicais.

Fonte: <https://blog.opus3ensinomusical.com.br/ler-partitura/>

Apenas nove notas podem ser escritas na partitura. Para grafar as notas mais agudas ou mais graves, são postas pautas extras (que mantêm o mesmo espaçamento das pautas normais).

Figura 2.4 – Pautas suplementares superiores e inferiores.

Fonte: <http://musicalizandocomfundamentostaylis.blogspot.com/2015/09/pentagramas-claves-e-notas-musicais.html?m=1>

É importante ressaltar que as sete notas musicais mencionadas são consideradas naturais, mas também existem as variações devido aos acidentes musicais que chamamos de bemóis e sustenidos. Para entender quais são esses acidentes precisamos ressaltar os conceitos de intervalo, tom e semitom:

- a) **Intervalo:** é a distância entre dois sons ou entre duas notas.
- b) **Semitom:** o menor intervalo musical que usamos.
- c) **Tom:** é formado por dois semitons.

São sinais que são colocados antes de uma nota musical para alterar a entonação. O sustenido é indicado pelo símbolo $\sharp$ e aumenta o tom de uma nota natural em um semitom. O bemol diminui o tom das notas naturais em um semitom e é indicado pela letra “ $\flat$ ”. Os semitons também podem ser classificados em semitons naturais (quando são compostos de notas naturais, existe apenas duas: mi - fá e si - dó), semitons diatônicos (formados por notas com nomes diferentes, por exemplo, lá $\sharp$ - si), ou semitons cromáticos (formado por notas com mesmo nome exemplo lá $\flat$ - lá).

Figura 2.5 – Acidentes musicais.

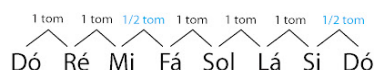
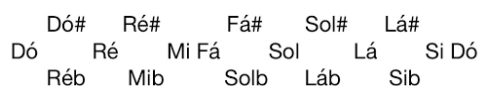


Figura 2.6 – Acidentes musicais.



Fonte:

<https://www.descomplicandoamusica.com/escalas-musicais/>

As pausas também são representadas no pentagrama, são sinais que denotam intervalos de “silêncio” na melodia. Notas e pausas são representadas graficamente em termos de duração do som, e essas figuras são chamadas de semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia, fusa e semifusa.

Figura 2.7 – Figuras e pausas musicais.

Figuras Musicais	Nomes das figuras	Pausas correspondentes
	Semibreve	
	Mínima	
	Semínima	
	Colcheia	
	Semicolcheia	
	Fusa	
	Semifusa	

Fonte: <https://cursosdecanto.com.br/figuras-musicais-guia-completo/>

Cada figura musical representa o tempo de execução de cada nota (ou pausa) numa composição musical. A semibreve possui tempo de duração duas vezes maior que a mínima,

esta por sua vez, o dobro da semínima e assim por diante, isto é, cada símbolo subsequente tem a metade do tempo de duração do anterior, cabe ressaltar que o tempo de duração de uma determinada nota musical está relacionada a forma do compasso.

Figura 2.8 – Representação do tempo de cada pausa e figura musical.

NOMES	VALOR	FIGURA	PAUSA
Semibreve	4		
Mínima	2		
Semínima	1		
Colcheia	1/2		
Semicolcheia	1/4		
Fusa	1/8		
Semifusa	1/16		

Fonte: <https://gracieducacaomusical.blogspot.com/2018/01/figuras-musicais-e-pausas.html?m=1>

Cada figura pode ainda ter seu valor aumentado ou diminuído, caso apareça acompanhada de outros símbolos.

- a) **Ponto de aumento:** é um símbolo que faz a figura musical aumentar sua duração pela metade. Ele deve ser colocada à direita da nota ou pausa.

Figura 2.9 – O ponto de aumento foi colocado sobre uma Mínima, e isso fez a Mínima ter duração de Mínima + Semínima, pois a Semínima possui metade da duração de uma Mínima.



Fonte: <https://www.descomplicandoamusica.com/ponto-de-aumento/>

- b) **Ponto de diminuição:** é um ponto colocado abaixo ou acima da nota. Sua função é dividir o valor de uma figura musical em som e silêncio de mesma duração.

Figura 2.10 – O ponto de diminuição dividiu a figura em uma nota de semicolcheia e uma pausa de semicolcheia. As duas figuras somadas totalizam uma colcheia. Como o ponto reduz a nota pela metade, então ficamos com uma figura pela metade somada a uma pausa./



Fonte: <https://www.descomplicandoamusica.com/staccato/>

Figura 2.11 – Iremos somar o tempo das notas que a linha está unindo, tocando-as como se fossem uma só.



Fonte: <https://www.descomplicandoamusica.com/staccato/>

- c) **Ligadura:** É uma linha curva que une notas de mesma altura, somando-se assim o valor (duração) das duas notas.

O uso de um pentagrama nos permite determinar que um som é mais agudo que outro. Para definir o nome de cada nota da pauta, é necessário nomear pelo menos uma delas. Uma clave é um sinal colocado no início da pauta que nomeia as notas escritas naquela linha. Nos espaços e nas linhas seguintes, as notas são nomeadas consecutivamente em ordem das sete notas musicais.

Atualmente três claves são usadas, Sol, Fá e Dó. Eles são derivados de letras maiúsculas que eram indicações das linhas primitivas. O desenho da clave de sol é derivado da letra G, o desenho da clave de Fá da letra F, e o desenho da clave de Dó da letra C. O desenho da clave é rigorosamente repetido no início de cada nova pauta.

Figura 2.12 – Indica a nota Sol na segunda linha.



Figura 2.13 – Indica a nota Fá na quarta linha.



Fonte: <https://www.significados.com.br/simbolos-de-musica/>

Figura 2.14 – Indica a nota Dó na terceira linha.



Fonte: <https://www.significados.com.br/simbolos-de-musica/>

É curioso verificar que na partitura houve uma mudança gradual ao longo do tempo até chegarem à representação que temos hoje, talvez numa tentativa de simplificar as linhas e acelerar o desenho. É fascinante ver que todos eles têm algo em comum em suas características: algo que nos lembra o formato espiral. A chave de Fá é a expressão mais forte da espiral.

Embora todas as notas possam ser representadas por qualquer clave, a clave de sol é usada para escrever as notas agudas (violino, flauta, clarinete, oboé, soprano ou contralto, etc.), enquanto a clave de fá é usada para representar as notas mais graves (tuba, fagote, saxofone baixo, contrabaixo, tenor ou baixo, etc.)

Figura 2.15 – Variações das claves ao longo do tempo.

