



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Ana Carolina Pereira Oliveira

**"Vejo, mas não acredito!" A fascinante
descoberta dos infinitos de Cantor**

São Luís - MA
2025

Ana Carolina Pereira Oliveira 

"Vejo, mas não acredito!" A fascinante descoberta dos infinitos de Cantor

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciada em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Junior

São Luís - MA

2025

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Oliveira, Ana Carolina Pereira.

"Vejo, mas não acredito!" A fascinante descoberta dos
infinitos de Cantor / Ana Carolina Pereira Oliveira. -
2025.

55 p.

Orientador(a): Anselmo Baganha Raposo Junior.
Monografia (Graduação) - Curso de Matemática,
Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2025.

1. Infinito. 2. George Cantor. 3. Números
Transfinitos. 4. Aritmética Cardinal. I. Raposo Junior,
Anselmo Baganha. II. Título.

Ana Carolina Pereira Oliveira 

"Vejo, mas não acredito!" A fascinante descoberta dos infinitos de Cantor

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 27/02/2025

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Junior
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof. Dra. Renata de Farias Limeira Carvalho
DEMAT/UFMA DEMAT/UFMA
Primeira Examinadora

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho
DEMAT/UFMA DEMAT/UFMA
Segundo Examinador

As razões de minha felicidade!

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, o autor do infinito, por todos os momentos que esteve comigo e me guiou pelo melhor caminho, junto do seu filho Jesus Cristo e pela intercessão da Virgem Maria, que sempre me amparou.

Agradeço à minha mãe, Odescia Maria, por todo amor, incentivo e educação, a meus avós Odete e Raimundo Vicente, por me criarem e darem todo amor e educação como se fosse filha, principalmente minha avó, por não medir esforços para que eu e minhas irmãs pudéssemos estudar. A minhas irmãs Ana Paula, por todo o esforço, conselhos e por acreditar que eu estudaria Matemática, e Ana Cristina, por ser minha primeira aluna nos momentos em que brincávamos de escolinha. Estas são pessoas mais do que especiais, são meus motivos de alegria, meu porto seguro e incentivo para seguir.

Meus agradecimentos também se estendem a todos os meus professores que estiveram comigo durante as várias etapas de ensino, que me inspiraram, ajudaram e mostram o que é ser um verdadeiro professor, desde a mais simples das dúvidas até o mais difícil dos teoremas, em especial a professora Jéquelia Caldas, por doar seu tempo e corrigir minhas redações, ao professor Marcelo Almeida por me ajudar com a inscrição do SISU e ao professor Anselmo Baganha por todas às vezes que me explicou com toda paciência quando eu estava com dúvidas, por aceitar me orientar neste trabalho, e não ter duvidado da minha capacidade até mesmo quando eu duvidei. Agradeço aos estudantes que conheci nos estágios e no PIBID pela amizade e pelos conselhos valiosos que devo seguir quando me tornar professora e aos meus primeiros alunos da minha cidade.

E agradeço às amizades que tive a felicidade em fazer e que contribuíram imensamente nesta trajetória. Aos amigos José Lucas Silva, Francisco Passos, Kevin Collier, Emilia Rocha, Luís Rômulo Silva, Anderson Gomes, João Vytor Silva, e em especial a pequena Raabe Rosa, por seu jeito de ser engraçado ter deixado a segunda metade do meu curso bem leve, pelas conversas, pelo incentivo, pelo carinho, principalmente pela amizade que me proporcionou muitas risadas e me fez esquecer os problemas e a um grande amigo que me inspirou a escrever sobre o infinito e a me sentir uma pessoa de sorte por cursar Matemática, pois apesar de ter muitas pessoas que não gostam de matemática existem aquelas que sonham em fazer o curso, mas infelizmente há algum impasse. Por fim, a todas as pessoas que contribuíram de alguma forma para que chegasse à realização desse sonho.

“Ao infinito e além!”

Buzz Lightyear (Toy Story)

Resumo

O infinito nos reserva muitas surpresas e graças a grandes nomes da matemática e principalmente George Cantor, algumas delas vieram à luz. Inicialmente, os primeiros contatos com o desconhecido trazem consigo o medo, pois abalaria as bases de uma visão de mundo já sólida, traria também perseguições e afetaria mentalmente quem buscasse entendê-lo. No entanto, Cantor ousou explorar o jardim secreto e produzir um trabalho desconcertante que mostra que existem infinitos com tamanhos iguais e infinitos maiores que outros e uma aritmética em torno deles. Nesse sentido, o objetivo deste trabalho foi discorrer sobre a natureza do infinito, bem como sobre os números transfinitos e sua aritmética cardinal. Para isso, a metodologia utilizada consistiu em uma pesquisa de cunho bibliográfico em livros, artigos e dissertações. Desse modo, mostramos a importância das pesquisas que incentivam a conhecer e contribuir no entendimento de determinada teoria.

Palavras-chave: Infinito. George Cantor. Números Transfinitos. Aritmética Cardinal.

Abstract

The infinite holds many surprises for us, and thanks to great names in mathematics, especially George Cantor, some of them have come to light. Initially, the first contact with the unknown brings with it fear, as it would shake the foundations of an already solid worldview, bring persecution and affect the mentality of those who sought to understand it. However, Cantor dared to explore the secret garden and produce a disconcerting work that shows that there are infinities of equal size and infinities larger than others, and an arithmetic around them. In this sense, the objective of this work was to discuss the nature of infinity, as well as transfinite numbers and their cardinal arithmetic. To this end, the methodology used consisted of a bibliographical research in books, articles and dissertations. In this way, we show the importance of research that encourages knowledge and contributes to the understanding of a given theory.

Keywords: Infinity. George Cantor. Transfinite Numbers. Cardinal Arithmetic.

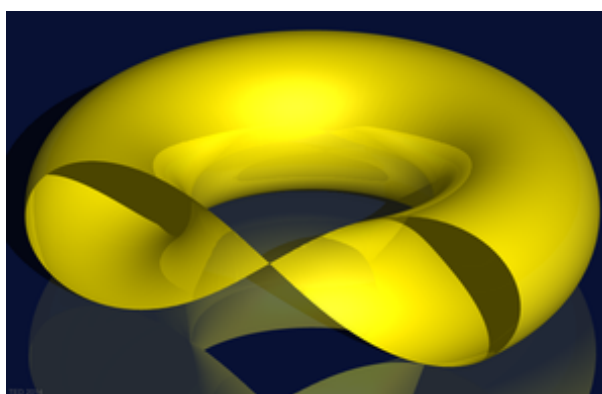
Sumário

	INTRODUÇÃO	9
1	UM POUCO DE HISTÓRIA	12
1.1	As Raízes Gregas do Infinito	13
1.2	Galileu e Bolzano	16
1.3	Georg Cantor	19
2	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	24
2.1	Relações	24
2.2	Funções	25
2.2.1	Função Injetiva, Sobrejetiva e Bijetiva	27
2.2.2	Função Composta	28
2.2.3	Função Inversa	29
2.3	Os Princípios de Indução Finita e da Boa Ordenação	31
3	CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS	34
3.1	Conjuntos Equipotentes	34
3.2	Conjuntos Finitos e Infinitos	35
3.2.1	Conjuntos Finitos	35
3.2.2	Conjuntos Infinitos	38
3.2.3	Conjuntos Enumeráveis	39
3.2.4	Conjuntos Não Enumeráveis	45
4	NOÇÕES DE ARITMÉTICA CARDINAL	47
4.1	Números Cardinais	47
4.2	Aritmética Cardinal	48
4.2.1	Adição de Cardinais	48
4.2.2	Multiplicação de Cardinais	50
4.2.3	Exponenciação de Cardinais	51
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
	Bibliografia	55

Introdução

O termo infinito tem origem latina: *in* (não) *finis* (fim), ou seja, designa algo inacabável e é representado pelo símbolo ∞ , que lembra a curva algébrica Lemniscata de Bernoulli. O infinito se tornou popular, de modo que é empregado em diversos contextos no seu significado literal. Para ilustrar, em 1995 os estúdios da Disney Pixar lançaram nos cinemas a animação Toy Story. Dirigida por John Lasseter, esta animação conta a vida secreta dos brinquedos que habitam o quarto do garoto Andy. É a primeira vez que o mundo conhece o personagem Buzz Lightyear, um astronauta de brinquedo que tem a missão de manter a galáxia livre do mal e ajudar todas as formas de vida e é famoso neste universo por usar o bordão "*ao infinito e além*".

Figura 0.1 – Lemniscata de Bernoulli



Fonte: <https://images.app.goo.gl/gNe9Cx7oTV2Eapmp9>

Ainda no universo cinematográfico, a palavra infinito é usada pelos estúdios Marvel para designar as *joias do infinito*, um artefato poderoso transformado em seis pedras cósmicas, cada uma representando um aspecto do universo. O termo torna a aparecer no filme da mesma franquia, *Vingadores: Guerra Infinita*, dos diretores Anthony Russo e Joe Russo.

Além disso, no livro *A culpa é das estrelas* de John Green (2012), a personagem Hazel utiliza alguns conceitos matemáticos para discursar sobre seus sentimentos a Gus, expressos da seguinte forma: "*Existe uma quantidade infinita de números entre 0 e 1... alguns infinitos são maiores que outros... Há... dias, muitos deles, em que fico zangada com o tamanho do meu conjunto ilimitado*". Por mais que atualmente o discurso de Hazel não seja assustador e a descoberta do infinito tenha impulsionado os avanços nas ciências com ênfase na Matemática, historicamente nem sempre tais conceitos e propriedades sobre o infinito foram facilmente aceitos; sua descoberta gerou grande alvoroço e pelo menos um assassinato.

Segundo Aczel (2003), por volta do século V ou VI a.C. os gregos teriam se confrontado com esse conceito quando descobriram os números irracionais, isto deu-se a partir da aplicação do teorema de Pitágoras em um triângulo de catetos medindo um, ou seja, os pitagóricos perceberam que não podiam escrever o número obtido como a razão de dois números inteiros. Em seguida, a sociedade grega se deparou com as aplicações do infinito feitas pelo filósofo Zenão de Eléia (495-435 a.C.) conhecidas como Paradoxos de Zenão - se o conceito de contínuo e de infinita divisão for aplicado ao movimento de qualquer corpo, então o movimento não existe. No entanto, apesar de algumas descobertas feitas por Pitágoras (569-500 a.C.), Zenão, Eudoxius e Arquimedes (287-212 a.C.), os dois últimos dando continuidade às ideias de Zenão pouco se aprendeu durante essa época sobre as propriedades do infinito.

Posteriormente, do século XVII até o século XIX, alguns avanços importantes na natureza do infinito foram realizados por matemáticos como Newton (1643-1727), Leibniz (1646-1716), Gauss (1777-1855), Euler (1707-1783) e outros. No entanto, estes apenas usaram aproximações do infinito. Coube a Galileu Galilei (1564-1642) a descoberta de uma propriedade básica dos infinitos, mas este disse que o melhor seria evitá-lo. George Cantor (1845-1918) foi o matemático que mais contribuiu para a evolução do infinito através da sua teoria de números, até então a sociedade usava apenas o símbolo ∞ para designar que um conjunto era infinito. Todavia, Cantor enxergou que nem todos os infinitos são iguais, concluindo aquilo que seria citado por Hazel: existem infinitos maiores que outros.

Desse modo, estabeleceu que os conjuntos possuem o mesmo número de elementos se podemos exibir uma bijeção entre eles. A esses números chamou de cardinal. Nesse contexto, chamou de números transfinitos as cardinalidades dos conjuntos infinitos e foi capaz de elaborar a teoria na qual construiu uma hierarquia de conjuntos infinitos com base na sua potência (cardinal) e desenvolver uma aritmética dos números transfinitos análoga à aritmética dos números finitos.

Nesse sentido, ciente da popularidade do infinito e sua importância para o Cálculo, é necessário conhecer suas peculiaridades desenvolvidas a partir dos estudos de vários matemáticos, com destaque para Cantor. Tendo em vista a riqueza do conceito do infinito, este trabalho visa discorrer sobre a natureza do infinito, bem como sobre os números transfinitos e sua Aritmética Cardinal.

A metodologia utilizada para a construção do texto consistiu em uma pesquisa de cunho bibliográfico em dissertações, artigos científicos e livros que discorreram sobre o assunto, assim foram utilizados como referência principal livros como: *Análise Real I* (Elon Lages Lima), *Introdução a História da Matemática* (Howard Eves), *História da Matemática* (Carl B. Boyer), *Mistério do Alef: a Matemática, a cabala e a procura pelo infinito* (Amir O. Aczel) e *Teoria Ingênua dos Conjuntos* (Paul R. Halmos).

Os estudos apresentados neste trabalho estão organizados de modo que a apresen-

tação dos diferentes infinitos se construa linearmente, culminando com a construção da aritmética dos cardinais. Desse modo, no Capítulo 1 mergulharemos em diferentes épocas para acompanhar o desenvolvimento histórico. No Capítulo 2, situamos o leitor a respeito dos conhecimentos prévios. No Capítulo 3, adentramos a natureza dos conjuntos finitos e infinitos. Finalmente, no Capítulo 4, daremos os primeiros passos a respeito da Aritmética Cardinal.

1 Um pouco de história

Uma das aplicações mais antigas a respeito do infinito, surpreendentemente, não foi realizada por um matemático, mas pelo filósofo Zenão de Eléia (495-435 a.C.). Zenão era o mais conhecido discípulo de Parmênides de Eléia e, assim como seu mestre, defendia a unidade e permanência do ser, visão que contrastava com as ideias pitagóricas sobre a multiplicidade e divisibilidade infinita do tempo e do espaço. Nesse contexto, Zenão desenvolve os paradoxos - sequência de pensamentos que levam ao absurdo - de Aquiles e da Dicotomia com o intuito de derrubar as teses dos pitagóricos. Segundo Aczel (2003), foi por meio desses paradoxos que os gregos se depararam com a ideia do infinito.

