UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA

ELANA LIMA DE FREITAS AMORIM

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

SÃO LUÍS
2022

ELANA LIMA DE FREITAS AMORIM

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Monografia apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura
Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo

São Luís – MA
2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Lima de Freitas Amorim, Elana.
A utilização do software geogebra no ensino da semelhança de triângulos / Elana Lima de Freitas Amorim. - 2022.
77 p.

Orientador(a): Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo.
Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2022.

1. Geogebra. 2. Semelhança de triângulos. 3. Software. 4. TICs. I. Antônio Ferreira de Araújo, Prof. Dr. Marcos. II. Título.

ELANA LIMA DE FREITAS AMORIM

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Monografia apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Trabalho APROVADO. São Luís – MA, 04/02/2022

____

Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
DEMAT/UFMA

____

Prof. Me. José Mairton Barros da Silva
DEMAT/UFMA

____

Prof. Sônia Rocha Santos Sousa
COLUN/UFMA

Dedico a Deus, por sempre estar ao meu lado nos momentos mais difíceis.

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer a minha família, por estarem presentes em tantos momentos difíceis durante o meu processo de formação, não é nada fácil. Meu esposo por sempre está me dando força e apoio além de acreditar na minha capacidade acadêmica como ninguém. Aos meus colegas de curso Luana Soares e Antonio Moraes pelos diversos momentos bons e pela parceria diante das dificuldades acadêmicas que enfrentamos juntos, obrigada por estarem comigo, obrigada pela a amizade de vocês e pelos ensinamentos. Por fim, agradeço a todo o corpo docente do departamento de matemática. Muito obrigada a cada um de vocês.

Portanto, não percam a coragem, pois ela traz uma grande recompensa.
Hebreus 10:35.

Resumo

A implantação das tecnologias da informação e comunicação nas escolas é um processo que já foi iniciado, e que vem mudando o perfil do processo de ensino-aprendizagem. A partir disso, procurando inserir tais tecnologias em sala de aula, tivemos como objetivo analisar as respostas de dez alunos referente ao questionário aplicado durante o desenvolvimento da pesquisa, além de apresentar uma abordagem que fará uso de recursos tecnológicos como o software Geogebra, a fim de facilitar a compreensão e de dá mais sentido a conceitos que inicialmente podem parecer extremamente abstratos. Com isso, espera-se que seja elaborada uma didática com o intuito de tornar o conteúdo de semelhança de triângulos um assunto que o aluno fazendo o uso de ferramentas educacionais consiga melhor compreender a teoria e a aplicação. Sendo assim, além do levantamento de informações sobre a informatização dos alunos do Programa de iniciação científica (PIC) edição especial e de seus conhecimentos a respeito deste conteúdo da geometria plana, a pesquisa possibilita também uma reflexão da temática e das mudanças ao adotar uma didática voltada para as tecnologias educacionais.

Palavras-chave: Semelhança de triângulos, Software, TIC, Geogebra.

Abstract

The implementation of information and communication technologies in schools is a process that has already started, and that has been changing the profile of the teaching-learning process. From this, seeking to insert such technologies in the classroom, we aimed to analyze the responses of ten students regarding the questionnaire applied during the development of the research, in addition to presenting an approach that will make use of technological resources such as the Geogebra software, in order to facilitate understanding and give more meaning to concepts that may initially seem extremely abstract. With this, it was expected that a didactics would be developed in order to make the content of similarity of triangles a subject that the student using educational tools can better understand the theory and application. Thus, in addition to collecting information about the computerization of students from the Scientific Initiation Program (PIC) special edition and their knowledge about this content of plane geometry, the research also allows for a reflection on the theme and the changes when adopting a didactic focused on educational technologies.

Keywords: Similarity of triangles, Software, ICT, Geogebra.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Curricular Comum
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas
PIC	Programa de iniciação científica
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
TIC	Tecnologia da Informação e Comunicação

Sumário

1 INTRODUÇÃO

O mundo contemporâneo, está marcado pelos avanços na comunicação, na informática e por outras diversas transformações tecnológicas e científicas. Essas mudanças interferem em todas as esferas da vida social, seja de maneira positiva ou negativa e isso vem provocando mudanças econômicas, sociais, políticas e culturais, afetando, também, as escolas e o exercício profissional da docência. Isso se reflete nos tipos de atividades propostas em sala de aula, onde a educação se depara com o duplo desafio de adaptar-se aos avanços tecnológicos e orientar o caminho de todos para o domínio e a apropriação crítica desses novos meios, que infelizmente ainda estão distantes da realidade de muitos brasileiros.

Nesse sentido, somos advindos de um mundo cada vez mais tecnológico onde a internet é um dos principais meios de comunicação, a atual geração requer de cada vez mais estratégias para tornar o processo de ensino e aprendizagem mais dinâmico, a didática adotada em diversas instituições ainda segue um padrão um tanto quanto arcaico, o que pode gerar um certo desinteresse por parte do corpo discente, pensando nisso existe uma necessidade real de difundir o conhecimento e para isso necessitasse de cada vez mais aliados para concretizar uma mudança nos paradigmas educacionais. Pensando nos desafios impostos e nas oportunidades disponíveis, as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) são a nova realidade, e podem ser inseridas como uma maneira de reorganizar o jeito que se ensina, dessa forma as tecnologias educacionais empregadas podem universalizar o ensino ou seja torná-lo cada vez mais acessível.

À medida em que as TICs ganham espaço na escola, o professor passa a se ver diante de novas e inúmeras possibilidades de acesso à informação e de abordagem dos conteúdos, podendo se libertar das tarefas repetitivas e concentrar-se nos aspectos mais relevantes da aprendizagem, entretanto, torna-se necessário que o docente desenvolva novas habilidades para se manter atualizado sobre as tecnologias nesse mundo que está cada vez mais conectado, dessa maneira será capaz de analisar as opções à sua disposição e fazer suas escolhas tendo como referencial algo além do senso comum.

Eventualmente, apesar de alguns contratempos, a tecnologia tem um tremendo impacto sobre a educação hoje, estamos agora na era digital, onde a informação está na ponta dos dedos. Os softwares podem fornecer aos alunos acesso fácil a conteúdos via Internet sobre questões que exigem segundo eles um conhecimento mais apurado, lembrando que antes isso só era possível por meio de longas horas nas bibliotecas. Considerando essa melhora e a facilidade ao acesso de conteúdos e ferramentas com o uso de forma responsável, vemos que a internet pode ser uma porta de entrada para os diversos aspectos de conhecimentos matemáticos para os alunos, permitindo-lhes participar de atividades com um grau maior de dificuldade. Por exemplo, os alunos podem construir a demonstração de casos de semelhança de dois triângulos dados além de calcular distâncias entre dois elementos quaisquer, o geogebra é muito versátil e sabendo disso vamos fazer com que os discentes tenham interesse em utilizá-lo, o que lhes permite serem criativos enquanto fazem construções de importantes elementos geométricos, desde a concepção até a conclusão, a tecnologia é uma ferramenta positiva na sala de aula. Traz vantagens no processo de ensino tanto para educadores quanto para alunos e cabe aos professores acompanharem essas mudanças e usá-las como aliadas dentro e fora da sala de aula.

Visto isso vale salientar que a motivação e as mudanças de atitude surgem quando empregadas com eficiência. Porém, para se chegar a um bom entendimento sobre o uso de tais ferramentas, é necessário receber instruções. Além disso, é preciso repensar seu uso, aplicar métodos precisos e projetar novas possibilidades que melhor atinjam o objetivo da aula, diante disso o educador não pode ficar preso em um certo método, o ideal é que ele avalie as condições da turma e da escola e decida a melhor forma considerando a eficiência de cada processo. Pensando nisso, procuramos em nossa proposta contextualizar alguns problemas de livros didáticos com aplicações do conteúdo de semelhança de triângulos no geogebra com o intuito de que o aluno possa ter uma maior autonomia.

Pensando nisso, este trabalho está organizado em quatorze capítulos e irá apresentar uma proposta para melhorar o desempenho dos educandos em geometria plana, em especial no conteúdo de semelhança de triângulos. Na introdução, apresentamos uma síntese do trabalho proposto e a organização dos capítulos. No segundo capítulo apresentamos uma reflexão sobre tecnologia e educação. Iniciamos o terceiro capítulo com o desafio no ensino da geometria plana. No quarto capítulo desenvolvemos uma problemática sobre a geometria na educação básica .A metodologia utilizada nas atividades propostas é apresentada no quinto capítulo com o uso da técnica de resolução de problemas com o uso das TICs. Em seguida, dentro desse contexto relatamos a importância do educador ter uma formação continuada, no capítulo sete é feita uma análise de como o teorema é apresentado nos livros didáticos, e nos próximos capítulos fazemos a apresentação da definição além da demonstração do teorema e como consequência deste a demonstração dos casos de semelhança de triângulos e sua aplicação em homotetias. No capítulo onze relatamos todo o desenvolvimento desde a apresentação do conteúdo de forma tradicional até as práticas efetuadas durante as aulas online com a utilização do geogebra. Finalmente, no capítulo treze, apresentamos as considerações finais e a conclusão acerca dos resultados obtidos com o uso dos recursos propostos. Logo, o presente trabalho busca encontrar uma alternativa para o ensino de semelhança de triângulos, bem como trazer melhorias no aprendizado dos alunos através de atividades práticas onde eles se tornem, protagonistas do seu próprio aprendizado.

2 UMA REFLEXÃO SOBRE TECNOLOGIA E EDUCAÇÃO

O Brasil é um dos países onde houve um atraso significativo na adoção de medidas de incentivo à inovação tecnológica, apesar de atualmente parecer que somos detentores de meios de comunicação muito avançados, nem sempre foi assim, somente na década de 1920 com a criação de universidades, se iniciam as pesquisas a fim de proporcionar ao país medidas com o intuito de obtermos uma autonomia. Entretanto, até chegarmos a um patamar relevante de nível tecnológico de comunicação e informação foram décadas de estudos.

Com isso, podemos considerar que o processo educacional pode ocorrer de forma que o ambiente escolar acompanhe a evolução dos meios de comunicação e acesso a informação, se analisarmos a história do país, a escola nem sempre existiu, porém sempre existiram maneiras de educar as pessoas. Isso nos faz refletir que a aprendizagem na verdade vai além do ambiente escolar, de uma forma mais geral a educação, é todo e qualquer processo de ensino e aprendizagem que temos na vida. Com isso fica visível que o avanço das tecnologias da informação possibilitou a criação de ferramentas que podem ser utilizadas pelos professores em sala de aula, o que pode facilitar o acesso a conteúdos diversos e gera maior interesse no uso de recursos para o educando, tornando o ensino mais dinâmico, eficiente e inovador.

Tendo isso em mente, o uso das ferramentas tecnológicas na educação deve ser vista como uma excelente opção de metodologia de ensino, possibilitando a interação através de meios digitais dos educandos com os conteúdos a serem trabalhados, isto é, o aluno passa a interagir com diversas ferramentas que vão desde softwares simples até aqueles que são considerados mais avançados, conforme o aluno desenvolve o aprendizado o que possibilita o de utilizar seus esquemas mentais a partir do uso racional e mediador da informação.

> Ninguém escapa da educação. Em casa, na rua, na igreja ou na escola, de um modo ou de muitos todos nós envolvemos pedaços da vida com ela: para aprender, para ensinar, para aprender-e-ensinar. Para saber, para fazer, para ser ou para conviver, todos os dias misturamos a vida com a educação. (BRANDÃO, 2007, p. 7)

A união de recursos inovadores com uma metodologia de ensino pode contribuir com a aprendizagem dos alunos, ao longo das observações e pesquisas sobre a carreira docente percebe-se que atuar apenas com métodos tradicionais não é suficiente. Os livros didáticos em suas novas versões estão repletos de atividades e conceitos, mas existe a carência de ampliar esse leque, pois se percebe que há lacunas nesse ensino, logo ele não está completo. Observa-se que recursos mais tradicionais como a régua, compasso e até mesmo a própria calculadora não suprem mais as necessidades para que haja aprendizagem nas aulas de matemática, sendo assim para que esta possa ser significativa, fica evidente é necessário a utilização da informatização como uma ferramenta de auxílio aos métodos tradicionais.

Visto que, os alunos na grande maioria fazem o uso de diferentes tecnologias, afinal para a atual geração aparelhos como o computador, celular dentre outros são indispensáveis, e à medida que ocorrem os avanços nossos alunos acompanham, nesse sentido, cabe aos professores irem em busca de procedimentos de ensino que melhor se adéque com suas turmas, pois as TIC desenvolvem um papel muito importante no dia a dia, considerando que muitas escolas já estão equipadas e os alunos também, logo é imprescindível adapta-se a isso para que se tenha uma formação de estudantes cada vez mais capacitados e aptos a desenvolverem um pensamento matemático sendo assim capazes de relacionar elementos da geometria plana.

A partir dessa reflexão para as exigências do mundo contemporâneo, é preciso acrescentar o quanto a pressão social existente em todos as esferas da humanidade estão respaldadas em unir forças, e as exigências em torno das escolas estão cada vez maiores, colocando todos os envolvidos deste cenário em uma reflexão ininterrupta de como se faz necessário a adequação do ensino para atender as necessidades de uma comunidade cada dia mais imergida no mundo informacional, tecnologicamente ativos, onde não basta apenas ensinar, é imprescindível uma preparação para formar indivíduos cada vez mais críticos e ativos socialmente.

Na concepção de Behrens e Carpim, (2013):

> O processo de educação inclui de forma direta o desenvolvimento, evolução e aspectos culturais de qualquer humanidade, e requer que os professores entendam a concepção de homem, de sociedade e de mundo que reveste sua prática de vida e que se transporta para sua prática pedagógica. A formação dos alunos no século atual exige que o professor acompanhe a mudança paradigmática da ciência e da educação e as possíveis decorrências das inovações técnicas e tecnológicas, trabalhando de maneira a integrar conhecimentos sociais complexos e tecnologias cada vez mais sofisticadas. (BEHRENS; CARPIM, 2013, p. 109).

Visto isso, grande parte dessas mudanças deflagradas pelo advento das tecnologias digitais dar-se por meio da disponibilidade de novos recursos tecnológicos, sugerindo transformações nas atividades pessoais, sociais e cognitiva dos indivíduos e consequentemente na atual sociedade, não deixando o espaço escolar de fora dessas transformações, uma vez que as instituições de ensino se apresentam como espaços essenciais no processo de formação de qualquer indivíduo, onde essas mudanças abrem espaço para uma discussão em torno do uso das tecnologias na educação.

3 O DESAFIO NO ENSINO DA GEOMETRIA PLANA

O ensino e a aprendizagem são completamente diferentes atualmente, se comparado ao que eram há uma década por exemplo, os avanços tecnológicos são constantes devido a isso é muito importante preparar os alunos para este mundo em incessantes mudanças, em consonância com isso, investimentos importantes foram feitos para melhorar a educação e agora muitas escolas brasileiras podem ter recursos digitais para apoiar o processo educacional, pensando nisso os educadores devem ter uma formação continuada para ampliarem suas propostas pedagógicas visando uma melhoria e maior entendimento por parte dos alunos, dessa forma o desafio de ensinar poder ter mais um aliado.

Diante do que foi exposto vale salientar que disciplinas de exatas como a própria matemática sofrem uma extrema estagnação no sentido de muitas pessoas terem um certo receio aos conteúdos trabalhados, em muitos casos o que ocorre é a falta de contextualização além do embaralhamento de assuntos que de alguma forma "se parecem", é esse o caso do conceito de semelhança de triângulos que possui uma importância significativa nas resoluções de problemas de Geometria. Porém tem seus conceitos confundidos com frequência com a teoria referente a congruência de triângulos Além disso, do ponto de vista matemático, esse conceito é de extrema importância por ser uma base para o estudo de vários conteúdos geométricos, assim como a grande riqueza de conceitos que ele em si envolve. Na coleta de dados feita através do formulário do anexo I com alunos do programa de iniciação científica da OBMEP 1° e 2° do ensino médio observamos que os alunos ainda que possuam um conhecimento além da média geral, apresentam dificuldades claras nas definições básicas de elementos da geometria, que são cruciais para o desenvolvimento de assuntos mais complexos.

Em razão desse fato, surgiu o interesse de relacionar as práticas teorizadas na sala de aula virtual com situações de construções e utilização de modelos de atividades da geometria no ensino médio que visem fazer a relação da semelhança de triângulos com aplicações em programas ou aplicativos. Tudo isso considerando que os alunos nesta fase, já tem um conhecimento bem formado sobre razão e proporção, a ideia de proporção e sua ampliação em geometria são antigas e vistas como um conjunto de conhecimentos fundamentais para a compreensão do mundo e a existência do homem como um ser ativo na sociedade, devido a tais ideias facilitarem a resolução de problemas de diferentes áreas de estudos além de desenvolver o raciocínio visual.

Dessa forma, ficou claro que existe a carência de práticas mais bem elaborados que visem o ensino de uma forma mais didática se ancorando nas tecnologias educacionais disponíveis, como o geogebra que é uma ferramenta de ensino excelente no estudo da geometria plana e espacial, sendo assim faremos com que os alunos aprendam a construir tais conceitos obtendo assim um aprendizado muito mais significativo e voltado para as ferramentas que temos disponíveis atualmente. Por meio do formulário aplicado com a turma pode-se notar um certo embaralhamento de informações a respeito do definição semelhança de triângulos, o aluno A por exemplo definiu dois triângulos semelhantes como:

“São triângulos onde os ângulos de ambos são iguais.”

Diante do exposto, é possível observar que o discente não tem um repertório claro do conteúdo, pois faltam elementos para completar seu raciocínio além também de um discernimento sobre as diferenças e semelhanças dos termos empregados ao definir elementos da geometria plana como nos casos de semelhança e de congruência, já que comumente muitos alunos acabam interpretando como sendo um só assunto, tendo isso em mente, se faz necessária uma conversação para orientar sobre como cada elemento se comporta. Para isso estudamos cada assunto de maneira clara e objetiva compreendendo os elemento de cada assunto e fazendo as relações necessárias feito isso,fizemos uma abordagem por meio do geogebra, a princípio construímos segmentos e ângulos congruentes para por fim fazer a construção dos triângulos conforme os casos de semelhança, dessa forma fica mais claro observar e analisar tais informações e ao se deparar com o conteúdo de semelhança ter uma maior familiaridade. De acordo com Moran:

> As mudanças na educação dependem também dos alunos. Alunos curiosos e motivados facilitam enormemente o processo, estimulam as melhores qualidades do professor, tornam-se interlocutores lúcidos e parceiros de caminhada do professor-educador. Alunos motivados aprendem e ensinam, avançam mais,ajudam o professora ajudá-los melhor. Alunos que provêm de famílias abertas, que apoiam as mudanças, que estimulam afetivamente os filhos, que se envolvem ambientes culturalmente ricos, aprendem mais rapidamente, crescem mais confiantes e se tornam pessoas mais produtivas (2000,p 17-18).

Nesse sentido, buscamos ampliar a proposta pedagógica trabalhando não apenas com fórmulas e aplicações mais visando uma educação humanizada, onde a tecnologia deve ser apresentada como uma ferramenta positiva, entretanto vale ressaltar sobre umas das principais preocupações, que é como as informações e os recursos tecnológicos são utilizados e interpretados nas escolas. Essa preocupação não é nada atual, o próprio Einstein já afirmava: “Eu temo o dia em que a tecnologia ultrapassara a interatividade humana. O mundo terá uma grande geração de idiotas”. Logo, entende-se que quando é feito uso de maneira incorreta, a tecnologia na verdade se torna uma vilã, pois acaba distanciando as relações humanas, algo que é necessário para o desenvolvimento crítico, reflexivo além do sentido afetivo, o que pode acabar destruindo a interatividade entre os sujeitos. Dessa forma fica evidente a necessidade de uma boa formação, visando o preparo dos educadores para aplicação de ferramentas educacionais como o geogebra, capazes de melhorar a qualidade de ensino.

4 O ENSINO DA GEOMETRIA: UMA VISÃO HISTÓRICA

De acordo com o dicionário Aurélio a Geometria é definida como "parte da Matemática que estuda de maneira rigorosa o espaço e as formas que nele podem estar". "GEO (terra) + METRIA (medida) = Medir a Terra. A palavra geometria remete-nos para os agrimensores do antigo Egito, que com cordões esticados sobre partes do terreno traçavam inicialmente linhas simples: reta e circunferência . Segundo Boyer (1974, p.4), "Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação do vale do rio". A origem da geometria é na verdade incerta, visto que muitas são as suposições, outros povos também possuíam tais conhecimentos como os babilônios, hindus e chineses. Mas não podemos negar que ela se desenvolveu a partir de necessidades práticas dos povos antigos.