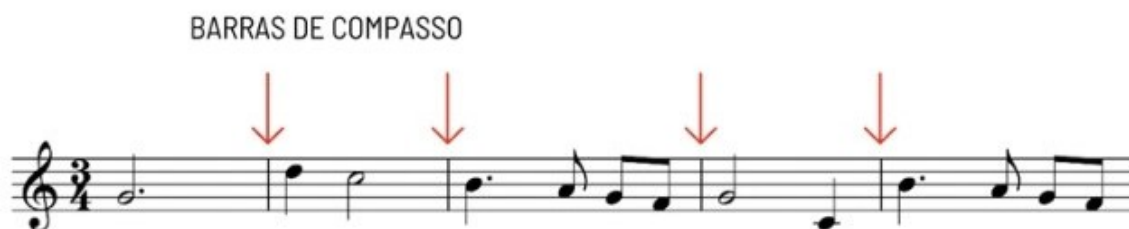


Fonte: <https://musicaeadoracao.com.br/25386/a-variacao-na-simbologia-das-claves-musicais-ao-longo-do-tempo-e-o-modelo-holografico/>

Outra ferramenta importante na música são os números próximos a clave, que determinam como a música é arranjada e dividida em partes iguais, chamadas de compasso. Bohumil Med chama a medida musical de agente métrico do ritmo, quando compomos uma música em uma partitura, podemos dividi-la em intervalos regulares, é o que define o ritmo, refere-se às pulsações que se repetem regularmente ao longo da música.

Podemos perceber que a fórmula do compasso determina qual o intervalo de tempo

Figura 2.16 – Exemplo de um compasso musical.



Fonte: <https://www.descomplicandoamusica.com/compasso-musical/>

vai caber em cada um dos compassos. Neste caso, é $\frac{3}{4}$, significando que em cada um dos espaços dessa subdivisão há um intervalo de tempo equivalente a três semínimas, no exemplo o denominador é representativo de uma determinada figura musical, esse número indica quantas unidades de tempo precisamos para obter uma semibreve. No exemplo em questão, temos o número 4, logo, a unidade de tempo é a semínima, já que quatro semínimas somadas são o mesmo que uma semibreve:

Figura 2.17 – semínima

$$\bullet + \bullet + \bullet + \bullet = \mathbf{0}$$

Fonte: <https://www.descomplicandoamusica.com/compasso-musical/>

Já o numerador indica quantas vezes essa figura, ou o equivalente em tempo a ela, aparecerá em cada compasso musical. Outro elemento que é importante para a teoria musical é a escala, (do latim “scala”, que significa escada) e é definida como uma sucessão de notas consecutivas ascendentes ou descendentes. Quanto ao número de notas, uma escala pode ser classificada como pentatônica (5 notas), hexacordal (6 notas), heptatônica (7 notas), pode também ser diatônica (sequência de sete notas diferentes consecutivas com intervalo de um tom ou um semitom entre elas) ou cromática (sequência de doze semitons consecutivos). Aprofundaremos mais a frente com um tópico específico sobre as escalas.

2.3 Contribuições de Pitágoras

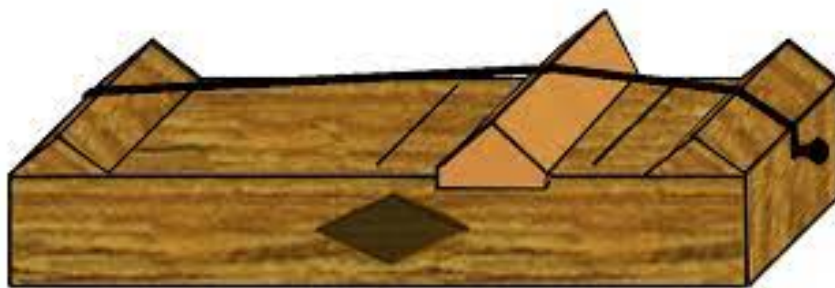
Antes de Aristóteles, os pitagóricos foram o único grupo que fundamentou a música cientificamente (EVES, 2008). Embora muitos povos já tivessem organizado suas escalas musicais, foi Pitágoras o primeiro a criar uma escala obedecendo uma lógica científico matemático (ABDOUNUR, 2006).

Pitágoras (572-497 a.C.) sem dúvida foi um grande nome para a evolução da música, partindo da primeira ligação direta que se tem notícia entre a música e a matemática quando ele efetua uma das mais belas descobertas, que deu origem ao quarto ramo da matemática: a música. Segundo a lenda diz-se que Pitágoras ao ouvir o som de cinco

martelos batendo em uma bigorna, ele ficou admirado com o som agradável, e inicialmente pensou que a qualidade do som vinha da força que era aplicada ao bater o martelo, então ele teria trocado os martelos e percebeu que cada um tinha um som próprio. Após ter tirado um que era desagradável, pesou os outros e constatou que o primeiro pesava doze, o segundo nove, o terceiro oito e o quarto seis de uma unidade desconhecida.

Essas razões deram origem a um instrumento que ficou conhecido como monocórdio, composto por uma caixa de madeira com apenas uma corda, que quando apertada em determinados pontos, produzia sons de alturas diferentes, obteve então através do comprimento da corda, um conjunto de sons agradáveis quando tocadas simultaneamente.

Figura 2.18 – Monocórdio de Pitágoras



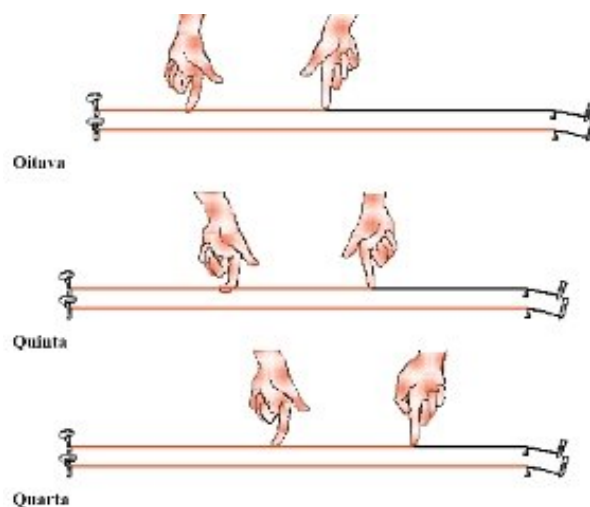
Fonte: <https://ceejamarilia.wordpress.com/2020/07/01/historia-da-musica-pitagoras-e-a-escala-musical/>

Com esse experimento Pitágoras observou que pressionando no ponto em que equivale a metade da corda obteve um som que seria o mesmo tocado com a corda solta, porém mais agudo, o qual chamamos de oitava. Do mesmo jeito que ao tocarmos um ponto situado a $\frac{3}{4}$ do comprimento dessa corda, o som produzido terá uma certa relação com o som original e esse novo som é conhecido como uma quarta (ouve-se uma quarta a cima do tom emitido pela corda inteira) e quando tocarmos $\frac{2}{3}$ do tamanho original da corda, ouvimos uma quinta a cima. Essa experiência deu origem as consonâncias pitagóricas. Assim, se o comprimento original de uma corda for 12, então temos que se reduzir para 9 essa corda, iremos ouvir a quarta, para 8, a quinta e para 6, a oitava.

Essas razões eram bastante importantes para os Pitagóricos, pois eram formadas pelos 4 primeiros números inteiros, cuja soma $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ dá origem à chamada *Tetraktys* que simbolizava o princípio gerador de tudo (HENRIQUE, 2011). As notas consonantais são aquelas que quando tocadas juntas, produzem uma sensação prazerosa aos ouvidos, a consonância para Pitágoras, era mais bela quanto mais simples fosse a relação proporcional entre esses sons. E podemos evidenciar quando analisamos as frações.