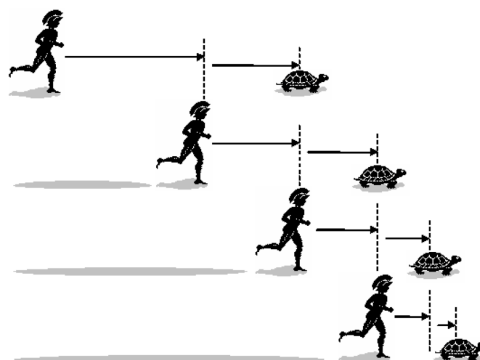
Figura 1.1 – Zenão de Eléia



Fonte: <https://images.app.goo.gl/PDVyx7uEuxnR6Ru76>

No paradoxo de Aquiles, o filósofo narra a corrida entre Aquiles, o corredor mais veloz da antiguidade, e uma tartaruga. É dada certa vantagem ao animal devido à sua lentidão. Quando Aquiles chegasse ao ponto em que o animal tinha iniciado, a tartaruga teria avançado certa distância. Logo, quando Aquiles estivesse percorrido a nova distância até a tartaruga, esta teria avançado ainda mais. Esse processo continuaria infinitamente. Portanto, Aquiles nunca poderia ultrapassar a tartaruga.

Figura 1.2 – Paradoxo de Aquiles



Fonte: <https://images.app.goo.gl/qsuRhqqk14ZLvNUW9>

De acordo com Boyer e Merzbach, (2012, p. 72) no paradoxo da dicotomia Zenão afirma que “antes que um objeto possa percorrer uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas antes disto, deve percorrer o primeiro quarto; e antes disso, o primeiro oitavo e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões”. Em ambos os paradoxos, o filósofo supõe que o movimento seja impossível quando o tempo e o espaço são divididos infinitamente. No entanto, as ideias de Zenão se mostraram equivocadas. À luz do Cálculo Diferencial e Integral, foi possível mostrar uma propriedade importante sobre o infinito: um número infinito de etapas pode levar a uma distância total finita, o que conhecemos como convergência.

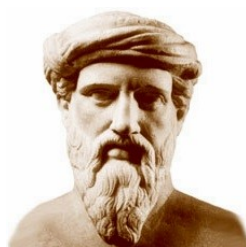
Tais paradoxos distanciaram os gregos dos estudos do infinito, impedindo progressos nesse ramo durante anos. No entanto, os pitagóricos já tinham tido contato com o infinito em trabalhos realizados por Pitágoras por volta de V ou VI a.C..

1.1 As Raízes Gregas do Infinito

Pitágoras é considerado um dos matemáticos mais importantes da antiguidade. No entanto, devido à perda de documentos daquela época e ao fato de que todas as descobertas Matemáticas feitas por algum membro da escola pitagórica — ordem fundada pelo matemático — não são atribuídas especificamente ao autor e sim à escola, o matemático ainda é uma figura envolta em mistério.

De acordo com Boyer e Merzbach (2012), Pitágoras teria nascido na ilha de Samos por volta de (580-500 a.C.). Com condições de viajar, o matemático teria visitado grandes centros de conhecimento da época, como o Egito e Babilônia, assim teve contato com informações privilegiadas sobre a Matemática e Astronomia. Ao retornar para a Grécia, estabeleceu-se em Crotona, atual Itália. Ali, fundou a famosa escola pitagórica que se tornou um centro de estudo de Filosofia, Matemática e Ciências Naturais. Era também uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimônias. Juntamente com outros matemáticos, foram os pitagóricos, como os participantes da escola eram chamados, que apresentaram o rigor matemático ao mundo, ou seja, os teoremas passaram a ser demonstrados.

Figura 1.3 – Pitágoras de Samos



<https://images.app.goo.gl/rsfSG8icANYausEp6>

Os pitagóricos tinham a Matemática e a Filosofia como bases para sua vida moral. Conforme a tradição, acredita-se que o próprio Pitágoras tenha criado os termos Matemática (aquilo que é aprendido) e Filosofia (amor à sabedoria). Apesar de a adoração pelos números não ter tido início com os pitagóricos, a irmandade levava a adoração aos números ao extremo. O que eles entendiam como números eram apenas os inteiros e suas razões, de sorte que seu lema era que “Deus era número” e que os números inteiros eram a base de tudo. Conforme Boyer e Merzbach (2012, p. 58)

O número um, diziam eles, é o gerador dos números e o número da razão; o dois é o primeiro número par, ou feminino, o número da opinião; três é o primeiro número masculino verdadeiro, o da harmonia, sendo composto de unidade e diversidade; quatro é o número da justiça ou retribuição, indicando o ajuste de contas; cinco é o número do casamento, união dos primeiros números feminino e masculino verdadeiros; e seis é o número da criação. Cada número, por sua vez, tinha seus atributos peculiares. O mais sagrado era o dez ou o tetractys, pois representava o número do universo, inclusive a soma de todas as possíveis dimensões geométricas.

É nesse contexto que a descoberta dos números irracionais é tanto quanto perturbadora. Tal feito se dá quando o Teorema de Pitágoras é aplicado ao triângulo retângulo de catetos iguais a um, tendo a hipotenusa igual a $\sqrt{2}$ dada pela equação $A^2 = B^2 + C^2$. Para a surpresa dos pitagóricos, era impossível escrever o resultado como razão de dois números inteiros.

Os números até então conhecidos, quando escritos como a razão de dois números, tinham como resultados números decimais finitos, casas decimais que, eventualmente, tornariam-se zero ou apresentavam um padrão que se repetia. Por exemplo, $1/2 = 0,500000\dots$, $2/3 = 0,666666\dots$; No entanto, $\sqrt{2}$ não possuía essa característica, ou seja, para representar seria necessário um número infinito de casas decimais.

A descoberta realizada pelos pitagóricos foi tão desconcertante que a existência dos números irracionais foi mantida sob sigilo pela irmandade. Segundo Aczel (2003), Hipaso, um dos membros da escola, foi o responsável por divulgar o segredo da existência deste novo conjunto de números. Conforme a tradição, Hipaso teria sofrido as consequências por sua traição. Algumas especulações apontam para sua expulsão da irmandade. Outras, apontando para um destino mais trágico, indicam que este teria sido assassinado pelo próprio Pitágoras ou que os pitagóricos teriam preparado uma cova com ele ainda vivo e o fizeram morrer misteriosamente. Por fim, uma última hipótese é a de que ele teria sido deixado à deriva e os membros da sociedade o teriam afundado. Mas os irracionais não morreram com Hipaso. Foi depois que o mundo conheceu o segredo da existência desses números que nasceu a geometria grega com linhas e planos contínuos.

Após a invasão da escola pitagórica por grupos rivais, o que levou a morte de muitos membros, Pitágoras teria fugido para Metaponto onde acabou morrendo. Embora a

irmandade estivesse dispersa, ela continuou a existir estabelecida em Taranto. Ali Filolau recebeu os conhecimentos e crenças e seus escritos acabaram chegando até o filósofo Platão (428-347 a.C.). Platão fez de Atenas um centro matemático, mas foi dos seus discípulos que saíram contribuições para o estudo do continuum.

Eudócio de Cnido (287-212 a.C) era o discípulo mais destacado de Platão. Foi médico e legislador e suas contribuições chegaram até o campo da Astronomia. Na Matemática, Eudócio foi capaz de calcular áreas e volumes de superfícies curvas usando a noção de processos de limites, conhecido como método da exaustão, onde afirmava que só precisava supor que existiam quantidades tão pequenas quanto desejássemos pela divisão contínua de qualquer superfície. Foi esta célebre ideia que culminou no século XIX com o desenvolvimento do conceito de limite.

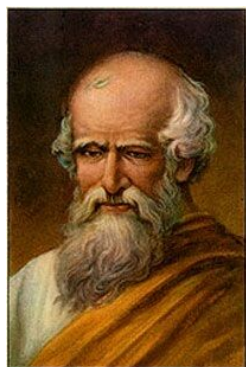
Figura 1.4 – Eudócio de Cnido



Fonte: <https://images.app.goo.gl/sHgs2BUzZxd66zTE6>

Mais tarde, estas técnicas seriam aprimoradas por outro grande matemático, o famoso Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.). Filho de astrônomo e influenciado pelas ideias de Euclides, a Arquimedes são creditadas muitas invenções, como o trabalho realizado com as catapultas, o trabalho sobre os corpos flutuantes, entre outros. Conforme Eves (2011), na Matemática foi responsável por continuar as ideias de Eudócio, utilizando o método do infinito potencial para mostrar que a área de uma superfície esférica é exatamente dois terços da área da superfície total do cilindro circular reto circunscrito a ela e que o volume da esfera é exatamente dois terços do volume do mesmo cilindro.

Figura 1.5 – Arquimedes de Siracusa



Fonte: <https://images.app.goo.gl/1Aj2SUuUACZJTAd77>

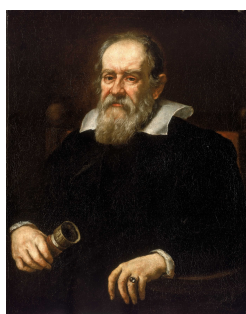
Os filósofos e matemáticos da antiguidade fizeram importantes descobertas sobre o conceito do infinito. No entanto, pouco se aprendeu a respeito de suas propriedades. Desse modo, os estudos sobre o infinito ficaram adormecidos, voltando a aparecer séculos depois.

1.2 Galileu e Bolzano

Dentre o século XVII a XIX, vários avanços foram feitos na teoria do Cálculo por nomes como Newton, Leibniz, Gauss e outros. Porém, todos esses estudos eram feitos com aproximações do infinito ou do zero, nunca com o infinito real. Coube a Galileu e Bolzano descobrirem propriedades fundamentais acerca do infinito.

Galileu Galilei (1564-1642) era dono de um intelecto incomparável, capaz de ver matematicamente o mundo físico. Nasceu em Pisa, na Itália renascentista, onde permaneceu até sua família mudar-se para Florença, em 1574. Galileu retornou a Pisa aos 17 anos, quando foi enviado por seu pai para estudar Medicina. Em meio aos seus estudos, descobriu a Matemática, ciência pela qual se apaixonou. Sua primeira descoberta foi no ramo da Física, deduziu uma importante propriedade do pêndulo: o isocronismo.

Figura 1.6 – Galileu Galilei



Fonte: <https://images.app.goo.gl/67vD1iqKwnXWCCNF7>

Galileu continuou seus estudos em Matemática, mas, para descontentamento de sua família, deixou a faculdade de Medicina. Assim, apesar de não ter o diploma em Matemática, aos 22 anos já creditava diversas invenções, descobertas na área e alunos por toda a Toscana. Aos 25 anos, conseguiu uma cadeira de professor de Matemática na Universidade de Pisa. Mais tarde, transferiu-se para a Universidade de Pádua com o intuito de demonstrar a utilidade do telescópio. Após cumprir seu propósito perante o senado de Veneza, Galileu tornou-se o primeiro astrônomo moderno, descobrindo os anéis de Saturno, as luas de Júpiter, o fato de a Via Láctea ser composta de muitas estrelas e confirmou a teoria de Copérnico de que a Terra não era o centro do universo, usando a Matemática para modelar a órbita dos planetas.

No entanto, ao confirmar a teoria de Copérnico, Galileu estaria rompendo com a Igreja Católica, que acreditava que a Terra era o centro do Universo e se tornaria alvo da Inquisição. Àquela altura, o cientista era mundialmente famoso e possuía amigos no

clero como Cosme II. Desse modo, envolto por uma falsa sensação de segurança, passou a pensar que seus inimigos não o atingiriam e a Igreja abraçaria suas ideias. Contudo, em 1629, ao publicar o livro *Diálogos sobre os dois grandes sistemas do mundo* que discorria a respeito da teoria de Copérnico, apesar do livro ter sido um sucesso e o papa parecer favorável, inimigos usando meios fraudulentos conseguiram convencer o papa de que o livro o ridicularizava. O livro foi suspenso e Galileu convocado a comparecer no Vaticano. Apesar da República de Toscana ter-lhe oferecido proteção, Galileu recusou com a esperança de que poderia ganhar a causa contra a Igreja. Em 13 de fevereiro de 1633, Galileu chegou ao Vaticano e foi julgado pela Inquisição. Fizeram-no ajoelhar e negar todas as suas ideias sob tortura, embora em murmúrio tenha dito “*E pur si move*” (contudo, se move). Sua pena de morte foi revertida em prisão domiciliar pelo resto da vida.

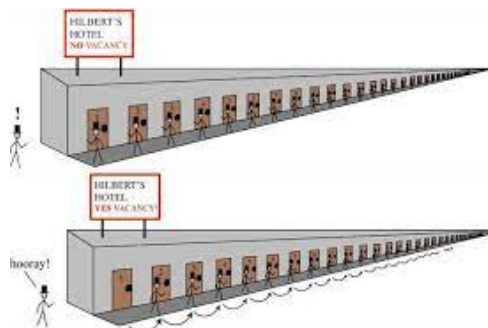
Segundo Aczel (2003) foi durante a prisão domiciliar que o físico, matemático e astrônomo escreveu o livro *Diálogo sobre duas novas Ciências*, no qual por meio de diálogos entre Salviati (a voz inteligente) e Simplicio (o simplório), discute ideias matemáticas e filosóficas, uma espécie de vingança contra a Inquisição, representada na figura de Simplicio. Nesta obra, Galileu aborda aspectos do infinito que foram tratados por matemáticos da antiguidade e do renascimento. Começa com a infinidade potencial dos limites, explica a divisão de um círculo em infinitos triângulos, concluindo que o círculo é um polígono de infinitos lados. Adiante, Salviati é mais ousado ao estabelecer uma correspondência biunívoca entre todos os números inteiros e seus quadrados, querendo concluir que existem tantos quadrados perfeitos quanto números naturais, algo que à primeira impressão, seria impossível.

Para entender o que Galileu descobriu, primeiro devemos entender que o processo de contar consiste em associar cada item a um único número inteiro, assim estabelecendo uma correspondência biunívoca entre esses objetos. Para os conjuntos finitos não há problema; podemos contar todos os elementos. O mesmo processo é aplicado para os conjuntos infinitos. Portanto, Galileu apenas “contou” a quantidade de quadrados perfeitos, ou seja, fez corresponder o 1 ao primeiro quadrado perfeito, o 2 ao segundo quadrado perfeito e assim por diante. Desse modo, o conjunto dos quadrados perfeitos não é menor do que o dos naturais, mas apresenta um número igual de elementos.

O também matemático David Hilbert (1862-1943) costumava contar a história do Hotel infinito que ajuda a entender essa correspondência biunívoca com um subconjunto. O hotel infinito tem infinitos quartos com numeração de 1, 2, 3, 4, ... e só é permitido hospedar uma pessoa em cada quarto. No entanto, certo dia, quando uma pessoa chega para fazer uma reserva, infelizmente, não há vagas. O recepcionista chama o gerente que tem a brilhante ideia de solicitar que cada hóspede fosse para o quarto seguinte, desse modo o hóspede novo ficaria no quarto 1. Em outra ocasião chega ao hotel infinitos turistas, mas o hotel já estava com infinitos hóspedes, o gerente é novamente acionado e desta vez

seria possível conseguir infinitos quartos se cada hóspede fosse para o quarto, o qual a numeração fosse o quadrado da numeração do seu quarto.

