

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

JORGE LUÍS DA CONCEIÇÃO CUTRIM

SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO
Discussão sobre os métodos de resolução

SÃO LUÍS - MA
2022

JORGE LUÍS DA CONCEIÇÃO CUTRIM

SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO
Discussão sobre os métodos de resolução

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de matemática da Universidade Federal do Maranhão para a obtenção do grau de licenciatura em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo

SÃO LUÍS - MA
2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Cutrim, Jorge Luís da Conceição.

SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO : Discussão sobre os métodos de resolução / Jorge Luís da Conceição Cutrim. - 2022.

51 p.

Orientador(a): Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo.

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2022.

1. Ensino Médio. 2. Métodos de Resolução. 3. Sistemas Lineares. I. Araújo, Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de. II. Título.

JORGE LUÍS DA CONCEIÇÃO CUTRIM

SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

Discussão sobre os métodos de resolução

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de matemática da Universidade Federal do Maranhão para a obtenção do grau de licenciatura em matemática.

São Luís, 07 de junho de 2022.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Orientador

Prof. Me. José Mairton Barros da Silva
Examinador

Prof^ª. Me. Sônia Rocha Santos Sousa
Examinador

SÃO LUÍS - MA
2022

AGRADECIMENTOS

Gostaria de começar agradecendo a Deus pela oportunidade de poder concluir mais esta etapa da minha vida acadêmica principalmente por todos os problemas que a humanidade vem passando devido à pandemia da covid 19 e que tirou a vida de alguns dos nossos conhecidos e colegas.

Aos meus pais José e Silva, a minha avó Rosa Amorim Ewerton, pessoa que me ajudou muito em todos os aspectos da minha vida e colegas da Ufma e do curso de matemática.

Agradeço a todos os professores que tive durante toda a jornada educacional desde o fundamental até o ensino superior, em especial ao corpo docente do departamento de matemática da Ufma.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo por todo o auxílio na elaboração deste trabalho de conclusão do curso.

Enfim, agradeço a toda a sociedade brasileira que através dos impostos custeou de alguma forma o ensino na universidade federal do maranhão e a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram com o meu desenvolvimento educacional.

“A vida é como andar de bicicleta. Para manter o equilíbrio é preciso se manter em movimento”
(*Albert Einstein*)

RESUMO

Este trabalho visa mostrar o histórico, conceitos e métodos aplicados no estudo dos sistemas lineares, assunto este que é discutido tanto no ensino médio quanto no ensino superior porém de formas diferentes. Outros assuntos também são pré-requisitos para o estudo dos sistemas lineares tais como: matrizes e determinantes que serão vistos de uma forma introdutória. Discutiremos de uma forma mais aprofundada os métodos adição, substituição e comparação aplicados a sistemas 2×2 , regra de Cramer e escalonamento (esses dois últimos aplicados mais comumente a resolução de sistemas 3×3). Desta forma, este trabalho visa não apenas mostrar apenas os conceitos tradicionais abordados no ensino médio mas também toda uma fundamentação teórica que envolve o estudo dos sistemas lineares.

Palavras Chave: Sistemas lineares, Métodos de resolução, Ensino Médio.

ABSTRACT

This work aims to show the history, concepts, methods and applications of the study of linear systems, a subject that is discussed both in high school and in higher education but in different ways. Other subjects are also prerequisites for the study of linear systems such as: matrices and determinants that will be seen in an introductory way. We will discuss in more depth the addition, substitution and comparison methods applied to 2×2 systems, Cramer's rule and scaling (these last two most commonly applied to the resolution of 3×3 systems). In this way, this work aims not only to show only the traditional concepts addressed in high school but also a whole theoretical foundation that involves the study of linear systems.

Keywords: Linear systems, Resolution methods, High School.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	8
1.1 Histórico dos sistemas lineares	8
1.2 Matrizes e determinantes	9
1.2.1 Matrizes	9
1.2.1.1 Matrizes especiais	9
1.2.2 Determinantes	10
2 SISTEMAS LINEARES	13
2.1 Equação linear	13
2.1.1 Solução de uma equação linear	13
2.2 Sistemas de equações lineares	14
2.2.1 Solução de um sistema linear	15
2.3 Classificação de um sistema linear	15
2.4 Sistema linear homogêneo	16
3 SISTEMAS 2 X 2	16
3.1 Método de adição	16
3.2 Método de substituição	21
3.3 Método de comparação	23
3.4 Discussão de um sistema linear 2 x 2	24
3.4.1 Sistema possível e determinado	24
3.4.2 Sistema possível e indeterminado	26
3.4.3 Sistema impossível	27
4 SISTEMAS 3 X 3	28
4.1 Método de escalonamento	28
4.1.1 Sistema escalonado	29
4.1.2 Operações elementares com equações lineares	29
4.1.2.1 Teorema 1	29
4.1.2.2 Teorema 2	32
4.1.3 Aplicação do método de escalonamento	34
4.2 Discussão de um sistema linear 3 x 3	37
4.2.1 Sistema possível e determinado	38
4.2.2 Sistema possível e indeterminado	40
4.2.3 Sistema impossível	43
4.3 REGRA DE CRAMER	44
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	51

1 INTRODUÇÃO

Nesta parte inicial falaremos um pouco sobre o histórico de desenvolvimento dos sistemas lineares e também dos determinantes, pois o leitor irá notar que a criação dos determinantes está intimamente ligada com o estudo de métodos de resolução de sistemas lineares.

1.1 Histórico dos sistemas lineares

Segundo Boyer (2010), as primeiras aparições sobre os sistemas lineares remonta ao Egito antigo. Na mesopotâmia aparecem equações lineares com duas incógnitas.

Segundo Iezzi e Hazzan (2013) ensinam em seu livro, no ocidente são poucos os registros sobre sistemas lineares. Todavia no oriente o assunto recebeu uma atenção maior. Em 1683, o matemático japonês Seki Kowa inventou o que anos depois seria conhecido como determinantes estudando sistemas de 2 equações com 2 incógnitas. Tempos depois o grande matemático Leibniz descobriu os determinantes em um trabalho também ligado a sistemas lineares. Outra importante técnica para o desenvolvimento dos sistemas foi a regra de Cramer rotulada pelo matemático suíço Gabriel Cramer (1704 - 1752) a partir dos coeficientes das incógnitas e termos independentes, porém a mesma regra já tinha sido descoberta por outro matemático como podemos ver a seguir:

A conhecida regra de Cramer para resolver sistemas de n equações a n incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês Colin Maclaurin (1698 - 1746), datando provavelmente de 1729, embora só publicado postumamente em 1748 no *Treatise of algebra*. (Iezzi, Hazzan, 2013, p.133).