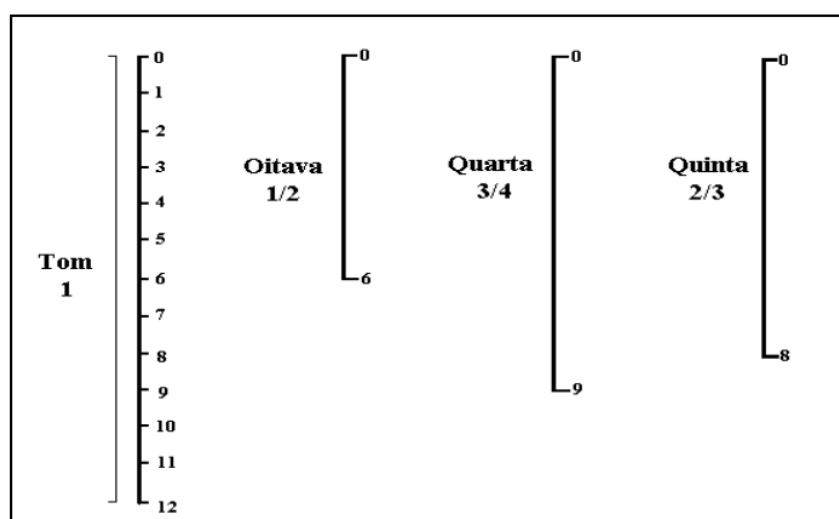
$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \text{ e } \frac{3}{4}$$

Figura 2.19 – Divisão da corda consonância pitagórica.



Fonte: <https://escutecomigo.wordpress.com/2013/03/31/musica-pitagoras-e-a-matematica/>

Figura 2.20 – Marcações feita por Pitágoras no monocórdio.



Fonte: <https://escutecomigo.wordpress.com/2013/03/31/musica-pitagoras-e-a-matematica/>

frações às quais são equivalentes à relação dos pesos dos martelos usados por Pitágoras. Retornando ao exemplo de uma corda de tamanho 12 observamos que

$$\frac{12}{12}, \frac{6}{12}, \frac{8}{12} \text{ e } \frac{9}{12}$$

- Nove é a média Aritmética entre 6 e 12.

$$9 = \frac{6 + 12}{2} \quad (2.1)$$

- Oito é a Média Harmônica² entre 6 e 12.

$$8 = \frac{2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} \quad (2.2)$$

- Seis, oito, nove e doze formam uma proporção.

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12} \quad (2.3)$$

O que deu início a formação da primeira escala musical, a que serviu de base para a música grega formada pelos quatros sons descobertos por Pitágoras, que nas escalas atuais representam a 1^a, 4^a, 5^a e 8^a. Importante destacar que não importa o tamanho da corda inicial, mas a razão desse comprimento c e os comprimentos

$$c1 = \frac{c}{2}, c2 = \frac{2c}{2}, c3 = \frac{3c}{4} \dots$$

obtidos pela divisão da corda. Além de podermos encontrar outros sons equivalentes em oitavas superiores, bastando fracionar a corda em pedaços ainda menores.

Baseado no intervalo de quinta, todas as notas poderiam ser obtidas, criando a chamada escala diatônica Pitagórica. A escala pitagórica foi pioneira pelo fato de poder ser reproduzida usando processos matemáticos, ao invés de apenas usar a audição.

A partir daí foi criado um sistema musical através das relações entre números inteiros.

Os pitagóricos observaram que notas diferenciadas por intervalos de oitava apresentavam certa semelhança, podendo ser definida como uma classe de equivalência, onde duas notas tornam-se equivalentes se o intervalo existente entre elas for, um número inteiro de oitavas, podendo reduzir distintas oitavas a apenas uma, possuindo assim notas equivalentes em todas as outras oitavas e na oitava de origem (ABDOUNUR, 2006, p09.).

² quantidade de elementos no conjunto, dividida pela soma do inverso dos elementos do conjunto. A média harmônica entre n números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é dada por

$$M_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

3 Escalas Musicais

A escala é uma sucessão ascendente ou descendente de notas diferentes consecutivas, ou ainda, uma sucessão ordenada de sons, comprometidos no limite de uma oitava. (BOHUMIL, 1996)

3.1 Consonância e Dissonância

O som é um conjunto contínuo de frequências. No entanto, para fazer música, é necessário pegar conjuntos discretos desse som, que chamamos de escalas. O fator mais importante na escolha desse conjunto de frequências é o número de consoantes possíveis entre os tons individuais. Sons que formam escalas. A frequência f emitida por instrumentos musicais tradicionais pode ser decomposta em frequências que são múltiplos inteiros de f . A componente f_1 é a fundamental, e o componente $f_n = n \cdot f_1$ é o n -ésimo harmônico. Quanto maior o número de harmônicos existirem em comum, mais consonantes os dois sons serão.

Um intervalo de oitava corresponde a dobrar a frequência de vibração. Por exemplo, o Lá de frequência 440Hz é uma oitava mais agudo que o Lá de frequência 220Hz. Para essas duas notas, as parciais são:

PARCIAIS	NOTA 1	NOTA 2
1	440Hz	220Hz
2	880Hz	440Hz
3	1320Hz	660Hz
4	1760Hz	880Hz
5	2200Hz	1100Hz
6	2640Hz	1320Hz

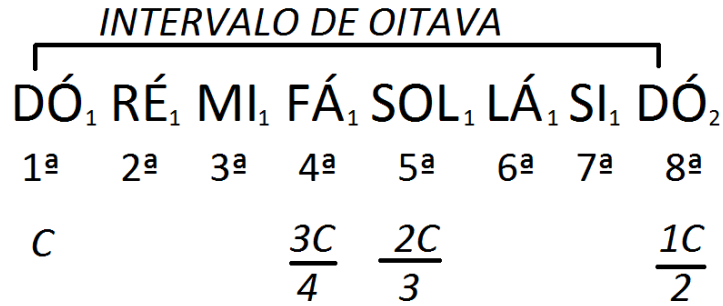
Tabela 3.1 – Lá 440HZ e Lá 220Hz

Observamos na tabela que todos os harmônicos do Lá 440Hz são harmônicos do Lá 220Hz, basta continuar indefinidamente o cálculo dos harmônicos. Por serem sons semelhantes nosso cérebro percebe essas notas como sendo iguais, porém a primeira mais aguda que a segunda, então concluímos que essas notas são consonantes.

3.2 Surgimento das Primeiras Escalas

A primeira escala possuía apenas quatro sons, mas a partir de descobertas seguindo os estudos feitos por Pitágoras, chegou-se a Escala Diatônica de Dó. Que possui 7 notas, mas incluindo a 8ª a torna uma escala com 8 sons.

Figura 3.1 – Intervalo de oitava



Fonte: Própria

Observamos acima que nesse caso a primeira oitava está delimitada pelas notas DÓ₁ e DÓ₂. E entre elas tem-se as outras RÉ, MI, FÁ... Genericamente a n -ésima oitava será entre DÓ _{n} e DÓ _{$n+1$} e terá entre elas as notas, RÉ _{n} , MI _{n} , FÁ _{n} ... Nesse caso supondo que ao fazer o experimento do monocórdio, Pitágoras tivesse afinado a corda em DÓ₁, podemos então afirmar que ele já percebia as notas FÁ₁ (quarta), SOL₁ (quinta) e o DÓ₂ (oitava).