Figura 1.7 – Hotel de Hilbert



Fonte: <https://images.app.goo.gl/dxJAayKVUDwNDkKZ8>

Galileu foi o primeiro na história a fazer essa abordagem discreta de que existem infinitos que podem ser contados, ou seja, o que chamamos de conjuntos enumeráveis. Ao conhecer tal propriedade dos conjuntos infinitos: os subconjuntos de conjuntos infinitos podem ter o mesmo número de elementos, ou seja, a mesma cardinalidade. Galileu ficou surpreso com tal descoberta, mas não deu continuidade ao estudo e parou por aí. Em 1642, já velho e quebrado, encontrou-se com a morte.

Bernard Bolzano, nasceu em 5 de outubro de 1781 em Praga, República Checa, onde faleceu em 1848. Filho de um negociante e influenciado aos estudos por sua mãe Maurer, Bolzano era uma criança frágil e não tinha afinidade em nenhuma área de conhecimento. No entanto, apesar da dificuldade em Filosofia e Matemática, foi nesses ramos que se destacou. Na universidade, sentiu-se atraído por obras importantes, especialmente a de Eudócio de Cnido, que o inspirou ao estudo do infinito. Em 1817, foi responsável pela descoberta de uma função real definida sobre um intervalo que era contínua, mas não era diferenciável em nenhum ponto. Contudo, esta descoberta é comumente creditada a Weierstrass, a quem se deve o primeiro registro publicado do fato. Ordenou-se padre em 1805 e conseguiu uma cadeira na Universidade de Praga para lecionar Filosofia da religião. Contudo, não permaneceu no cargo por muito tempo. A exemplo de Galileu, por intrigas e intolerância religiosa, foi demitido e desvestido do cargo de sacerdote.

Figura 1.8 – Bernard Bolzano



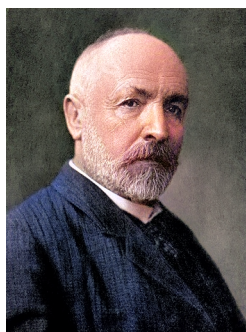
Fonte: <https://images.app.goo.gl/T6By1aRHJ8P9PQ4FA>

Foi durante seu afastamento da academia, desfrutando a cidade de Praga e de jardins luxuosos que Bolzano se voltou para o infinito. Costumava dividir as chocantes descobertas com seu amigo Prihonsky, que posteriormente publicaria as descobertas de Bolzano no livro intitulado *Paradoxos do infinito*. Primeiro, Bolzano fez menção ao trabalho de Galileu a respeito dos conjuntos infinitos enumeráveis. Ele mostrou que, dados dois intervalos fechados, é sempre possível encontrar uma correspondência biunívoca entre eles, ou seja, dois intervalos fechados quaisquer possuem a mesma quantidade de elementos. Embora Bernard tenha feito muitas contribuições para o estudo da Matemática, infelizmente, não teve o reconhecimento merecido em vida e muitos de seus resultados acabaram sendo redescobertos.

1.3 Georg Cantor

Apesar das propriedades anteriormente citadas terem se tornado conhecidas, os estudos sobre o infinito não progrediam uma vez que poucos matemáticos lhe davam atenção. Coube ao matemático russo Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor explorar o pomar secreto e realizar avanços a respeito do infinito. Filho de pais cristãos e de origem judaica, seu pai, Georg Woldemar Cantor, era luterano e sua mãe, Maria Bohm, era católica. Cantor nasceu em 3 de março de 1845 em São Petersburgo após sua família migrar da Dinamarca. Era o mais velho de seis filhos. Em 1856, em decorrência da doença pulmonar que o pai contraíra, a família de Cantor mudou-se para Frankfurt, na Alemanha. Seu pai era dono de uma bem-sucedida companhia atacadista internacional, a Cantor & Co.

Figura 1.9 – Georg Cantor



Fonte: <https://images.app.goo.gl/JEH1hFgyDSMFxc89>

O jovem Cantor cresceu em meio à música e à arte, visto que os Cantor eram dotados de talento musical. Estudou em escolas particulares de Frankfurt e, posteriormente, foi admitido no Darmstadt Gymnasium. Já na adolescência, demonstrou interesse pela Matemática e recebeu o apoio de seu pai, que o encorajou não só a estudar a Matemática como também Física e Astronomia. Georg Woldermar transmitiu ao filho a ambição de

ser bem-sucedido em sua vida acadêmica. Até pouco antes de sua morte, trocava cartas com o filho, que buscava por orientação para sua carreira.

Em 1862, entrou para o Instituto Politécnico de Zurique para estudar Matemática e, no mesmo ano, transferiu-se para a Universidade de Berlim. Foi atraído pela teoria dos números, área na qual realizou sua dissertação e muitos avanços para a Matemática. Estar na Universidade de Berlim possibilitou que Cantor aprendesse Matemática com os mestres Karl Weierstrass, Ernst Eduard Kummer e Leopold Kronecker.

Após doutorar-se, Cantor começou a trabalhar na Universidade de Halle como *privatdozent*, que consistia em dar aulas particulares e seu pagamento advinha de qualquer dinheiro que o estudante pudesse dar. No tempo livre, conduzia pesquisas em Análise Matemática influenciadas pelas ideias de Weierstrass. Foi esse tipo de trabalho que o levou a entrar em conflito direto com seu antigo professor, Leopold Kronecker. Os interesses de Kronecker estavam na teoria dos números, em sua tese discorreu sobre os números algébricos e foi o responsável por diversas contribuições na Álgebra, enquanto Weierstrass é considerado o pai da Análise Moderna.

Por se tratar de campos tão distintos, em que a Álgebra se ocupa de entidades discretas como os números inteiros e racionais e a Análise Matemática preocupar-se com entidades contínuas como funções, intervalos numéricos e números irracionais, é normal que pesquisadores dessas áreas pensem diferente. Motivo que levou Leopold e Karl a não se darem bem, visto que Leopold era um matemático finitista que acreditava que "Deus criou os números inteiros, e todo o resto é obra do homem" e seu colega Karl trabalhava com entidades infinitas, ignorando todo avanço obtido por seu colega. Infelizmente, o jovem Cantor entraria em meio a esse conflito e seria perseguido por Kronecker pelo resto da vida, não apenas através das duras críticas a seu trabalho, mas também por meio de ações que impediriam sua entrada como professor na Universidade de Berlim e de realizar qualquer publicação a respeito do infinito.

Durante o período em que lecionou em Halle, Cantor casou-se com Vally Guttmann, também de origem judaica, e continuou a dedicar-se à Análise Matemática seguindo os princípios de Weierstrass, o qual teve acesso aos seus trabalhos por meio das anotações de aula do seu bom amigo e também matemático Gösta Mittag-Leffler. De acordo com Aczel (2003), Mittag-Leffler estava ao lado de Cantor nos momentos em que ninguém queria ouvir suas ideias sobre o infinito ou publicá-las. Ele assimilava e publicava regularmente os trabalhos do amigo em seu periódico *Acta Mathematica*.

Outro grande amigo que esteve ao lado de Cantor, o qual era muito próximo, foi o grande matemático Richard Dedekind (1831-1916). A Matemática, e principalmente os estudos sobre os números irracionais e o infinito, os deixava mais ligados. Dedekind foi responsável por intervir para que o trabalho de Cantor pudesse ser publicado em um periódico editado por Kronecker. Os amigos trocavam várias cartas, mas foram

interrompidas quando Dedekind recusou a oferta de ser professor na Universidade de Halle. Cantor se sentia sozinho em Halle e esforçou-se para que o amigo se juntasse ao corpo docente de Halle. Porém, não contava com a recusa de Richard. Essa decisão abalou a amizade de tal forma que os dois passaram muitos anos sem trocar correspondência. Nesse mesmo período, Cantor desenvolveu a teoria Matemática dos conjuntos.

Cantor chegou aos impressionantes resultados sobre a noção do infinito porque considerou conjuntos e não diretamente números. Apesar da teoria de Cantor sobre os conjuntos estar repleta de inconsistências e paradoxos, ele se tornaria o pai da teoria dos conjuntos. Foi esse trabalho e sua extensão para conjuntos infinitos que resultou no trabalho de sua vida sobre a natureza do infinito. A ousadia de Cantor em nadar em águas até então pouco exploradas, o que era o caso do infinito, lhe resultaria em descobertas impressionantes. Assim como Galileu mostrou que o conjunto dos números inteiros possui a mesma cardinalidade dos seus quadrados, o gênio de Cantor foi capaz de mostrar que os racionais também são enumeráveis e possuem a mesma cardinalidade dos números inteiros.

Apesar de o conjunto dos números racionais aparentar ser maior que o conjunto dos inteiros, Cantor foi capaz de exibir uma bijeção entre eles. Bastou organizar todos os números racionais em uma matriz. Em cada linha, colocou frações com denominadores que iniciavam em 1 e continuavam em ordem crescente e nas colunas numeradores que também iniciavam em 1 e seguiam em ordem crescente.

Esse foi o primeiro passo do matemático no misterioso mundo do infinito, Cantor continuou a debruçar-se neste terreno e buscava mostrar se o conjunto dos números reais também era enumerável. A resposta deveria ser intuitiva, visto que é impossível listar todos os números reais, mas em 1874 Cantor provou que esse conjunto era não-enumerável e, portanto, com cardinalidade maior que a dos inteiros. Para isso, considerou apenas os números transcendentais - números irracionais que não são raízes de equações algébricas com coeficientes inteiros como π e e - para mostrar que o conjunto era não-enumerável.

Inicialmente, Cantor supôs que era possível listar todos os números no intervalo 0 e 1, mas se deu conta de que poderia construir um número que não estava na lista, um número diagonal. Para construí-lo, tomou a parte decimal do primeiro número, em seguida, o centésimo do segundo número, o milésimo do terceiro e assim sucessivamente.

Isso, prova que o tamanho do conjunto dos números reais é maior do que dos inteiros, graças aos números transcendentais que preenchem o vazio entre os racionais e algébricos. Com esse estudo, Cantor acendia mais uma luz e mostrava que existiam infinitos maiores que outros. No entanto, não sabia se existia algum conjunto o qual a cardinalidade estivesse entre a dos inteiros e a dos reais, ou simplesmente se os reais seriam a próxima ordem. Contudo, Georg foi em frente e decidiu publicar seu importante resultado em Berlim. Ele sabia que poderia ser interrompido, devido à objeção de muitos matemáticos ao seu trabalho, em especial Kronecker. Assim, sua estratégia foi usar um

título menos sugestivo, felizmente sua ideia deu certo e o artigo foi publicado com o título de *Sobre uma propriedade da coleção de todos os números algébricos reais*.

A medida que Cantor seguia suas pesquisas, continuava a surpreender-se com os resultados que encontrava. Conforme Aczel (2003), Cantor estava alvoraçado e desnortado quando trocou cartas com Dedekind, informando-o sobre sua nova descoberta. Em sua carta, inusitadamente escreveu em francês “*je le vois, mais je ne le crois pas*”, Cantor podia ver, mas não acreditava que existia uma bijeção entre a linha e o plano, ou seja, existem tantos pontos na linha quanto no plano. Mais tarde, Cantor escreveu mais uma vez ao amigo afirmando que não somente a linha e o plano têm a mesma cardinalidade, como também espaços contínuos de dimensão n têm o mesmo número de pontos que a linha. Dedekind tratou de adverti-lo a não publicar. Sabia que os matemáticos da época não aceitariam tal descoberta que afrontasse as verdades matemáticas.

Georg Cantor acreditava que o infinito era uma dádiva divina e era composto de vários níveis e que havia um nível inatingível, o Absoluto. O Absoluto era o próprio Deus. A esses níveis ele nomeou de números transfinitos. Sabemos que a cardinalidade de um conjunto é a quantidade de elementos nele contido. Assim, para conjuntos finitos, representamos o número cardinal usando os números naturais, mas o número cardinal dos conjuntos infinitos Cantor denominou de números transfinitos e não só nomeou como também, a partir do seu trabalho, resultou a aritmética transfinita. A potência (cardinal) de um conjunto infinito era o número transfinito, portanto, o cardinal do conjunto dos números inteiros era o menor número transfinito ao qual ele chamou de alef zero, $\aleph_0$. E usou a letra $\mathfrak{c}$ para o segundo número transfinito, referente ao cardinal do conjunto dos números reais.

Apesar de não saber se existia algum número transfinito entre o $\aleph_0$ e o $\mathfrak{c}$, Cantor sabia que depois do $\aleph_1$ existiam infinitos números transfinitos, visto que ele demonstrou que a potência do conjunto das partes é sempre maior então existiriam $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$. Também sabia como os números transfinitos interagem, desenvolvendo a aritmética transfinita. Algumas regras da nova Matemática do infinito mostram que ao somarmos um ou qualquer número finito ao número infinito de qualquer conjunto, este permanecerá infinito. Além disso, ao somarmos dois $\aleph_0$ ou multiplicarmos a um número finito, ou até mesmo multiplicarmos por ele mesmo, continuaríamos com o alef zero. Outra relação importante era que a potenciação mudava a cardinalidade do conjunto, ou seja, qualquer número inteiro maior que 1 que fosse elevado ao $\aleph_0$ seria igual a $\mathfrak{c}$ (potência dos reais), lembrando que Cantor não sabia se $\mathfrak{c}$ seria igual ao $\aleph_1$, e essa seria sua nova preocupação, provar que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ com $\aleph_1 = \mathfrak{c}$ que se tornou conhecida como hipótese do continuum.

Uma vez que foi elaborada, Cantor dedicava seu tempo a provar a hipótese do continuum. Em 1884, ao escrever ao seu amigo, o editor Gösta Mittag-Leffler, Georg acreditava ter tido êxito na sua demonstração do problema, no entanto, percebeu que

a prova era falha. E assim Cantor se frustrava rotineiramente ao ter a falsa sensação de que encontrara a resposta. De acordo com Aczel (2003), as incansáveis tentativas de provar a hipótese do continuum, os ataques constantes de Kronecker e a relação autoritária que tinha com o pai foram o estopim para que, naquele mesmo ano, Cantor sofresse seu primeiro colapso nervoso.