> Das necessidades práticas das sociedades, que viviam às margens de grandes rios como o Nilo, o Eufrates e o Ganges, de demarcar, delimitar e quantificar as superfícies alagadas pelas enchentes e de calcular custos e impostos relativos as áreas dessas superfícies, foram sendo formadas e estabelecidas as ideias geométricas. (KALEFF, 1994, p.20)

Diversos conhecimentos adquiridos pelas civilizações passou a ser partilhado com pessoas que tiveram contato com ela, passando a utilizá-la conforme suas necessidades. Ja Grécia antiga esse conhecimento começou a ser estudado e organizado, "[. . .] começando com os esforços iniciais de Tales por uma geometria demonstrativa (por volta de 600 a.C.) e culminando com os consideráveis Elementos de Euclides (por volta de 300 a.C.)". (EVES, 2008, p.129). Foi com, Euclides (300 a.C.) que o conhecimento até então adquirido passou a ser organizado, contendo conceitos primitivos, axiomas e algumas definições. Euclides determinou por meio de leis da lógica usual, teoremas que podiam ser demonstrados através de uma ordem lógica. Esses conceitos estruturados por Euclides formam o que conhecemos atualmente por Geometria Euclidiana. Para Kaleff (1994, p.20), "por muito tempo a geometria foi ensinada utilizando o método dedutivo, e era a base para o desenvolvimento tecnológico. Porém na metade do século passado surgiu um movimento de reforma do ensino de matemática denominado 'Matemática Moderna'".

> "Um dos pontos centrais da reforma era o currículo. Os promotores da reforma consideravam que a matemática ensinada nas escolas era antiquada e se limitava aos conhecimentos adquiridos antes de 1700". (AVILA, 2010, p.4).

Podemos constatar também em Brasil (1998) a preocupação com essas reformas, que tornaram a matemática complexa, comprometendo a aprendizagem pelo uso excessivo da formalização. Para os reformistas, deveriam ser incluídos tópicos mais recentes como álgebra moderna, lógica simbólica, noções de topologia e teoria dos conjuntos, com ênfase em demonstrações rigorosas, nos axiomas e em conceitos fundamentais, proporcionando dessa forma a integração da matemática como um todo. Esse movimento foi iniciado nos Estados Unidos, França e Bélgica e se espalhou por muitos outros países, inclusive o Brasil.

É importante lembrar que a geometria possibilita ativar estruturas mentais para passarmos do estágio concreto para o abstrato, oferecendo uma variedade de métodos para o desenvolvimento intelectual do aluno e seu raciocínio lógico. Portanto passando da intuição e dos dados concretos para processos de abstração e generalização.

> Por outro lado, as propostas curriculares mais recentes são ainda bastante desconhecidas de parte considerável dos professores, que, por sua vez, não têm uma clara visão dos problemas que motivaram as reformas. O que se observa é que ideias ricas e inovadoras, veiculadas por essas propostas, não chegam a eles, ou são incorporadas superficialmente, ou ainda recebem interpretações inadequadas, sem provocar mudanças desejáveis. (BRASIL, 1998, p. 21)

Para mudar essa situação, os esforços estão voltados para que o aluno tenha um papel ativo na construção do seu conhecimento, em especial na resolução de problemas que os levem a compreender que existe uma significativa importância no uso da tecnologia e com isso é necessário acompanhar sua permanente renovação. Então, em muitas situações essa falta de conhecimento faz com que o ensino continue a ser organizado da mesma forma que era há décadas, ou seja, a geometria, embora presente nos livros atuais continua sendo apresentada aos alunos de forma isolada no currículo sem que haja uma interação com os demais assuntos o que pode comprometer a assimilação de ideias.

5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O trabalho fundamentou-se também a partir da observação de aulas de matemática do ensino básico, por meio do Estágio Supervisionado I, onde em contato com a prática docente foi possível perceber que muitos professores não trabalham com a metodologia da resolução de problemas que elevam o saber matemático, com isso observa-se que as aplicações utilizadas para demonstrar o conteúdo trabalhado e aqueles exercícios enviados como atividade para casa são geralmente cópias fiéis, mesmo diante disso os alunos apresentam muitas dificuldades em resolvê-los. Logo, tornou-se necessário uma pesquisa para verificar as possibilidades, os limites e as particularidades da resolução de problemas matemáticos, contribuindo para que os professores do ensino fundamental e médio notem a importância de se trabalhar esta metodologia com os alunos. Crer-se que esse diagnóstico é essencial para uma reflexão inicial dos educadores a fim de orientar trabalhos futuros, onde poderá ser proposta uma ação pedagógica junto aos professores formados e em formação.

A resolução de problemas é um método muito eficaz de ensino de matemática porque fornece conhecimento para encontrar soluções. Nesta pesquisa, os alunos aprendem estratégias de combinação, raciocinar logicamente e verificar se sua estratégia é eficaz, o que ajuda na construção da maturidade cognitiva ,e isso por meio da utilização de ferramentas educacionais como o software geogebra.

> Pesquisadores como Schoenfeld (1985), Gage e Berliner (1992) consideram que levar os estudantes a resolverem situações-problema é a própria razão para se ensinar Matemática. Situações-problema que requeiram dos estudantes: levantar fatos básicos, identificar incógnitas, buscar significados às incógnitas desconhecidas, (re)conhecer as operações matemáticas fundamentais, perceber as relações entre as operações e suas implicações em situações reais – formular, solucionar –, e ainda, avaliar e argumentar se a resposta encontrada é compatível com as informações disponíveis no problema. Bienbengut (2014, p.205)

Nessa perspectiva verifica-se que ,durante muito tempo o ensino de matemática tem sido voltado para a memorização e aplicação de fórmulas sem ter a preocupação de mostrar a utilidade prática, ou seja, dar significado para aquele conteúdo. Essa maneira de ensinar priorizou a mecanização ao resolver os exercícios, que são meras reproduções dos exemplos apresentados. Assim o aluno não precisa pensar o que tem que fazer e nem questionar o resultado o que acaba tornando o estudo da matemática desinteressante e de certa forma monótono. O uso da técnica de resolução de problemas associado a ferramenta educacional necessariamente precisa ser seguido na ordem estabelecida, caso no momento de estabelecer um plano o aluno não tenha ideia de como fazer ele deve voltar ao primeiro passo e ler novamente, prestando atenção em todas as informações e dados do problema e quando bem entendido ir para o passo seguinte. Portanto, no nosso entendimento a técnica de resolução de problemas com a utilização do geogebra, proporciona a quem resolve por seus próprios meios a descoberta e a consolidação do seu conhecimento e principalmente o gosto pelo raciocínio independente.

Tal metodologia, é uma alternativa para trabalhar com questões de exatas, possibilitando aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade de organizar informações, tornando significativa a aprendizagem, pois possibilita aproximar conceitos de situações do dia a dia. Vários autores a consideram essencial para o aprendizado de matemática. Em consonância com isso, a utilização de ferramentas computacionais possibilita aos alunos instigar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance, de acordo com os PCN's de Matemática (BRASIL, 1998). Nesse sentido, os alunos terão oportunidade de aumentar seus conhecimentos sobre conceitos e procedimentos matemáticos bem como ampliar a visão que têm dos problemas, da geometria em geral e desenvolver sua autoconfiança. Devemos considerar que a atividade de resolver problemas está presente na vida das pessoas, exigindo soluções que muitas vezes necessitam de estratégias de enfrentamento. O aprendizado de estratégias auxilia o aluno a enfrentar novas situações em outras áreas de ensino.

Com o passar dos anos tem-se desenvolvido diversas pesquisas com a finalidade de encontrar novas táticas de ensino que facilitem a aprendizagem e que promovam o desenvolvimento lógico e criativo dos alunos. Entre esses métodos merece destaque a resolução de problemas com a utilização de softwares educacionais que é um método que tem se mostrado eficaz para desenvolver o raciocínio e motivar os alunos no estudo da Matemática.

Na aprendizagem de Matemática tal método de ensino é indispensável, pois coloca o aluno diante de questionamentos possibilitando o exercício do raciocínio, pensar por si próprio e não apenas reproduzir conhecimentos repassados. Podendo transformar a falta de interesse que várias pessoas têm da disciplina em algo que para elas possivelmente possa ser prazeroso, proveitoso e produtivo. Com a chegada desses novos recursos , a educação passou a captar esses diferentes meios para um melhor aprendizado. Em concordância com os autores: SERAFIM, Maria Lúcia; Sousa, Robson pequeno (2011, p.25), quando dizem: " Assim torna-se cada vez mais necessário que a escola se aproprie dos recursos tecnológicos, dinamizando o processo de aprendizagem." [. . .]

5.1 O uso do geogebra como ferramenta para auxiliar na aprendizagem.

Muitos estudos apontam para a relevância da utilização de recursos técnicos no ensino da matemática. O uso de tais recursos cria um ambiente mais amplo de interação e colaboração entre professores e alunos. Um exemplo disso é o Geogebra que é um software criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado didaticamente. Seu projeto foi iniciado em 2001, na Universität Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Florida Atlantic University. É possível baixá-lo gratuitamente através da internet e instalar em computadores com diversos sistemas operacionais. Além disso, é possível baixar o aplicativo para celulares ou tablets com o sistema ANDROID ou IOS. Na palavra geogebra, tem-se a aglutinação das palavras geometria e álgebra, isso representa exatamente as funções desse aplicativo que combina geometria, álgebra e cálculo. Uma das grandes dificuldades apresentada pelos professores de matemática é tornar o ensino mais atrativo, por isso o objetivo principal aqui é mostrar que o Geogebra, por ser um programa interativo, e que pode aguçar nos alunos o interesse em estudar matemática desde que esse recurso seja utilizado pelo professor de maneira apropriada pode ser uma excelente alternativa.

> A tecnologia deve servir para enriquecer o ambiente educacional, propiciando a construção de conhecimentos por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte de alunos e professores. [...]pode ser utilizada para gerar situações de aprendizagem com maior qualidade, ou seja, para criar ambientes de aprendizagem em que a problematização, a atividade reflexiva, atitude crítica, capacidade decisória e a autonomia sejam privilegiados. (BRASIL,1998, p.140 – 141).

Portanto, o uso de novas ferramentas pode proporcionar um ambiente de aprendizagem, que ajuda os alunos a desenvolverem suas habilidades, neste caso, o professor se comportará como o papel mais importante na promoção e mediação do desenvolvimento de maneira que ele cultive a capacidade de exploração, especulação e raciocínio lógico dos alunos. Os softwares precisam ser grandes aliados no ensino da matemática, com atividades que vão além do que vem proposto nos exercícios chamados “de fixação”, pois com eles, segundo Gravina e Santarosa (1998, p.25):

> No contexto da Matemática, a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o “fazer matemática”: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento...

Dentre muitos dos softwares que já foram desenvolvidos para a utilização no ensino de matemática, destaca-se o Geogebra que é o objeto de estudo deste trabalho.

6 A IMPORTÂNCIA DA FORMAÇÃO CONTINUADA

Pensando nas diversas metodologias que podem ser adotadas é essencial falarmos sobre a formação do professor, e a importância deste sempre estar atualizado. Um tema muito discutido recentemente é a Fundação Nacional de Currículo Comum (BNCC), que se tornou um documento orientador para as escolas em todo o país. O BNCC torna a formação continuada de professores uma agenda obrigatória para as escolas, o que torna essa formação ainda mais importante para as instituições. Por outro lado, a falta de tempo dos professores é um fator que preocupa muitos supervisores e coordenadores na hora de organizar programas de treinamento para suas equipes. Nesse caso, as novas possibilidades proporcionadas pela tecnologia fornecem alternativas que podem promover a implantação de uma cultura que valoriza a educação continuada em qualquer instituição.

Os professores ainda que capaz, instruídos e dedicados, em muitos casos, em seu ambiente de trabalho se sentem impossibilitados em despertar a curiosidade e interesse de seus alunos e fazer com que mantenham a atenção nas suas aulas, de uma certa forma ter o controle da turma e tornar as aulas mais interessantes, com propostas inovadoras. Nesse sentido, tal situação pode causar ao docente um certo desânimo para exercer seu ofício. Diante desses conflitos, fica cada vez mais evidente que são necessárias propostas pedagógicas desenvolvidas de acordo com a faixa etária, e grau de desenvolvimento dos alunos, o que pode ser feito por meio de uma formação continuada onde o professor esteja sempre inovando. O processo de formação do educador deve acompanhar as mudanças do atual mundo contemporâneo, nesse sentido o educador, a escola e todos os poderes educacionais devem ser responsáveis por programas de especialização em diferentes áreas de ensino, em especial nas práticas pedagógicas. Sendo assim, as políticas educacionais estariam seguindo os avanços tecnológicos.

A formação continuada deve ser vista como uma aliada dos professores, pois auxilia no desenvolvimento contínuo do trabalho docente. Isso ocorre porque é favorável para a criação de um novo ambiente de aprendizagem além de dar um novo significado à prática de ensino. Além disso, por meio da BNCC, também foi promovido como uma ferramenta básica que as escolas devem promover. Assim como o mundo está se desenvolvendo rapidamente e a tecnologia cada vez mais relevante no processo de aprendizagem, a formação de professores também acompanha essa evolução, por exemplo, por meio de cursos de formação continuada online. O conhecimento entretanto, é um conjunto de conceitos, teorias, valores e crenças, que se vai adquirindo através das experiências obtidas no seu dia a dia, mas o mesmo não pode esquecer de se qualificar, em busca de um maior desempenho profissional, por sua vez Garcia afirma que:

> A formação apresenta-se nos como um fenômeno complexo e diverso sobre o qual existem apenas escassas conceptualizações e ainda menos acordo em relação às dimensões e teorias mais relevantes para a sua análise. [...] Em

> primeiro lugar a formação como realidade conceptual, não se identifica nem se dilui dentro de outros conceitos que também se usam, tais como educação, ensino treino, etc. Em segundo lugar, o conceito formação inclui uma dimensão pessoal de desenvolvimento humano global que é preciso ter em conta face a outras concepções eminentemente técnicas. Em terceiro lugar, o conceito formação tem a ver com a capacidade deformação, assim como com a vontade de formação (GARCIA, 1999, p. 21-22)

Vivemos em uma época de muitas mudanças e momentos incertezas, neste contexto está inserida a figura do professor, que deve estar sempre se inovando e se reciclando, para acompanhar as mudanças na educação nos dias de hoje, pensando em uma formação com qualidade, onde o professor tenha total controle do conhecimento que irá passar a seus alunos. Muito se tem falado a respeito da formação continuada dos professores, que faz com que o docente se torne aluno levando o ao campo de pesquisa e buscando novas técnicas para fazer de suas aulas uma trocas de conhecimento, tornando as mais produtivas e atrativas para os alunos, pois, os mesmos tem a função de transmitir experiências, fazendo com que os educandos busquem por um aprendizado mais dinâmico, para compreensão do que se aprende em sala de aula. Na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – (LDBEN) – 9394/96 Art. 61, estabelece que:

> A formação de profissionais da educação, de modo a atender aos objetivos dos diferentes níveis e modalidades de ensino e as características de cada fase do desenvolvimento do educando, terá como fundamentos :1º- a associação entre teorias e práticas, inclusive mediante a capacitação em serviço; 2º aproveitamento da formação e experiências anteriores em instituição de ensino e outras atividades.

Entretanto, para ser um professor que esteja apto a praticar o conceito de reflexão, o mesmo deve estar aberto a novas maneiras de exercer sua profissão, modificando o modo de trabalhar os conhecimentos, considerando que a prática de refletir deve ser permanente em sua formação, podendo assim ter uma visão mais crítica sobre sua atuação, além de sua formação acadêmica, o professor deve estar disposto a inovar, buscar um diferencial para suas aulas, através de práticas pedagógicas com a utilização das ferramentas educacionais, de forma que o aluno se sinta estimulado em sua aprendizagem, fazendo com que o estudante ligue o conteúdo à prática, por isso a formação continuada se torna tão importante.

7 A APRESENTAÇÃO DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E TEOREMA DE TALES NOS LIVRO DIDÁTICOS

No presente trabalho analisamos dois livros didáticos no intuito de avaliar como esse conteúdo é apresentado aos alunos, os livros são Matemática Bianchini 9º ano e Praticando Matemática 9º ano que são livros aprovados pelo Programa nacional do livro didático (PNLD) e selecionados como opções para serem adotados em muitas escolas da rede pública. Inicialmente elencamos alguns itens importantes para o desenvolvimento dos conteúdos que iremos trabalhar. Como visto anteriormente neste trabalho é muito importante que as atividades constantes no material estejam de tal forma que direcione o aluno para um aprendizado efetivo, para que isso ocorra os alunos devem ser instigados a conjecturar, formular hipóteses e verificar se suas soluções estão corretas. Mas então o que deveria fazer parte do livro didático? A história da matemática, pois é um fator importante na motivação dos alunos, pois ajuda a mostrar quanto ela foi e continuará sendo uma ferramenta que permite aos alunos conhecer a evolução do conhecimento, como as teorias são formuladas, como buscar solução para os problemas do nosso dia a dia.

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p.42)

Outro item a ser considerado são as demonstrações, pois pertencem a conceituação e Lima (1999), chama a atenção para a importância das demonstrações, “elas devem ser apresentadas por serem parte essencial da natureza da Matemática e por seu valor educativo. No nível escolar, demonstrar é uma forma de convencer com base na razão, em vez da autoridade”. Aplicações são fundamentais pois relacionam o conteúdo aprendido com a realidade vivida dos alunos, tornando mais interessante e menos cansativo, do que só aplicar fórmulas que às vezes não fazem sentido algum para o aluno.

Visto isso, é essencial que os livros façam uma ponte de conhecimento entre a teoria e as aplicações, relacionando desde a história da matemática propriamente dita, que irá mostrar o longo processo para que tenhamos tantos elementos de extrema importância para trabalhar diversos situações do nosso cotidiano, como cálculos de estruturas, formas, e até a própria matemática básica que é essencial para o nosso desenvolvimento como cidadão, além disso vale salientar que os livros analisados assim como diversos livros encontrados na rede pública possuem uma deficiência em mostrar de onde surgiram certas informações, faltam demonstrações para que aluno consiga compreender o real sentido e origem de tal fundamento, em muitos casos os livros possuem aplicações apenas de conteúdos que foram citados, e esses exercícios geralmente são cópias fiéis de exemplos já feitos o que induz o aluno a apenas decorar, fazendo com que quando ele se depare com algo que necessite de um certo raciocínio não consiga desenvolver, pois seu conhecimento está restrito à apenas algumas aplicações, algo que é de extrema importância como afirma, Lima (1999).

> As aplicações constituem, para muitos alunos de nossas escolas, a parte mais atraente (ou menos cansativa) da Matemática que estudam. Se forem formuladas adequadamente, em termos realísticos, ligados a questões e fatos da vida atual, elas podem justificar o estudo, por vezes árido, de conceitos e manipulações, despertando o interesse da classe. (LIMA, 1999).

Além disso, devemos destacar às atividades propostas e o uso das TIC, que exercem um papel importantíssimo no aprendizado. Quanto as atividades, os livros analisados possuem muitos exercícios repetitivos, onde o aluno apenas aplica a fórmula e encontra a solução. A maioria deles também trazem exercícios de aplicação, com questões que no nosso entendimento poderiam ser propostas na forma de práticas onde os próprios alunos fariam as medidas para montar a equação e chegar à solução, logo o aprendizado seria mais significativo se o aluno interagisse com o problema e não somente utiliza-se as medidas já estabelecidas.

Infelizmente isso ocorre em todos os livros analisados, é evidente que eles também são importantes, mas devemos sempre que possível, tornar o aluno protagonista do seu aprendizado, e uma maneira para que isso ocorra é aproveitar essas oportunidades para que eles por meio das práticas construam o seu conhecimento. Porém em relação as TIC nenhum dos livros analisados fez menção, o que acreditamos ser uma falha, pois tratam-se de livros aprovados pelo PNLD e os PCN que determinam que as TIC façam parte dos conteúdos presentes no livro didático “O uso desses recursos traz significativas contribuições para se repensar sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática” (BRASIL, 1998, p.43) Para um melhor entendimento, o quadro abaixo é uma análise do que foi relatado acima, e refere-se apenas aos tópicos de Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos.