Uma forma comum de músicos de todo o mundo encontrarem notas específicas e notas antes e depois de uma nota qualquer, é dada por um processo chamado ciclo das quintas.

Definição 3.1. *Em termos de comprimento da corda, a quinta (ou quinta justa) de uma nota musicalmente é determinado por*

$$Q_n = \frac{2}{3} \cdot X_n \quad (3.1)$$

onde X_n é uma nota qualquer.

Tomando a razão de frequência já definida para a quinta $\frac{2}{3}$. Podemos determinar o ciclo das quintas da seguinte forma: partindo de uma nota como referência, por exemplo o DÓ, devemos encontrar a quinta de DÓ, depois a quinta em relação à quinta de DÓ, e assim por diante.

- A quinta de DÓ _{n} é SOL _{n} .
- A quinta de FÁ _{n} é DÓ _{$n+1$} .

Assim de maneira genérica, a m -ésima quinta, que pertencerá a n -ésima oitava, é obtida pela equação: $Q_m = \left(\frac{2}{3}\right)^m \cdot DÓ_m$. Ao definirmos a 1ª nota, DÓ₁ com 1 unidade de comprimento, ou seja $c = 1$, podemos então calcular os comprimentos das cordas que produzem os tons das próximas quintas.

- quinta de DÓ₁:

$$\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

que equivale a SOL₁ quinta de FÁ₁:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

que equivale a DÓ₂.

- quinta de SOL₁:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

que determina a nota RÉ₂. Logo, o RÉ₁ terá o dobro do comprimento de RÉ₂.

$$2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

- quinta de RÉ₁:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{27}$$

que equivale ao LÁ₁

- quinta de LÁ₁:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{27} = \frac{32}{81}$$

que equivale a MI₂. Logo, MI₁, terá o dobro do comprimento de MI₂.

$$2 \cdot \frac{32}{81} = \frac{64}{81}$$

.

- quinta de MI₁:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{64}{81} = \frac{128}{243} \quad (3.2)$$

que equivale ao SI₁.

Temos então:

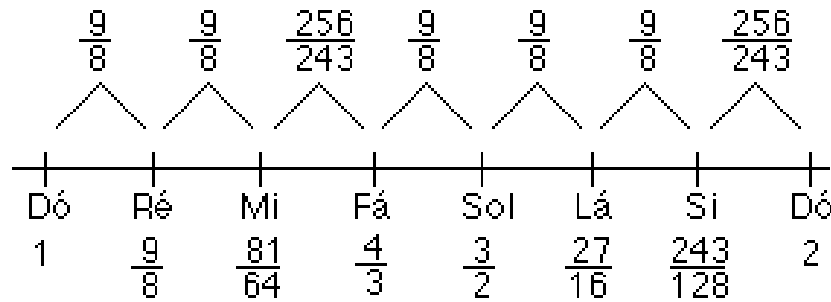
NOTA	DÓ ₁	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI	DÓ ₂
RAZÃO	$\frac{1}{1}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Tabela 3.2 – Escala Pitagórica

As notas DÓ, RÉ, MI, FÁ, SOL, LÁ E SI formam a escala diatônica de sete notas. Ao calcularmos o intervalo entre essas notas encontraremos apenas dois valores: $\frac{9}{8}$, o tom diatônico pitagórico e $\frac{256}{243}$, o semitom diatônico pitagórico.

Por ser muito famosa, essa sequência de quintas foi utilizada durante muito tempo, porém esse raciocínio nem sempre encontrará uma nova nota com frequência equivalente à nota inicial do processo, isso significa que as notas possíveis e suas frequências não serão obtidas durante esse processo, ou seja, embora as notas fossem “perfeitas”, ocorria

Figura 3.2 – Razão intervalar resultante.



Fonte: <https://iazzetta.eca.usp.br/tutor/acustica/escalas/pitagorica.html>

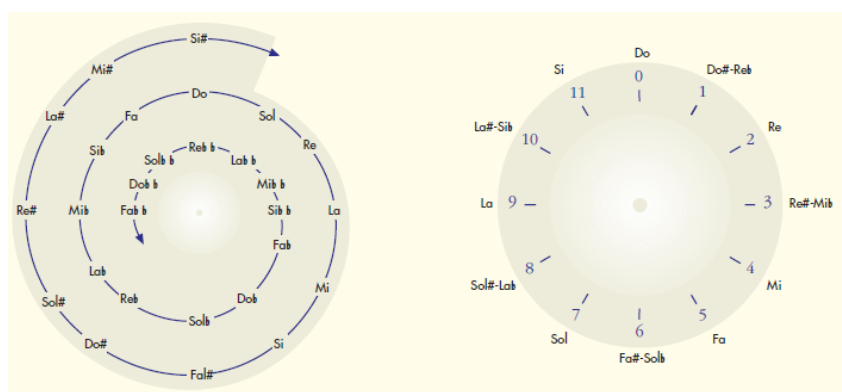
problemas quando alguns acordes de diferentes tonalidades eram usados. Pitágoras também observou que o intervalo de quinta perfeita correspondia à razão de frequência $\frac{3}{2}$ e era particularmente consonante. Já que possuem essa relação entre o intervalo de quinta e a frequência das notas, podemos tomar uma nota com frequência f , após observar m quintas, a nota alcançada corresponde à $f \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^m$. Mas, os intervalos de oitavas naturais estão associadas à frequência 2, ou seja, observando n oitavas a nota obtida terá frequência multiplicada por 2^n . Logo, temos que um número inteiro de quintas jamais será equivalente a um número inteiro de oitavas, isto é, $f \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^m \neq f \cdot 2^n$.

Em busca de solucionar o problema, fez-se necessário a criação de uma nova escala composta por 12 partes (semitons) no intervalo de oitava, inserindo 11 meios geométricos entre o som fundamental e sua oitava, onde a razão é $2^{\frac{1}{12}}$, logo se tomarmos 1 como frequência do som, podemos obter para as outras notas da escala pitagórica a sequência $(2^{\frac{2}{12}}, 2^{\frac{3}{12}}, 2^{\frac{4}{12}}, \dots, 2^{\frac{11}{12}}, 2)$. E essa escala ficou conhecida como escala bem temperada.

Johann Sebastian Bach, no século XVIII, implementou o sistema do “bom temperamento”, que envolveu os ajustes necessários na escala pitagórica de tal forma que uma oitava era dividida em intervalos que permitam tocar em qualquer tonalidade e assim podia eliminar o problema das notas nas oitavas de não serem coincidentes.

Podemos observar abaixo que a espiral segue infinitamente para a escala não temperada, enquanto a escala temperada é distribuída sobre uma circunferência, permitindo um ciclo.