Os trabalhos do francês Étienne Bézout (1730 - 1783) obtiveram avanços no estabelecimento dos sinais dos termos dos determinantes ligados aos coeficientes das equações favorecendo assim a utilização desta ferramenta na resolução de sistemas. “O termo determinante, com o sentido atual, surgiu em 1812 num trabalho de Cauchy sobre o assunto. Neste artigo, apresentado à academia de ciências, Cauchy sumariou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes.” (Iezzi, Hazzan, 2013, p.134)

Por fim, não poderíamos deixar de citar os trabalhos desenvolvidos por Gauss cujo método é mais comumente conhecido por escalonamento na qual é possível resolver de modo prático sistemas com um número maior de incógnitas e equações.

Outros trabalhos desenvolvidos por Carl G. J. Jacobi (1804 - 1851) deram a forma simples e elementar como a teoria e a notação dos determinantes é apresentada atualmente.

1.2 Matrizes e determinantes

Antes de podermos iniciar o estudo dos sistemas lineares propriamente dito devemos possuir alguns conhecimentos prévios.

1.2.1 Matrizes

De acordo com Boldrini (1980), uma matriz é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

Exemplos 1.1:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ matriz do tipo } 2 \times 2 \text{ (dois por dois)}$$

Exemplos 1.2:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 10 & 9 \end{pmatrix} \text{ matriz do tipo } 2 \times 4 \text{ (dois por quatro)}$$

1.2.1.1 Matrizes especiais

Dependendo de certas características, determinadas matrizes recebem nomes especiais. Para facilitar o nosso estudo, veremos alguns tipos de matrizes.¹

- Matriz quadrada

A matriz quadrada é caracterizada quando o número de linhas é igual ao número de colunas.

¹ Além dos tipos de matrizes apresentados neste tópico, existem outros tipos: matriz triangular, diagonal, nula, matriz linha e coluna. O motivo de não apresentarmos essas matrizes se dá pelo fato que este tópico é apenas exemplificativo.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ matriz quadrada de 2 linhas e 2 colunas}$$

Na qual os elementos 3 e 6 formam a diagonal principal e os elementos 2 e 5 formam a diagonal secundária.

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ matriz quadrada de 3 linhas e 3 colunas}$$

Na qual os elementos 5, 4, 7 formam a diagonal principal e os elementos 0, 4, 10 formam a diagonal secundária.

- Matriz identidade

É a matriz quadrada na qual todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero.

Exemplo 1.3:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Determinantes

De acordo com Iezzi e Hazzan (2013), definimos determinante da matriz M e indicaremos por $\det M$, da seguinte forma:

1º Se M é uma matriz de ordem 1, então $M = [a_{11}]$ e $\det M = a_{11}$

2º Se M é de ordem $n \geq 2$, então:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definimos o determinante da matriz M

$$\begin{aligned} \det M &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{21} \cdot \Delta_{21} + \dots + a_{n1} \cdot \Delta_{n1} = \sum_{i=1}^n a_{i1} \cdot \Delta_{i1} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Na qual o termo $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A_{ij}$ recebe o nome de **cofator** do elemento a_{ij} .

O termo A_{ij} é chamado de **menor complementar** em relação ao elemento a_{ij} como o determinante associado à matriz M que é obtida eliminando a i -ésima linha e a j -ésima coluna da matriz M .

Desta forma, o determinante de uma matriz de ordem $n \geq 2$ é a soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna pelos respectivos cofatores.

Observe que no exemplo (1.4) foi utilizado os elementos da 1ª coluna mas nada impede de utilizar os elementos de qualquer linha ou coluna da matriz M .

Vamos utilizar a definição apresentada acima para calcular o determinante da matriz abaixo:

$$\text{Calcular o determinante da matriz } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \Delta_{11} + 0 \cdot \Delta_{21} + 4 \cdot \Delta_{31} \quad (1.5)$$

Onde:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 41$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

Utilizando a expressão (1.5) e substituindo os valores do cofator, temos:

$$\det A = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 41 + 4 \cdot 12$$

$$\det A = 45$$

2 SISTEMAS LINEARES

Sistemas lineares são um conjunto de equações lineares que possuem a mesma solução. Desta forma, antes de analisar os sistemas precisamos definir o que seria equações lineares.

2.1 Equação linear

De acordo com Iezzi e Hazzan (2013) chamamos de **equação linear**, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b$.

Os números $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$, todos reais, são chamados coeficientes e b , também real, é o termo independente da equação.

Exemplos

$$\text{I) } 3x + 4y + 5z + 2d = 5$$

$$\text{II) } 2x + 2y + 2z = 0$$

$$\text{III) } x + 2y + 4z = 4$$

Observemos que não são lineares as equações:

$$\text{I) } 2x^2 + 4y + z + 5 = 0$$

$$\text{II) } 2xy + z + d = 3$$

$$\text{III) } x + \sqrt{y} + z = 4$$

2.1.1 Solução de uma equação linear

Dizemos que a sequência ou ênupla de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é uma solução da equação linear $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b$ se $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b$ for uma sentença verdadeira.

Exemplo 2.1

Seja a equação linear $2x + 3y - z + d = 3$

Podemos escolher de forma aleatória a sequência (1, 2, 3, -2) para verificar se a mesma é a solução da equação linear acima. Para isso devemos substituir os números no lugar das incógnitas desta forma; $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 3 + (-2) = 3$. Realizando as operações verificamos que esta sentença é verdadeira. Logo, a sequência (1, 2, 3, -2) é a solução da equação.