Tabela 1 – Comparativo entre livros analisados

Itens Analisados	Matemática Bianchini	Praticando Matemática
História da Matemática	SIM	SIM
Demonstração do Teorema de Tales	SIM	SIM
Demonstração dos casos de semelhança de triângulo	NÃO	SIM
Exercícios mecânicos	SIM	SIM
Aplicações	SIM	SIM
Problemas e atividades diversificadas dentro e fora de aula	NÃO	NÃO
Uso de TICs	NÃO	NÃO

Fonte: A autora

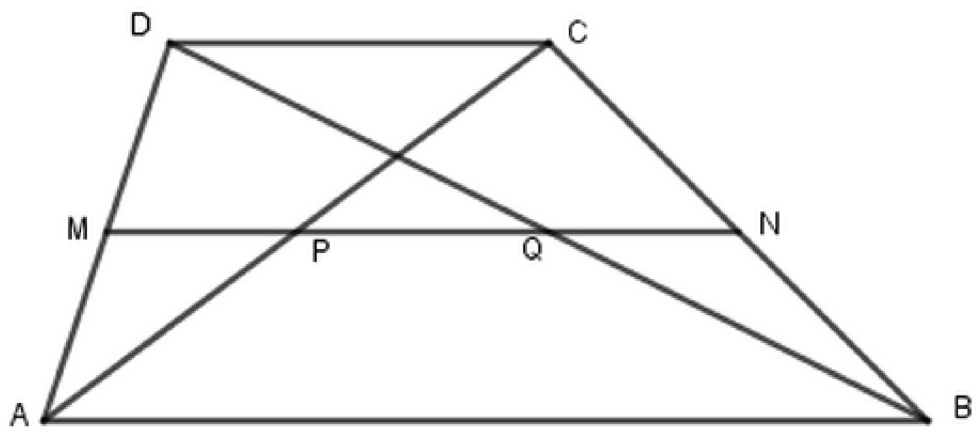
- SIM - O livro possui aquele elemento.
- NÃO - O livro não possui o elemento.

8 TEOREMA DE TALES

Neste capítulo vamos apresentar e demonstrar o Teorema de Tales. A referência utilizada é (NETO, 2013). Para a demonstração do Teorema de Tales, precisaremos do seguinte resultado, conhecido como Teorema da Base Média do Trapézio, (figura 1) cuja demonstração pode ser encontrada em (NETO,2013, p.74).

Proposição: Seja ABCD um trapézio de bases AB e CD e lados não paralelos AD e BC . Sejam, ainda, M e N os pontos médios dos lados não paralelos AD e BC , respectivamente, e P e Q os pontos médios das diagonais AC e BD , também respectivamente, então:

Figura 1 – Teorema da Base Média do Trapézio.



FONTE:matematica.hi7.co

M,N,P e Q são colineares e $\overline{MN}//\overline{AB},\overline{CD}$

Logo,

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right) \tag{8.1}$$

e

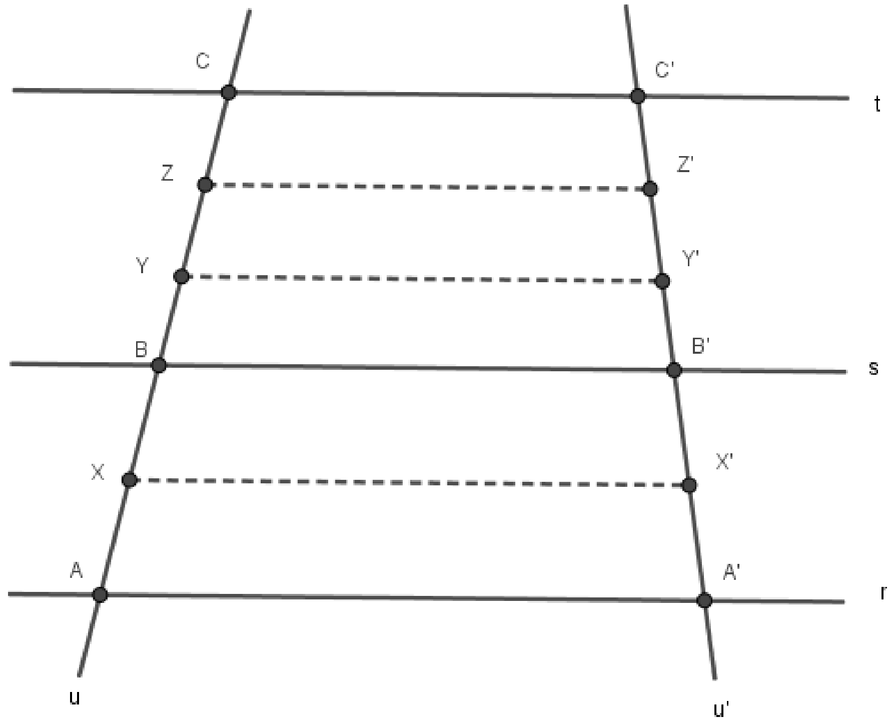
$$\overline{PQ} = \frac{1}{2}|\overline{AB} - \overline{CD}| \tag{8.2}$$

Consideremos a seguinte situação: temos, no plano, retas paralelas r, s e t . Traçamos, em seguida, retas u e u ' , a primeira intersectando r, s e t respectivamente nos pontos A , B e C , e a segunda intersectando r, s e t respectivamente em A ' , B ' e C ' .

Se tivermos $\overline{AB} = \overline{BC}$, então, pelo teorema da base média de um trapézio teremos que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$. Dessa forma, podemos verificar que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1 \tag{8.3}$$

Figura 2 – Retas paralelas cortadas por transversais.



Fonte:https://www.infoescola.com/

Vamos supor, agora que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ seja um número racional, $\frac{2}{3}$ por exemplo, dividamos então os segmentos AB e CB respectivamente em duas e três partes iguais, obtendo pontos X, Y e Z em u , tais que $\overline{AX} = \overline{XB} = \overline{BY} = \overline{YZ} = \overline{ZC}$.

Se traçarmos por X,Y e Z paralelas as retas r, s e t, as quais intersectam u' respectivamente em X', Y' e Z', então mais três aplicações do teorema da base média de um trapézio garantem $\overline{A'X'} = \overline{X'B'} = \overline{B'Y'} = \overline{Y'Z'} = \overline{Z'C'}$ e, daí,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2}{3} \tag{8.4}$$

Agora vamos supor que se $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}$,com $m, n \in \mathbb{N}$.

Então dividindo inicialmente AB e BC em *m* e em *n* partes iguais, respectivamente garantiria que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}$, assim

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n} \tag{8.5}$$

De outra forma concluímos que a relação

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \tag{8.6}$$

É válida sempre que o primeiro ou o segundo membro for um número racional.

É necessário verificar se a igualdade das razões acima irão de manter quando um dos membros da mesma for um número irracional. De antemão a resposta é sim para tal questionamento, para entender utilizaremos o seguinte fato:

Dado $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,existe $a \in \mathbb{Q}$ tal que x $<$ a $<$ x + $\frac{1}{n}$.

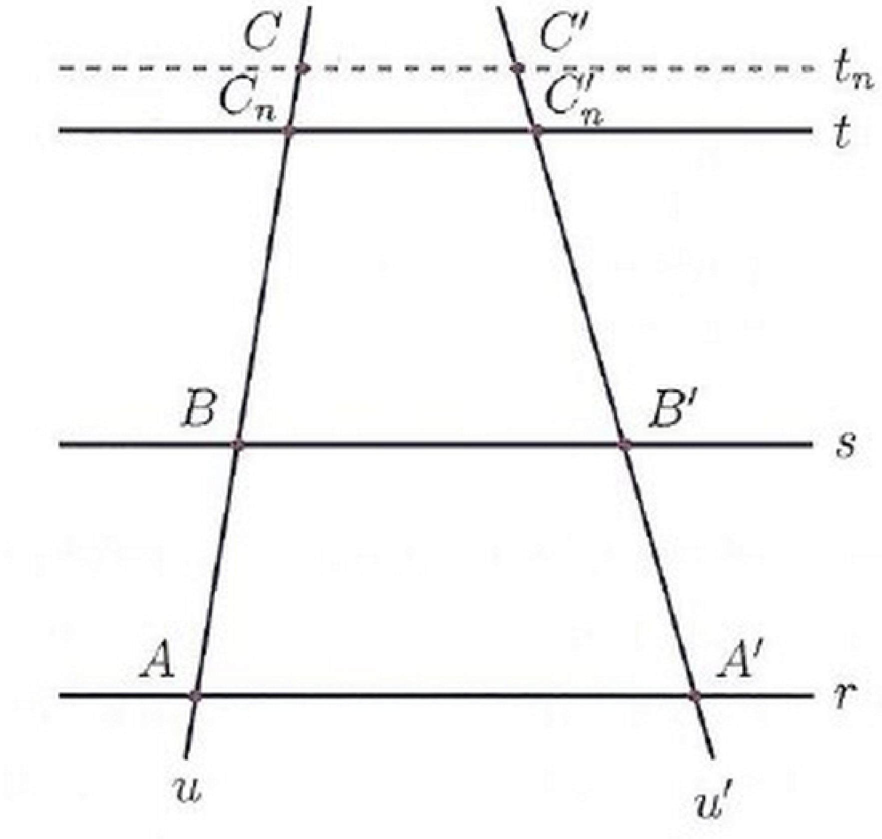
Suponha que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x$, com x irracional. Escolha uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de racionais positivos, tal que x$<a_n<$x+$\frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em seguida marque o ponto $C_n \in u$ tal

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} = a_n \tag{8.7}$$

Seja t_n a reta paralela as retas ***r,s*** e ***t*** traçadas por C_n e C_n^1 o ponto onde t_n intersecta *u'*. Como $a_n \in \mathbb{Q}$, um argumento análogo ao anterior garante que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}_n} = a_n \tag{8.8}$$

Figura 3 – Razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ irracional



Fonte: (NETO, 2013, p.140).

De outra forma, obtivemos que
$X < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} <$ X + $\frac{1}{n} \Rightarrow X < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C_n'}} < X + \frac{1}{n}$

Ou ainda,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + 1 \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C_n'}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n} \tag{8.9}$$

Dessa forma as desigualdades do primeiro membro acima garantem que, a medida que n aumenta, os pontos C_n aproximam-se cada vez mais do ponto C. Mas, como $t_n // t$, segue então que os pontos C_n' aproximam-se cada vez mais do ponto C' , de maneira que a razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C_n'}}$ aproximadamente mais da razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$

Escrevendo $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C_n'}} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ quando $n \to +\infty$

Por outro lado, utilizando a solução análoga á da linha acima podemos concluir a partir da desigualdade do segundo membro.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + 1 \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n} \tag{8.10}$$

Que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ quando $n \to +\infty$

Utilizando o fato de que uma sequência de números reais não pode aproximar-se simultaneamente de dois reais distintos quando $n \to +\infty$ concluímos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \tag{8.11}$$

A discussão acima provou um dos resultados fundamentais da geometria euclidiana plana.

Teorema de Tales: Sejam r,s e t retas paralelas, escolhemos pontos $A, A' \in r, B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A,B,C e A',B',C' sejam dois temos de pontos colineares. Então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \tag{8.12}$$

Apresentaremos as definições e resultados sobre semelhança e homotetia de acordo com os livros matemática Bianchini (2015) e Medidas e Formas Geométricas (LIMA,1991).

9 DEFINIÇÃO DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

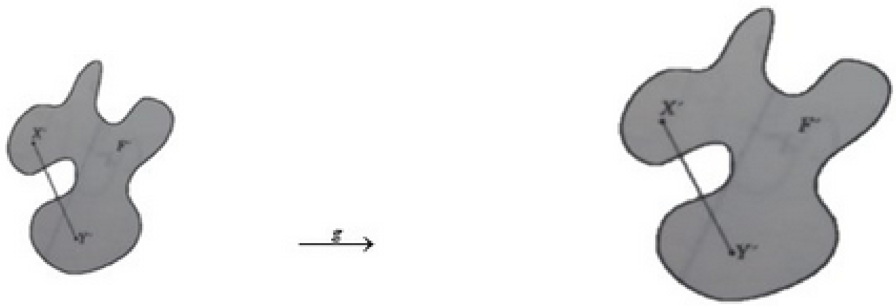
Sejam F e F' figuras, do plano ou do espaço, e r um número real positivo. Diz-se que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança r, quando existe uma correspondência biunívoca $g : F \to F'$, entre os pontos de F e os ponto F', com a seguinte propriedade:

Se X, Y são pontos quaisquer de F e $X' = g(X), Y' = g(Y)$ são seus correspondentes em F' então $\overline{X'Y'} = r.\overline{XY}$.

A correspondência biunívoca $g : F \to F'$, com esta propriedade de multiplicar as distâncias pelo fator constante r, chama-se uma semelhança de razão r entre F e F'.

Se $X' = g(X)$ diz-se que os pontos X e X' (figura 4) são homólogos.

Figura 4 – Ilustração da definição de semelhança de triângulos



Fonte: (LIMA, 1991, p.33)

Evidentemente, toda figura é semelhante a si própria, pois a função identidade $g : F \to F'$ é uma semelhança de razão 1. Também, se F é semelhante a F' é semelhante a F pois, dada uma semelhança $g : F \to F'$ de razão r, a função inversa $g^{-1} : F \to F'$ é uma semelhança de razão $\frac{1}{r}$.

Tem-se ainda pela transitividade: se F é semelhante a F' e F' é semelhante a F" então F é semelhante a F". Com efeito, se $g : F \to F'$ e $g^{-1} : F' \to F''$ são semelhanças, de razão r e r' respectivamente, então a função composta $g'og : F \to F''$ é uma semelhança de razão r.r'.

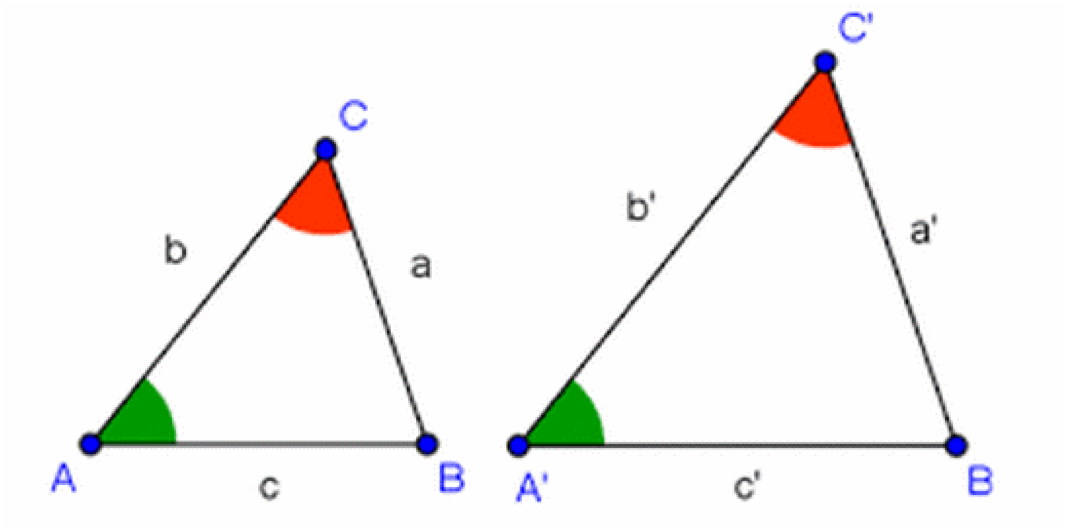
Uma semelhança de razão 1 chama-se uma isometria. Portanto, uma isometria $g : F \to F'$ é uma correspondência biunívoca tal que, para quaisquer pontos X,Y em F, a distância de $X' = g(X)$ e $Y' = g(Y)$ é igual à distância de X a Y.

Quando existe uma isometria entre as figuras F e F', diz-se que estas são congruentes.

10 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Podemos dizer que dois triângulos são semelhantes quando ao mesmo tempo satisfazem as duas condições: Os lados correspondentes têm medidas proporcionais e os ângulos internos correspondentes são congruentes. (Figura 5)

Figura 5 – Figura ilustrativa de triângulos semelhantes



Fonte: https://www.maisbolsas.com.br/

$\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes e indicamos assim;

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C', \tag{10.1}$$

Pois:

- Os ângulos correspondentes são congruentes:

$$\hat{A} \cong \hat{A'}, \hat{B} \cong \hat{B'}, \hat{C} \cong \hat{C'} \tag{10.2}$$

- Os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K \tag{10.3}$$

(Onde K é a razão de semelhança)

Portanto:

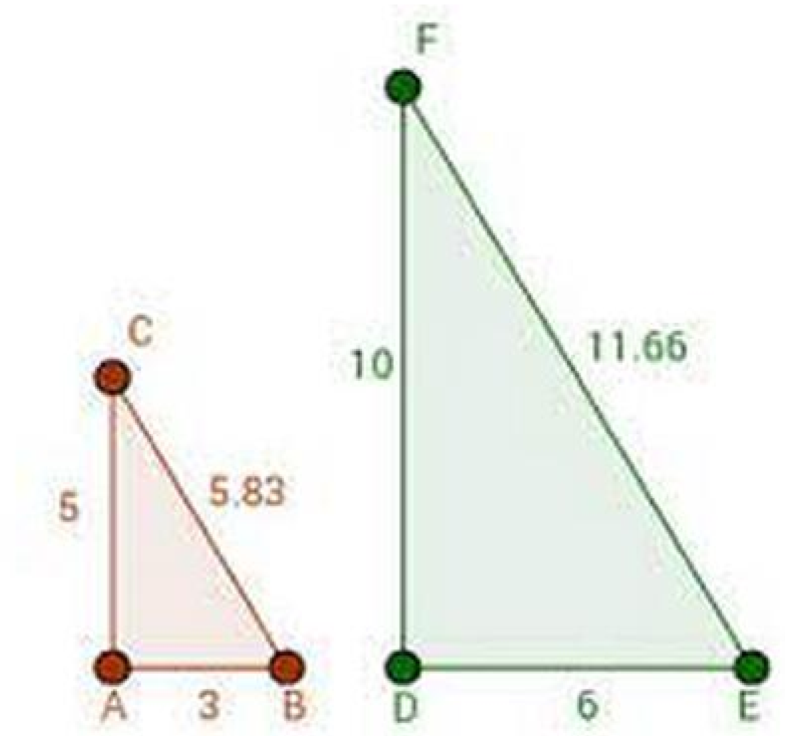
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{matrix} \hat{A} \cong \hat{A'} \\ \hat{B} \cong \hat{B'} \\ \hat{C} \cong \hat{C'} \end{matrix} \tag{10.4}$$

e

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K \tag{10.5}$$

OBS: Se dois triângulos são semelhantes com razão de semelhança K, então quaisquer elementos lineares homólogos desses triângulos (altura, perímetro, mediana, etc.) também serão proporcionais com razão K (figura 5)

Figura 6 – Exemplo para o cálculo numérico da razão de semelhança.



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/

$$\frac{FD}{CA} = \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = K \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{3}{6} = \frac{5,83}{11,66} = \frac{1}{2} \tag{10.6}$$

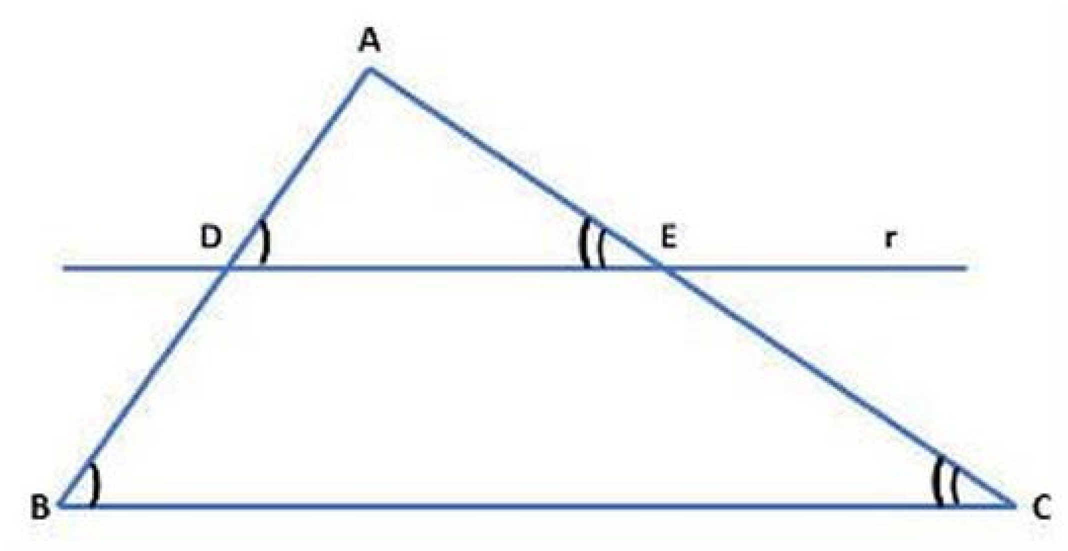
(Razão de semelhança)

10.1 Teorema fundamental da semelhança

Como resultado do Teorema de Tales obtemos o seguinte teorema. Teorema. Toda reta paralela a um lado de um triângulo que cruza os outros lados em dois pontos distintos determinam um triângulo semelhante ao primeiro.