Figura 3.3 – Espiral de quintas e Relógio cromático de 12 tons



Fonte: <https://espacoastrologico.com.br/2012/09/16/a-musica-das-esferas/>

4 Série Harmônica e a Série de Fourier

Um som possui sons ocultos que percebemos à medida em que a proporção destes entes tácitos mostra-se mais significativa e que educamos nossos ouvidos para enxergá-los. Os harmônicos de uma nota musical são precisamente esses sons parciais que compõem sua sonoridade, e a Série Harmônica desta mesma nota caracteriza-se pela sequência de tais sons ordenada do grave ao agudo. (ABDOUNUR, 2006, pg.87)

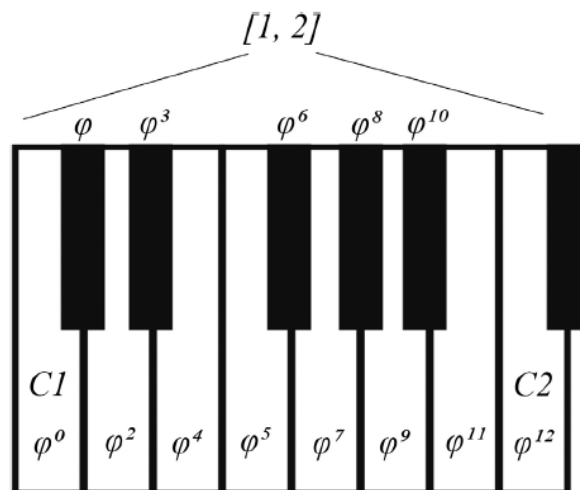
Conceitos harmônicos são conhecidos desde a antiguidade e para explicar alguns conceitos de forma diferentes o Princípio de Fourier organizou uma estrutura capaz de mostrar diferentes fenômenos matemático-musicais.

4.1 Sistema Temperado

Como visto anteriormente ouve-se a necessidade em se trabalhar com notas que não soavam em consonância, o sistema temperado foi capaz de reduzir a menor distância entre duas notas num intervalo (semitom), em que essas frequências são dadas por um múltiplo que se aplica igualmente a todos os semitons. Dentro de uma oitava tem-se 12 notas, portanto 12 frequências e 12 semitons.

Para alcançarmos uma entonação igual, podemos pensar nas seguintes distribuições no piano: Cada tecla contém um termo (φ), que irá representar a base de uma potência, na qual a frequência de uma nota será dada pelo múltiplo da frequência de sua nota anterior por esse termo. Vamos supor que a frequência de Dó₁ assuma o valor de $\varphi^0=1$.

Figura 4.1 – Distribuição do termo de potência num intervalo de uma oitava em um piano.



Como trabalhado no capítulo anterior sabemos que a razão da frequência do DÓ da segunda oitava (f_{c2}) com o DÓ da primeira (f_{c1}) é igual a dois, logo:

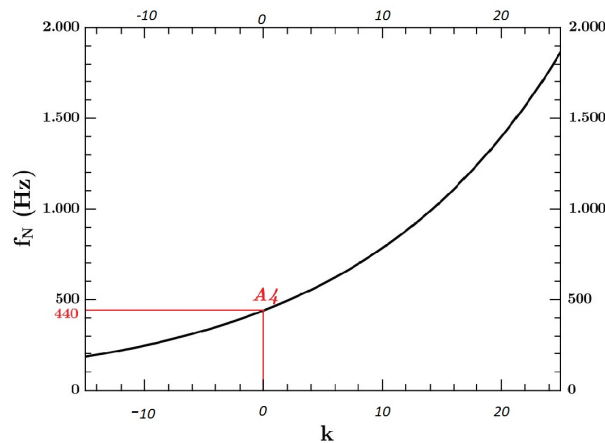
$$\frac{f_{c2}}{f_{c1}} = 2 \implies \frac{\varphi^{12}}{\varphi^0} = 2 \implies \varphi^{12} = 2 \iff \varphi = 2^{\frac{1}{12}} \quad (4.1)$$

Assim determinamos o valor da base de uma potência a qual descreve a função da frequência do sistema temperado. Então a frequência de uma nota qualquer pode ser dada multiplicando a frequência de uma nota fundamental adotada pelo φ^k , em que k é o número de semitons da nota fundamental até a nota que buscamos encontrar a frequência f_n . Como no sistema ocidental adotamos para a nota LÁ4 a frequência igual a 440Hz com sendo a fundamental, podemos então a partir dela encontrar as frequências de qualquer outra nota, usando

$$f_N(k) = 440 \cdot 2^{\frac{k}{12}}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (4.2)$$

Logo, o sistema temperado se baseia em uma curva exponencial.

Figura 4.2 – Relação frequência de uma nota com a frequência 440 Hz



Fonte: https://www.researchgate.net/figure/Figura-2-Relacao-entre-a-frequencia-de-uma-nota-fN-com-o-n-o-de-semitons-k-que-dista-em_fig2_362510885

Podemos observar que foi adotado o LÁ4 de 440 Hz como sendo a fundamental φ^0 e a frequência para sons acima dela. Por exemplo, a nota SOL5 dista 10 semitons acima do LÁ4, logo podemos encontrar sua frequência adotando k igual a 10.

4.2 Séries Harmônicas

Uma vibração é composta pelo som fundamental e uma série de sons de menor intensidade, porém de frequência maior que denominamos harmônicos. Como já visto o comprimento de uma corda é inversamente proporcional à frequência do som fundamental, sendo que o som fundamental irá possuir a menor frequência e o segundo harmônico terá uma sequência, duas vezes maior, o terceiro três vezes e assim por diante. Podemos então

concluir que considerando uma frequência f_1 a série harmônica de cada nota musical irá obedecer o padrão: $f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$. Observamos que a série harmônica é infinita, e podemos representá-la como uma função periódica através de um soma de funções senoidais.

$$f(x) = k_1 \sin(2\pi \cdot f_1 x) + k_2 \sin(2\pi \cdot 2f_1 x) + k_3 \sin(2\pi \cdot 3f_1 x) + \dots \quad (4.3)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin(2\pi \cdot n \cdot f_1 x) \quad (4.4)$$

sendo k_n a intensidade dos harmônicos e $n \cdot f_1$ a frequência de cada harmônico, a partir de uma frequência fundamental f_1 . Vale destacar que a sequência k_n decresce, na medida que n cresce, pois os harmônicos são cada vez menos intensos enquanto as frequências aumentam linearmente.

4.3 Série de Fourier

Consideramos a Definição 4.1 e a Definição 4.3 em que fizeram Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) a questionar se na função que é dita periódica, pode ser expressa como um limite de polinômios trigonométricos.

Definição 4.1 (Funções Periódicas). *Uma função $f(t)$ tem período T ou é periódica com período T se, para todo $t \in D_f$, vale que $f(t + T) = f(t)$, em que $T \in \mathbb{R}_+^*$.*

Exemplo 4.2. *Seja*

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.5)$$

em que A , ω e φ são constantes. Denominamos tal função por harmônico de amplitude $|A|$, frequência angular ω e fase inicial φ , onde o período de cada harmônico $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Definição 4.3 (Polinômios Trigonômétricos Reais). *Uma função da forma*

$$p(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^m a_j \cos(jt) + \sum_{j=1}^n b_j \sin(jt) \quad (4.6)$$

em que $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, é denominada polinômio trigonométrico real.

Polinômios trigonométricos são periódicos de período $T = 2\pi$ pois satisfazem a Definição 4.1.