2.2 Sistemas de equações lineares

Segundo Dante (2008), um sistema linear $m \times n$ é um conjunto de m equações com n incógnitas que pode ser representado da seguinte forma:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

Podemos escrever o sistema linear no **formato de matrizes** como podemos ver a seguir:

$$A \cdot X = B$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{array} \right\}$$

Onde

$$A = \left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \end{array} \right\} \quad X = \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \right\} \quad B = \left\{ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{array} \right\}$$

2.2.1 Solução de um sistema linear

Dizemos que a sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é solução de um sistema de equações quando a mesma satisfaz, simultaneamente, todas as equações do sistema, isto é:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\alpha_1 & + & a_{12}\alpha_2 & + & a_{13}\alpha_3 & + & \dots\dots\dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 & + & a_{22}\alpha_2 & + & a_{23}\alpha_3 & + & \dots\dots\dots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \dots\dots\dots & & & & & & \\ a_{m1}\alpha_1 & + & a_{m2}\alpha_2 & + & a_{m3}\alpha_3 & + & \dots\dots\dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array}$$

Exemplo 2.2

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$$

O sistema admite como solução a tripla ordenada (1, 3, -2) pois:

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 1 \text{ (sentença verdadeira)}$$

$$4 \cdot 1 - 3 - (-2) = 3 \text{ (sentença verdadeira)}$$

$$1 + 3 - (-2) = 6 \text{ (sentença verdadeira)}$$

2.3 Classificação de um sistema linear²

Os sistemas lineares recebem uma classificação em relação ao tipo de solução que podemos encontrar (ou não) na determinação de seu conjunto solução. Desta forma, podemos classificar um sistema linear da seguinte forma:

- **Sistema possível e determinado (SPD):** São os sistemas que apresentam solução única.
- **Sistema possível e indeterminado (SPI):** São os sistemas que apresentam inúmeras soluções.
- **Sistema impossível (SI):** São os sistemas que não apresentam solução.

² No decorrer deste trabalho retornaremos este tópico com mais detalhes e exemplos.

2.4 Sistema linear homogêneo

No estudo dos sistemas lineares em determinados momentos lidamos com situações em que todos os termos independentes do sistemas são iguais a zero. Neste caso o sistema recebe o nome de sistema linear homogêneo e o mesmo admite **pelo menos** a solução $(0, 0, 0)$, denominada solução trivial.

Exemplo 2.3

$$\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x - 2y - 3z = 0 \\ 3x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

3 SISTEMAS 2 X 2

Um sistema de equações 2×2 é caracterizado por possuir 2 equações com 2 incógnitas. As formas mais conhecidas de resolução deste tipo de sistema são as seguintes; método de adição, substituição e comparação que são vistos no ensino fundamental.

Nesta parte inicial, iremos analisar os métodos resolução dos sistemas 2×2 a partir de casos gerais e depois partiremos para exemplos numéricos.

3.1 Método de adição

O método de adição consiste em somar as duas equações de tal forma que a soma de uma das duas incógnitas tenha como resultado igual a zero. Neste caso o sistema resultante ficará somente com uma incógnita que o que facilita o cálculo da solução do sistema.

Iremos analisar agora um sistema 2×2 genérico em que através da sua solução podemos levantar algumas características sobre o sistema.

Exemplo 3.1

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad \text{vamos multiplicar a (eq. 1) por } \left(-\frac{c}{a}\right) \quad (3.1)$$

Para eliminar a incógnita x nas duas equações devemos multiplicar a 1ª equação do sistema (3.1) por $\left(-\frac{c}{a}\right)$ como está descrito logo abaixo:

$$\begin{cases} \left(-\frac{c}{a}\right) \cdot ax + \left(-\frac{c}{a}\right) \cdot by = \left(-\frac{c}{a}\right) \cdot p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad (3.2)$$

Realizando as operações aritméticas na 1ª equação do sistema (3.2) obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{cases} -\cancel{cx} - \frac{cb}{a}y = -\frac{cp}{a} \\ + \quad \cancel{cx} + dy = q \end{cases} \quad (3.3)$$

Podemos eliminar os termos $(-cx)$ e cx (simétricos) no sistema (3.3) e somar os termos que restaram nas duas equações e ficamos com as seguintes expressões:

$$-\frac{cb}{a} + dy = -\frac{cp}{a} + q \quad (3.4)$$

$$\frac{-cb + ady}{a} = \frac{-cp + aq}{a} \quad (3.5)$$

Como o elemento $a \neq 0$ nos denominadores das frações da equação (3.5) são iguais podemos eliminá-los e ficaremos com as seguintes expressões:

$$-cb + ady = -cp + aq \quad (3.6)$$

$$y \cdot (ad - cb) = aq - cp \quad (3.7)$$

Podemos isolar a variável y na equação (3.7) e ficaremos com a seguinte expressão para a determinação do valor de y :

$$y = \frac{aq - pc}{ad - bc} \quad (3.8)$$

A expressão (3.8) é válida quando o termo $ad - bc \neq 0$.

Iremos agora através do valor de y da expressão (3.8) encontrar o valor de x utilizando a 1ª equação do sistema (3.1) substituindo o valor de y desta forma:

$$ax + b \cdot \left(\frac{aq - pc}{ad - bc} \right) = p \quad (3.9)$$

A partir de manipulações algébricas da expressão (3.9) chegaremos às seguintes expressões a seguir:

$$ax + \left(\frac{baq - bpc}{ad - bc} \right) = p$$

$$ax = p - \left(\frac{baq - bpc}{ad - bc} \right)$$

$$ax = \frac{p \cdot (ad - bc) - abq + bcp}{ad - bc}$$

$$ax = \frac{pad - \cancel{pbc} - abq + \cancel{bcp}}{ad - bc}$$

$$ax = \frac{pad - abq}{ad - bc} \Rightarrow ax = \frac{a \cdot (pd - bq)}{ad - bc}$$

$$x = \frac{(pd - bq)}{ad - bc} \quad (3.10)$$

A expressão (3.10) é válida quando o termo $ad - bc \neq 0$.