Observe (figura 7) a seguir, em que $\overline{DE}//\overline{BC}$

Figura 7 – Ilustração para a demonstração da semelhança de triângulos.



Fonte: https://www.todamateria.com.br/

Demonstração: De acordo com a figura 7, vamos provar que os triângulos ADE e ABC são semelhantes.

Hipótese: $\overline{DE}//\overline{BC}$

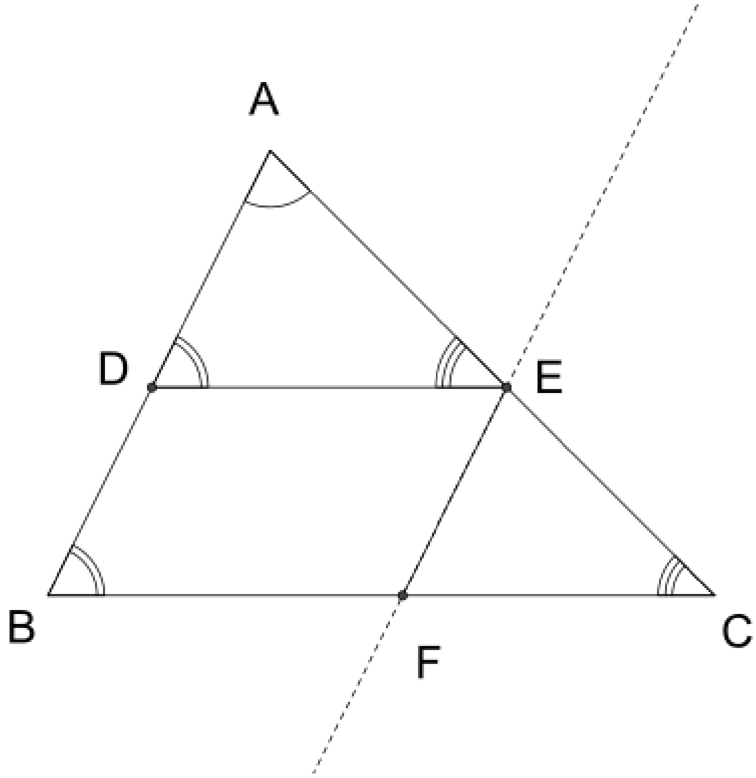
Traçamos $\overline{EF}//\overline{AB}$ (Figura)

Assim temos que $\overline{DE}//\overline{BC}$, por hipótese, logo, pelo teorema de Tales

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \tag{10.7}$$

- $\overline{A} \cong \overline{A}$ (ângulo comum}
- $\overline{B} \cong \overline{D}$ (ângulo correspondente em retas paralelas)
- $\overline{C} \cong \overline{E}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

Figura 8 – Ilustração II para a demonstração de semelhança de triângulos.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/

Novamente pelo teorema de Tales temos (Figura 8)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC} \tag{10.8}$$

- $\overline{BF} \cong \overline{DE}$ (lados opostos de um paralelogramo)

Juntamente com os resultados anteriores, obtém-se

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \tag{10.9}$$

Portanto,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = K \tag{10.10}$$

(Razão de semelhança)

Logo,

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

O que implica que os triângulos são semelhantes.

Para saber se dois triângulos são semelhantes basta verificar alguns de seus elementos específicos, ou seja, ao verificar apenas algumas informações sobre dois triângulos podemos garantir a semelhança entre eles. Isso é consequência dos casos de semelhança de triângulos que abordaremos a seguir.

10.2 Caso AA(ângulo-ângulo)

Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são congruentes a dois ângulos do outro. (Figura 9)

Vamos mostrar que:

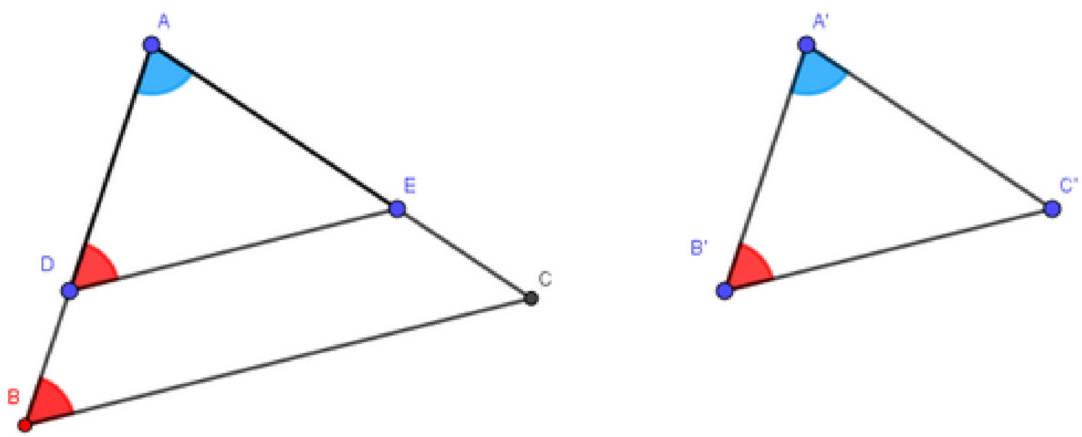
Se $\triangle ABC e \triangle\ A'B'C'$ tem $\hat{A} \cong \hat{A'}$ e $\hat{B} \cong \hat{B'}$, então

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Hipótese: $\begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A'} \\ \hat{B} \cong \hat{B'} \end{cases}$

Tese $\{\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Figura 9 – Ilustração do caso de semelhança (AA)



Fonte:https://mundoeducacao.uol.com.br/

1° CASO:

Se $\overline{AB} \cong A'B'$ pelo caso ALA de congruência de triângulos temos

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ e dai $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, pois dois triângulos são semelhantes com razão de semelhança 1.

2° CASO:

- Se $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$, vamos analisar $\overline{AB} > \overline{A'B'}$. Marcamos sobre $\overline{AB}$

  um ponto D, tal que

$$\overline{AD} \cong \overline{A'B'} \tag{10.11}$$

Por D traçamos $\overline{DE}//\overline{BC}$. Assim temos:

$\hat{B} \cong \hat{D}$, ângulos correspondentes em retas paralelas

$\hat{A} \cong \hat{A}$, por hipótese

$\hat{D} \cong \hat{B}$, pois $\hat{B} \cong \hat{B}'$ e $\hat{D} \cong \hat{B}$, logo, os triângulos ADE e A'B'C' são congruentes pelo caso ALA.

Temos também, pelo teorema fundamental da semelhança que

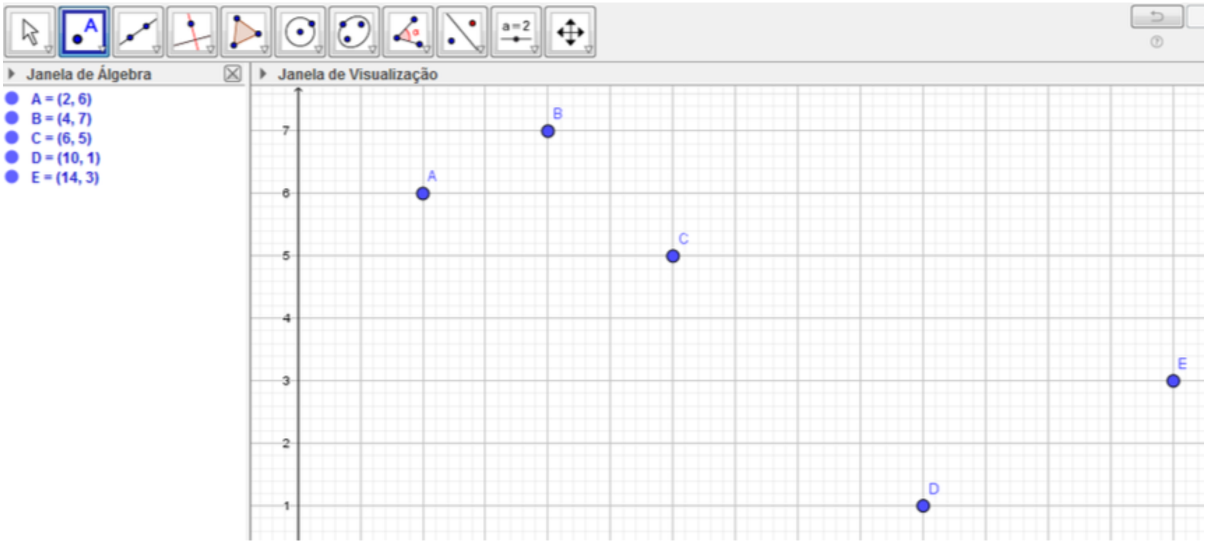
$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

Assim como, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ então

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

- Construção de triângulos semelhantes utilizando o caso (AA).
- Na janela 2, com a ferramenta ponto marque os pontos A(2,6), B(4,7), C(6,5), D(10,1) e E(14,3)

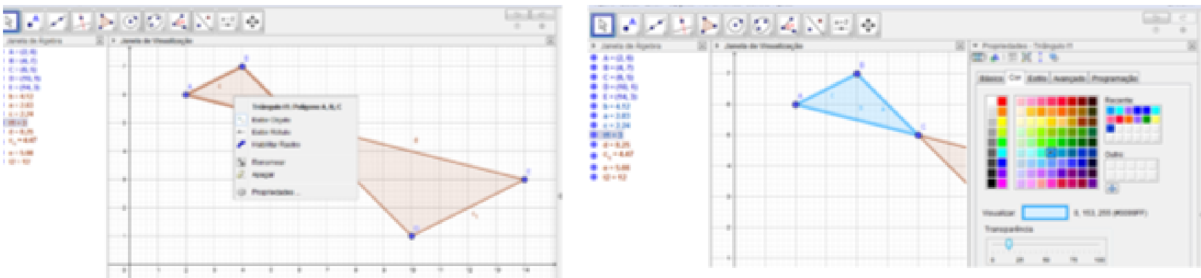
Figura 10 – Pontos marcados na janela de visualização.



Fonte: A autora

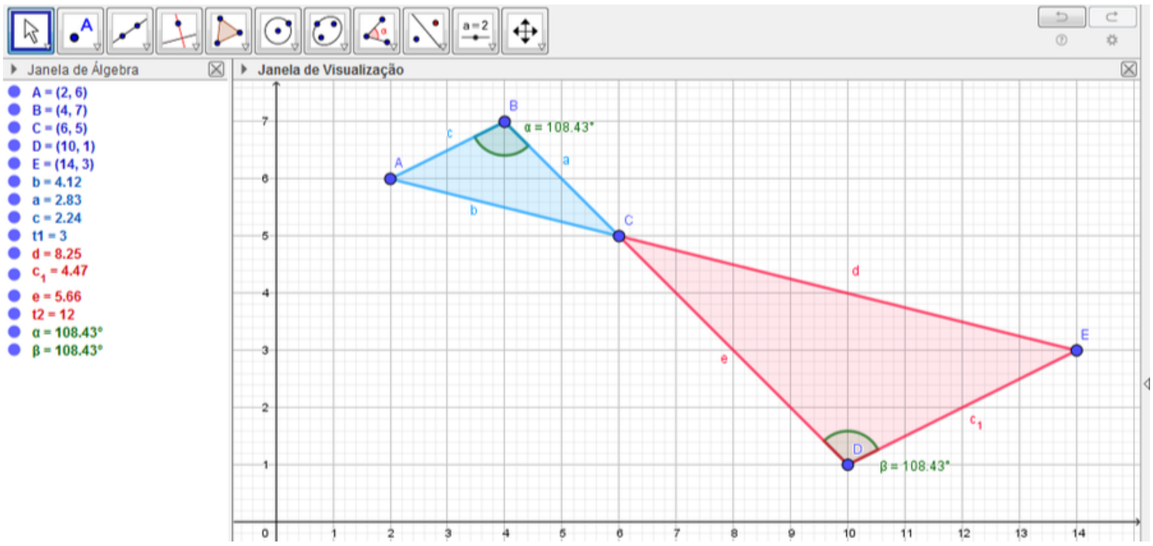
- Na janela 5, com a ferramenta polígono construa os triângulos ABC e CDE Com o botão direito do mouse clique dentro do triângulo e na opção propriedades, mude a cor do triângulo. Recomendo que escolha cores distintas para os dois triângulos.

Figura 11 – Triângulos construídos através de pontos.



- Na janela 8, na ferramenta ângulo marque os ângulos B e D

Figura 12 – Verificação do caso de semelhança (AA)

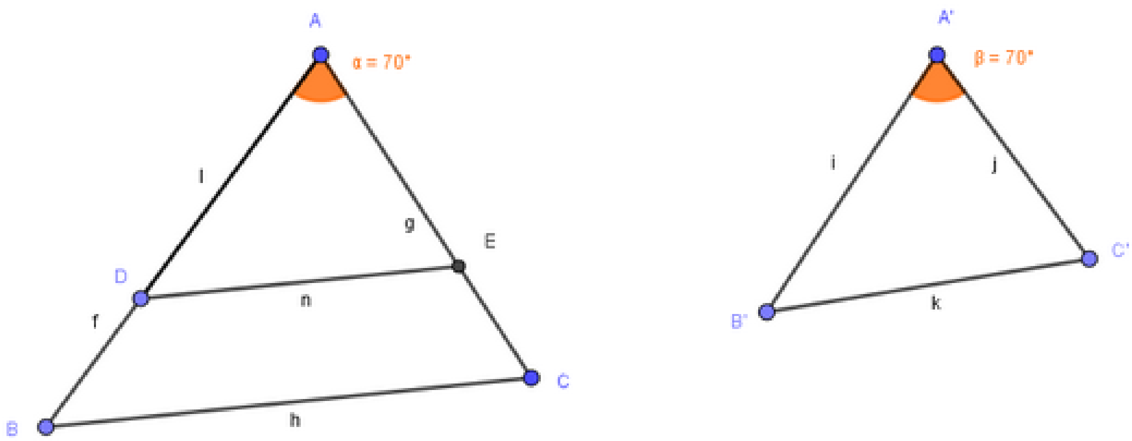


Fonte: A autora

10.3 Caso LAL(lado-ângulo-lado)

Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais, e os ângulos compreendidos por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

Figura 13 – Desenho do caso de semelhança (LAL)



Fonte: https://www.respondeai.com.br/

Vamos supor que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$

Hipótese: $\begin{cases} \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \end{cases}$

$\{ \hat{A} \cong \hat{A'}$

- Marcamos sobre $\overline{AB}$ um ponto D, tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ por D traçamos $\overline{DE}//\overline{BC}$, pelo teorema fundamental da semelhança

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

Vamos mostrar que $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$
Temos que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, por construção e $\hat{A} \cong \hat{A'}$, por hipótese
Provaremos que

$\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$

Da conclusão acima $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, podemos escrever:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \tag{10.12}$$

Ou ainda

$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$

Pois,

$$\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$$

Comparando $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$ com $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ (Hipóteses), e usando o fato que

$\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$,então $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}, \overline{AE} \cong \overline{A'C'} e \hat{A} \cong \hat{A'}$

Logo,

$\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$

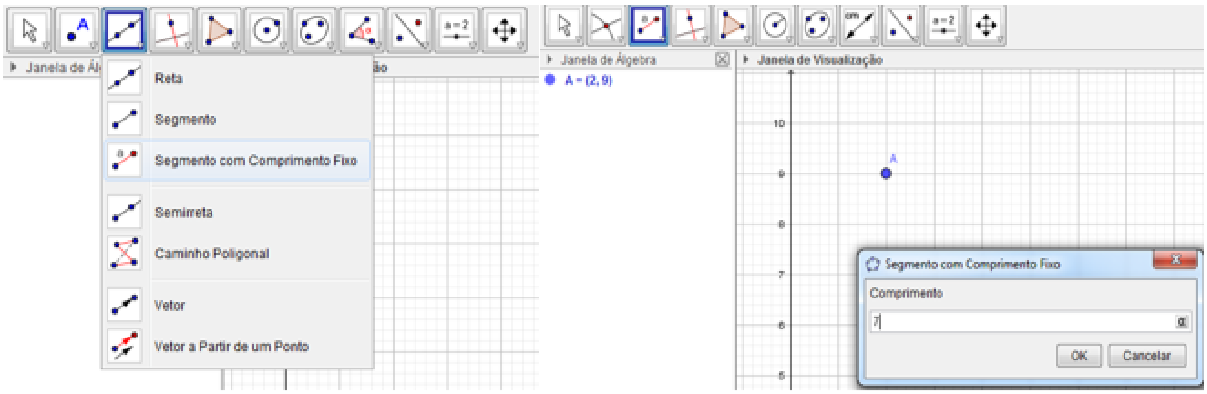
Pelo caso LAL de congruência de triângulos.
Se $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, então

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Dentro dessa perspectiva resolvemos fazer a Construção de triângulos semelhantes, utilizando o caso LAL, por meio do geogebra, de acordo com o exposto abaixo:

- Na opção segmento com comprimento fixo (janela 3).
  Após selecionada a opção, aparecerá uma caixa pedindo o comprimento, coloque o valor desejado, por exemplo “7”e pressione enter.

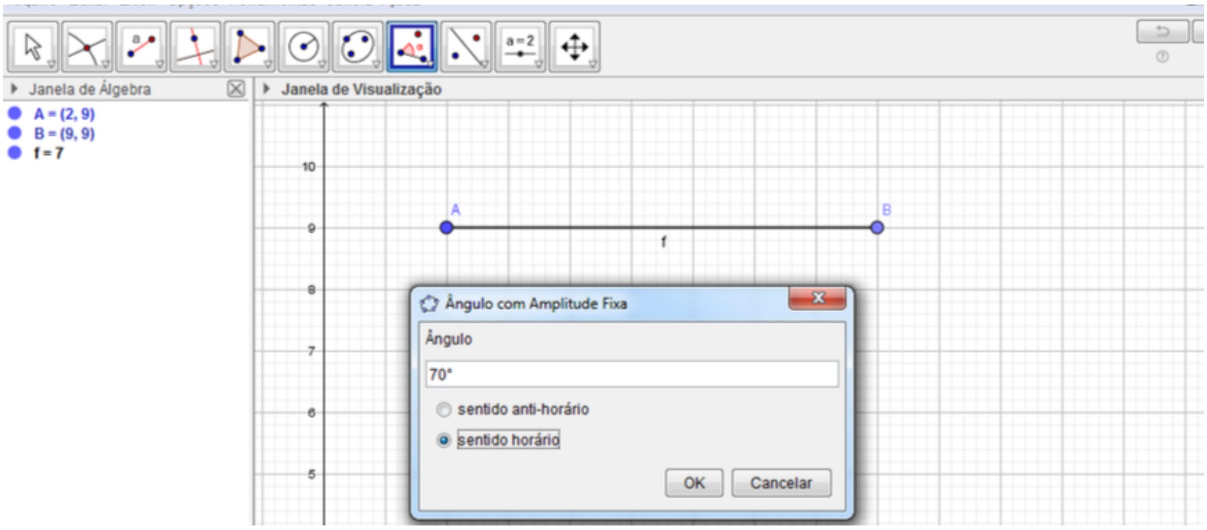
Figura 14 – Passos para a construção do triângulo.



Fonte: A autora

- Clique na opção ângulo com amplitude fixa (janela 8), marque os pontos B e A nessa ordem e na caixa digite o ângulo desejado, por exemplo 70° e marque sentido horário em seguida pressione ok.

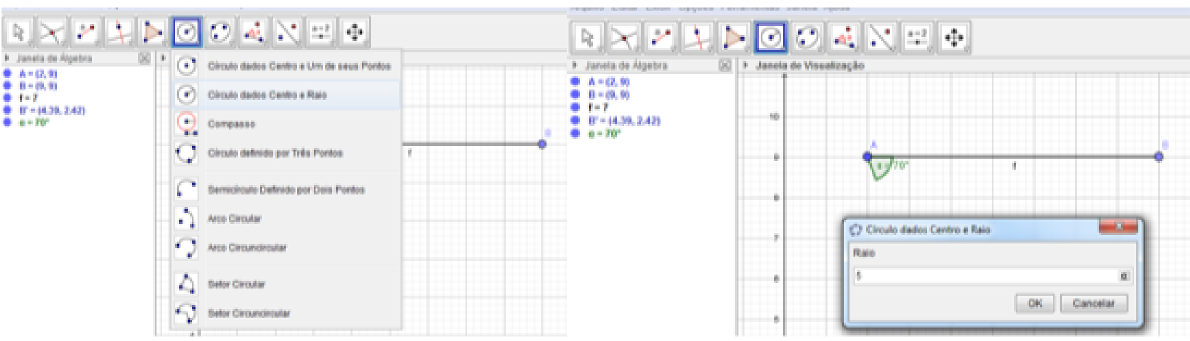
Figura 15 – Construção do segmento.