Com isso Fourier para responder o seu questionamento considerou uma função $f(t)$ de período 2π possuindo a expressão a seguir

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]. \quad (4.7)$$

integrando os dois lados da igualdade no intervalo $[-\pi, \pi]$, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \pi a_0. \quad (4.8)$$

E multiplicando ambos os lados por $\cos(nt)$ e depois integrando o resultado no mesmo intervalo, vamos ter que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \pi a_n. \quad (4.9)$$

Repetindo o mesmo processo, porém multiplicando os dois termos da equação (4.6) por $\sin(nt)$, iremos obter

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \pi b_n. \quad (4.10)$$

então temos das equações (4.7), (4.8) e (4.9)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad (4.11)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

temos, que os valores a_0, a_n , e b_n calculado pelas igualdades em (4.10) são chamadas de coeficientes de Fourier. Logo, a série de Fourier de f é dada por.

$$f(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt). \quad (4.12)$$

E podemos reescrever considerando a fórmula de Euler ($e^{it} = \cos t + i \sin t$), logo.

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad (4.13)$$

em que c_n é dada por

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad (4.14)$$

Podemos dizer que a quantidade e^{int} da equação são os harmônicos de f , enquanto o termo c_n representa a amplitude desses harmônicos.

Se adotarmos um sinal sonoro podendo ser descrito por um f_t e esta possuir uma frequência, implicará que o sinal se repetirá quando o valor for adicionado a um ponto $t \in D_f$. E a série de Fourier consiste em encontrar a partir da expansão dessa função um sinal sonoro para as demais frequências que compõem o sinal, com amplitude menores é o que denominamos de série harmônica. O que nos diz que um sinal ondulatório periódico, como as ondas sonoras, pode ser decomposto em sinais de onda simples, com amplitude bem definida. Então para isso precisamos que algumas condições sejam aceitas, e essas condições a denominamos de condições de Dirichlet.

1. $f(t)$ deve ser absolutamente integrável em T , o que significa que a área entre f e a abscissa é finita, ou seja

$$\int_0^T f(t)dt = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \quad (4.15)$$

2. $f(t)$ deve ser de variação finita em T , ou seja, o número de máximos e mínimos locais de f são finitos;
3. $f(t)$ deve ter um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo limitado e as descontinuidades devem ser finitas;

Com essas condições uma função torna-se válida para ser aproximada por uma série de Fourier.

Teorema de Dirichlet para séries de Fourier: *Seja f uma função periódica com período T que satisfaz as condições de Dirichlet, então $\forall t \in D_f$, temos que a série resultante quando substituirmos t na série de Fourier converge para $f(t)$.*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{int} = f(t) \quad (4.16)$$

O teorema nos garante que seja uma função $f(t)$ contínua num intervalo $T = [-l, l]$ de periodicidade, para todos os pontos t de continuidade, tal série converge para a própria $f(t)$. Seja uma função que modela um harmônico n de frequência angular $\omega_n = 2\pi f_n = \frac{\pi}{t}$, a equação a seguir corresponde à forma trigonométrica da série de Fourier para um sinal sonoro.

$$F(t) = \frac{1}{2} X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + Y_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \right] \quad (4.17)$$

Essa série decompõe uma curva $f(t)$ acrescentando a essa uma parte cossenoide escalonada a ondas senoidais de frequências iguais a múltiplos inteiros de uma fundamental. X_0 , X_n e Y_n , logo os coeficientes de Fourier podem ser expressos por:

$$X_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t)dt \quad (4.18)$$

$$X_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt$$

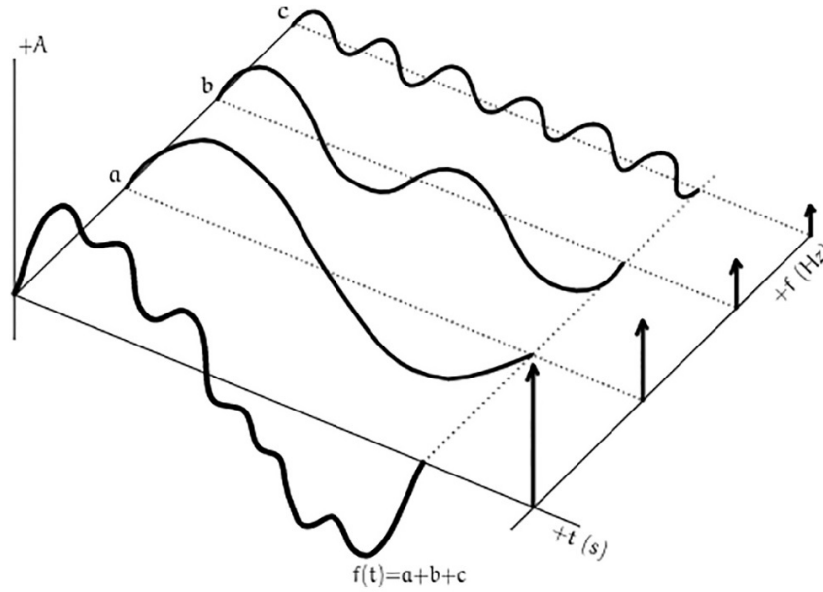
$$Y_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt$$

Utilizando a fórmula de Euler, podemos reescrever $F(t)$ da equação (4.17) na forma complexa.

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n e^{i \frac{n\pi t}{l}}, \quad Z_n = \frac{1}{2} (X_n - i Y_n) \quad (4.19)$$

Ao representarmos o som usamos uma configuração matemática para descrever os sinais vindos da vibração. Um pulso sonoro é descrito por uma função a qual é expandida por funções que descrevem as ondas sonoras graficamente. Temos no exemplo uma aproximação

Figura 4.3 – expansão de um pulso sonoro em uma série de Fourier



Fonte: https://www.researchgate.net/figure/Figura-3-Aproximacao-de-um-sinal-por-uma-serie-de-Fourier-a-qual-representa-os-sinais_fig3_362510885

de um sinal por uma série de Fourier, a qual representa os sinais sonoros a , b e c que compõem o pulso $f(t)$. Em $f = 0$ o plano que representa o sinal sonoro $f(t)$, e em $t = 0$ temos o plano da amplitude de cada harmônico correspondente a série, podemos notar que quanto maior o harmônico menor é a intensidade.

Importante notar na série de Fourier que f é uma função periódica par, logo temos que, $f(-t) = f(t)$ para todo t , então

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \sin(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(-t) \sin(-nt) (-dt) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (4.20) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-f(t) + f(t)) \sin(nt) dt = 0,
 \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$. Assim a série de Fourier da função f pode ser escrita usando apenas termos cossenos

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) \quad (4.21)$$

com coeficientes determinados por

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \cos(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(-t) \cos(-nt) (-dt) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad (4.22) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(-t) + f(t)) \cos(nt) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt,
 \end{aligned}$$

para $n=1,2,3,\dots$

Analogamente, se f for uma função ímpar, logo, $f(-t) = -f(t)$, então

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \cos(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(-t) \cos(-nt) (-dt) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad (4.23) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-f(t) + f(x)) \cos(nt) dt = 0 \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$. Assim a série de Fourier da função f pode ser escrita usando apenas termos senos

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \quad (4.24)$$

cujos os coeficientes são

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \sin(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(-t) \sin(-nt) (-dt) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (4.25) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-f(-t) + f(t)) \sin(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt, \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$

As séries de Fourier são capazes de representar, qualquer função periódica, sendo que a igualdade só acontece quando a função é seccionalmente diferenciável.