A partir das observações das soluções das expressões (3.8) e (3.10) podemos notar que³:

- Nos dois casos, o denominador é a expressão $(ad - bc)$ na qual a mesma pode ser expressão como o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (3.1) ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ matriz dos coeficientes}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \Rightarrow \det A = ad - bc$$

- Nos dois casos, os numeradores também possuem algumas características em comum. No caso da expressão (3.8), o numerador pode ser escrito como o determinante da matriz na qual a coluna que possui a variável y é substituída pela coluna dos termos independentes (p e q) como podemos notar a seguir:

$$By = \begin{bmatrix} a & p \\ c & q \end{bmatrix}$$

matriz na qual a coluna dos coeficientes da variável y foi substituído pela coluna dos termos independentes

- No caso da expressão (3.10) podemos notar que o numerador também pode ser escrito como o determinante da matriz na qual a coluna que possui a variável x é substituída pela coluna dos termos independentes (p e q) como podemos notar a seguir:

³ A utilização dos determinantes associado a resolução de sistemas lineares será vista com mais detalhes em tópicos futuros. A intenção do exemplo (3.1) é mostrar como os determinantes aparecem e se relacionam com os sistemas lineares.

$$Bx = \begin{bmatrix} p & b \\ q & d \end{bmatrix}$$

matriz na qual a coluna formada pelos coeficientes da variável x foi substituída pela coluna dos termos independentes.

Vamos utilizar o método de adição para resolver o sistema 2 x 2 proposta a seguir:

Exemplo 3.2

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases} \quad (3.11)$$

Vamos multiplicar a 1ª equação do sistema (3.11) por 3 para que possamos eliminar a variável y do sistema como mostrado a seguir:

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases} \cdot (3) \Rightarrow \begin{cases} 9x + 3y = 30 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$$

Eliminando a variável y ficaremos com as seguintes expressões:

$$\begin{cases} 9x + \cancel{3y} = 30 \\ 2x - \cancel{3y} = -8 \end{cases} + \Rightarrow 11x = 22$$

A partir das expressões acima podemos isolar a variável x da seguinte forma:

$$x = \frac{22}{11}$$

$$x = 2$$

De posse do valor de x podemos encontrar o valor de y substituindo o valor de x em uma das equações do sistema (3.11). Vamos escolher a 1ª do sistema (3.11) para substituir o valor de x e desta forma encontrar a valor de y como é mostrado a seguir:

$$3x + y = 10$$

$$3 \cdot (2) + y = 10$$

$$6 + y = 10$$

$$y = 10 - 6$$

$$y = 4$$

Portanto, a solução do sistema é $S = \{(2, 4)\}$

3.2 Método de substituição

O método de substituição para resolver sistemas 2×2 possui algumas semelhanças em relação ao método de adição visto que, devemos “eliminar” uma das variáveis do sistema. Desta forma, ao invés de somar vamos isolar uma das variáveis em uma das equações do sistema e substituir esta variável na outra equação.

Realizando a substituição correta ficaremos com uma variável e desta forma poderemos encontrar o seu valor numérico como será analisado através do exemplo a seguir:

Exemplo 3.3

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ -x + 2y = -8 \end{cases} \quad (3.12)$$

Vamos escolher a 1ª equação do sistema (3.12) e isolar a variável y da seguinte forma:

$$y = 10 - 3x \quad (3.13)$$

Substituindo a expressão (3.13) na 2ª equação do sistema (3.12) temos as seguintes expressões:

$$-x + 2 \cdot (10 - 3x) = -8$$

$$-x + 20 - 6x = -8$$

$$-x - 6x = -8 - 20$$

$$-7x = -28$$

$$x = \frac{-28}{-7}$$

$$x = 4$$

Para encontrar o valor de y , escolhemos uma das duas equações do sistema (3.12) e substituímos o valor numérico de x na equação escolhida. Vamos escolher 1ª equação do sistema (3.12) e proceder da seguinte forma:

$$3x + y = 10$$

$$3 \cdot 4 + y = 10$$

$$12 + y = 10$$

$$y = 10 - 12$$

$$y = -2$$

Portanto, a solução do sistema é $S = \{(4, -2)\}$

3.3 Método de comparação⁴

O método de comparação para resolver sistemas 2 x 2 consiste em isolar a mesma variável nas duas equações que formam o sistema.

O presente método não é muito explorado no ensino fundamental, o que não tira a sua importância na resolução de sistemas 2 x 2. Veremos no exemplo a seguir a resolução de um sistema utilizando o método de comparação.

Exemplo 3.4

$$\begin{cases} 2x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases} \quad (3.14)$$

Vamos escolher a variável x em ambas as equações do sistema (3.14) e isolar a variável nas duas equações da seguinte forma:

$$x = \frac{-2 + 5y}{2} \quad ; \quad x = \frac{16 - 2y}{3} \quad (3.15)$$

Iremos realizar a comparação entre as expressões descritas em (3.15) pois as duas são iguais a x da seguinte forma:

$$\frac{-2 + 5y}{2} = \frac{16 - 2y}{3} \quad (3.16)$$

Realizando as devidas manipulações matemáticas chegamos às seguintes expressões:

$$3 \cdot (-2 + 5y) = 2 \cdot (16 - 2y)$$

$$-6 + 15y = 32 - 4y$$

$$15y + 4y = 32 + 6$$

⁴ Não utilizamos um sistema genérico nos tópicos 3.2 e 3.3 pois a manipulação das expressões fica bastante similar às expressões mostradas no tópico 3.1

$$19y = 38$$

$$y = \frac{38}{19}$$

$$y = 2$$

Para encontrar o valor de x , utilizamos a 1ª equação do sistema (3.14) e substituímos o valor de $y = 2$ da seguinte forma:

$$2x - 5y = -2$$

$$2x - 5 \cdot 2 = -2$$

$$2x - 10 = -2$$

$$2x = -2 + 10$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

Portanto, a solução do sistema é $S = \{(4, 2)\}$

3.4 Discussão de um sistema linear 2 x 2

Os sistemas lineares podem ser classificados de acordo com o tipo de solução que apresenta. No tópico (2.3) foram apresentados de forma superficial as classificações que os sistemas lineares recebem.

A análise que será feita neste tópico tem como referência Dante (2008).

3.4.1 Sistema possível e determinado

O sistema é classificado como possível e determinado quando apresenta solução única. Vamos realizar a análise deste item utilizando um exemplo e vamos utilizar o método de adição para resolver o sistema proposto a seguir:

Exemplo 3.5

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

Como foi discutido no t3pico 3.1 devemos somar ambas as equa33es do sistema (3.17) de tal forma que possamos eliminar umas das inc33gnitas. Vamos proceder da seguinte forma:

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \cdot (5) \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x - \cancel{5y} = 50 \\ 2x + \cancel{5y} = 1 \end{cases} +$$

$$17x = 51 \Rightarrow x = \frac{51}{17}$$

$$x = 3$$

Vamos escolher a 1ª equa333o do sistema (3.17) e substituir o valor de $x = 3$ da seguinte forma:

$$3x - y = 10$$

$$3 \cdot (3) - y = 10$$

$$9 - y = 10$$

$$-y = 10 - 9$$

$$-y = 1 \Rightarrow y = -1$$

Desta forma, dizemos que o sistema tem $S = \{(3, -1)\}$ como solu3333o 33nica. Logo, o sistema 33 poss33vel e determinado.