Fonte: A autora

- Clique na opção; círculo dado centro e raio (janela 6) marque o ponto A e na caixa digite raio 5

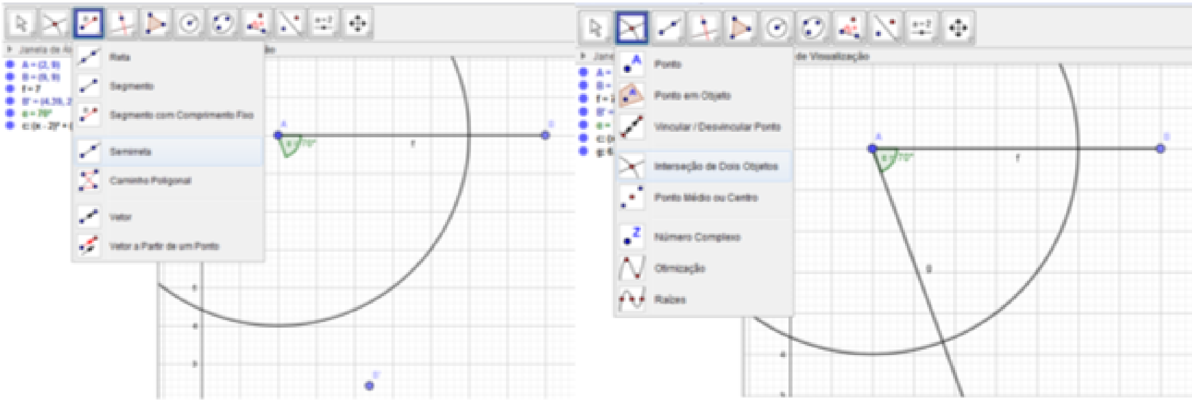
Figura 16 – Construção do triângulo com ângulo fixo.



Fonte: A autora

- Com a já circunferência construída, marque a opção semirreta do ponto A passando por B' (janela 3).

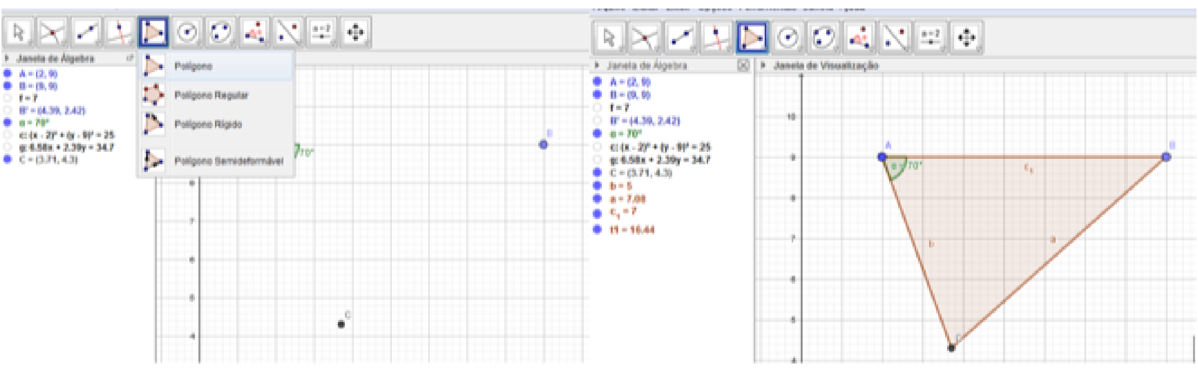
Figura 17 – Desenvolvimento da construção.



Fonte: A autora

- Na janela de álgebra desmarque a circunferência, a semirreta e o segmento. Construa o triângulo ABC com a ferramenta polígono.

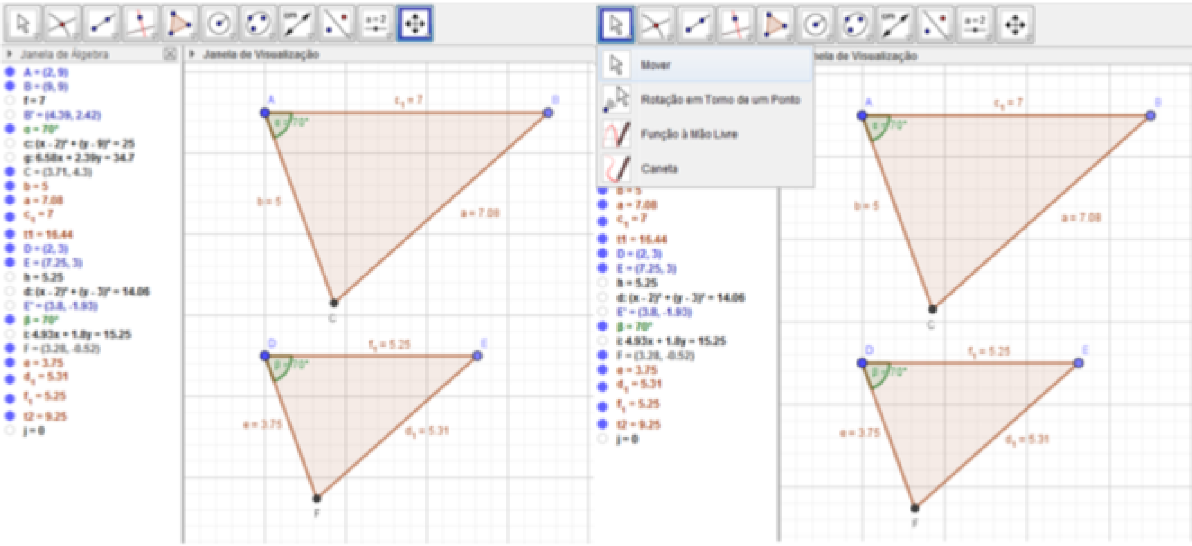
Figura 18 – Triângulo com ângulo fixo construído.



Fonte: A autora

- Faça todo o processo novamente e construa outro triângulo com o segmento medindo 5,25 e o raio do círculo 3,75 e o ângulo de 70°. Na janela 1 com a ferramenta mover sobreponha o triângulo menor.

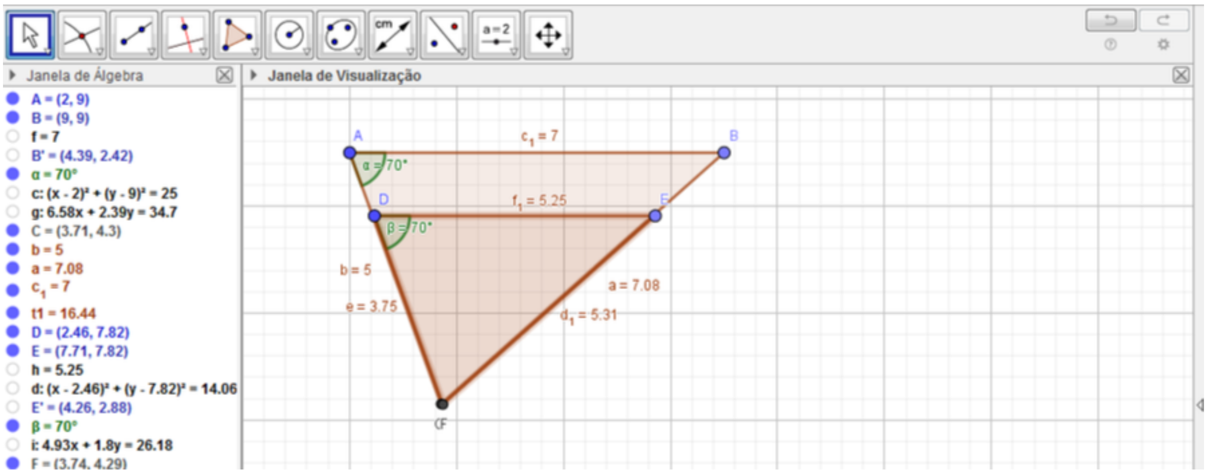
Figura 19 – Triângulos semelhantes pelo caso LAL.



Fonte: A autora

- Agora verifique como de fato os triângulos são semelhantes.

Figura 20 – Triângulos sobrepostos.

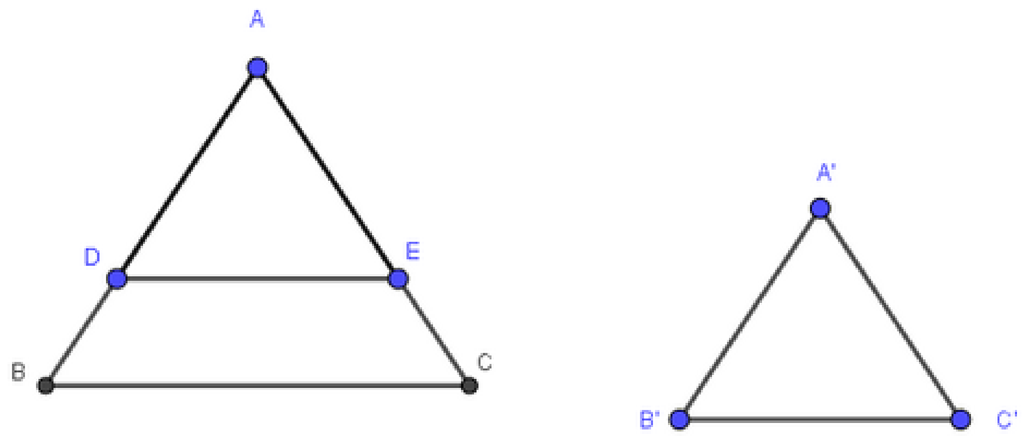


Fonte: A autora

10.4 Caso LLL (lado-lado-lado)

Se dois triângulos têm os três lados correspondentes e proporcionais, então esses triângulos são semelhantes. (Figura 21)

Figura 21 – Figura ilustrativa para o caso (LLL).



Fonte:https://www.respondeai.com.br/

Hipótese:

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} \end{cases} \tag{10.13}$$

Tese: $\{\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Vamos demonstrar que

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Supondo que $AB > A'B'$, devemos marcar sobre $\overline{AB}$ um ponto D, tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$

Por D traçamos $\overline{DE}//\overline{BC}$

Pelo teorema fundamental da semelhança

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \tag{10.14}$$

Vamos mostrar que $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, por (LLL).
Sabemos que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, por construção.
Resta provar que

$$\overline{AE} \cong \overline{A'C'} \text{ e que } \overline{DE} \cong \overline{B'C'}$$

Da conclusão acima $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, podemos escrever:
$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, ou ainda, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, pois $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$

Comparando $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ com $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ (Hipótese),

temos,

$\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$, $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$, ou ainda $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{DE}$, pois $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$

Comparando $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{DE}$, com $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ (hipótese), temos que

$\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$

Então,

$\overline{AD} \cong \overline{A'B'}, \overline{AE} \cong \overline{A'C'} e \overline{DE} \cong \overline{B'C'}$

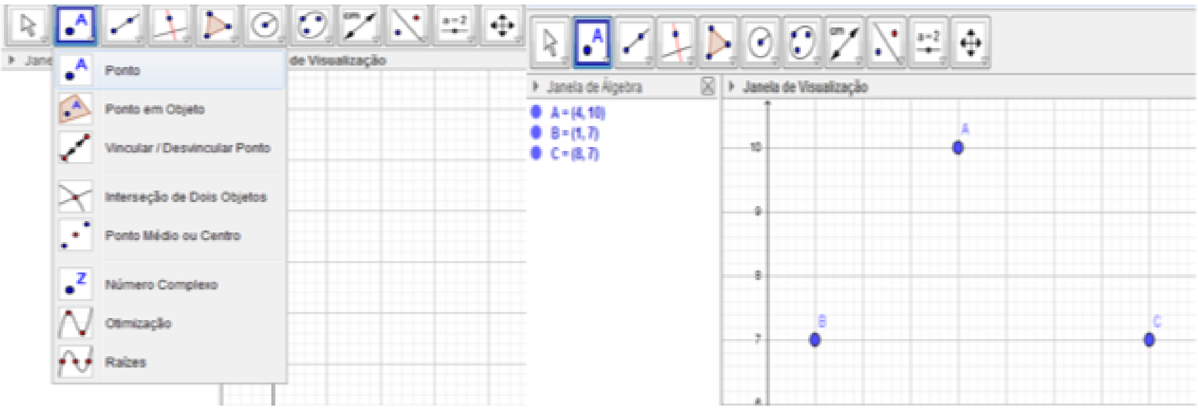
Logo , $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, por (LLL).
Como $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, então

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

- Construção de triângulos semelhantes, utilizando o caso (LLL).

Primeiro, marque os pontos A(4,10), B(1,7) e C(8,7). Clique na ferramenta ponto e marque os pontos (janela 2), se achar melhor você pode digitar na caixa de entrada.

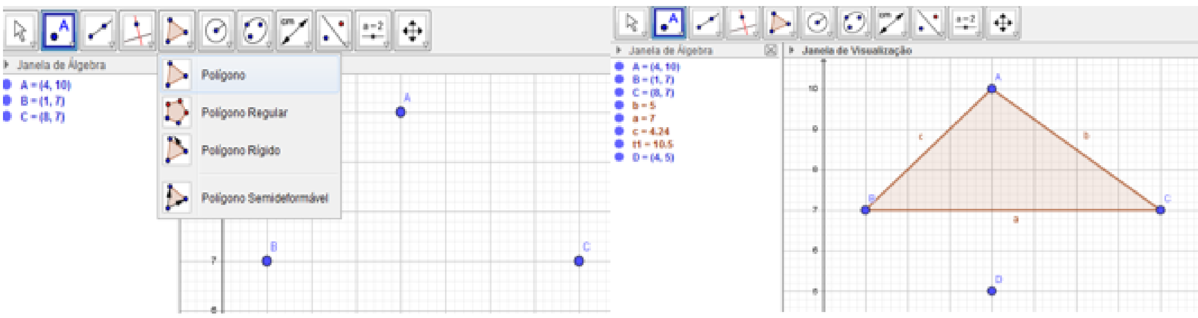
Figura 22 – Início da construção do triângulo.



Fonte: A autora

- Após marcados os pontos na janela 5 com a ferramenta polígono construa o triângulo ABC e na janela 2 novamente com a ferramenta ponto marque o ponto D ou na caixa de entrada digite o ponto (4,5)

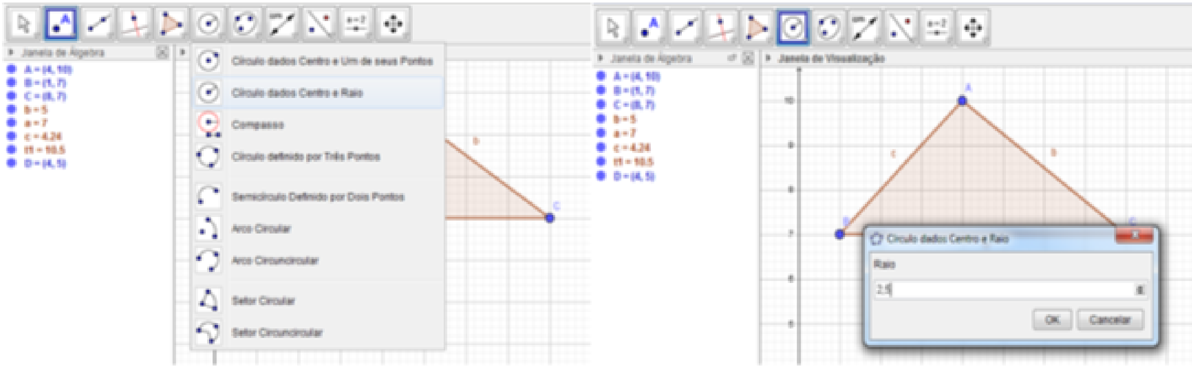
Figura 23 – Triângulo construído.



Fonte: A autora

- Agora vamos construir o triângulo DEF com as medidas já estabelecidas, assim na janela 6 com a ferramenta círculo dados centro e raio, clique no ponto D e na caixa digite o raio 2,5. Novamente clique no ponto D e na caixa agora digite para o raio 2,12 e pressione ok .

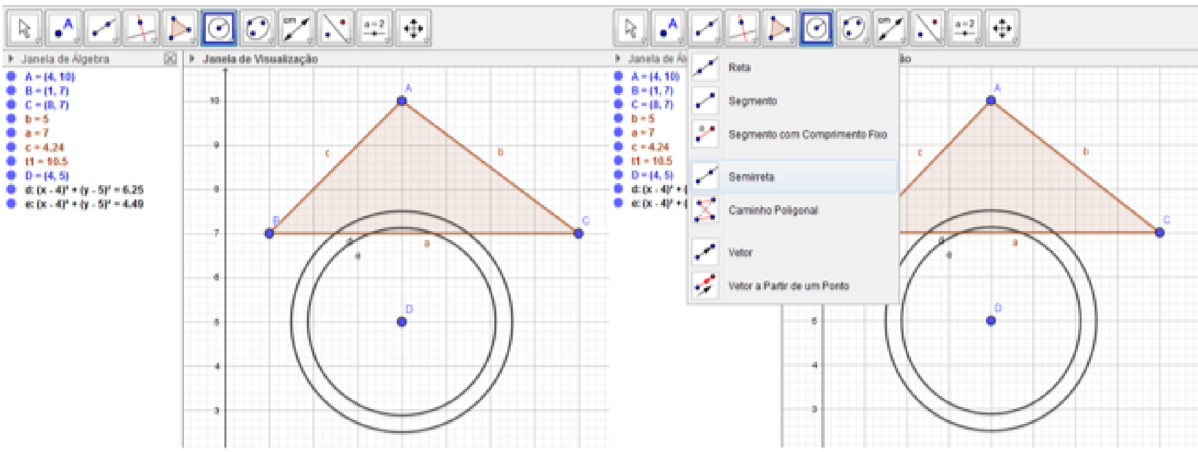
Figura 24 – Início da construção do segundo triângulo.



Fonte: A autora

- Com a ferramenta semirreta,(na janela 3) ,trace-a partindo de D e intersectando o círculo maior no ponto E. Lembrando que na janela de visualização aparecerão dois círculos concêntricos. conforme a figura abaixo mostra.

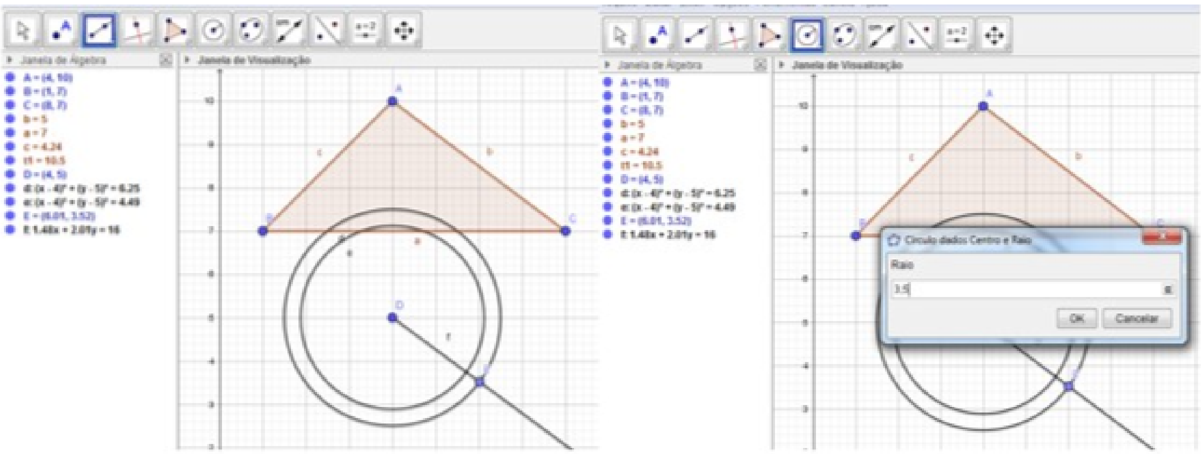
Figura 25 – Passos I para a construção do segundo triângulo.



Fonte: A autora

- Com a semirreta traçada e o ponto E marcado, clique na ferramenta círculo dados centro e raio (janela 6) e depois clicando em E, na caixa digite o raio 3,5 e ok.