No decorrer dos anos seguintes, Cantor adoecia com mais frequência e por longos períodos. Quando recebia alta, tentava ficar longe das pesquisas sobre o continuum e se voltar para pesquisas sobre as obras de Shakespeare, mas não conseguia manter-se à distância e, toda vez que se esforçava para resolver, caía doente e voltava a ser internado na clínica mental de Halle Nervenlinik.

Em junho de 1917, Georg Cantor foi internado pela última vez, ele foi um dos únicos a permanecer na clínica no período da Primeira Guerra Mundial. Além de sua saúde estar em declínio, nesse período a vida na clínica se agravou por escassez de alimentos e privações da guerra. Cantor implorou aos médicos e à sua mulher que não o deixassem ficar ali, mas seus pedidos não foram aceitos. Desse modo, já com mais de setenta anos, em 6 de janeiro de 1918, foi encontrado morto na cama. Ele teria sido vítima de um ataque cardíaco, mas Cantor estava muito magro e se alimentava mal há meses.

Cantor deixara um legado ao adentrar no pomar secreto, entender e construir uma aritmética com os números transfinitos. Infelizmente, não conseguiu uma resposta para a hipótese do continuum. Foi somente mais tarde que o tcheco Kurt Friedrich Gödel (1906-1978) e Paul Cohen (1934-2007) da Universidade de Stanford continuariam o trabalho de Cantor sobre a hipótese do continuum. Nos estudos de Gödel, a hipótese era verdadeira se os fundamentos matemáticos também fossem válidos. Gödel, assim como Cantor, não conseguiu lidar com a força do infinito e deixou de lado a pesquisa. Coube a Cohen mostrar que, no atual sistema de axiomas, a hipótese em questão poderia ser tomada como verdadeira ou falsa, ou seja, a hipótese do continuum é independente da teoria dos conjuntos.

2 Considerações Iniciais

Neste capítulo, com base em Lipschutz (1967), Lima (1989) e Halmos (2001), iniciaremos nosso estudo com a apresentação dos conceitos de relações e de funções que serão a base para construirmos as demonstrações ao longo do trabalho. Em seguida, veremos o Princípio da Boa Ordenação que será fundamental para a demonstração do Segundo Princípio de Indução. Além disso, levaremos em consideração que o leitor já tenha familiaridade com a linguagem dos conjuntos.

2.1 Relações

Definição 2.1. *Sejam A e B conjuntos não-vazios. Uma relação de A em B é qualquer subconjunto R de $A \times B$. Dizemos que $x \in A$ está relacionado a $y \in B$ por meio da relação R se $(x, y) \in R$.*

Explicitamente, um conjunto R é uma relação se $R = \emptyset$ ou se cada elemento de R é um par ordenado. No segundo caso, isto significa que, se $z \in R$, então existem x e y tais que $z = (x, y)$. Se R é uma relação, é usual expressar simbolicamente o fato de que $(x, y) \in R$ por

$$xRy$$

(lê-se “ x está relacionado a y ”). Do mesmo modo, é usual expressar simbolicamente o fato de que $(x, y) \notin R$ por

$$x \not R y$$

(lê-se “ x não está relacionado a y ”).

Exemplo 2.2. Sejam $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{6, 7\}$ e $R = \{(1, 6), (2, 7), (5, 6)\}$. Notemos que $R \subset A \times B$ e, portanto, R é uma relação de A em B . Notemos ainda que $1R6$, $2R7$, $5R6$ e que $5 \not R 1$.

Exemplo 2.3. Seja R uma relação tal que x é homem e y é mulher e (x, y) é o par ordenado dado por x é casado com y .

Definição 2.4. *Seja R uma relação definida em um conjunto A , isto é, $R \subset A \times A$.*

1. *Se para todo $x \in A$, temos xRx , dizemos que R é reflexiva.*
2. *Se para quaisquer $x, y \in A$, temos $xRy \Rightarrow yRx$, dizemos que R é simétrica.*
3. *Se dados $x, y, z \in A$, temos $xRy, yRz \Rightarrow xRz$, dizemos que R é transitiva.*

Exemplo 2.5. Seja $\mathfrak{A}$ uma família de conjuntos e seja R a relação em $\mathfrak{A}$ definida por “ x é um subconjunto de y ”. Notemos que R é uma relação reflexiva, visto que todo conjunto é subconjunto de si próprio.

Exemplo 2.6. Seja A o conjunto de triângulos no plano Euclidiano, e seja R a relação que é definida por “ x é semelhante a y ”. Logo, R é simétrica, pois, se o triângulo a é semelhante ao triângulo b , então b também é semelhante a a .

Exemplo 2.7. Seja R a relação nos números reais definida por “ x é menor do que y ”. Notemos que,

$$a < b, b < c \rightarrow a < c$$

Portanto, R é uma relação transitiva.

Definição 2.8. *Seja R uma relação em um conjunto A . Dizemos que R é uma relação de equivalência se R é reflexiva, simétrica e transitiva.*

Exemplo 2.9. A igualdade é uma relação de equivalência. Sejam a , b e c elementos de um conjunto A . Então

1. $a = a$;
2. $a = b \Rightarrow b = a$;
3. $a = b$ e $b = c \Rightarrow a = c$

2.2 Funções

De agora em diante, trataremos de relações específicas, as chamadas funções. Desse modo, se f é uma função e x está relacionado a y por meio de f , utilizaremos a notação $f(x) = y$ no lugar de $(x, y) \in f$ ou de xfy e, nesta ocasião, diremos que f *transforma* x em y .

Definição 2.10. *Sejam A e B conjuntos quaisquer. Uma função f de A em B é uma relação de A em B que a cada elemento $x \in A$ associa um e, somente um, elemento $y \in B$.*

É usual escrever $f: A \rightarrow B$ para simbolizar que f define uma função de A em B . Os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, de domínio e contradomínio da função f . Dado $x \in A$, o único elemento $y \in B$ tal que $y = f(x)$ é chamado imagem ou correspondente de x por f . O conjunto

$$f(A) = \{y \in B : f(x) = y \text{ para algum } x \in A\} = \{f(x) : x \in A\} \subset B$$

é chamado imagem de f .

A regra que define a imagem de $x \in A$, pode ter natureza arbitrária. No entanto, para que uma relação entre dois conjuntos seja uma função é necessário que não haja exceções nem ambiguidade, ou seja,

- (i) Para todo $x \in A$ deve existir $y \in B$ tal que $y = f(x)$;
- (ii) Se $y, z \in B$ são correspondentes de x por f , então $y = z$.

Observação 2.11. Duas funções f e g são iguais se possuem o mesmo domínio A , o mesmo contradomínio B e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Exemplo 2.12. Sejam P o conjunto de polígonos do plano, $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ a função que associa a cada polígono x sua área $f(x)$.

Exemplo 2.13. A função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $f(x) = 2x$.

Exemplo 2.14. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = -x$.

Exemplo 2.15. A igualdade $f(x) = \frac{1}{x}$, não define uma função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ pois não existe $y \in \mathbb{Q}$ tal que $f(0) = y$.

Definição 2.16. Seja $f: A \rightarrow B$ uma função. O gráfico de f é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado por todos os pares ordenados da forma $(x, f(x))$, ou seja,

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}.$$

Observação 2.17. Se $f, g: A \rightarrow B$ são duas funções que possuem o mesmo gráfico, então f e g são iguais.

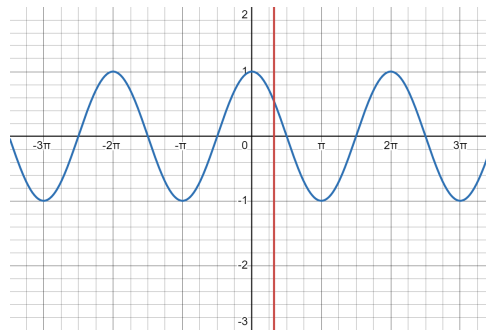
Segue da definição de função que um subconjunto $G \subset A \times B$ é um gráfico de uma função $f: A \rightarrow B$ se, e somente se, possui as seguintes propriedades:

- (i) Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in G$;
- (ii) Se $(x, y), (x, z) \in G(f)$, então $y = z$.

Desse modo, de acordo com o exemplo da Figura 2.1 se traçarmos várias linhas verticais semelhantes à linha vermelha, intersectaremos o esboço do gráfico em um único ponto. Assim, ao tomarmos x_1 , possuiremos uma única imagem y_1 e constatamos que se trata de uma função.

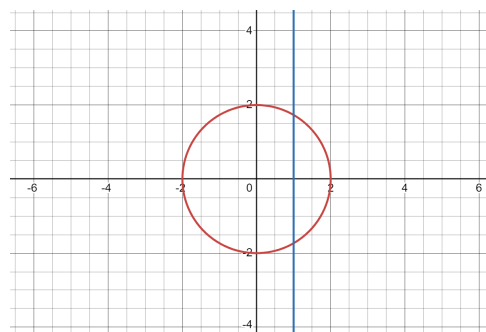
Já no exemplo da Figura 2.2, claramente não representa uma função. Visto que, se fizermos o mesmo procedimento do esboço anterior, ao traçarmos as retas verticais, estas intersectaram o gráfico em dois pontos, indicando que existirá algum y_1 e y_2 que serão imagens de x_1 , ou seja, a regra possui ambiguidade.

Figura 2.1



Fonte: autoria própria

Figura 2.2



Fonte: autoria própria

2.2.1 Função Injetiva, Sobrejetiva e Bijetiva

Definição 2.18. Uma função $f: A \rightarrow B$ é dita *injetiva* quando dados x_1, x_2 quaisquer em A , $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ou, equivalentemente, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemplo 2.19. Seja $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x^2$. Desse modo, f não é uma função injetiva, pois, embora $2 \neq -2$ observamos que $f(2) = f(-2) = 4$.

Exemplo 2.20. Seja $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $g(x) = 3x + 1$. De fato, g é uma função injetiva, pois se $g(x_1) = g(x_2)$ então

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1 &= 3x_2 + 1 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

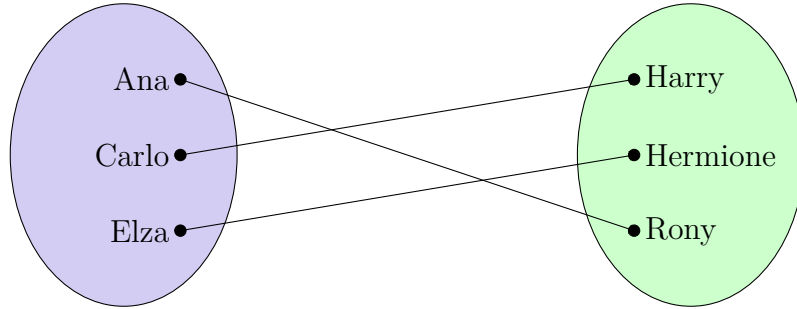
Exemplo 2.21. A função h que faz corresponder a cada país do mundo sua capital administrativa, é injetiva. De fato, países diferentes possuem capitais administrativas diferentes.

Definição 2.22. Uma função $f: A \rightarrow B$ é dita *sobrejetiva* quando para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, quando $f(A) = B$.

Exemplo 2.23. Seja $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por $f(x) = x^2$. Esta função não é sobrejetiva. De fato, não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = -1$ e, portanto, $f(\mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.24. Seja $f: A \rightarrow B$, onde A é o conjunto formado por três amigos e B é o conjunto formado pelo trio de ouro da saga de Harry Potter, a função que faz corresponder a cada amigo o seu personagem favorito de acordo com o diagrama abaixo (Figura 2.3). Portanto, como $f(A) = B$ a função é sobrejetiva.

Figura 2.3



Fonte: autoria própria

Definição 2.25. Uma função $f: A \rightarrow B$ chama-se *bijetiva* quando é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

Exemplo 2.26. A função $id_A: A \rightarrow A$ definida por $id_A(x) = x$, comumente chamada de função identidade de A , é uma função injetiva e sobrejetiva e, portanto, bijetiva.

Exemplo 2.27. Claramente, as funções apresentadas no Exemplo 2.20 e no Exemplo 2.24 são bijetivas. Assim como, a função $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por $f(x) = x^2$ é bijetiva.

2.2.2 Função Composta

Definição 2.28. Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções em que o domínio de g é o contradomínio de f . A função composta de g com f é a função $g \circ f: A \rightarrow C$ definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemplo 2.29. Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as funções definidas, respectivamente, por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 3$. Então,

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(5) = 25$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 7.$$

Teorema 2.30. (Associatividade da composição) Sejam $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ e $h: C \rightarrow D$ funções dadas. Então

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f): A \rightarrow D.$$

Demonstração: Com efeito, para todo $x \in A$, temos:

$$\begin{aligned} [(h \circ g) \circ f](x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h[g(f(x))] \\ &= h[(g \circ f)(x)] \\ &= [h \circ (g \circ f)](x). \end{aligned}$$

Isto comprova a igualdade desejada. ■

Teorema 2.31. *Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetivas, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é uma função injetiva.*

Demonstração: Segue da injetividade de g que

$$g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Por outro lado, a injetividade de f garante que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Logo,

$$g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow x = y,$$

isto é, $g \circ f$ é injetiva. ■

Teorema 2.32. *Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções sobrejetivas, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é uma função sobrejetiva.*

Demonstração: Seja $y \in C$. Como g é sobrejetiva, existe $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Como f é sobrejetiva, existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$. Neste caso,

$$g(f(x)) = g(z) = y$$

e $g \circ f$ é sobrejetiva. ■

Uma consequência imediata dos dois últimos resultados é a seguinte:

Corolário 2.33. *Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções bijetivas, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é uma função bijetiva.*

2.2.3 Função Inversa

Definição 2.34. *Sejam $f: A \rightarrow B$ uma função e $Y \subset B$. A imagem inversa de Y pela função f é o conjunto $f^{-1}(Y)$ formado por todos os $x \in A$ tais que $f(x) \in Y$, isto é,*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A; f(x) \in Y\}.$$

Notemos que pode ocorrer $f^{-1}(Y) = \emptyset$ mesmo que $Y \subset B$ seja um subconjunto não-vazio. Isto se dá quando a função não é sobrejetiva.

Exemplo 2.35. Seja $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por $f(x) = x^2$. Assim, de $f^{-1}(9) = \{-3, 3\}$, pois 9 é imagem tanto de -3 quanto de 3 . Notemos também que $f^{-1}(5) = \emptyset$, visto que não há elemento em $\mathbb{Z}$ cujo quadrado seja 5.