Pela propriedade de periodicidade das ondas sonoras que nos diz se tomar um sinal sonoro descrito por uma função $f(t)$ e que possui uma determinada frequência, teremos um final que se repete quando o valor é adicionado a um ponto $t \sim D_f$.

4.4 A Função Harmônica Analisada pela Série de Fourier

Podemos representar o termo Z_n da série de Fourier em uma forma complexa (4.19) através do diagrama de amplitudes, chamado de *Espectro de Amplitude* e precisaremos encontrar o valor absoluto de Z_n . Usaremos a (4.5) com fase inicial $\phi = 0$, amplitude A e frequência angular ω quaisquer:

$$\varepsilon(t) = A \sin(\omega t) \quad (4.26)$$

Calculando a série de Fourier na sua forma trigonométrica para $F(t) = \varepsilon(t)$, obtemos

$$F(t) = \frac{2A \sin(\omega \pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\omega^2 - n^2} \sin(nt) \quad (4.27)$$

Reescrevendo na forma exponencial obtemos:

$$F(t) = \frac{(-A)\text{sen}(\omega\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n n}{\omega^2 - n^2} \cdot \frac{1}{2i} (e^{int} - e^{-int}) \right] \quad (4.28)$$

e tomando apenas a parte com termos exponenciais maiores que zero (pois a análise de frequência harmônicas se dá para aquelas que são positivas), temos

$$F^+(t) = \frac{2A\text{sen}(\omega\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-n)^n}{\omega^2 - n^2} \left(\frac{1}{2i} e^{int} \right) \right] \quad (4.29)$$

Ao compararmos a expressão (4.29) com aquela em (4.19) chegar-se à conclusão de que o termo Z_n vale

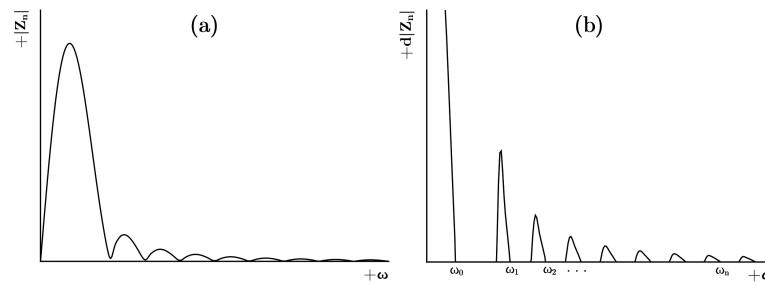
$$Z_n = \frac{(-1)^n \cdot A \cdot n \text{sen}(\omega\pi)}{i\pi(\omega^2 - n^2)} \quad (4.30)$$

E tomando o seu valor absoluto iremos concluir que $|Z_n|$ é uma função de ω ($|Z_n| = |Z_n|(\omega)$) que é dada por

$$|Z_n(\omega)| = \frac{A \cdot n}{\pi} \left| \frac{\text{sen}(\omega\pi)}{(\omega^2 - n^2)} \right|, \quad \forall \omega \neq n, \quad (4.31)$$

Portanto o gráfico de $|Z_n| \times \omega$ resulta no diagrama de espectro de amplitude. Isso porque Z_n em (4.19) representa amplitude como uma função das frequências harmônicas geradas por um sinal sonoro descrito em sua expansão numa série de Fourier.

Figura 4.4 – Diagrama de espectro de amplitude



Fonte: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/rL4X9n6rVhY6ZJczHNRNjqH/?format=pdf&lang=pt>

Exemplo de um diagrama de espectro de amplitude para um sinal do tipo $\varepsilon(t)$ com $n = 1$ e $A = 10$ u.a (unidade de amplitude). Observamos que no gráfico (b), temos a função derivada da curva descritas no gráfico (a). As frequências da série harmônica correspondem aos pontos máximo de $|Z_n|$, somente quando a derivada da equação (4.4) é igual a zero e quando a segunda derivada é menor do que zero é que teremos um ponto o qual representa a amplitude de um harmônico. Logo existem duas condições para que uma frequência pertença ou não a série harmônica em estudo, quando obtemos o diagrama de espectro de amplitude e tomamos o valor absoluto de Z_n em função de ω , logo para

acharmos os pontos representantes das intensidades dos harmônicos as seguintes relações devem ser atendidas.

$$\begin{aligned}\frac{d|Z^n|}{d\omega} &= 0 \\ \frac{d^2|Z_n|}{d\omega^2} &< 0\end{aligned}\tag{4.32}$$

5 Implicações Educacionais

(JAPIASSU, 1976), diz que a interdisciplinaridade se caracteriza pela intensidade das trocas entre os especialistas e pelo grau de integração real das disciplinas no interior de um mesmo projeto de pesquisa, exige-se que as disciplinas, em seu processo constante e desejável de interpenetração, se fecundem cada vez mais reciprocamente. Para tanto, é imprescindível a complementaridade dos métodos, dos conceitos, das estruturas e dos axiomas sobre os quais se fundam as diversas práticas pedagógicas das disciplinas científicas. (JAPIASSU, 1976) destaca ainda:

[...] do ponto de vista integrador, a interdisciplinaridade requer equilíbrio entre amplitude, profundidade e síntese. A amplitude assegura uma larga base de conhecimento e informação. A profundidade assegura o requisito disciplinar e/ou conhecimento e informação interdisciplinar para a tarefa a ser executada. A síntese assegura o processo integrador. (p. 65-66)

Na interdisciplinaridade, a especificidade do campo de estudo é explorada de forma adequada, pois as conexões feitas são mais livres e menos prescritivas. A importância de apresentar aos alunos diferentes conteúdos em atividades interdisciplinares está em criar oportunidades para que eles observem, percebam, aprendam, comparem e se relacionem com os temas apresentados.

(GARDNER, 1995) nos diz que a inteligência está ligada com um espectro de múltiplas competências para discutir as dinâmicas de participação do Pensamento Analógico, que revela uma especial atenção às relações entre as competências matemática e musical, e completa que para a sabedoria popular, essas áreas encontram-se intimamente ligadas.

5.1 Matemática e Música no Ensino

Os pitagóricos acreditavam que para se educar uma pessoa, esta deveria ser educada musicalmente, a música contribui para o desenvolvimento psicomotor, socioafetivo, cognitivo e linguístico, além de ser um recurso facilitador na aprendizagem (BRÉSCIA, 2003). O uso da música como ferramenta torna mais prática e atraente as aulas.

Dos anos iniciais, ensino fundamental ao ensino médio a música é uma grande ferramenta no ensino-aprendizagem de matemática.