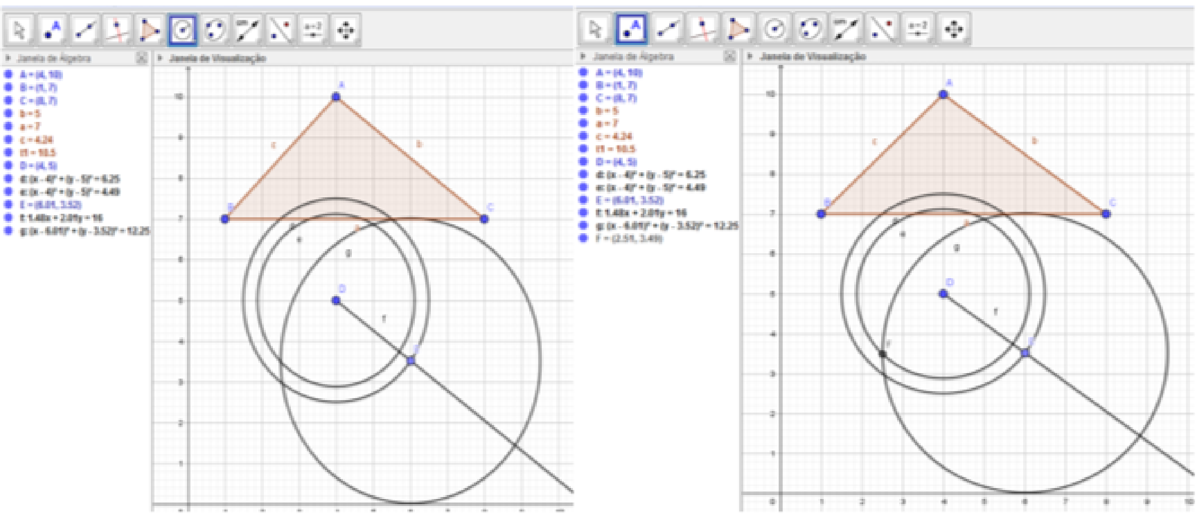
Figura 26 – Passos II para a construção do segundo triângulo.



Fonte: A autora

- Agora na janela 2 com a ferramenta ponto marque o ponto F que é a interseção do círculo com centro em E e o círculo menor de centro D, existem duas possibilidades, marque só a que está abaixo de D.

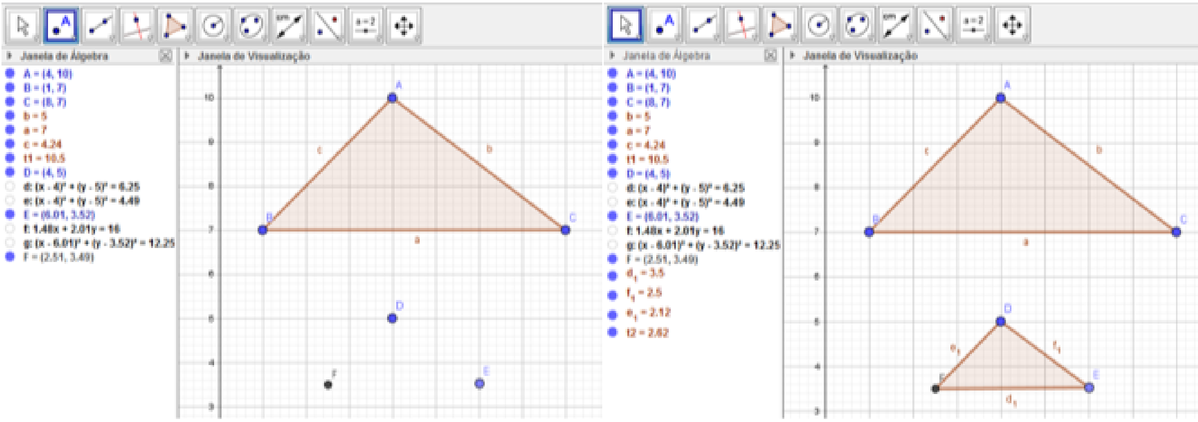
Figura 27 – Passos III para a construção do segundo triângulo.



Fonte: A autora

- Na janela de álgebra desmarque a equação da semirreta e as equações das três circunferências e na janela 5 com a ferramenta polígono construa o triângulo DEF.

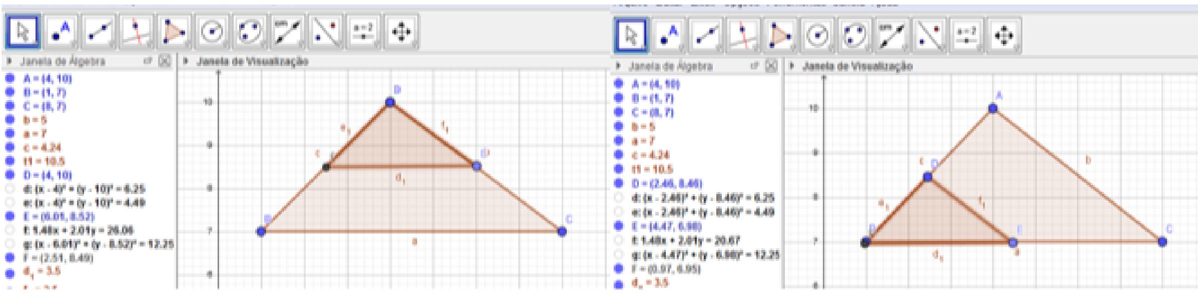
Figura 28 – Triângulos construídos pelo caso (LLL)



Fonte: A autora

- Na janela 1 com a ferramenta mover sobrepondo o triângulo menor é possível ver que ele se encaixa perfeitamente ao maior.

Figura 29 – Sobreposição dos triângulos para verificar a semelhança.



Fonte: A autora

10.5 Homotetia

A homotetia é uma transformação geométrica que mantém a forma da figura original, mas não necessariamente seu tamanho. Assim, a figura original e a figura obtida por homotetia são semelhantes.

Seja *O* um ponto do plano π (ou do espaço *E)* e r um número real positivo. A homotetia de centro *O* e razão r é a função $g : \pi \to \pi$ (Ou $g : E \to E$) definida do seguinte modo: $g(O) = O$ e, para todo ponto $X \neq O$, $g(X) = X'$ é o ponto da semirreta OX tal que $\overline{OX'} = r\overline{OX}$.

Uma homotetia de razão 1 é simplesmente aplicação identidade. Uma homotetia de centro O transforma toda reta que passa por O em si mesma. Toda homotetia é uma correspondência biunívoca, cuja inversa é a homotetia de mesmo centro e razão 1/r.

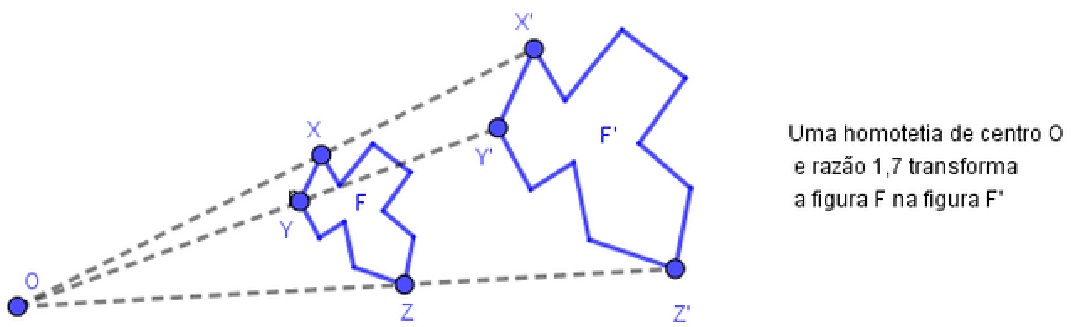
Duas figuras F e F' chamam-se homotéticas quando existe uma homotetia g tal que $g(F) = F$

Numa homotetia, os pontos O, X e X' são sempre colineares, nesta ordem se r $>$ 1 ou na ordem O, X' e X se 0$<$r$<$1 . Já numa semelhança as figuras F e F' podem ocupar posições quaisquer como numa foto e sua ampliação, que poder ser colocadas em vários lugares mas continuam semelhantes.

Em uma transformação por homotetia, com função do valor de r, pode-se ter:

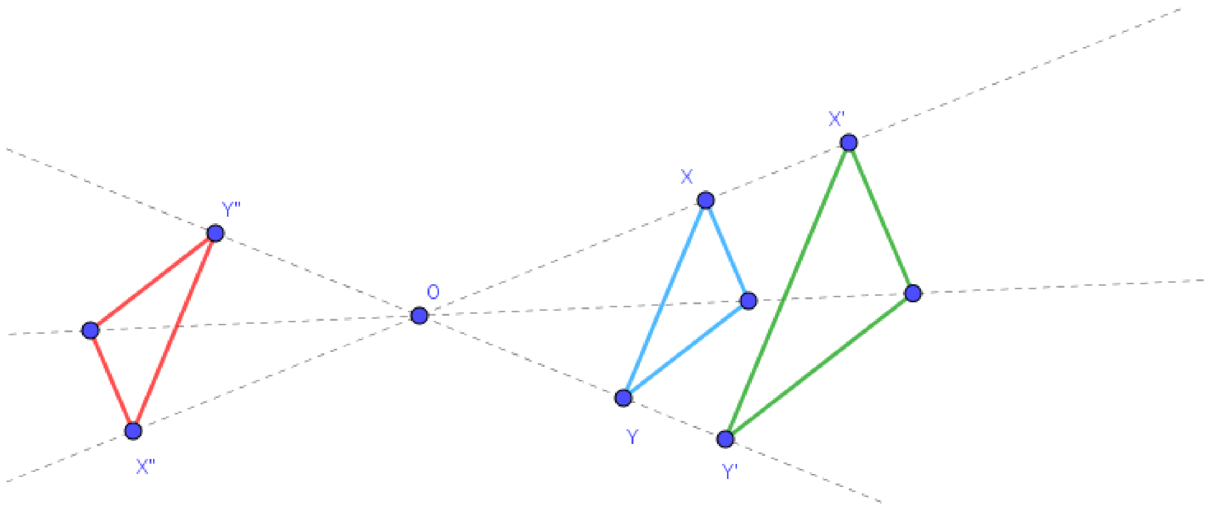
- r$>$1,O X' será maior que O X e a figura terá a sua imagem ampliada.
- r=1,O X' será igual a O X, logo a figura e a imagem serão coincidentes.
- 0$<$r$<$1, O X' será menor que O X e a imagem da figura reduzida
- r$<$0, terá a imagem ampliada ou reduzida seguindo as mesmas características anteriores de acordo com o módulo de r, com um giro na imagem.
- $r \neq 0$, pois se r=0 não existe imagem.

Figura 30 – Homotetia com centro e razão dada.



Fonte: http://regua-e-compasso.blogspot.com/
Homotetias.

Figura 31 – Homotetias



Fonte: http://regua-e-compasso.blogspot.com/

Em uma homotetia as características principais, como a forma e os ângulos, são preservadas; mas o tamanho da figura sofre alterações (figura 30) e quando a razão é negativa além de sofrer alterações ocorre um giro na imagem (figura 31).

11 A PROPOSTA

O presente trabalho foi realizado em uma turma de iniciação científica(PIC) em sua edição especial. As atividades foram realizadas durante dois ciclos do programa, pois o conteúdo estava definido para este período. Como tínhamos apenas dois encontros mensais de quatro horas cada, além de contatos por aplicativos de mensagens, usamos os horários de aula para trabalhar a teoria e em seguida fizemos atividades realizando as aplicações do assunto no geogebra. A turma era formada por alunos do primeiro e segundo ano do ensino médio, estudantes esses, que foram selecionados pela OBMEP com a realização de provas, é um dos programas mais importantes voltados para a avaliação dos alunos em nível federal pois faz a seleção e preparo daqueles que mais se destacam durante as provas para medir os conhecimentos matemáticos. A estrutura é boa, trabalha a matemática de uma maneira um pouco mais complexa do que eles estão acostumados a verem em suas respectivas escolas, o que contribui muito para o desenvolvimento do raciocínio lógico e cognitivo . Possui um fórum de discussão de questões, além disso são poucos alunos por turma o que facilita o contato entre o professor e educandos. A referida turma possuía 10 alunos ativos, por ser uma turma de ensino online, são alunos oriundos de diversos estados como Minas Gerais, Rio de Janeiro dentre outros, temos os encontros no turno da manhã para as aulas da convencionais entretanto trabalhamos também em outros horários por meio da produção de conteúdos em vídeos e questionários de avaliação de aprendizagem feitos ao final de cada ciclo. O programa recebe material exclusivo da OBMEP em muitas edições onde se encontram questões em diferentes níveis, porém no trabalho realizado foi optado por utilizar também o livro didático distribuído pelo MEC, disponível no Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que é o livro BIANCHINI, E.; Matemática Bianchini – 9º ano. 8ª edição. Editora Moderna, 2015., pois constatamos que, em parte, coincide com a proposta apresentada. O livro apresenta exercícios onde o aluno precisa pensar na solução, algo que vem de encontro com o que pensamos e podemos utilizar o método de resolução de problemas associado ao uso do geogebra, assim intercalou-se o uso do livro com materiais da sugeridos pelo PIC, tomando como uma referência o método desenvolvido por George Polya (POLYA, 2006) e recomendado nos PCN. Temos como objetivo aplicar os conhecimentos de semelhança de triângulos nas suas mais diversas abordagens por meio do geogebra. Para que isso fosse possível era necessário que os alunos tivessem conhecimento do Teorema de Tales, Teorema Fundamental da Semelhança e dos casos de semelhança de triângulos.

Os trabalhos foram realizados em momentos distintos:

1º momento: Para iniciar os trabalhos os alunos responderam um questionário (Anexo I) para avaliar qual o grau de conhecimento que possuíam sobre definições básicas de geometria. As questões eram de múltipla escolha e dissertativas para que pudéssemos avaliar o entendimento que possuíam. O questionário utilizado, era composto de perguntas nas quais os alunos deveriam responder o que entendem por: reta, segmento de reta, retas paralelas, polígono, triângulo, figuras semelhantes, triângulos semelhantes, altura do triângulo, cevianas e ângulos. Após essa verificação, sabendo do conhecimento apresentado pelos alunos, iniciamos a introdução do conteúdo, semelhança de triângulos, apresentando fatores históricos além de destacar a parte em que Tales, a pedido do Faraó determina a altura da pirâmide de Quéops, utilizando a sombra da pirâmide, uma estaca e a semelhança de triângulos. Assim os alunos tiveram conhecimento da história e de alguns fatos curiosos sobre a vida de Tales de Mileto. Nesta etapa, com o auxílio de slides feitos a partir do livro didático escolhido, os alunos tiveram o primeiro contato com os teoremas e suas demonstrações que foram desenvolvidos na tela. Após as explicações resolvemos atividades do livro didático e do portal do PIC.

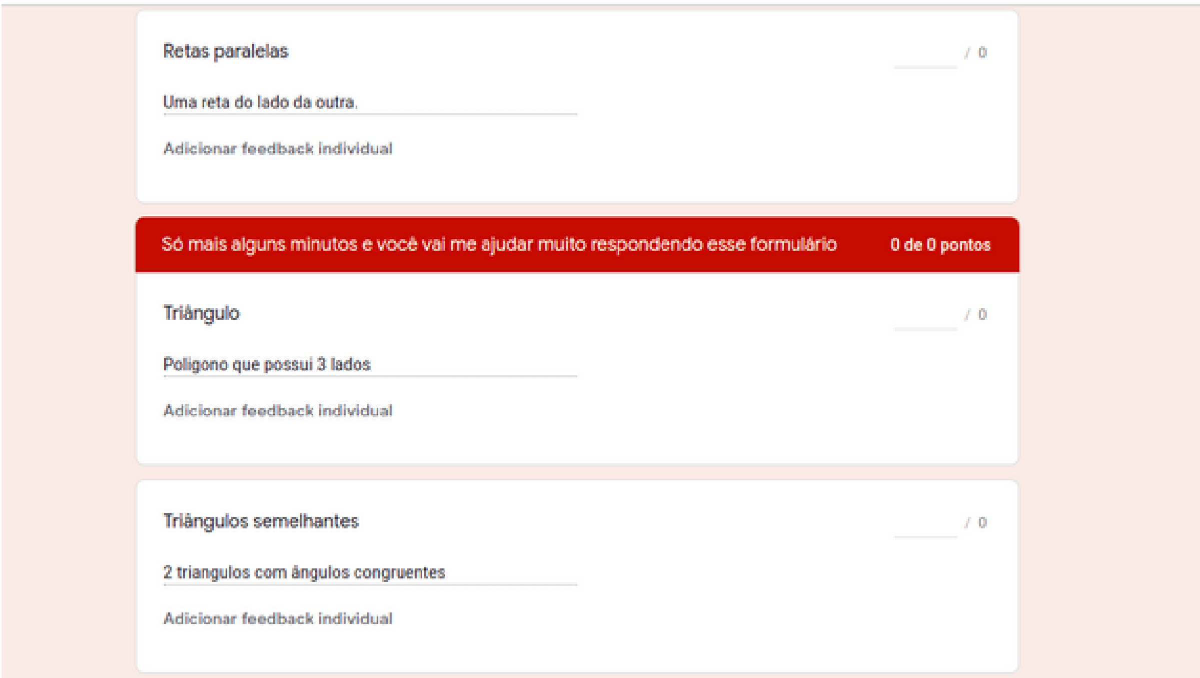
2º momento:

Após toda a abordagem teórica, realizamos a prova de cada caso de semelhança de triângulo no geogebra, além disso, realizamos atividades com o uso do programa conforme consta no relato de experiência com as atividades propostas no livro, BIANCHINI, 2015, além de questões do portal da matemática e aplicações de própria autoria. Ao final de cada atividade para sondar o conhecimento dos alunos foi feito um questionamento sobre o que havíamos trabalhado, tal questionamento foi realizado por meio de perguntas diretas que exigiam conhecimentos que trabalhamos com teoria e aplicações. Ao longo das atividades notamos um desenvolvimento significativo. O que nos levou a refletir sobre a importância da construção das idéias por meio de algo que é possível ser visualizado. Após finalizar esse momento aplicamos um questionário para verificar qual o entendimento que possuem sobre semelhança de triângulos. A atividade era composta de três questões em que o aluno deveria resolver e justificar suas respostas. Na aula seguinte, comentamos sobre a atividade realizada e desenvolvemos uma outra prática, em que os alunos construíram triângulos e seguindo um roteiro, determinaram se eram ou não semelhantes utilizando os casos de semelhança vistos anteriormente. (Atividade apresentada no relato da experiência).

12 RELATO DE EXPERIÊNCIA

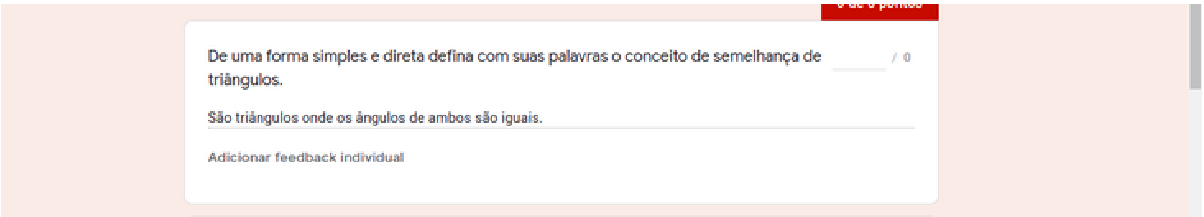
As aulas ocorreram durante os ciclos previstos no programa, na ordem em que estavam no plano de estudo da turma. Ao contrário do que muitos livros fazem que é colocar o estudo da geometria como último assunto para ser estudado, o programa de iniciação científica apresentou no seu roteiro tais assuntos já nos primeiros ciclos dando uma certa ênfase no decorrer dos estudos, o que vem contrapor o que diz Lorenzato (1995), sobre o estudo da geometria, “quase sempre ela é apresentada no final e acaba por não ser estudada por falta de tempo”. Durante toda a experiência, as aulas ministradas foram em salas virtuais, por conta da pandemia e também da logística da turma ,pois como dito anteriormente os alunos são diferentes localidades. Após apresentada a proposta para os alunos, foi feita a aplicação de um questionário, (Anexo I) para ver o quanto sabiam dos conceitos básicos de geometria pois necessitaríamos naquele momento. Após analisar as respostas percebemos que os alunos possuíam muitas falhas em relação aos saberes básicos de geometria pedidos no questionário, apresentavam dificuldades com a linguagem matemática como pode ser visto na (figura 32), e a grande maioria tinha a noção intuitiva dos conceitos mas não conseguia expressá-los corretamente de forma precisa, levando-nos a fazer uma revisão desses conceitos para depois iniciarmos com o conteúdo programado.