Definição 2.36. Dizemos que $g: B \rightarrow A$ é uma inversa à esquerda de $f: A \rightarrow B$ se $(g \circ f) = id_A: A \rightarrow A$.

Teorema 2.37. Uma função $f: A \rightarrow B$ possui uma inversa à esquerda se, e somente se, é injetiva.

Demonstração: Se f é injetiva, então para cada $y \in f(A)$ existe um único $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Isto define uma função $h: f(A) \rightarrow A$ tal que $h(f(x)) = x$ para todo $x \in A$. Agora, fixando x_0 em A consideremos a função $g: B \rightarrow A$ definida por $g(y) = h(y)$ se $y \in f(A)$ e $g(y) = x_0$ se $y \in B - f(A)$. Notemos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = h(f(x)) = x,$$

isto é, $g \circ f = id_A$. Reciprocamente, se existe $g: B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = Id_A$, então, dados x_1, x_2 em A , observamos que

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$$

e, portanto, f é injetiva. ■

Definição 2.38. Uma função $g: B \rightarrow A$ é uma inversa à direita da função $f: A \rightarrow B$ se $(f \circ g) = id_B$.

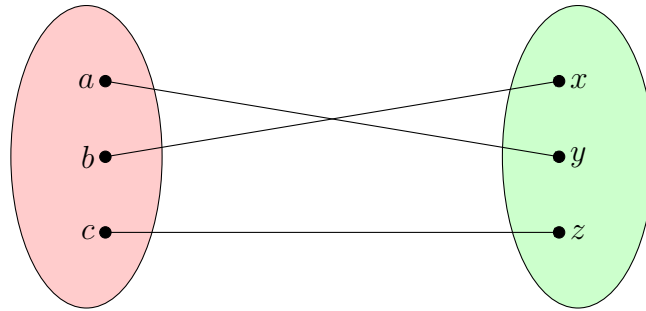
Teorema 2.39. Uma função $f: B \rightarrow A$ possui uma inversa à direita se, e somente se, é sobrejetiva.

Demonstração: Seja $f: A \rightarrow B$ sobrejetiva. Então, para cada $y \in B$, o conjunto $f^{-1}(y)$ é não-vazio. Escolhamos, para cada $y \in B$, um único $x \in f^{-1}(\{y\})$ e ponhamos $g(y) = x$. Isto define uma função $g: B \rightarrow A$ tal que $f(g(y)) = y$. Logo, g é uma inversa à direita de f . Reciprocamente, se existe $g: B \rightarrow A$ com $f \circ g = id_B$ então, para cada $y \in B$, pondo $x = g(y)$, temos $f(x) = f(g(y)) = y$. Logo, f é sobrejetiva. ■

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função bijetiva. Então, para cada $b \in B$ o conjunto $f^{-1}(\{b\})$ é formado por um único elemento de A que denotaremos por $f^{-1}(b)$. Fica assim estabelecida uma função $f^{-1}: B \rightarrow A$ denominada função inversa de f .

Exemplo 2.40. Seja a função $f: A \rightarrow B$ definida pelo diagrama:

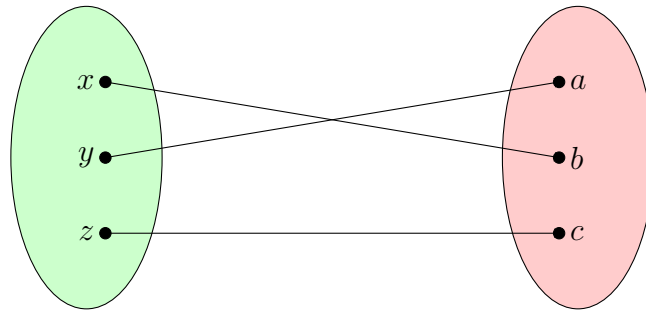
Figura 2.4



Fonte: autoria própria

Evidentemente, a f é bijetiva. Desse modo, f^{-1} existe. Descrevemos $f^{-1}: B \rightarrow A$ pelo diagrama:

Figura 2.5



Fonte: autoria própria

2.3 Os Princípios de Indução Finita e da Boa Ordenação

Nesta seção, apresentaremos um importante resultado a respeito dos subconjuntos dos números naturais, o Princípio da Boa Ordenação. Este fato nos permitirá estabelecer o Segundo Princípio de Indução Finita. Ambos os princípios são corriqueiramente utilizados como ferramentas de demonstração. Antes, apresentaremos o terceiro axioma de Peano, o Princípio de Indução Finita, e a definição de elemento mínimo.

Axioma 2.41. (Princípio de Indução Finita) *Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com as seguintes propriedades:*

- (i) $1 \in X$;
- (ii) $n + 1 \in X$ sempre que $n \in X$.

Então $X = \mathbb{N}$.

Definição 2.42. *Seja X um subconjunto não-vazio de números naturais. Diremos que $n \in \mathbb{N}$ é um elemento mínimo de X se $n \in X$ e $n \leq m$, para todo $m \in X$.*

Seja $X \subset \mathbb{N}$. Se $n \in X$ e $p \in X$ são ambos elementos mínimos de X , então $n \leq p$ e $p \leq n$, donde $p = n$. Portanto, o menor elemento de um subconjunto não-vazio de naturais é único.

Teorema 2.43. (Princípio da Boa Ordenação - PBO) *Todo subconjunto não-vazio de números naturais possui um elemento mínimo.*

Demonstração: Para fins de contradição, suponhamos que exista um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{N}$ que não possua elemento mínimo. Sejam $X = \mathbb{N} - A = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A\}$, $I_n = \{p \in \mathbb{N} : 1 \leq p \leq n\}$ e $S = \{n \in \mathbb{N} : I_n \subset X\}$. Notemos que $1 \notin A$, pois, caso contrário, 1 seria o seu elemento mínimo. Logo, $1 \in X$. Mas isso significa dizer que $I_1 = \{1\} \subset X$ ou seja, $1 \in S$. Seja $n \in S$. Se $n + 1$ pertencesse a A , como $I_n \subset X$, então $n + 1$ seria o elemento mínimo de A , contrariando o fato de que A não possui elemento mínimo. Logo, $n + 1 \in X$ e, por conseguinte, $I_{n+1} = I_n \cup \{n + 1\} \subset X$, donde $n + 1 \in S$. Assim, do Princípio de Indução Finita,

$$\mathbb{N} = S \subset X \subset \mathbb{N}$$

e $X = \mathbb{N}$. Mas isto significa que $A = \emptyset$, o que contradiz o fato de A ser sabidamente não-vazio. ■

Em algumas demonstrações por indução é necessário assumir que certa propriedade é válida não apenas para um certo número natural n , mas também para todos os naturais que o antecedem. Esse é o contexto em que se faz presente o Segundo Princípio de Indução.

Teorema 2.44. (Segundo Princípio de Indução Finita) *Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com as seguintes propriedades:*

- (i) $1 \in X$;
- (ii) $n + 1 \in X$ sempre que $1, \dots, n \in X$.

Então $X = \mathbb{N}$.

Demonstração: Para fins de contradição, suponhamos que $X \neq \mathbb{N}$. Então

$$Y = \mathbb{N} - X = \{n \in \mathbb{N}; m < n, n \notin X\} \neq \emptyset.$$

Segue do PBO que Y possui um elemento mínimo p . Como $1 \in X$ e $X \cap Y = \emptyset$, concluímos que $p \neq 1$. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p = k + 1$. Como $m \leq k \Rightarrow m < k + 1 = p$, concluímos que $1, \dots, k \notin Y$ e, por conseguinte, $1, \dots, k \in X$. A propriedade (ii) garante então que $k + 1 = p \in X$ o que, evidentemente, é uma contradição. ■

Exemplo 2.45. Sejam P a coleção dos números primos e Q a coleção dos números naturais que podem ser decompostos como o produto de números primos. Então $\mathbb{N} = \{1\} \cup P \cup Q$. Seja $X = \{1\} \cup P \cup Q$. É evidente que $1 \in X$. Suponhamos que $1, \dots, n \in X$. Se $n + 1$ é um número primo, então $n + 1 \in P \subset X$. Se $n + 1$ não é primo, então existem $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $n + 1 = ab$ e $1 < a, b < n + 1$. Segue da hipótese de indução que $a, b \in X$ e, portanto, $n + 1 = ab$ pode ser decomposto num produto de números primos. Logo, $n + 1 \in X$ e o Segundo Princípio de Indução assegura que $X = \mathbb{N}$.

3 Conjuntos Finitos e Infinitos

Contar coisas é um processo natural do ser humano, que inconscientemente ao realizar tal atividade estabelece uma correspondência biunívoca entre os números inteiros e o conjunto que deseja conferir. Ou seja, cada item de um determinado conjunto será associado a um, e somente um, número inteiro.

Tal procedimento pode ser realizado tanto para conjuntos finitos, no qual a correspondência acontece até o último elemento do conjunto ser associado a um número inteiro, por exemplo, ao contarmos uma dúzia de bananas associamos cada banana a um número inteiro até chegarmos ao número doze. Obviamente, se tivermos tempo para contar, também realizamos o mesmo processo para conjuntos infinitos. Ao final, obteremos um número que representará a quantidade do conjunto. A este número chamamos de cardinalidade e, se esta quantidade obtida for a mesma para outros conjuntos, dizemos que estes são equipotentes.

Deste modo, neste capítulo apresentaremos conceitos importantes sobre os conjuntos equipotentes, finitos, infinitos, enumeráveis e não-enumeráveis usando como referência Lima (1989), Halmos (2001) e Portal da OBMEP (2024). E assim veremos algumas das surpresas que o infinito pode pregar à imaginação humana.

3.1 Conjuntos Equipotentes

A **cardinalidade** de um conjunto A , seja finito ou infinito, está relacionada à quantidade de elementos ou ao tamanho de um conjunto; denotaremos esse fato por $\text{card}(A)$.

Exemplo 3.1. O conjunto finito $A = \{a, b, c, d, e\}$ possui $\text{card}(A) = 5$.

Definição 3.2. Dizemos que os conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade, ou que são equipotentes, se existir uma função bijetora $f: A \rightarrow B$. Se A e B são conjuntos equipotentes, denotamos este fato simbolicamente escrevendo $A \sim B$.

Notemos que, na definição anterior, estamos dizendo quando dois conjuntos têm a mesma quantidade de elementos, sem necessariamente saber que quantidade é essa. Por exemplo, se estamos em uma sala de cinema de modo que todos os espectadores estão sentados e não há assentos vazios, sabemos que a quantidade de assentos é igual à quantidade de espectadores, ainda que não tivéssemos contado previamente o número de assentos ou o número de espectadores.

Exemplo 3.3. Os conjuntos $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$ têm a mesma cardinalidade, uma vez que a função $f: X \rightarrow Y$ tal que $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3$ é uma bijeção.

Teorema 3.4. Para um conjunto universo U , a relação de equipotência é uma relação de equivalência em $\wp(U)$.

Demonstração: Para que $\sim$ seja uma relação de equivalência é necessário e suficiente que a mesma seja reflexiva, simétrica e transitiva.

(Reflexividade) Para todo $A \in \wp(U)$, $id_A: A \rightarrow A$, a função identidade de A , é sabidamente uma bijeção. Logo $A \sim A$.

(Simetria) Se $A, B \in \wp(U)$ são tais que $A \sim B$, então existe $f: A \rightarrow B$ bijetora. Logo, $f^{-1}: B \rightarrow A$ também é bijetora, o que mostra que $B \sim A$.

(Transitividade) Se $A, B, C \in \wp(U)$ são tais que $A \sim B$ e $B \sim C$, então existem $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ bijetoras. Logo, $g \circ f: A \rightarrow C$ também é bijetora, o que mostra que $A \sim C$.

Portanto, $\sim$ é uma relação de equivalência. ■

3.2 Conjuntos Finitos e Infinitos

Intuitivamente, sabemos que um conjunto finito é um “conjunto que tem fim”, como o das letras do alfabeto, e um conjunto infinito é aquele que, por mais que tenhamos disposição para contá-lo, não terminariamos, como, por exemplo, o conjunto dos números ímpares. Nesta seção, formalizaremos os conceitos de conjuntos finitos e infinitos, estabeleceremos as suas propriedades e veremos o surpreendente resultado sobre a existência de infinitos maiores que outros.

3.2.1 Conjuntos Finitos

Vejamos então que um conjunto é finito se ele é vazio ou tem a mesma cardinalidade de $I_n := \{1, \dots, n\}$. Desse modo, realizar a contagem de um conjunto finito é estabelecer uma bijeção entre X e algum conjunto I_n .

Definição 3.5. Seja $I_n = \{p \in \mathbb{N}; 1 \leq p \leq n\}$. Dizemos que um conjunto X é finito quando é vazio ou quando existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f: I_n \rightarrow X$. No primeiro caso, dizemos que X possui 0 (zero) elementos e denotamos este fato simbolicamente por $\text{card}(X) = 0$. No segundo, dizemos que n é o número de elementos de X e denotamos este fato simbolicamente por $\text{card}(X) = n$.

Uma vez apresentada a definição de um conjunto finito, apresentaremos teoremas que garantem que tal conceito está bem definido, isto é, um mesmo conjunto não pode

assumir diferentes quantidades, independentemente das diferentes maneiras de contá-lo. Estes resultados também garantirão que $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito.

Teorema 3.6. *Se A é um subconjunto próprio de I_n , então não pode existir uma bijeção $f: A \rightarrow I_n$.*

O Teorema 3.6 nos diz que se $m < n$, sendo m a cardinalidade de A , então existe uma função injetiva, mas não sobrejetiva de A em I_n , ou seja, se tomássemos $A = \{1, 2, 3\}$ e $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ e considerássemos uma função $f: A \rightarrow I_4$, então f não seria sobrejetiva. Sendo assim, vamos à demonstração.