Outra forma bastante interessante de analisar as solu3333es de sistemas 2×2 33 utilizando o determinante associado a matriz dos coeficientes do sistema (3.17), ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{matriz dos coeficientes}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \det A = 3 \cdot 5 - (-1) \cdot 2$$

$$\det A = 17$$

- Se o $\det A \neq 0$ então o sistema é possível e determinado.
- Se o $\det A = 0$ não podemos fazer nenhuma classificação quanto ao sistema.
- Como o $\det A \neq 0$ do sistema (3.17), o mesmo é (SPD).

3.4.2 Sistema possível e indeterminado

O sistema é classificado como possível e indeterminado quando apresenta inúmeras soluções. Vamos analisar o exemplo a seguir utilizando o método de comparação para análise das soluções do sistema.

Exemplo 3.6

$$\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases} \quad (3.18)$$

Vamos isolar a variável x em ambas as equações do sistema (3.18) da seguinte forma:

$$x = \frac{8 + 6y}{2} \quad ; \quad x = \frac{12 + 9y}{3}$$

Realizando as operações aritméticas temos as seguintes expressões:

$$3 \cdot (8 + 6y) = 2 \cdot (12 + 9y)$$

$$18y - 18y = 24 - 24$$

$$0y = 0$$

(3.19)

Podemos notar na expressão (3.19) que se $0y = 0$, a incógnita pode assumir qualquer valor real. Desta forma podemos fazer $y = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vamos substituir o valor de y na 1ª equação do sistema (3.18) para encontrar o valor de x da seguinte forma:

$$2x - 6y = 8 \Rightarrow 2x - 6\alpha = 8$$

$$2x = 8 + 6\alpha \Rightarrow x = \frac{8 + 6\alpha}{2}$$

$$x = 4 + 3\alpha$$

Desta forma, dizemos que a solução do sistema (3.18) é $S = \{(4 + 3\alpha, \alpha)\}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Para cada valor de α , temos uma solução para o sistema. Desta forma o sistema admite infinitas soluções e portanto, o sistema é possível e indeterminado.

3.4.3 Sistema impossível

O sistema é classificado como impossível quando não apresenta solução. Na análise do próximo exemplo vamos utilizar o método de substituição para resolver o sistema a seguir:

Exemplo 3.7

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases} \quad (3.20)$$

Como foi visto no tópico 3.2 para resolver sistemas 2×2 utilizando o método de substituição devemos escolher umas das equações e isolar uma das variáveis. Vamos escolher a 1ª equação do sistema (3.20) e isolar a variável x e em seguida encontrar o valor de y através dos passos a seguir:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 5 \Rightarrow x = 5 + 2y \\ 2 \cdot (5 + 2y) - 4y &= 2 \\ 10 + 4y - 4y &= 2 \\ 4y - 4y &= 2 - 10 \\ 0y &= -8 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Podemos notar na expressão (3.21) que $0y = -8$, a incógnita y não pode assumir qualquer valor real. Desta forma, dizemos que o sistema tem como solução $S = \emptyset$ (conjunto vazio).

4 SISTEMAS 3 X 3

Um sistema de equações 3×3 é caracterizado por possuir 3 equações com 3 incógnitas. Os principais métodos de resolução desse tipo de sistema vistos no ensino médio são: o método de escalonamento e a regra de Cramer. Todos esses métodos mencionados serão vistos de forma mais detalhada e com exemplos nos tópicos seguintes. Este tópico tem como base o trabalho de Iezzi e Hazzan (2013), Elon e Morgado (2005).

4.1 Método de escalonamento

Vamos substituir $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ na i -ésima equação do sistema S' como visto abaixo:

$$Ka_{i1}\alpha_1 + Ka_{i2}\alpha_2 + Ka_{i3}\alpha_3 + \dots + Ka_{in}\alpha_n = Kb_i$$

Colocando K em evidência temos:

$$K(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \dots + a_{in}\alpha_n) = Kb_i \Rightarrow Kb_i = Kb_i$$

O que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ satisfaz a i -ésima equação do sistema S' . Logo, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é solução de S' .

- Vamos supor agora que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é solução do sistema S' e provemos que ela também é solução do sistema S .

$$\text{Por hipótese: } Ka_{i1}\alpha_1 + Ka_{i2}\alpha_2 + Ka_{i3}\alpha_3 + \dots + Ka_{in}\alpha_n = Kb_i$$

Vamos substituir $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ na i -ésima equação do sistema S como visto abaixo:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

Como $K \neq 0$ podemos multiplicar o 1º membro da equação acima por $\frac{K}{K}$ e ficaremos com as seguintes expressões:

$$\frac{K}{K}a_{i1}\alpha_1 + \frac{K}{K}a_{i2}\alpha_2 + \frac{K}{K}a_{i3}\alpha_3 + \dots + \frac{K}{K}a_{in}\alpha_n = b_i$$

$$\frac{1}{K}(Ka_{i1}\alpha_1 + Ka_{i2}\alpha_2 + Ka_{i3}\alpha_3 + \dots + Ka_{in}\alpha_n) = b_i$$

$$\frac{1}{K} \cdot Kb_i = b_i \Rightarrow b_i = b_i$$

$$S' = \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ (a_{i1} + a_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 + (a_{i3} + a_{j3})x_3 + \dots + (a_{in} + a_{jn})x_n = b_i + b_j \\ \dots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

- Vamos supor que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é solução do sistema S e provemos que ela também será solução de S' . A única diferença entre os sistemas S e S' é a i -ésima equação, vamos nos preocupar somente com ela, pois as outras são as mesmas equações.