Pontuar música na educação é assinalar a necessidade de sua prática nas escolas, auxiliar o educando a concretizar sentimentos em formas expressivas, favorecer a interpretação de sua posição no mundo, possibilitar a compreensão de suas vivências, conferir sentido e significado à sua condição de indivíduo e cidadão. Como toda comunicação envolve conflito, poder, ideologia e negociação, o educando precisa aprender a lidar com esses valores com competência e autonomia, e aí emerge a potencialidade da música como agente mediador, auxiliando na construção de um diálogo com a realidade. Maria de Lourdes Sekeff

(CAMPOS, 2009, p.16), nos diz que a música cria um ambiente livre de tensões, facilita a socialização, cria um ambiente escolar mais abrangente e favorece o desenvolvimento afetivo. Na música, vários motivos são simultaneamente acionados: a audição, o canto, a dança, o ritmo corporal e instrumental da criação melódica – contribuindo para o desenvolvimento da pessoa e servindo para transformar o ato de aprender em uma atitude prazerosa no cotidiano do professor e do aluno. De acordo com Campbell, Campbell e Dickinson (1996), “devido à forte ligação entre a música e as emoções, a música na sala de aula pode ajudar a criar um ambiente emocional positivo conducente à aprendizagem” (CAMPBELL; CAMPBELL; DICKINSON, 1996, p.133)

Estudos afirmam que muitos alunos gostam de participar de atividades que envolvem música, sendo assim atividades interdisciplinares que incluem instrumentos e estudo dentro da teoria musical, contribuem com o desenvolvimento escolar dos alunos e também nas relações estudadas. Na matemática muitos assuntos podem ser abordados de forma musical, estudar a teoria musical através da matemática abre um leque de possibilidades para serem abordadas em sala de aula.

Pesquisas e oficinas proporcionam uma maior compreensão, podemos usar os conceitos de consonância, timbre, harmônicos, altura musicais como exemplos capazes de serem adaptados para conceitos matemáticos e assim como trabalhado nesse estudo métodos usando as séries de Fourier que podemos analisar as frequências de um som. Possibilidades de construir experimentos, permitem aprendizagem na prática.

(PEREIRA, 2007) menciona que o ensino por meio da música é uma excelente ferramenta como recurso pedagógico, considerando que trabalha também aspectos emocionais, históricos e sociais. A música desenvolve o raciocínio, criatividade e estimula a autodisciplina, mas cabe ao educador ter boas práticas, (MOREIRA; SANTOS; COELHO, 2014) diz que a música pode ser uma atividade divertida e que ajuda na construção do caráter, consciência e da inteligência emocional da pessoa, pois desenvolve a mente humana e pode até mesmo transformar conceitos espontâneos em conceitos científicos. Assim um professor que saiba como usar métodos capazes de prender atenção e estimular o aprendizado dos alunos pode favorecer o ensino-aprendizagem da matemática.

Conclusão

O presente estudo, abordou a importância da matemática para a teoria musical. Neste trabalho buscou-se esboçar alguns tópicos importantes para a evolução musical partindo do contexto histórico e ponderando a primeira ligação que se tem notícias da união das duas áreas, através das definições apresentadas por Pitágoras, que ao construir um instrumento, descobriu a relação existente entre as tonalidades de cordas tocada inteira ou apenas parte delas, em que podemos ouvir o mesmo som, porém mais agudo em relação a corda inteira, a partir daí se estabeleceu os primeiros intervalos musicais, conhecidos como -oitava, quinta e quarta- o que correspondem matematicamente as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ respectivamente, as frações estão ligadas diretamente ao tamanho da corda tocada. O que deu início aos estudos das escalas, baseadas nas definições de Pitágoras, estabeleceu-se as escalas pitagórica (baseada nas quintas justas) e escala bem temperada (em que uma oitava era dividida em intervalos que permitam tocar em qualquer tonalidade). Pitágoras deixou assim muitos conceitos que são usados até hoje na música.

Ao ter a necessidade de se trabalhar com sons harmônicos, em que soavam de maneira agradável aos ouvidos, desenvolveu-se o sistema temperado em que foi capaz de reduzir a menor distância entre duas notas num intervalo o que nos permite dizer que dentro de uma oitava tem-se 12 notas, portanto 12 frequências e 12 semitons, vimos que a série harmônica obedece um padrão em relação a frequência $f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$ sendo infinita, então a representamos como um soma de funções sinodais. Além de aplicarmos a série de Fourier na funções harmônicas, o que nos possibilitou fazer uma ligação direta entre as duas e assim destacar mais uma relação entre ambas as áreas.

Os pitagóricos também acreditavam que para se educar uma pessoa, essa deveria ser educada musicalmente, vimos que a educação musical abre um leque de possibilidades para o ensino-aprendizagem de alunos, o uso da música possibilita a ampliação de conhecimentos e a interdisciplinaridade trás conexões mais livre e cria oportunidades para que os alunos aprendam, comparem e se relacionem com vários temas.

Este trabalho teve o intuito de verificar as importantes uniões que se tem entre a música e matemática e com base nisso associar a interdisciplinaridade no ensino-aprendizagem de alunos.

Referências

- ABDOUNUR, O. J. *Matemática e Música: um pensamento analógico na construção de significados*. 4^a. ed. [S.l.]: Escrituras, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 10, 13, 14, 21, 24 e 30.
- BOHUMIL, M. *Teoria da Música*. 4^a. ed. Brasília – DF: Musimed, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 25.
- BRÉSCIA, V. L. P. *Educação Musical: bases psicológicas e ação preventiva*. São Paulo: Átomo, 2003. Citado na página 39.
- CAMPBELL, L.; CAMPBELL, B.; DICKINSON, D. *Teaching & learning through multiple intelligences*. Massachusetts: Allyn & Bacon, 1996. Citado na página 40.
- CAMPOS, G. P. da S. *Matemática e música: práticas pedagógicas em oficinas interdisciplinares*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Pós-Graduação em Educação - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, 2009. Citado na página 40.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. São Paulo: Editora Unicamp, 2008. Citado na página 21.
- FAZENDA, I. C. A. *Interdisciplinaridade: história, teoria e pesquisa*. 4^a. ed. São Paulo: Papirus, 1994. Citado na página 11.
- FORTES, F. P. Combinatória e pensamento simbólico musical em Leibniz. *Revista O que nos faz pensar*, v. 18, n. 25, 2009. ISSN 0104-6675. Citado na página 10.
- GARDNER, H. *Inteligências múltiplas: a teoria na prática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. Citado na página 39.
- GRANJA, C. E. de S. C. *Musicalizando a escola: Música, conhecimento e educação*. São Paulo: Escrituras, 2006. Citado na página 13.
- HENRIQUE, L. L. *Acústica Musical*. [S.l.]: Serviço de Educação e Bolsas, 2011. Citado na página 22.
- JAPIASSU, H. *Interdisciplinaridade e Patologia do Saber*. Rio de Janeiro: Imago, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 39.
- KILMER, A. D. *Música e Dança na Antiga Ásia Ocidental*. [S.l.]: Scribner, 2000. Citado na página 14.
- LUCK, H. *Pedagogia Interdisciplinar: fundamentos teórico-metodológicos*. Petrópolis: Vozes, 1994. Citado na página 11.
- MOREIRA, A. C.; SANTOS, H.; COELHO, I. S. A música na sala de aula - a música como recurso didático. *UNISANTA Humanitas*, v. 3, n. 1, 2014. Citado na página 40.
- PEREIRA, P. G. *Reflexões sobre o uso de música na sala de aula de LE: as crenças e a prática de dois professores de inglês*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — UFG, Goiânia, 2007. Citado na página 40.

PETRAGLIA, I. C. *Interdisciplinaridade o cultivo do professor*. São Paulo: Pioneira, 1993.
Citado na página 11.