Demonstração: Para fins de contradição, suponhamos que a coleção X dos números naturais n para os quais existe uma bijeção entre I_n e uma parte própria sua seja não-vazio. Denotando $n_0 = \min X$, seja A uma parte própria de I_{n_0} para a qual existe uma bijeção $f: A \rightarrow I_{n_0}$. Notemos que $n_0 > 1$, pois, se $n_0 = 1$, então teríamos $A = \emptyset$, de sorte que não haveria uma bijeção entre A e I_{n_0} . Assim, seja $a \in A$ tal que $f(a) = n_0$. Notemos que A pode ser escolhido de modo que $A \subset I_{n_0-1}$. De fato, se $n_0 \in A$ escolhendo $b \in I_{n_0} - A$ e considerando o conjunto $B = (A - \{n_0\}) \cup \{b\}$, observamos que a função $g: B \rightarrow I_{n_0}$ definida por $g(x) = f(x)$, se $x \neq b$ e $g(b) = f(n_0)$ é uma bijeção. Assim, supondo $A \subset I_{n_0-1}$, seja $a \in A$ tal que $f(a) = n_0$. Assim, $f|_{A-\{a\}}: A - \{a\} \rightarrow I_{n_0-1}$ é uma bijeção e, uma vez que $A - a$ é uma parte própria de I_{n_0-1} , concluímos que $n_0 - 1 \in X$, o que contraria a minimalidade de n_0 em X . ■

Corolário 3.7. *Se $f: I_m \rightarrow X$ e $g: I_n \rightarrow X$ são bijetoras, então $m = n$.*

Demonstração: Suponhamos que $m < n$. Então $I_m \subsetneq I_n$. Como por hipótese temos que as funções f e g são bijeções, segue que a g admite uma inversa que também é bijetora. Logo, $g^{-1} \circ f: I_m \rightarrow I_n$ é uma bijeção entre I_n em um subconjunto próprio seu. Absurdo, pois contraria o Teorema 3.6. De modo análogo concluímos que não pode ser $n < m$. Portanto, $m = n$. ■

Corolário 3.8. *Seja X um conjunto finito. Uma aplicação $f: X \rightarrow X$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva.*

Demonstração: Sendo X um conjunto finito, segue da Definição 3.5 que, para algum $n \in \mathbb{N}$, existe uma bijeção $\varphi: I_n \rightarrow X$. Logo, φ possui uma inversa bijetora $\varphi^{-1}: X \rightarrow I_n$. Consideremos a função $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi: I_n \rightarrow I_n$, se f for injetiva ou sobrejetiva, então $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ também o é. Logo, sem perda de generalidade, podemos considerar $X = I_n$.

Suponhamos que $f: I_n \rightarrow I_n$ seja injetiva. Queremos mostrar que f também é sobrejetiva, ou seja, $f(I_n) = I_n$. Seja $A = f(I_n) \subset I_n$. Se f não fosse sobrejetiva, como uma função injetiva sempre determina uma bijeção entre o seu domínio e sua imagem,

haveria uma bijeção entre I_n e sua parte própria A , fato que contraria o Teorema 3.6. Logo, $A = I_n$ e f é sobrejetiva.

Reciprocamente, se $f: I_n \rightarrow I_n$ é sobrejetiva, então para cada $k \in I_n$ podemos escolher $x_k = g(k)$ tal que $f(x_k) = k$. Isto define uma aplicação $g: I_n \rightarrow I_n$, tal que $g(k) = x_k$. É claro que g é injetiva e, pela parte anterior, g é sobrejetiva, logo bijetora. Assim, $g(f(x_k)) = g(k) = x_k = id_{I_n}(x_k)$, logo pelo Teorema 2.37 da inversa à esquerda f é injetiva. ■

O próximo resultado reafirma e generaliza o que diz o Teorema 3.6, de modo que se $m > n$, sendo m a cardinalidade do domínio e n do contradomínio da função, teremos uma função sobrejetiva, mas não injetiva.

Corolário 3.9. *Não pode existir uma bijeção entre um conjunto finito e uma parte própria sua.*

Demonstração: Sejam X finito e Y uma parte própria de X . Como X é finito, existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $\varphi: I_n \rightarrow X$. Então o conjunto $A = \varphi^{-1}(Y)$ é uma parte própria de I_n . Chamemos de $\varphi_A: A \rightarrow Y$ a bijeção obtida pela restrição de φ a A . Se existisse uma bijeção $f: Y \rightarrow X$, a composta $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_A: A \rightarrow I_n$ seria também uma bijeção, contrariando o Teorema 3.6. ■

Lema 3.10. *Se existe uma bijeção $f: X \rightarrow Y$ então, dados $a \in X$ e $b \in Y$, existe também uma bijeção $g: X \rightarrow Y$ tal que $g(a) = b$.*

Demonstração: Seja $b' = f(a)$. Como f é sobrejetiva, existe $a' \in X$ tal que $f(a') = b$. Definamos $g: X \rightarrow Y$ pondo $g(a) = b$, $g(a') = b'$ e $g(x) = f(x)$ se $x \in X$ é tal que $x \neq a$ e $x \neq a'$. Segue que g é bijeção. ■

Teorema 3.11. *Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.*

Demonstração: Inicialmente, provaremos para o seguinte caso particular: se X é finito e $a \in X$ então $X - \{a\}$ é finito. De fato, como X é finito existe uma bijeção $f: I_n \rightarrow X$, a qual, pelo Lema 3.10, podemos supor que $f(n) = a$. Se $n = 1$ então $X - \{a\} = \emptyset$ é finito. Se $n > 1$, a restrição de f a I_{n-1} é uma bijeção sobre $X - \{a\}$, logo $X - \{a\}$ é finito e tem $n - 1$ elementos.

Provamos o caso geral por indução no número n de elementos de X . O resultado é evidente se $X = \emptyset$, ou se $n = 1$. Supondo que o teorema seja verdadeiro para conjuntos com n elementos, sejam X um conjunto com $n + 1$ elementos e Y um subconjunto de X . Se $Y = X$ não há o que provar. Caso contrário, existe $a \in X$ tal que $a \notin Y$. Então, na realidade, $Y \subset X - \{a\}$. Como $X - \{a\}$ tem n elementos, segue-se que Y é finito. ■

Corolário 3.12. *Dada $f: X \rightarrow Y$, se Y for finito e f é injetiva então X é finito; se X é finito e f é sobrejetiva então Y é finito.*

Demonstração: Se f é uma função injetiva, então f define uma bijeção de X sobre $f(X) \subset Y$. Como, por hipótese, Y é finito, segue do Teorema 3.11 que $f(X)$ é finito. Assim, o fato de haver uma bijeção entre X e $f(X)$ assegura que X é finito. Por outro lado, se f é sobrejetiva e X é finito então para cada $y \in Y$ podemos escolher um $x = g(y) \in X$ tal que $f(x) = y$. Isto define uma aplicação $g: Y \rightarrow X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Segue-se que g é injetiva e, pelo que acabamos de provar, Y é finito. ■

Definição 3.13. *Um subconjunto X de $\mathbb{N}$ é dito limitado se existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $x < p$ para todo $x \in X$.*

Corolário 3.14. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, é limitado.*

Demonstração: Com efeito, se $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{N}$ é finito, colocando $p = x_1 + \dots + x_n$, observamos que $x \leq p$ para todo $x \in X$. Logo, X é limitado. Reciprocamente, se $X \subset \mathbb{N}$ é limitado então $X \subset I_p$ para algum $p \in \mathbb{N}$ e, como I_p é finito, segue do Teorema 3.11 que X é finito. ■

3.2.2 Conjuntos Infinitos

Definição 3.15. *Um conjunto é dito infinito quando não é finito. Isto é, X é infinito se for não-vazio e, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f: I_n \rightarrow X$.*

Um exemplo de conjunto infinito que estamos acostumados a utilizar é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Isto decorre imediatamente do Corolário 3.14.

Teorema 3.16. *Se X é um conjunto infinito, então existe uma aplicação injetiva $f: \mathbb{N} \rightarrow X$.*

Demonstração: Sejam X um conjunto não-vazio e $x_1 \in X$. Façamos $f(1) = x_1$. Como X é infinito, podemos fixar $x_2 \in X - \{x_1\}$ e fazer $f(2) = x_2$. Utilizando mais uma vez o fato de X ser infinito, podemos fixar $x_3 \in X - \{x_1, x_2\}$ e fazer $f(3) = x_3$. Assim, supondo definidos $x_1, \dots, x_n \in X$ dois a dois distintos, à luz da infinitude de X , podemos fixar $x_{n+1} \in X - \{x_1, \dots, x_n\}$ e fazer $f(n+1) = x_{n+1}$. Afirmamos que a função f aqui definida é injetiva. Seja $m \neq n$, digamos $m < n$. Então $x_m \in \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ enquanto $x_n \in X - \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$. Isto significa que $x_m \neq x_n$, ou seja, que $f(n) \neq f(m)$. ■

Corolário 3.17. *Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $\varphi: X \rightarrow Y$ sobre um subconjunto próprio $Y \subset X$.*

Demonstração: Sejam X um conjunto infinito e $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ uma aplicação injetiva. Tomaremos para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = x_n$. Consideramos o subconjunto próprio $Y = X - \{x_1\}$. Definamos a bijeção $\varphi: X \rightarrow Y$ pondo $\varphi(x) = x$ se x não é qualquer um dos x_n e $\varphi(x_n) = x_{n+1}$. Reciprocamente, se existe uma bijeção de X sobre um subconjunto próprio de X então X é infinito, em virtude do Corolário 3.9. ■

3.2.3 Conjuntos Enumeráveis

Até o momento, no universo dos conjuntos finitos, definimos que contar é estabelecer uma bijeção $f: I_n \rightarrow A$. De agora em diante, mostraremos que, embora não intuitivamente como fazemos com os conjuntos finitos, também é possível enumerar ou listar alguns conjuntos infinitos.

Definição 3.18. Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. No último caso, X é dito infinito enumerável.

Se X é um conjunto finito, uma enumeração de X será denotada por:

$$X = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Se X é um conjunto infinito, uma enumeração de X será denotada por:

$$X = \{f(1), f(2), \dots, f(n) \dots\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n \dots\}$$

Vejamos alguns conjuntos que são enumeráveis:

Exemplo 3.19. Seja $X = \{3, 11, 25\}$ é um conjunto enumerável pois é finito, ou seja, conseguimos uma bijeção $f: I_3 \rightarrow X$ tal que $X = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{3, 11, 25\}$.

Exemplo 3.20. O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é enumerável. De fato, a identidade de $\mathbb{N}$ é claramente uma bijeção.

No exemplo seguinte, apesar de parecer contrariar o senso comum, mostraremos que o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ tem o mesmo tamanho que o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$.

Exemplo 3.21. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é enumerável. Para mostrarmos que os inteiros $\mathbb{Z}$ são enumeráveis é necessário construir uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$. A ideia aqui é listar todos os números inteiros da seguinte maneira:

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$$

Desse modo, podemos considerar a seguinte correspondência:

$$1 \rightarrow 0, 3 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 2, 7 \rightarrow 3, \dots$$

e

$$2 \rightarrow -1, 4 \rightarrow -2, 6 \rightarrow -3, 8 \rightarrow -4, \dots$$

Sendo assim, podemos definir $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ bijetiva pondo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & \text{se } x \text{ for ímpar} \\ -\frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ for par} \end{cases}$$

Para verificarmos que f é bijetora, tomemos $x, y \in \mathbb{N}$ ambos pares. Logo,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{-x}{2} = \frac{-y}{2} \Rightarrow x = y;$$

Para $x, y \in \mathbb{N}$ ambos ímpares, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow x-1 = y-1 \Rightarrow x = y;$$

E por fim, para x par e y ímpar,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{-y}{2} \Rightarrow -x = y-1 \Rightarrow x+y = 1,$$

o que é impossível, visto que $x, y \in \mathbb{N}$. Então, para a última situação, $f(x) = f(y)$ nunca ocorre. Portanto, f é injetiva.

Para mostrarmos que é sobrejetiva, consideremos $n \in \mathbb{Z}$ não negativo, então $2n+1$ é ímpar e positivo, logo natural. Assim,

$$f(2n+1) = \frac{(2n+1)-1}{2} = n.$$

Por outro lado, se $n \in \mathbb{Z}$ for negativo, então $-2n$ é positivo e par, logo natural. Logo,

$$f(-2n) = \frac{-(-2n)}{2} = n.$$

Então, f é sobrejetiva. Portanto, f é bijetiva. O que comprova que $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Teorema 3.22. *Todo subconjunto X de números naturais é enumerável.*

Demonstração: Se X é um conjunto finito, por definição ele é enumerável. Caso contrário, se X é um conjunto infinito, invocando o PBO, seja x_1 o menor elemento de X . Deste modo, $X - \{x_1\} \neq \emptyset$ pois X é infinito. Aplicando novamente o PBO, seja x_2 o elemento mínimo de $X - \{x_1\}$. Em particular, $x_1 < x_2$. Assim, supondo definidos $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, denotemos $A_n = X - \{x_1, \dots, x_n\}$. Notemos que $A_n \neq \emptyset$, pois X é infinito. Seja, pois, x_{n+1} o menor elemento de A_n . Então $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Com efeito, se existisse algum elemento $x \in X$ diferente de todos os x_n , teríamos $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo x seria um natural maior que todos os elementos do conjunto infinito $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, contrariando o Corolário 3.14. ■

Para ilustrar a ideia do teorema anterior, vejamos alguns exemplos incluindo o conjunto de todos os quadrados perfeitos, o qual Galileu foi o responsável por descobrir sua enumerabilidade.

Exemplo 3.23. O conjunto X de todos os quadrados perfeitos é enumerável. De fato, por se tratar de um subconjunto de $\mathbb{N}$, o teorema anterior já garante a enumerabilidade de X . Notemos também que, ao definirmos $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ pondo $f(n) = n^2$, temos uma bijeção. De fato, é injetiva pois, dados $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ temos

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1^2 = n_2^2 \Rightarrow n_1 = n_2.$$

f é sobrejetiva pois, dado $x \in X$, existe um $n \in \mathbb{N}$, $n = \sqrt{x}$, isto é, tal que $x = f(n)$.

Exemplo 3.24. O subconjunto X dos números naturais ímpares e o subconjunto Y dos números naturais pares são enumeráveis. De fato, a função definida por $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ tal que $x = 2n + 1$ é claramente uma bijeção, assim como $g: \mathbb{N} \rightarrow Y$ tal que $x = 2n$.