Por hipótese:

$$\begin{aligned} a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \dots + a_{in}\alpha_n &= b_i \\ a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + a_{j3}\alpha_3 + \dots + a_{jn}\alpha_n &= b_j \end{aligned}$$

Vamos substituir $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ no 1º membro da i -ésima equação de S' , teremos:

$$\begin{aligned} (a_{i1} + a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\alpha_2 + (a_{i3} + a_{j3})\alpha_3 + \dots + (a_{in} + a_{jn})\alpha_n &= b_i + b_j \\ (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \dots + a_{in}\alpha_n) + (a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + a_{j3}\alpha_3 + \dots + a_{jn}\alpha_n) &= b_i + b_j \\ b_i + b_j &= b_i + b_j \end{aligned}$$

O que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ satisfaz a i -ésima equação de S' . Logo, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é solução de S' .

- Suponhamos agora que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é solução de S' e provemos que ela também será solução de S .

Por hipótese:

$$(a_{i1} + a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j1})\alpha_2 + (a_{i3} + a_{j3})\alpha_3 + \dots + (a_{in} + a_{jn})\alpha_n = b_i + b_j \quad (1)$$

e

$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + a_{j3}\alpha_3 + \dots + a_{jn}\alpha_n = b_j \quad (2)$$

Vamos desenvolver a equação linear (1) e chegamos a seguinte expressão:

$$(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \dots + a_{in}\alpha_n) + (a_{j1}\alpha_1 + a_{j1}\alpha_1 + a_{j1}\alpha_1 + \dots + a_{j1}\alpha_n) = b_i + b_j$$

Utilizando a hipótese (2) temos a seguinte expressão:

$$(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \dots + a_{in}\alpha_n) + b_j = b_i + b_j$$

E podemos concluir que:

$$(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \dots + a_{in}\alpha_n) = b_i$$

O que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ satisfaz a i -ésima equação de S . Logo, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é solução de S .

Podemos concluir que os sistemas S e S' são **sistemas equivalentes** pois, os dois sistemas admitem o mesmo conjunto solução o que demonstra o teorema 2.

4.1.3 Aplicação do método de escalonamento

A partir da utilização dos teoremas 1 e 2 vistos acima podemos resolver sistemas que possuem um número considerável de equações lineares de um modo bastante prático. Desta forma, com o intuito de mostrar o método de uma forma mais didática é interessante se guiar através dos passos que serão mostrados a seguir.

- ⁶Passo 1

Escolhemos como 1ª equação aquela em que o coeficiente da 1ª incógnita seja diferente de zero. É conveniente que o 1º coeficiente da equação seja igual a 1 (um).

- Passo 2

Anulamos o coeficiente da 1ª incógnita de todas as equações (com exceção da 1ª), substituindo a i-ésima equação ($i \geq 2$) pela soma desta com a 1ª multiplicada por um número conveniente.

- Passo 3

Deixamos de lado a 1ª equação e aplicamos o 1º e o 2º passos nas equações restantes.

- Passo 4

Deixamos de lado a 1ª a 2ª equações e aplicamos o 1º e o 2º passos nas equações restantes, e assim por diante, até o sistema ficar escalonado.

Exemplo 4.1

Vamos utilizar o método de escalonamento para encontrar o conjunto solução do sistema linear descrito abaixo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x + 7y + z = 21 \\ -3x - 5y + 2z = -8 \end{cases} \quad (4.1)$$

Vamos utilizar o teorema 1 e 2 respectivamente, na qual multiplicamos a 1ª equação do sistema (4.1) por (-2) e somamos o resultado desta com a 2ª equação pois devemos “zerar” o 1º coeficiente da 2ª equação. Para tornar mais visível essas operações no sistema iremos adotar uma nomenclatura na qual chamaremos as linhas do sistema de L_1 , L_2 e L_3 , ou seja, linha 1, linha 2 e linha 3 respectivamente como será visto a seguir:

⁶ Os passos 1, 2, 3 e 4 foram retirados do livro fundamentos de matemática elementar de Gelson Iezzi e Samuel Hazzan.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 7 \\ 2x + 7y + z = 21 \\ -3x - 5y + 2z = -8 \end{array} \right. \quad L_2 \rightarrow L_1 \cdot (-2) + L_2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 7 \\ 3y - z = 7 \\ -3x - 5y + 2z = -8 \end{array} \right.$$

Vamos utilizar esse mesmo recurso na linha L_3 , ou seja, multiplicamos a linha L_1 do sistema (4.1) por 3 e somamos com a linha L_3 através do **teorema 2**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 7 \\ 3y - z = 7 \\ -3x - 5y + 2z = -8 \end{array} \right. \quad L_3 \rightarrow L_1 \cdot 3 + L_3 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 7 \\ 3y - z = 7 \\ y + 5z = 13 \end{array} \right.$$

Além das operações elementares previstas pelos teoremas 1 e 2 podemos ainda permutar (trocar) as posições de quaisquer equações do sistema linear. Utilizaremos este recurso no sistema abaixo para que o coeficiente de y seja igual a 1 (um) na 2ª equação:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 7 \\ 3y - z = 7 \\ y + 5z = 13 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 7 \\ y + 5z = 13 \\ 3y - z = 7 \end{array} \right.$$

Após realizado a permutação das equações, multiplicamos a linha L_2 por (-3) e somamos com a linha L_3 como será exemplificado a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 7 \\ y + 5z = 13 \\ 3y - z = 7 \end{array} \right. \quad L_3 \rightarrow L_2 \cdot (-3) + L_3 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 7 \\ y + 5z = 13 \\ -16z = -32 \end{array} \right.$$

Desta forma, ficamos com o seguinte sistema na forma escalonada:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 7 \\ y + 5z = 13 \\ -16z = -32 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Com base no sistema (4.2) temos que:

$$-16z = -32$$

$$z = \frac{-32}{-16}$$

$$z = 2$$

Com base no valor de $z = 2$, podemos substituir esse valor na 2ª equação do sistema (4.2) da seguinte forma:

$$y + 5z = 13$$

$$y + 5 \cdot 2 = 13$$

$$y + 10 = 13$$

$$y = 13 - 10$$

$$y = 3$$

Com base no valor de $y = 3$ e $z = 2$ substituímos esses valores na 1ª equação do sistema (4.2) da seguinte forma:

$$x + 2y + z = 7$$

$$x + 2 \cdot 3 + 2 = 7$$

$$x + 6 + 2 = 7$$

$$x + 8 = 7$$

$$x = -1$$

Desta forma, encontramos como solução o conjunto $S = \{(-1, 3, 2)\}$.