Figura 32 – Respostas dadas pelos alunos no questionário do Anexo I



Fonte: A autora

Figura 33 – Respostas dadas pelos alunos no questionário do Anexo I

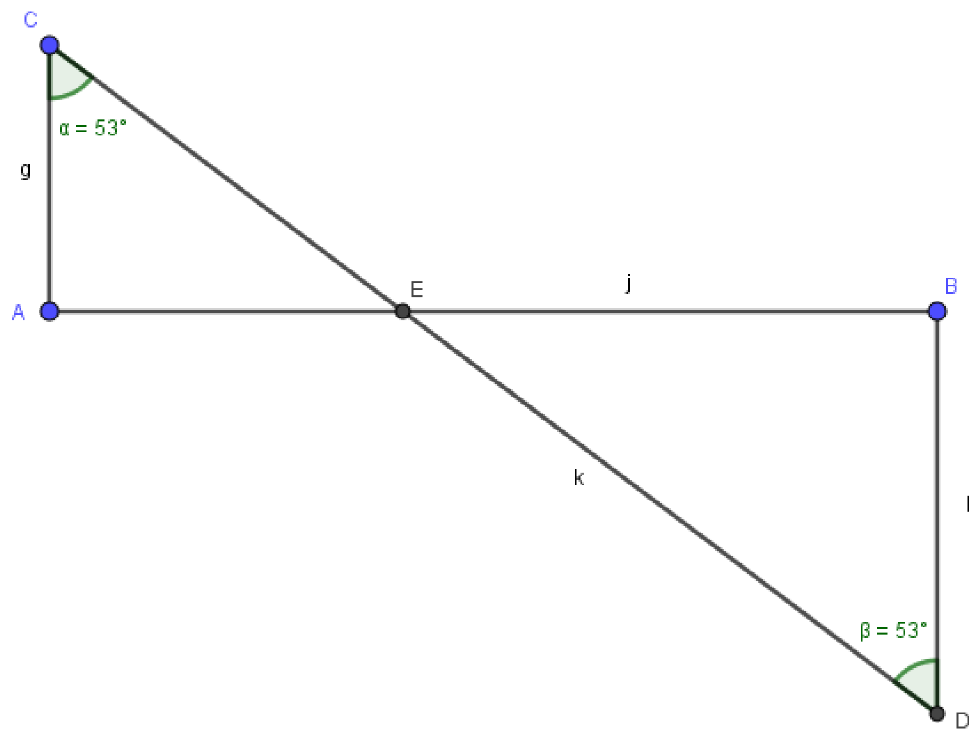


Fonte: A autora

Na figura 32 e 33 podemos perceber que os alunos não tinham o domínio correto das definições e sim uma noção intuitiva do que são retas paralelas, figuras semelhantes e outros conceitos importantes que necessitaríamos. Então devido ao resultado do questionário (Anexo I), o planejamento teve que ser mudado e iniciamos com uma pequena revisão de conceitos básicos da geometria, para em seguida abordarmos o conteúdo de semelhança de triângulos. Depois da revisão, apresentamos o Teorema Fundamental da Semelhança, demonstrações e exemplos, seguido de algumas atividades. Após as demonstrações, que os alunos não estavam acostumados a ver, fizemos a construção das mesmas no geogebra e em seguida passamos para alguns exemplos, e pude perceber que só então os alunos estavam mais confortáveis em relação ao conteúdo. Procedendo da mesma forma, vimos os casos de semelhança, (vistos no referencial teórico), e algumas atividades para que houvesse uma melhor compreensão do assunto. Os alunos mostraram-se interessados pelo conteúdo, e a cada atividade proposta surgiam novas perguntas. Como a atividade abaixo:

Tarefa 1: Os triângulos ABC e EBD (Figura 34) são semelhantes?

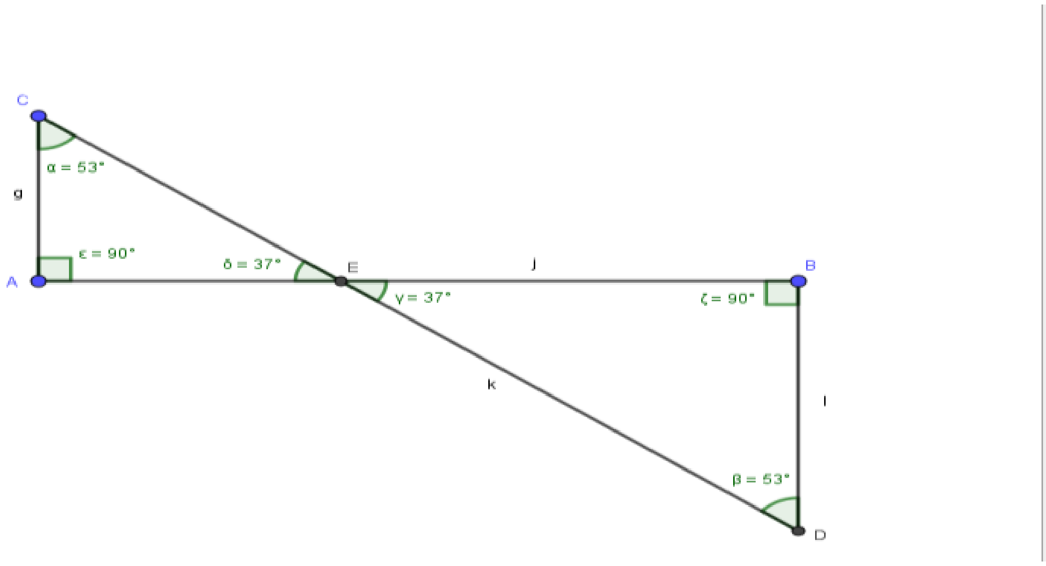
Figura 34 – Desenho do triângulo do exercício 1.



Fonte: A autora

Nesta atividade os alunos deveriam justificar que os triângulos eram semelhantes por possuírem dois ângulos correspondentes iguais. Os ângulos $A\hat{E}C = B\hat{E}D$ são opostos pelo vértice, possuindo assim dois ângulos correspondentes iguais Após cada atividade é feita a verificação de aprendizagem. A figura é construída e utilizando as ferramentas disponíveis no GeoGebra (figura 35) medimos todos os ângulos, e utilizando as propriedades de semelhança de triângulos podemos verificar que os ângulos possuem a mesma medida logo eles são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo.

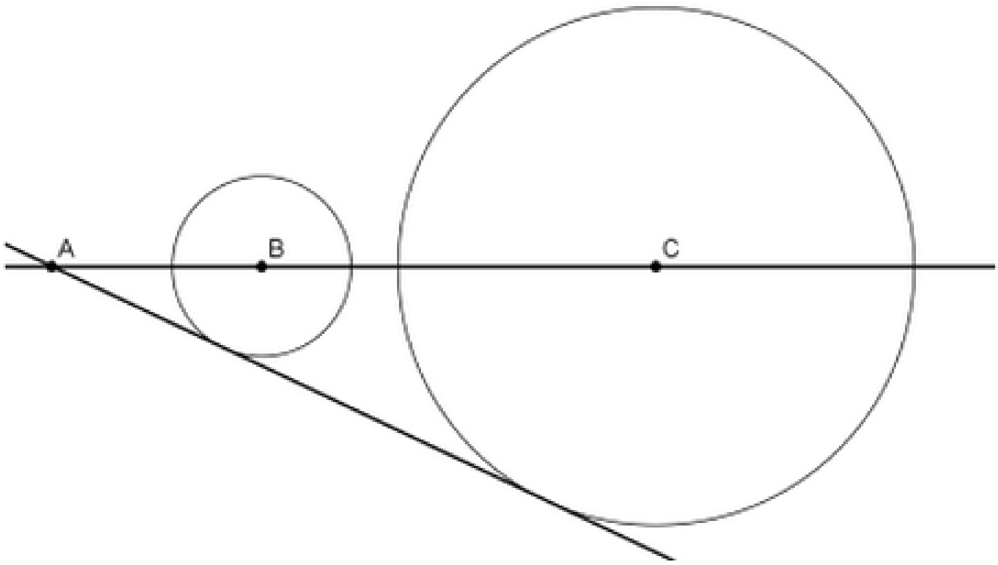
Figura 35 – Verificação no GeoGebra do resultado do exercício 1.



Fonte: A autora

Tarefa 2: Temos na figura 36, uma reta que passa pelos pontos A, B e C e outra que passa por A e é tangente as circunferências de centros B e C e raios 3cm e 5cm. Se AB = 7cm, determine BC.

Figura 36 – Tarefa 2 proposto no portal da matemática (OBMEP).

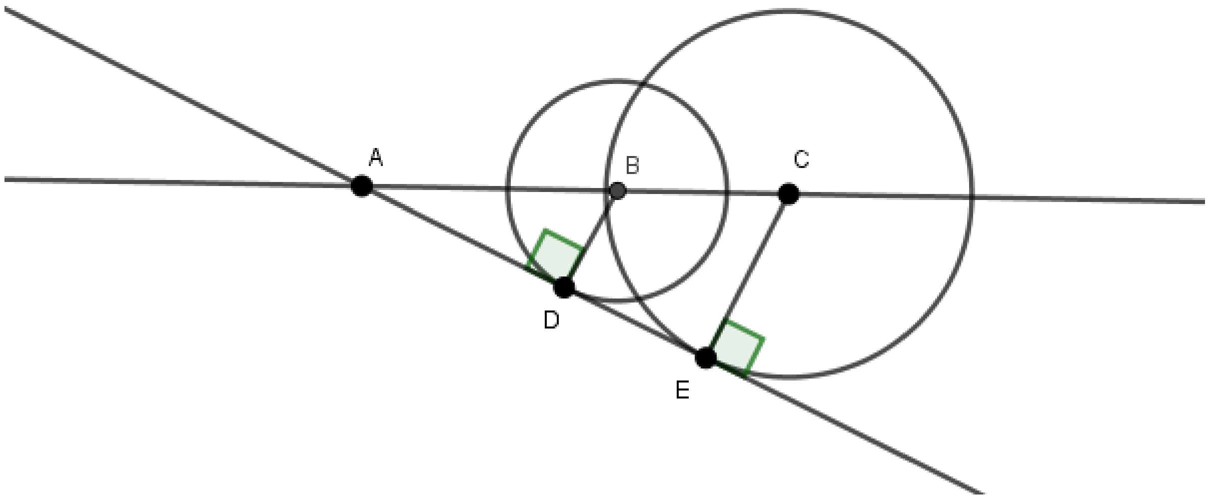


Fonte: Portal da matemática (OBMEP).

Temos que $\triangle ABDe \triangle ACE$ (figura 37) são triângulos semelhantes, como AB=7 e chamando a distância BC=x, aplicando a razão de semelhança, e sabendo que o raio é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência, então:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{7}{3} = \frac{7+x}{5} \Rightarrow 21 + 3x = 35 \Rightarrow x = \frac{14}{3} \tag{12.1}$$

Figura 37 – Verificação feita no GeoGebra da solução do exercício 2.



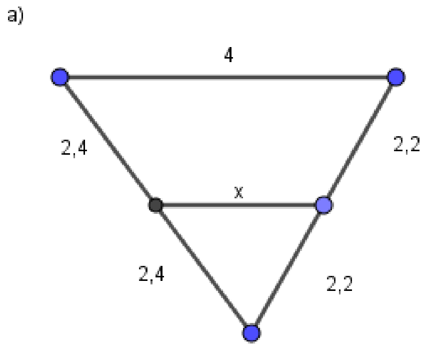
Fonte: A autora

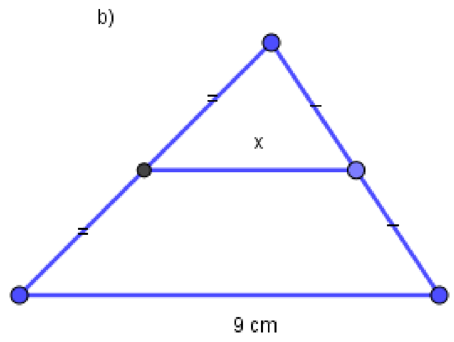
Ao final da atividade, com os valores em mãos construímos no GeoGebra a figura e podemos perceber que nem sempre ela está de acordo com a questão, nesse caso a figura correta (figura 37) tem os dois círculos se intersectando, o que às vezes confunde os alunos, que ao olhar para a figura (figura 36) questiona o seu resultado, por que a figura posta na questão não está de acordo com a situação real do problema.

- **Tarefa 3**: Calcule x nos seguintes triângulos (figura 38).

A letra "a" os alunos resolveram com certa facilidade usando semelhança de triângulos.

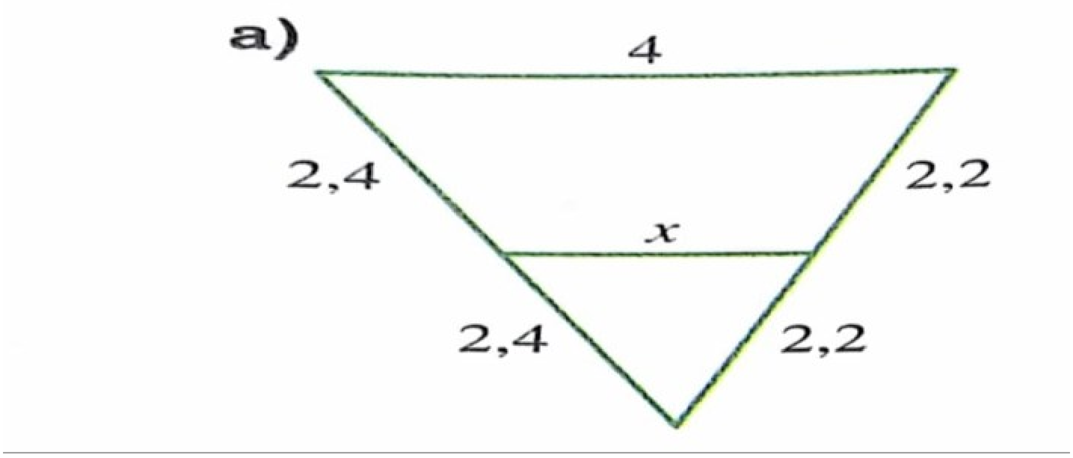
Figura 38 – Exercício proposto no livro didático (BIANCHINI, 2015, p. 66).





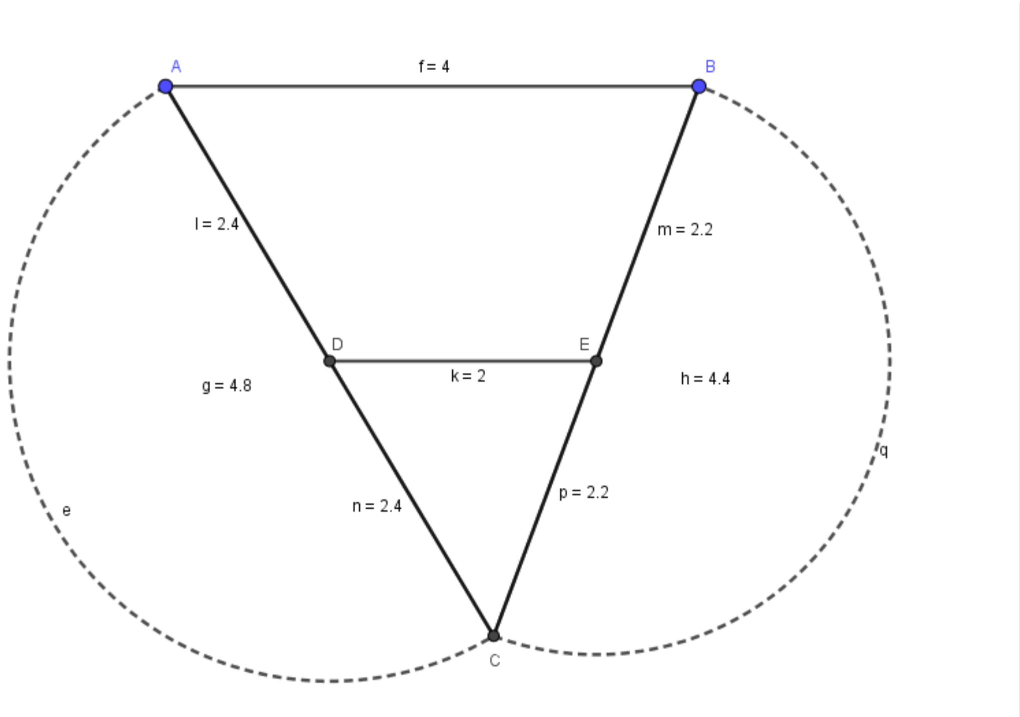
Fonte: (BIANCHINI, P.66)

Figura 39 – Exercício que exige apenas a aplicação de fórmulas para chegar ao resultado.



Fonte: (BIANCHINI, P.66)

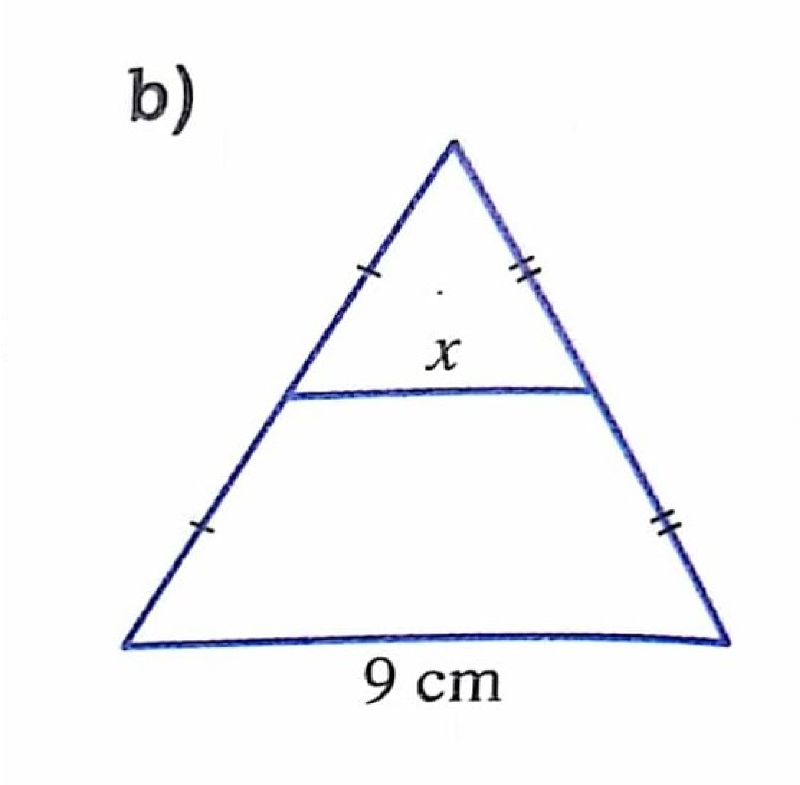
Figura 40 – Verificação do resultado do exercício 3 no geogebra.



Fonte: A autora

Já no exercício “b” (figura 41) os alunos tiveram dificuldades na resolução, pois segundo eles “não havia números”, este foi o comentário que quase todos os alunos fizeram. Esta atividade rendeu muita discussão. “Como vamos resolver se só tem um valor?” Então passamos a analisar com mais calma e fui perguntando, “vocês entendem todos os símbolos presentes na figura? O que acham que os traços marcados nos lados do triângulo significam?” Para muitos alunos aquela simbologia era novidade, nunca tinham visto antes esse tipo de representação. Expliquei que aqueles traços representavam segmentos que possuíam a mesma medida e como o lado estava,dividido em dois segmentos iguais, o segmento que queríamos medir passava pelo ponto médio dos lados do triângulo. Mas mesmo assim ainda não entendiam como resolver a questão, colocamos valores numéricos para facilitar o entendimento dos alunos e sempre o resultado para o x era o mesmo, depois generalizamos para concluir que se tratava do teorema da base média, assunto que foi apresentado a eles. Essa questão foi muito interessante.