Proposição 3.25. *Todo subconjunto não vazio de um conjunto enumerável é enumerável.*

Demonstração: Sejam A um conjunto enumerável e $B \subset A$. Se B for finito, não há o que fazer. Se B for infinito, então A também o é, e podemos tomar uma bijeção $f: A \rightarrow \mathbb{N}$. Sendo $B' = \{f(x); x \in B\}$, segue que B' é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$; portanto, pelo Teorema 3.22, B' é enumerável. Dessa forma, podemos tomar uma bijeção $g: B' \rightarrow \mathbb{N}$. Para concluir, definimos a função $h: B \rightarrow \mathbb{N}$ pondo

$$h(x) = g(f(x)).$$

A imagem de h é

$$Im(h) = \{g(f(x)) : x \in B\} = \{g(b'); b' \in B'\} = Im(g) = \mathbb{N},$$

então h é sobrejetiva. Por outro lado, para $x, y \in B$ a injetividade de f e g garante que

$$h(x) = h(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

ou seja, h é injetiva. Dessa forma, h é bijeção, garantindo a enumerabilidade de B . ■

Uma consequência útil da proposição anterior é a seguinte:

Corolário 3.26. *Seja $f: X \rightarrow Y$ injetiva. Se Y é enumerável, então X também o é.*

Demonstração: Seja $A = Im(f)$. Segue do resultado anterior que A é enumerável e, sendo a função $g: X \rightarrow A$ definida por $g(x) = f(x)$ sabidamente uma bijeção, a enumerabilidade de X segue. ■

Corolário 3.27. *Seja $f: X \rightarrow Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável, então Y também o é.*

Demonstração: Com efeito, para cada $y \in Y$ podemos escolher um $x = g(y) \in X$ tal que $f(x) = y$. Isto define uma aplicação injetiva $g: Y \rightarrow X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Pelo Corolário 3.26, Y é enumerável. ■

Mostraremos mais alguns aspectos interessantes a respeito da enumerabilidade dos conjuntos. Para tanto, é necessário recordar conceitos importantes como a Definição 2.16 sobre produto cartesiano e a propriedade fundamental dos pares ordenados, na qual, dados $(a, b), (c, d) \in A \times B$ temos

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d.$$

Desse modo, valendo-se de tais conceitos, provaremos o seguinte:

Teorema 3.28. *O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração: Seja $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida por $f(a, b) = 2^a 3^b$. Pelo Corolário 3.26 é suficiente mostrar que f é injetiva. Para tanto, sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tais que $f(a, b) = f(c, d)$, isto é,

$$2^a 3^b = 2^c 3^d.$$

Uma vez que todo natural $n > 1$ pode ser escrito de maneira única como produto de fatores primos, implica que $a = c$ e $b = d$. Portanto, f é injetiva e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. ■

Corolário 3.29. *Se A e B são enumeráveis, $A \times B$ é enumerável.*

Demonstração: A enumerabilidade de A e B garantem a existência de funções injetivas $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ e $g: B \rightarrow \mathbb{N}$. Seja $h: A \times B \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definida por $h(a, b) = (f(a), g(b))$. Se $a, c \in A$ e $b, d \in B$ forem tais que $h(a, b) = h(c, d)$, então

$$(f(a), g(b)) = (f(c), g(d)).$$

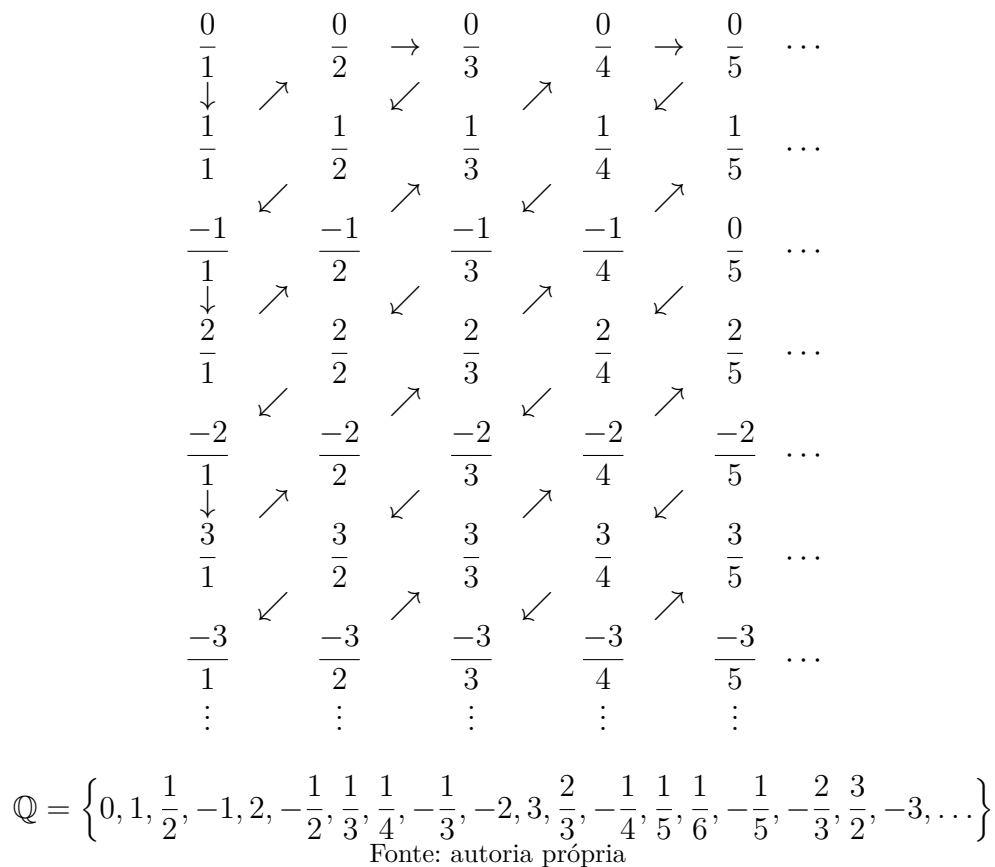
A propriedade fundamental dos pares ordenados garante que $f(a) = f(c)$ e $g(b) = g(d)$. Como f e g são injetivas, segue que $a = c$ e $b = d$. Logo, $(a, b) = (c, d)$ e h é injetiva. Portanto, como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável pelo Corolário 3.26 $A \times B$ também é enumerável. ■

Agora sim, dispomos das ferramentas necessárias para mostrar que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ também é enumerável.

Exemplo 3.30. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável. Seja $\mathbb{Z}^*$ o conjunto dos inteiros não-nulos. Assim, $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$ e, portanto, pela Proposição 3.25 $\mathbb{Z}^*$ é enumerável. Agora, seja $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, a função definida por $\varphi(\frac{p}{q}) = (p, q)$ com $\text{mdc}(p, q) = 1$ e $q > 0$. Segue do Corolário 3.29 que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. Como φ é claramente injetiva, segue do Corolário 3.26 que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Agora que demonstramos formalmente que é possível contar todos os racionais, uma forma de listar todos esses números sem que nenhum fique de fora é usando o processo de diagonalização, argumento criado por Cantor, que consiste em organizar listas infinitas e contar na diagonal. Construiremos uma lista na qual as linhas e colunas definem, respectivamente, o numerador e o denominador de cada fração. Posteriormente, para efeito de manutenção da bijeção, desconsideraremos as frações que não estão simplificadas visto que são redundantes. Assim, cada seta aponta para o número seguinte na contagem, como mostra a Figura 3.1.

Figura 3.1 – Diagonalização do conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais



Até agora, todos os conjuntos infinitos apresentados têm o mesmo tamanho que o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$. Isso nos leva a pensar que talvez todos os infinitos tenham o mesmo tamanho. Ou poderíamos ir contra essa premissa apresentando um “infinito maior” do que o de $\mathbb{N}$ e a ideia de juntar dois infinitos enumeráveis pudesse ser um caminho viável, visto que com conjuntos finitos a união destes aumenta o número de elementos. No teorema seguinte, veremos que os conjuntos infinitos enumeráveis não seguem essa lógica.

Teorema 3.31. *Se A e B são conjuntos enumeráveis, então $A \cup B$ também o é.*

Demonstração: Se A e B forem finitos, não há o que fazer. Para tratar o caso complementar (em que pelo menos um dos conjuntos é infinito) é suficiente considerar o caso em

que A e B são infinitos. Para tanto, consideraremos duas situações:

Caso 1. $A \cap B = \emptyset$: O fato de A ser enumerável garante que $A \sim \mathbb{N}$. Por outro lado, se $2\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais pares, sabemos que $2\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. A transitividade de $\sim$ assegura que $A \sim 2\mathbb{N}$. De maneira análoga, temos que $B \sim 2\mathbb{N} + 1$, onde $2\mathbb{N} + 1$ é o conjunto dos números naturais ímpares. Sejam $f: A \rightarrow 2\mathbb{N}$ e $g: B \rightarrow 2\mathbb{N} + 1$ duas bijeções. A função $h: A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$, definida por $h(x) = f(x)$ se $x \in A$ e $h(x) = g(x)$ se $x \in B$ está bem definida e é uma bijeção, o que implica que significa dizer que $A \cup B \sim \mathbb{N}$.

Caso 2. $A \cap B \neq \emptyset$: Neste caso, considerando $C = B - A$, observamos que $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap C = \emptyset$. Como $C \subset B$, segue que C é enumerável. Desse modo, recaímos no caso anterior. ■

Corolário 3.32. *Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ conjuntos enumeráveis. Então $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável.*

Demonstração: Como X_n é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos considerar uma função sobrejetora $f_n: \mathbb{N} \rightarrow X_n$. Denotando $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, definimos a função sobrejetora $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X$ pondo $f(m, n) = f_n(m)$. O caso de uma reunião finita $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ reduz-se ao anterior porque então $X = X_1 \cup \dots \cup X_n \cup X_n \cup \dots$. ■

Vejamos mais alguns exemplos de conjuntos que são enumeráveis:

Exemplo 3.33. O conjunto P de todos os polinômios

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

com coeficientes inteiros é enumerável. De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$, seja

$$X_n = \{Q \in \mathbb{Z}[x] : \text{grau}(Q) = n\}.$$

Consideremos a função $f: \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow X_n$ dada por

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

É evidente que f é uma função sobrejetiva. Como $\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável, segue do Corolário 3.27 que X_n é enumerável. Denotando por 0 o polinômio identicamente nulo e observando que

$$P = \{0\} \cup X_1 \cup X_2 \cup \dots,$$

segue do Corolário 3.32 que P é enumerável.

Definição 3.34. *Dizemos que $\alpha \in \mathbb{R}$ é um número algébrico se α é raiz de algum polinômio em $\mathbb{Z}[x]$. O conjunto dos números algébricos será denotado por $\bar{\mathbb{Q}}$.*

Exemplo 3.35. Vejamos que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Seja $\{p_1(x), \dots, p_n(x), \dots\}$ uma enumeração de $\mathbb{Z}[x]$. Para cada n natural, seja R_{p_n} o conjunto das raízes reais de p_n . O Teorema Fundamental da álgebra garante que R_{p_n} tem, no máximo, $\text{grau}(p_n)$ elementos e, portanto, é um conjunto enumerável. Agora, basta observar que

$$\bar{\mathbb{Q}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{p_n}$$

e fazer uso do Corolário 3.32.

Teorema 3.36. *Todo conjunto infinito contém um conjunto infinito enumerável.*

Demonstração: Se X é um conjunto infinito, segue do Teorema 3.16 que existe uma função injetiva $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. Logo, f define uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $Y = f(\mathbb{N})$. O conjunto Y é o subconjunto infinito enumerável desejado. ■

3.2.4 Conjuntos Não Enumeráveis

Agora podemos nos perguntar se todos os infinitos têm a mesma cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$. Mas Cantor por meio da restrição de um pequeno intervalo dos reais $\mathbb{R}$ mostrou que não é possível emparelhar todos os infinitos com o conjunto dos naturais, descobrindo assim que realmente há infinitos maiores que outros e a cardinalidade dos naturais seria a primeira ordem dos infinitos. E a esses conjuntos que não podem ser enumerados chamaremos de não enumeráveis, ou seja, aqueles que em hipótese alguma podemos listar todos os elementos. Sendo assim, veremos que a não enumerabilidade do conjunto $\mathbb{R}$ deve-se ao conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais, os mesmos que os pitagóricos ousaram esconder.

Definição 3.37. *Um conjunto infinito A é não enumerável se A não for enumerável, isto é, se não existir uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow A$.*

Exemplo 3.38. Vejamos que o intervalo aberto $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto não enumerável. Para fins de contradição, suponhamos que $(0, 1)$ seja enumerável. Desta forma, existe $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$ e assim podemos listar todos os elementos de $(0, 1)$ de modo que $\varphi(i) = x_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, como o esquema abaixo:

$$\begin{array}{l} x_1 = 0, x_{11}x_{12}x_{13}\dots \\ x_2 = 0, x_{21}x_{22}x_{23}\dots \\ x_3 = 0, x_{31}x_{32}x_{33}\dots \\ \vdots \\ x_j = 0, x_{j1}x_{j2}x_{j3}\dots \\ \vdots \end{array}$$

Agora, vamos mostrar um número que não está na lista acima, desse modo consideremos um número $k \in (0,1)$ com $k = 0, k_1 k_2 k_3 \dots$, onde $k_1 \neq x_{11}, k_2 \neq x_{22}, \dots, k_j \neq x_{jj}, \dots \forall j \in \mathbb{N}$. Claramente $k \in (0,1)$, porém $k \neq x_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$ e portanto, existe um número no intervalo $(0,1)$ que não está listado por φ , uma contradição. Logo, $(0,1)$ é não enumerável.

A brilhante ideia de Cantor de provar somente que o intervalo $(0,1)$ não é enumerável permitiu-lhe que pudesse concluir que o conjunto $\mathbb{R}$ também o é.

Exemplo 3.39. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não enumerável. Para fins de contradição, suponhamos que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ seja enumerável. Então, pela Proposição 3.25 todo $X \subset \mathbb{R}$ é enumerável. Uma contradição, pois pelo exemplo anterior, $\mathbb{R}$ possui conjunto não enumerável. Portanto, $\mathbb{R}$ é não enumerável.

De fato deveria ser intuitivo que é impossível listar o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Apesar dos racionais e os algébricos irracionais serem enumeráveis, a não enumerabilidade do contínuo deve-se a infinidade dos irracionais transcendentos (números irracionais que não são raízes de polinômios em $\mathbb{Z}[x]$) a exemplo do π e do e . Desse modo, Cantor não só mostrou que existem infinitos maiores que outros, como foi além e mostrou que existe um número infinito de infinitos maiores que outros. Este fato ficou conhecido como Teorema de Cantor.