4.2 Discussão de um sistema linear 3 x 3

Vimos no tópico 3.4 a discussão das soluções de um sistema linear 2 x 2. Podemos utilizar o método de escalonamento para classificar os sistemas a partir de suas soluções.

4.2.1 Sistema possível e determinado

Como já vimos, o sistema é classificado em possível e determinado quando o mesmo apresenta solução única. Vamos analisar o exemplo a seguir utilizando o método de escalonamento para classificar o sistema a seguir.

Exemplo 4.2

$$\begin{cases} 3x - 9y + z = -29 \\ -x + 4y - z = 10 \\ 2x - 7y + 3z = -13 \end{cases} \quad (4.3)$$

Vamos multiplicar a 2ª equação do sistema (4.3) por (-1) e permutar entre si as duas primeiras equações de forma que o coeficiente de x na 1ª equação fique unitário e facilite o processo de escalonamento:

$$\begin{cases} 3x - 9y + z = -29 \\ -x + 4y - z = 10 \\ 2x - 7y + 3z = -13 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow L_2 \cdot (-1)$$

$$\begin{cases} x - 4y + z = -10 \\ 3x - 9y + z = -29 \\ 2x - 7y + 3z = -13 \end{cases} \quad (L_1 \text{ com } L_2 \text{ foram permutadas})$$
(4.4)

Vamos multiplicar a 1ª equação do sistema (4.4) por (-3) e somar com a 2ª equação:

$$\begin{cases} x - 4y + z = -10 \\ 3x - 9y + z = -29 \\ 2x - 7y + 3z = -13 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow L_1 \cdot (-3) + L_2$$

$$\begin{cases} x - 4y + z = -10 \\ 3y - 2z = 1 \\ 2x - 7y + 3z = -1 \end{cases} \quad (4.5)$$

Vamos multiplicar a 1ª equação do sistema (4.5) por (-2) e somar com a 3ª equação:

$$\begin{cases} x - 4y + z = -10 \\ 3y - 2z = 1 \\ 2x - 7y + 3z = -1 \end{cases} \quad L_3 \rightarrow L_1 \cdot (-2) + L_3$$

$$\begin{cases} x - 4y + z = -10 \\ 3y - 2z = 1 \\ y + z = 7 \end{cases} \quad (4.6)$$

Podemos permutar a linha L_2 com a L_3 de forma que o coeficiente de y seja igual a 1 (um) e facilite o processo de escalonamento:

$$\begin{cases} x - 4y + z = -10 \\ y + z = 7 \\ 3y - 2z = 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

Vamos multiplicar a linha L_2 por (-3) do sistema (4.7) e somarmos com a L_3 do sistema da seguinte forma:

$$\begin{cases} x - 4y + z = -10 \\ y + z = 7 \\ -5z = -20 \end{cases} \quad (4.8)$$

Com base no sistema (4.8) temos:

$$-5z = -20$$

$$z = \frac{-20}{-5}$$

$$z = 4$$

Substituindo o valor de $z = 4$ na 2ª equação do sistema (4.8) temos:

$$y + z = 7$$

$$y + 4 = 7$$

$$y = 7 - 4$$

$$y = 3$$

De posse do valor de $y = 3$ podemos encontrar o valor de x substituindo os valores de y e z na 1ª equação do sistema (4.8) da seguinte forma:

$$x - 4y + z = -10$$

$$x - 4 \cdot 3 + 4 = -10$$

$$x - 12 + 4 = -10$$

$$x - 8 = -10$$

$$x = -10 + 8$$

$$x = -2$$

Desta forma, temos que o sistema (4.3) apresenta como solução: $S = \{(-2, 3, 4)\}$.

4.2.2 Sistema possível e indeterminado

Como vimos, o sistema é classificado como possível e indeterminado quando o mesmo apresenta infinitas soluções. Vamos analisar o exemplo abaixo e utilizaremos o método de escalonamento para resolver o mesmo.

Exemplo 4.3

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -11 \\ -2x + 5y - 7z = 27 \\ 3x - 5y + 8z = -28 \end{cases} \quad (4.9)$$

Vamos multiplicar a 1ª equação do sistema (4.9) por (-2) e somar com a 2ª equação, temos:

$$L_2 \rightarrow L_1 \cdot (-2) + L_2 \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = -11 \\ y - z = 5 \\ 3x - 5y + 8z = -29 \end{cases} \quad (4.10)$$

Vamos multiplicar a 1ª equação por (-3) e somar com a 2ª equação, temos:

$$L_3 \rightarrow L_1 \cdot (-3) + L_3 \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = -11 \\ y - z = 5 \\ y - z = 5 \end{cases} \quad (4.11)$$

Multiplicando a 2ª equação por (-1) e somando com a 3ª equação, temos:

$$L_3 \rightarrow L_2 \cdot (-1) + L_3 \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = -11 \\ y - z = 5 \\ 0z = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Podemos notar na expressão (4.12) que se $0z = 0$, a incógnita pode assumir qualquer valor real. Desta forma podemos fazer $z = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Vamos substituir o valor de z na 2ª equação do sistema (4.12) para encontrar o valor de y da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y + 5\alpha &= 11 \\ y &= 11 - 5\alpha \end{aligned} \quad (4.13)$$

Podemos encontrar o valor de x substituindo os valores de y e z na 1ª equação do sistema (4.12) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot (11 - 5\alpha) - \alpha &= -10 \\ x + 22 - 10\alpha - \alpha &= -10 \\ x &= -11 - 22 + 11\alpha \\ x &= -33 + 11\alpha \end{aligned}$$

Desta forma, podemos expressar a solução do sistema (4.9) da seguinte forma apresentada abaixo:

$$S = \{(-33 + 11\alpha), (11 - 5\alpha), \alpha\} \text{ com } \alpha \in R$$

4.2.3 Sistema impossível

Como já vimos, o sistema é classificado como impossível quando o mesmo não apresenta soluções. Vamos analisar o exemplo com a utilização do método de escalonamento para classificar o sistema a seguir.