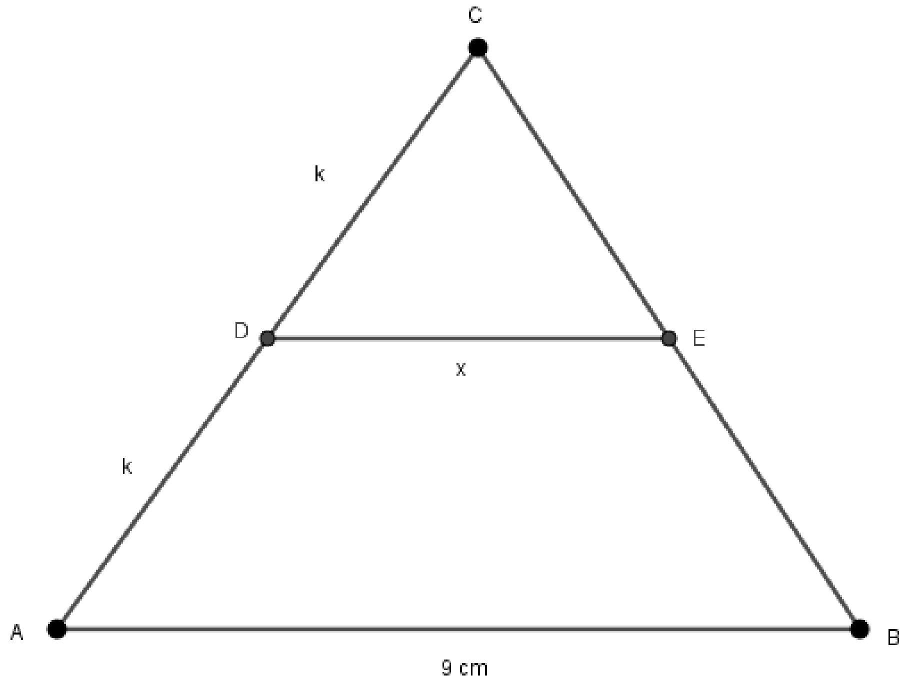
Figura 41 – Exercício 3b do livro (BIANCHINI, P.66).



Fonte: (BIANCHINI, P.66)

Com auxílio do GeoGebra construímos o triângulo, o que facilita muito a visualização e a compreensão.

Figura 42 – Construção no GeoGebra para auxiliar na compreensão da questão.



Fonte: A autora

Pela semelhança de triângulos temos que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (figura 42).
Como D é ponto médio de $\overline{AC}$, temos que $\overline{CD} = \overline{DA} = k$, então:

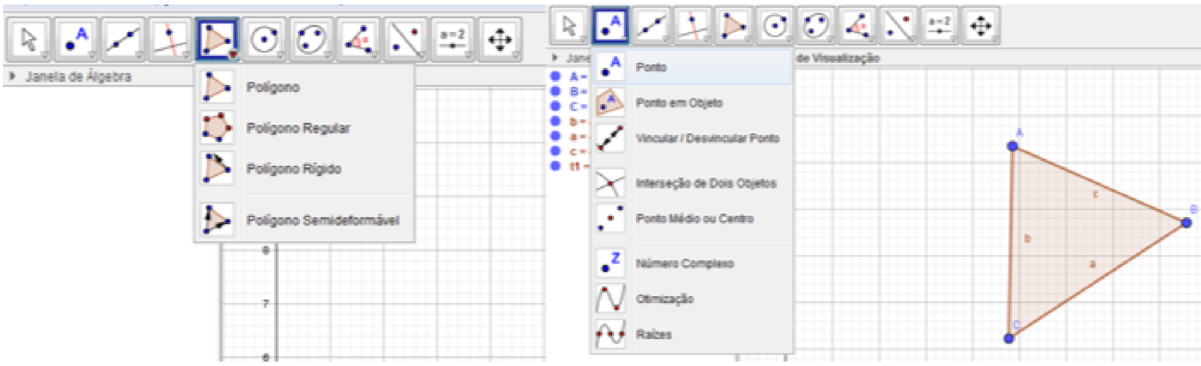
$\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{k}{x} = \frac{2k}{9} \Rightarrow 2kx = 9k$, dividindo os dois membros por k

Temos, $2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4,5$

De toda essa discussão chegamos à conclusão: “Dado um triângulo qualquer, a base média com extremos nos pontos médios de dois lados desse triângulo é paralela ao terceiro lado e a sua medida é igual à metade da medida desse terceiro lado”. Que é o chamado Teorema da Base Média.

Atividade 1: Construção de dois triângulos semelhantes com homotetia. Na janela 5, usando a ferramenta “polígono”,Construa o triângulo ABC.

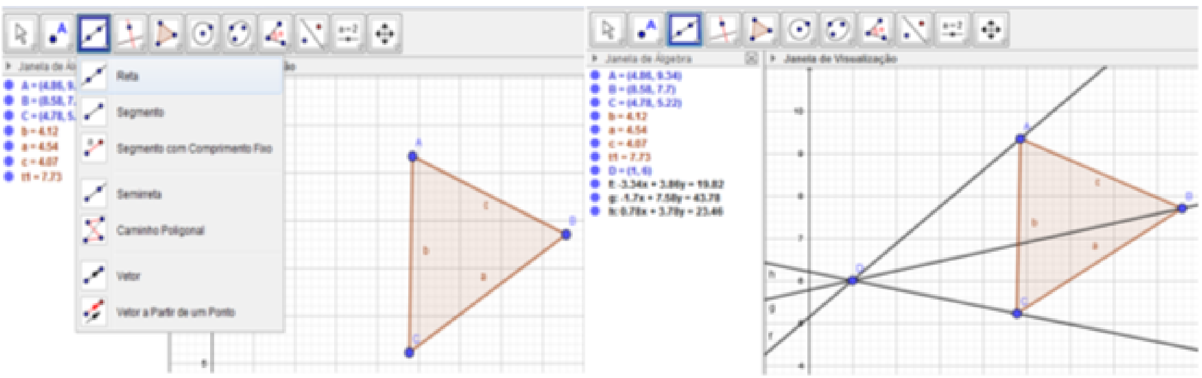
Figura 43 – Construção do triângulo no GeoGebra.



Fonte: A autora

- Na janela 2 clique na ferramenta ponto em seguida marque um ponto D qualquer fora do triângulo. Logo após,clicando na janela 3, na ferramenta reta,crie retas que passem pelos vértices do triângulo e por este ponto D.

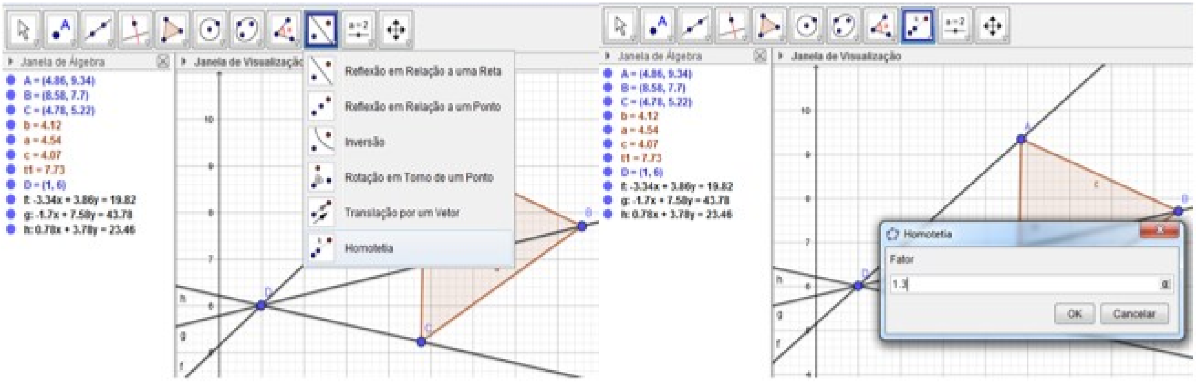
Figura 44 – Construção das retas que passam pelos pontos do triângulo.



Fonte: A autora

- Na janela 9 clique na opção “homotetia”. Em seguida você vai clicar na parte interior do triângulo selecionando o mesmo feito isso clique no ponto D. A caixa de homotetia abrirá pedindo o fator de ampliação, digite o fator, 1,3 e clique em ok.

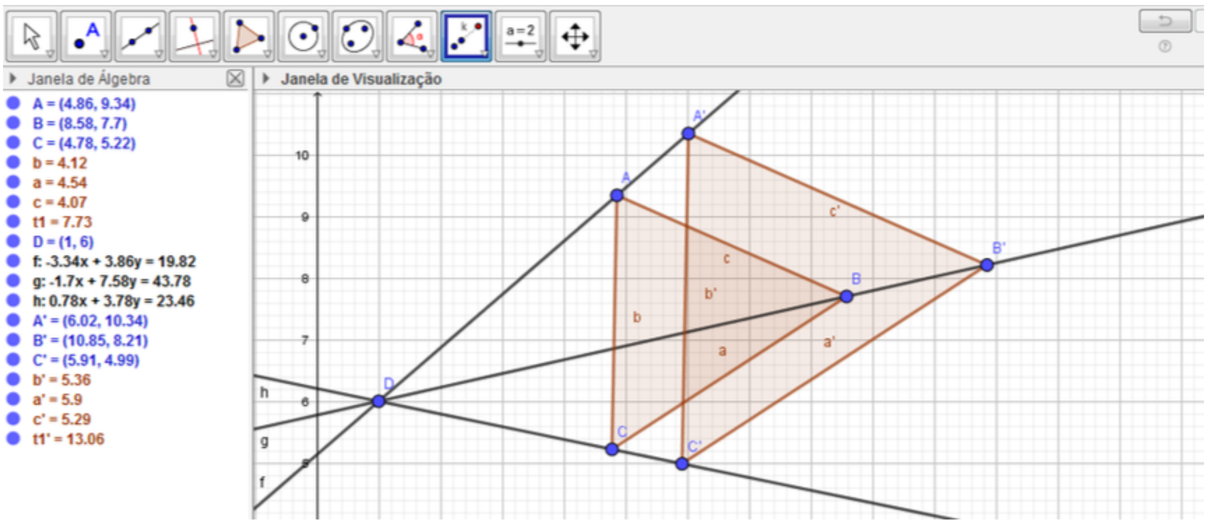
Figura 45 – Aplicação da ferramenta homotetia.



Fonte: A autora

- Um novo triângulo vai surgir a partir do triângulo ABC e será A'B'C'.

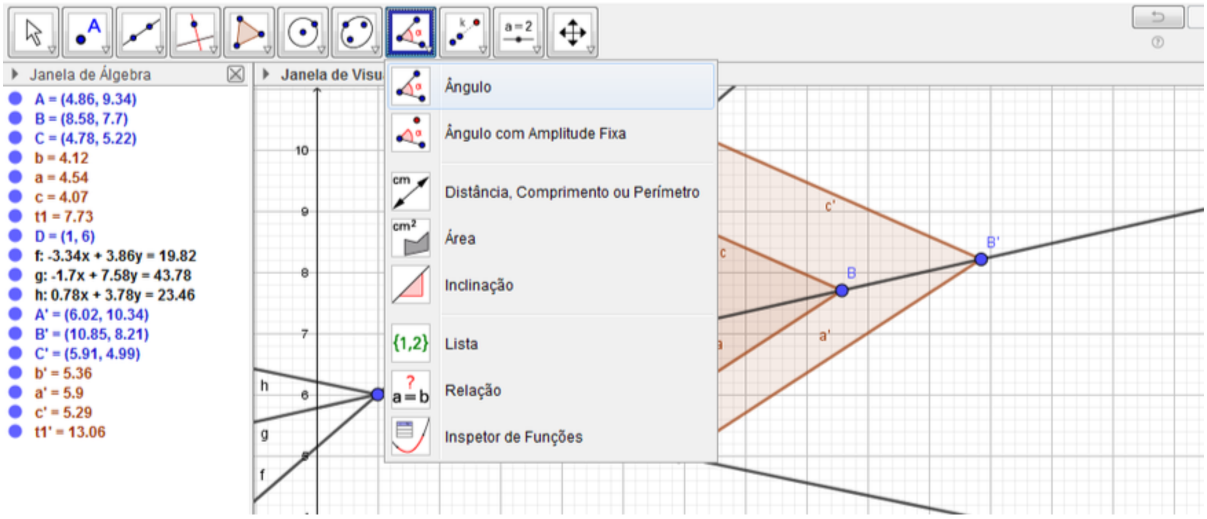
Figura 46 – Semelhança por homotetia.



Fonte: A autora

- Marque os ângulos dos triângulos ABC e A'B'C' e observe se os ângulos correspondentes possuem a mesma medida. Para isso clique na janela 8 opção “ângulo “.

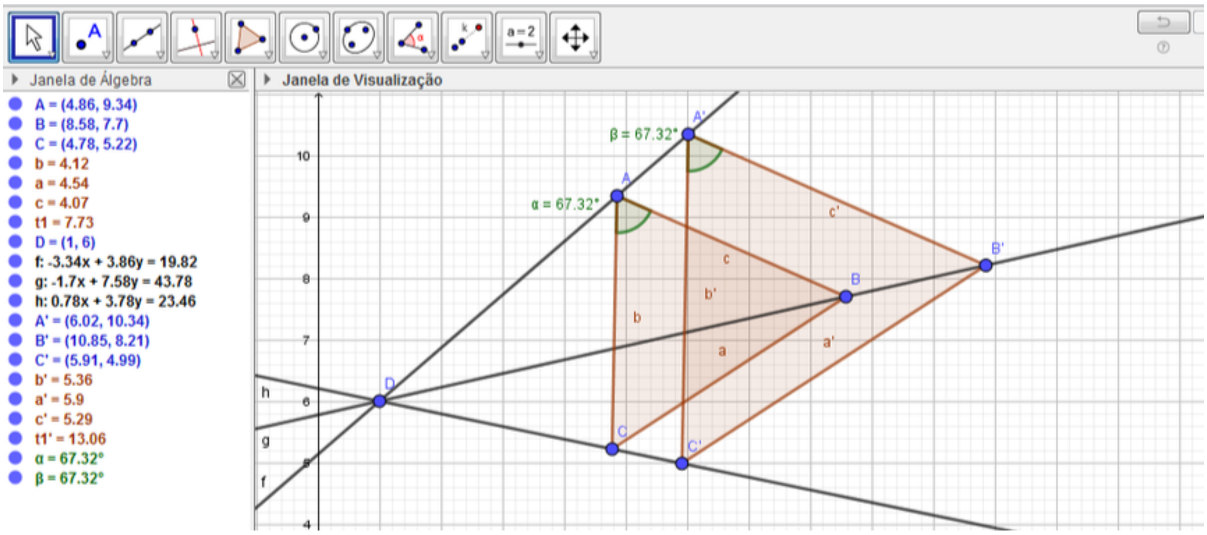
Figura 47 – Marcação dos ângulos nos triângulos.



Fonte: A autora

- Em seguida, veja as retas que formam um ângulo, primeiro na reta à direita do ângulo e depois na reta à esquerda do ângulo.

Figura 48 – Ângulos em triângulos homotéticos.



Fonte: A autora

Com base nessa apresentação, onde conseguimos analisar de uma forma muito mais compreensível, ao final os alunos deveriam responder esses questionamentos, vale ressaltar que tivemos aulas teóricas sobre o assunto e que a atividade apresentada acima foi uma forma de aplicar tais conceitos.

Responda as questões a seguir:

1) O que é homotetia?

2) As figuras homotéticas são semelhantes, por quê?

3) Verifique se a razão de semelhança entre os dois triângulos é igual ao fator colocado na caixa de homotetia.

Ao final das atividades, percebemos que os alunos possuem muita dificuldade em usar as tecnologias, pois nunca haviam tido contato antes, mas com os passos fornecidos e o auxílio aos que tinham mais dificuldade conseguimos construir as figuras e o mais importante, com as figuras construídas facilitou para que visualizassem as propriedades e os casos de semelhança de triângulos, alcançando o objetivo proposto nas atividades.

13 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo deste trabalho foi apresentar as atividades práticas e a resolução de problemas relacionados com o ensino da Geometria no geogebra dando ênfase nas definições e demonstrações da semelhança de triângulos, de forma a despertar nos alunos um maior interesse pela disciplina e melhorar a aprendizagem.

Ao realizarmos a pesquisa percebemos que os alunos tinham conhecimentos superficiais de geometria, sem precisão de linguagem e definições. Por isso, precisamos revisar alguns conceitos básicos antes de iniciarmos o assunto. Quando aplicamos o primeiro questionário, antes das aulas teóricas, percebemos que muitos alunos, 60%, apresentam algum tipo de dificuldades no entendimento das questões ou dificuldades na colocação dos dados, o que levou a ocorrência de alguns erros, então necessitaríamos de ainda mais estratégias para alcançar o nosso objetivo. Passamos a utilizar então uma metodologia voltada para as definições e demonstrações associados a resolução de problemas, seguindo os passos nessa ordem notamos que o entendimento teve significativas melhoras.

A utilização da metodologia adotada deu-se da seguinte forma, compreensão das definições e demonstrações do assunto de maneira mais teórica, seguida de verificação de tais assuntos no geogebra, após isso verificação dos problemas, com a leitura do mesmo, seguido de alguns questionamentos para despertar a curiosidade e o interesse dos alunos, estabelecimento de um plano e a execução do plano, com o apoio dos desenhos e a utilização dos teoremas vistos anteriormente e finalmente o retrospecto, onde utilizamos o software GeoGebra para verificar se o resultado comparado com a construção eram compatíveis. Ao utilizarmos a técnica de resolução de problemas , a partir das atividades práticas em aulas online principalmente na construção de elementos geométricos no Geogebra, seguimos os passos propostos por POLYA em seu livro “A Arte de Resolver Problemas” (POLYA 2006) de forma a instigar os alunos a refletir sobre suas ações no desenvolvimento de cada uma das atividades, tornando assim o desempenho dos alunos visivelmente melhor.

A análise que podemos fazer é que muitos alunos, 60%, apresentavam dificuldade no entendimento das questões ou dificuldades na colocação dos dados na primeira verificação de conhecimentos, esse número diminuiu muito passando para 30% na segunda avaliação, ficando evidente que quando trabalhamos com atividades práticas e com a resolução de problemas mais alunos acertaram as questões e quando utilizamos recursos em que precisava que o aluno tivesse uma postura mais ativa fizemos isso por meio da construção no GeoGebra. O envolvimento comparado com a apresentação apenas teórica do conteúdo, foi significativamente maior.

Temos que considerar, que os livros didáticos deveriam contemplar mais atividades desafiadoras, que permitam construir um maior significado dos conceitos envolvidos. Atividades repetitivas que apenas exigem a aplicação de fórmulas, também são importantes, mas elas não devem ser o foco principal e sim os problemas, pois são eles juntamente com as atividades práticas que possibilitam uma melhor aquisição de conhecimento.

Também é necessário que os livros didáticos estejam em sintonia com a realidade educacional, científica e tecnológica, ou seja, utilizar as tecnologias da informação e comunicação, tão presentes na vida dos nossos alunos e até agora ignorados pelos autores, deve ser considerada uma alternativa para um pleno desenvolvimento dos educandos. Os alunos que se empenharam em assistir as aulas e fazer as atividades com mais rigor e cuidado, chegaram a resultados excelentes, e se apropriaram com mais clareza dos conceitos geométricos vistos em aula.

Portanto, o uso de diferentes formas de apresentar o conteúdo, proporciona aos alunos possibilidades de eles perceberem que a matemática tem muita utilidade prática no dia a dia, que alguns alegaram não terem percebido anteriormente. Logo, observamos evidências que a utilização do software foi potencialmente significativa, pois se tratou de uma sequência didática que colocou os alunos como protagonistas do seu aprendizado.

Referências

MUNIZ NETO**, Antônio Caminha; Geometria: Rio de Janeiro,** SBM, 2013.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências.** In Revista Zetetidé. Ano I, n. 1, 1993

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** 2ª edição. Tradução Heitor Lisboa de Araújo, Rio de Janeiro, Interciência, 2006.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. **"Homotetia"; Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/homotetia.htm. Acesso em 14 de Dezembro de 2021

SOUZA, Carlos Eduardo; GRAVINA, Maria Alice. Geometria com animações interativas. CINTED/UFRGS - **Novas Tecnologias da Educação**, vol. 07 n. 01, Julho, 2009.

RIBEIRO, Tiago Nery. **A utilização de software na geometria dinâmica como ferramenta pedagógica nas aulas experimentais de matemática.** Anais do V Colóquio internacional "Educação e contemporaneidade". ISSN 1982-3657. Realizado no periodo de 21 a 23 de Setembro de 2011 em São Cristovão, SE.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 2ª edição. Tradução Heitor Lisboa de Araújo, Rio de Janeiro, Interciência, 2006.

Anexos

Anexo I – Questionário

-Defina com suas palavras o conceito de semelhança de triângulos.

2-O que você entende por:

Reta——————————————————————————-

Retas paralelas————————————————————

Triângulo——————————————————————-

Triângulo semelhante——————————————————-

Polígono——————————————————————

Ângulo———————————————————————

Figuras semelhantes——————————————————-

3-Atualmente quais aparelhos eletrônicos você tem a sua disposição

-Celular

-Celular e computador

-Tablet

-Nenhum

4-Você considera importante o uso de TIC's (Tecnologias da informação e comunicação) como um método facilitador no ensino da geometria plana, em especial no ensino da semelhança de triângulos.

-Sim, muito importante

-Sim, porém acho que não faz tanta diferença

-Não, seria mais uma forma de segregar

-Não, torna ainda mais difícil

5-Você já teve algum contato com o programa geogebra?

-Sim

-Não