Exemplo 4.4

$$\begin{cases} x + 2y - z = -10 \\ 3x + 7y + 2z = -19 \\ 5x + 12y + 5z = -21 \end{cases} \quad (4.14)$$

Vamos multiplicar a 1ª equação do sistema (4.14) por (-3) e somarmos com a 2ª equação do mesmo sistema, temos:

$$L_2 \rightarrow L_1 \cdot (-3) + L_2 \quad \begin{cases} x + 2y - z = -10 \\ y + 5z = 11 \\ 5x + 12y + 5z = -21 \end{cases} \quad (4.15)$$

Multiplicando a 1ª equação do sistema (4.15) por (-5) e somando com a 3ª equação do mesmo sistema, temos:

$$L_3 \rightarrow L_1 \cdot (-5) + L_3 \quad \begin{cases} x + 2y - z = -10 \\ y + 5z = 11 \\ 2y + 10z = 29 \end{cases} \quad (4.16)$$

Multiplicando a 2ª equação do sistema (4.16) por (-2) e somamos com a 3ª equação do mesmo sistema, obtemos:

$$L_3 \rightarrow L_2 \cdot (-2) + L_3 \quad \begin{cases} x + 2y - z = -10 \\ y + 5z = 11 \\ 0z = 7 \end{cases} \quad (4.17)$$

Podemos observar que a 3ª equação do sistema (4.17) não existe valor real para z . Desta forma, dizemos que $S = \emptyset$.

4.3 REGRA DE CRAMER⁷

Neste tópico iremos analisar outro método de resolução de sistemas de equações 3×3 . Segundo Elon e Morgado (2005), a regra de Cramer é um dos métodos mais tradicionais na resolução de sistemas lineares. A mesma apresenta o valor das incógnitas como o quociente de dois determinantes.

Vamos começar analisando um sistema de equações genérico apresentado logo abaixo e sua representação na forma matricial.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots\dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Podemos reescrever o sistema acima na forma matricial como podemos ver a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ou

$$A \cdot X = B \quad (4.18)$$

em que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ Matriz dos coeficientes}$$

⁷ Neste tópico foram utilizados algumas definições e exemplos contidos no livro Algebra Linear de José Luiz Boldrini, Sueli L. Rodrigues, Vera Lúcia Figueiredo e Henry G. Wetzler.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ Matriz das incognitas}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ Matriz dos termos independentes}$$

Como vimos nos exemplos acima, podemos representar um sistema de equações na forma de uma equação matricial (4.18).

Se admitirmos que o $\det A \neq 0$ então a matriz A (matriz dos coeficientes) admite uma inversa A^{-1} (Boldrini, 1980, p.76)

Desta forma, podemos manipular a equação (4.18) da seguinte forma:

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$In \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (4.19)$$

A equação (4.14) pode ser representada da seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Sabemos que de acordo com o teorema 3.5.5 previsto em (Boldrini, 1986, p.76) temos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{adj} A)$$

Utilizando o teorema 3.5.5 na equação (4.20) temos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \dots & \Delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Podemos concluir que:

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot \Delta_{11} + b_2 \cdot \Delta_{21} + \dots + b_n \cdot \Delta_{n1}}{\det A} \quad (4.21)$$

A partir da expressão (4.21), podemos ver que o numerador é igual ao determinante da matriz A substituindo a 1ª coluna da matriz A pela matriz dos termos independentes, ou seja:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 \cdot \Delta_{11} + b_2 \cdot \Delta_{21} + \dots + b_n \cdot \Delta_{n1}$$

Desta forma, podemos encontrar o valor de variável x_1 como o quociente de dois determinantes, ou seja:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

E assim, podemos generalizar a regra de Cramer para um sistema linear com n equações da seguinte forma:

$$x_1 = \frac{\det A_{x_1}}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_{x_2}}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\det A_{x_n}}{\det A}$$

Com $\det A \neq 0$

Através de regra de Cramer, vamos resolver o sistema de equações proposto a seguir:

Exemplo 4.5

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - 3y - 2z = 4 \\ 3x + 4y - z = -1 \end{cases}$$

Vamos começar calculando o determinante associado a matriz dos coeficientes:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 24$$

Em seguida, calculamos o determinante associado a matriz A_x na qual é obtida substituindo na matriz dos coeficientes, a coluna dos coeficientes que acompanham a variável x pela matriz dos termos independentes, ou seja:

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 96$$

Em seguida, calculamos o determinante associado a matriz A_y na qual é obtida substituindo na matriz dos coeficientes, a coluna dos coeficientes que acompanham a variável y pela matriz dos termos independentes, ou seja:

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -48$$

Calculamos o determinante associado a matriz A_z na qual é obtida substituindo na matriz dos coeficientes, a coluna dos coeficientes que acompanham a variável z pela matriz dos termos independentes, ou seja:

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 120$$

Por fim, calculamos os valores das variáveis da seguinte forma:

$$x = \frac{96}{24} = 4$$

$$y = \frac{-48}{24} = -2$$

$$z = \frac{120}{24} = 5$$

Portanto, a solução do sistema é $S = \{(4, -2, 5)\}$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentados os conceitos fundamentais sobre matrizes, determinantes e o foco principal deste trabalho; sistemas lineares. Foram trabalhados além dos conceitos vistos no ensino médio, um enfoque um pouco mais aprofundado tendo a preocupação em demonstrar algumas técnicas que são utilizadas na resolução de sistemas lineares. Desta forma, podemos ver como a matemática é bonita e como a mesma é apresentada de forma superficial no ensino médio.

Além dos assuntos teóricos que são trabalhados na educação básica, os sistemas lineares possibilitam aplicações em situações práticas e em outras áreas como a física, possibilitando o interesse de alunos e professores no estudo mais aprofundado do assunto.

Por fim, devemos citar que durante a elaboração deste trabalho, ficou claro que o estudo das matrizes, determinantes e sistemas lineares é bastante amplo e cheio de detalhes tanto em relação às demonstrações de teoremas e outros tipos de abordagens como por exemplo; a abordagem computacional. Enfim, o estudo muito mais aprofundado dos sistemas lineares daria sem problemas o pontapé inicial para a elaboração de trabalhos futuros nessa área.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C. B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar**: Sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 8. ed. São Paulo. Atual, 2013.

DANTE, L. R. **Matemática, contexto e aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2008.

BOLDRINI, J. L; *et at.* **Algebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

ELON, L. L; *et at.* **A matemática do ensino médio**: Volume 3. 5. ed. Rio de Janeiro: SPM, 2005.