Teorema 3.40. (Teorema de Cantor) *Dado qualquer conjunto não-vazio A , o conjunto $\wp(A)$ de suas partes tem cardinalidade maior, isto é,*

$$\text{card}(A) < \text{card}(\wp(A)).$$

Demonstração: Notemos que a $\text{card}(A)$ não pode ser maior que $\text{card}(\wp(A))$, visto que existe uma função injetiva de A em $\wp(A)$, a saber, a função $f: A \rightarrow \wp(A)$ definida por $f(a) = \{a\}$. Isto mostra que $\text{card}(A) \leq \text{card}(\wp(A))$. Seja $\varphi: A \rightarrow \wp(A)$ uma função injetiva. Para fins de contradição, suponhamos que φ seja sobrejetiva. Consideremos, pois, o conjunto $B = \{a \in A : a \notin \varphi(a)\}$. Como $B \in \wp(A)$, sendo φ bijetiva, deve existir $x \in A$ tal que $\varphi(x) = B$. Assim,

- Se $x \in B$, então $x \notin \varphi(x)$, ou seja, $x \notin B$, uma contradição.
- Se $x \notin B$, então $x \in \varphi(x)$, ou seja, $x \in B$, uma contradição.

Logo, φ não é uma função sobrejetiva. a arbitrariedade da função φ garante então que $\text{card}(A) < \text{card}(\wp(A))$. ■

4 Noções de Aritmética Cardinal.

George Cantor estava confortável com a ideia de que havia diferentes infinitos e, além disso, que uns eram maiores que outros. Mas Cantor não se acomodou e foi adiante. Procurou nomear a cardinalidade dos infinitos com exceção do “Absoluto”, que acreditava ser impossível de descrever. Além disso, desenvolveu uma aritmética com os cardinais transfinitos, conhecida como Aritmética Cardinal. Para referenciar este capítulo, foram utilizados Halmos (2001), Dias e Godoy (2012), Lipschutz (1967) e Leão (2017).

4.1 Números Cardinais

Um número cardinal de um conjunto finito é um **número cardinal finito** e de um conjunto infinito é um **número cardinal transfinito**. Os cardinais finitos são precisamente os números naturais que representam a quantidade de elementos dos conjuntos finitos, para os quais temos uma relação de ordem estabelecida e familiar, ou seja, $0 < 1 < 2 < \dots < k < k + 1 < \dots$.

Já para representar a quantidade de elementos de conjuntos infinitos, temos os cardinais transfinitos. Desse modo, o primeiro dos números transfinitos é o que representa a cardinalidade dos naturais e de todos aqueles conjuntos infinitos que são enumeráveis. Denotamos $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ (aleph zero) e $\text{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Possuímos infinitos números transfinitos, isto ocorre em decorrência do Teorema 3.40 visto que, para cada conjunto que tomarmos, o seu conjunto das partes será sempre maior e, além disso, podemos nomeá-los como quisermos ou simplesmente usar a mesma notação utilizada por Cantor, o Aleph acompanhado de algum índice, ou seja, teríamos a seguinte configuração:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_3, \aleph_4, \aleph_5, \dots$$

assim, uma vez definida a nomeação e a ordem, não podemos afirmar quem seja cada aleph depois do $\aleph_0$, o próximo passo é definir uma forma de compará-los.

Definição 4.1. *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que $A \preceq B$ ou que $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ se existir uma função injetora $f: A \rightarrow B$. Do mesmo modo, $A \prec B$ ou que $\text{card}(A) < \text{card}(B)$ se existir uma função injetora $f: A \rightarrow B$ e $A \not\approx B$.*

Exemplo 4.2. $\text{card}(\mathbb{N}) < \text{card}(\mathbb{R})$.

Consideramos a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$. De fato, f é injetiva e, do Exemplo 3.39, o conjunto dos números reais é não enumerável, logo $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ não são equipotentes, portanto $\text{card}(\mathbb{N}) < \mathbb{R}$.

Proposição 4.3. $\preceq$ define uma relação de ordem no conjunto dos números cardinais.

Demonstração: É necessário provar que a relação $\preceq$ é reflexiva, transitiva e antissimétrica. Seja X um conjunto, consideramos a função identidade $I_x: X \rightarrow X$, claramente I_x é injetora, portanto $X \preceq X$ e vale a reflexividade. Se $X \preceq Y$, ou seja, existe uma função injetora $f: X \rightarrow Y$ e se $Y \preceq Z$, do mesmo modo, existe uma função injetora $g: Y \rightarrow Z$, consideramos $g \circ f$, temos que a composta de funções injetivas é injetiva, logo $X \preceq Z$, e vale a transitividade. A antissimetria segue do Teorema 4.4. ■

Para a propriedade da antissimetria, temos uma questão importante. Pois, se as hipóteses são satisfeitas, temos uma relação de equivalência, e conjuntos equivalentes não necessitam ser iguais. Desse modo, esse resultado segue do seguinte e importante teorema.

Teorema 4.4. (Cantor – Schröder – Bernstein) Se $X \preceq Y$ e $Y \preceq X$, então $X \sim Y$.

Demonstração: Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$, funções injetivas. Notemos que $f': A \rightarrow f(A)$ onde $f'(x) = f(x)$ é uma bijeção entre A e $f(A) \subset B$. Logo, $f' \circ g: B \rightarrow f(A)$ é uma função injetiva. Como $f(A) \subset B$, segue que $\text{card}(f(A)) = \text{card}(B)$. Desse modo, existe uma função bijetiva $h: f(A) \rightarrow B$. Notemos que $h \circ f': A \rightarrow B$ é uma composição de duas funções bijetivas e, portanto, é bijetiva. Logo, por definição $A \sim B$. ■

Com isso, temos que o conjunto dos números cardinais é bem ordenado. Além disso, já sabemos que $\aleph_0$ (ordem dos naturais) é menor que $\mathfrak{c}$ (ordem do *continuum*), no entanto, abrimos espaço para uma conjectura importante: “O cardinal $\mathfrak{c}$ seria o sucessor do $\aleph_0$, ou seja, $\mathfrak{c} = \aleph_1$? Ou existe um cardinal tal que $\aleph_0 < \beta < \mathfrak{c}$? Existiria algum número transfinito entre o $\aleph_0$ ”. Essa indagação é conhecida como hipótese do *continuum*. Segundo Lipschutz (1967), em 1963, Paul J. Cohen da Universidade de Stanford, demonstrou que a hipótese do *continuum* pode ser tomada como verdadeira ou falsa, independentemente dos axiomas da Teoria dos Conjuntos.

4.2 Aritmética Cardinal

Vamos definir as operações entre números cardinais de maneira não-ambígua, de modo que a escolha independa dos conjuntos A e B .

4.2.1 Adição de Cardinais

Definição 4.5. Sejam a e b números cardinais, e se $A \cap B = \emptyset$ com $\text{card}(A) = a$ e $\text{card}(B) = b$, definimos a **adição** sendo $a + b = \text{card}(A \cup B)$.

Vejamos que, apesar da possibilidade de escolhermos outros conjuntos com a mesma cardinalidade, a operação está bem definida, ou seja, ao tomarmos os conjuntos C e D com $\text{card}(C) = a$ e $\text{card}(D) = b$, então $A \sim C$ e $B \sim D$, segue que $A \cup B \sim C \cup D$ e, portanto, $a + b$ está bem definido.

Como consequência das características das reuniões de conjuntos, a adição de cardinais apresenta algumas propriedades:

Proposição 4.6. *Sejam a, b, c e d números cardinais. Então*

- (i) **(Comutatividade)** $a + b = b + a$.
- (ii) **(Associatividade)** $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- (iii) **(Monotonicidade)** *Se $a \leq b$ e $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$.*
- (iv) **(Relação de ordem)** *Se $a \geq b$, então existe um c tal que $a = b + c$.*

Demonstração: (i) Existem conjuntos A e B tal que $\text{card}(A) = a$ e $\text{card}(B) = b$. Temos que $\text{card}(A \cup B) = a + b$. Pela teoria de conjuntos sabemos que $A \cup B = B \cup A$. Portanto, $a + b = b + a$.

(ii) Sejam A, B e C conjuntos tais que $\text{card}(A) = a$, $\text{card}(B) = b$ e $\text{card}(C) = c$. Temos que $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Desse modo, por definição $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(iii) Sejam A, B, C e D conjuntos com $\text{card}(A) = a, \text{card}(B) = b, \text{card}(C) = c$ e $\text{card}(D) = d$. Assumamos que $B \cap D = \emptyset$ e, além disso, $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$. Assim, $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$, o que permite afirmar que o conjunto A possui a mesma cardinalidade de algum subconjunto de B , podendo substituir A por esse subconjunto. O mesmo se aplica para o conjunto C . Se $A \cap C = \emptyset$ e $B \cap D = \emptyset$ temos que $\text{card}(A \cap C) = a + c$ e $\text{card}(B \cap D) = b + d$ e se $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$, onde $A \cup B \subseteq B \cup D$, temos que $a + c \leq b + d$.

(iv) Sejam A e B conjuntos tais que $\text{card}(A) = a$ e $\text{card}(B) = b$. Como $a \geq b$, temos que $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$. Consideramos um conjunto X , $X \subseteq A$ tal que $\text{card}(B) = \text{card}(X) = b$. Tomemos um conjunto C tal que $C = A - X$. Logo temos que $A = X \cup C$ e $X \cap C = \emptyset$, onde $\text{card}(A) = \text{card}(X) + \text{card}(C)$. Fazendo $\text{card}(C) = c$, temos $a = b + c$. ■

A adição cardinal também está bem definida para uma infinidade de parcelas:

Definição 4.7. *Se $\{a_i\}$ é uma família de números cardinais, e se $\{A_i\}$ é uma família correspondentemente indexada de conjuntos dois a dois disjuntos tais que $\text{card}(A_i) = a_i$, para cada i , então escrevemos, por definição*

$$\sum_i a_i = \text{card}\left(\bigcup_i A_i\right).$$

4.2.2 Multiplicação de Cardinais

Definição 4.8. *Seja a e b números cardinais tais que encontramos conjuntos A e B com $\text{card}(A) = a$ e $\text{card}(B) = b$, definimos o **produto** sendo $ab = \text{card}(A \times B)$*

Analogamente à adição, o produto também está bem definido, ou seja, é único. Visto que, se tomarmos C e D com $\text{card}(C) = a$ e $\text{card}(B) = b$, então $A \sim C$ e $B \sim D$, resulta que $A \times B \sim C \times D$. É importante destacar que, quando mencionamos $A \times B \sim B \times A$, estamos afirmando que o produto cartesiano dos conjuntos possui a mesma quantidade de elementos e não que os elementos são iguais.

Proposição 4.9. *Sejam a, b, c e d números cardinais. Então:*

- (i) **(Comutatividade)** $ab = ba$.
- (ii) **(Associatividade)** $(ab)c = a(bc)$.
- (iii) **(Monotonicidade)** *Se $a \leq b$ e $c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$.*
- (iv) **(Distributividade da multiplicação em relação à soma)** $a(b + c) = ab + ac$.

Demonstração: (i) Sejam A e B tais que $\text{card}(A) = a$ e $\text{card}(B) = b$. Sabemos que $A \times B \sim B \times A$, então por definição $ab = ba$.

(ii) Tomamos A, B e C conjuntos com cardinalidade a, b e c , respectivamente. Notemos que $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$, logo $(ab)c = a(bc)$.

(iii) Sejam A, B, C e D , conjuntos com $\text{card}(A) = a, \text{card}(B) = b, \text{card}(C) = c$ e $\text{card}(D) = d$. Assumamos $B \cap D = \emptyset$. Além disso, $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$. Temos que $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$, o que permite afirmar que o conjunto A possui a mesma cardinalidade de algum subconjunto $X \subseteq B$. Podemos substituir A por X , desde que $\text{card}(A) = \text{card}(X) = a$. O mesmo se aplica a C . Se $A \cap C = \emptyset$ e $B \cap D = \emptyset$, temos que $\text{card}(A \times C) = ac$ e $\text{card}(B \times D) = bd$ e se $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$, onde $A \times C \subseteq B \times D$ temos $ac \leq bd$.

(iv) Sejam A, B e C com cardinalidade a, b e c , respectivamente. Como $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C = a \cdot b + a \cdot c$. ■

A multiplicação de cardinais também pode ser expressa para infinitos fatores sem gerar ambiguidade.

Definição 4.10. *Se $\{a_i\}$ é uma família de números cardinais e, se $\{A_i\}$ é a correspondente família indexada de conjuntos tais que $\text{card}(A_i) = a_i$ para cada i , então escrevemos, por definição,*

$$\prod_{i=1} a_i = \text{card}(X_i A_i)$$

4.2.3 Exponenciação de Cardinais

Da mesma forma que podemos passar da adição para o produto, também podemos passar para a exponenciação.

Definição 4.11. *Dado dois conjuntos A e B tais que $\text{card}(A) = a$ e $\text{card}(B) = b$ definimos a **exponenciação** sendo $a^b = \text{card}(A^B)$, em outras palavras a^b é o conjunto formado por todas as funções $f: B \rightarrow A$.*

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos que cada elemento de A tem a maneiras de escolher e esta escolha pode acontecer b vezes. Assim, $a^b = a \cdot a \dots a$ (b fatores).

Proposição 4.12. *Se a, b, c e d são números cardinais, então:*

- (i) $a^b a^c = a^{b+c}$
- (ii) $a^c b^c = (ab)^c$
- (iii) $(a^b)^c = a^{bc}$
- (iv) Se $a \leq b$ e $c \leq d$ então $a^c \leq b^d$

Demonstração: (i) Sejam A, B e C conjuntos com $\text{card}(A) = a$, $\text{card}(B) = b$ e $\text{card}(C) = c$ e $B \cap C = \emptyset$. Por definição $\text{card}(B \cup C) = b + c$. É suficiente mostrar que os conjuntos $A^B \times A^C$ e $A^{B \cup C}$ são equipotentes. Com essa finalidade, associaremos cada par (f, g) de funções $f \in A^B$ e $g \in A^C$ à função $f \cup g \in A^{B \cup C}$ de modo que $f \cup g: B \cup C \rightarrow A$ é definida por $f \cup g(x) = f(x)$ se $x \in B$ e $f \cup g(x) = g(x)$ se $x \in C$. Esta associação estabelece uma equipotência entre os conjuntos $A^B \times A^C$ e $A^{B \cup C}$. Isto posto, $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

(ii) Sejam A, B e C com cardinalidade a, b e c , respectivamente. A proposição estará provada se estabelecermos que $(A^B)^C \sim A^{B \times C}$. Tomaremos uma função $f: B \times C \rightarrow A$ e um elemento $a \in C$, existe uma $f^a: B \rightarrow A$ definida por $f^a(b) = f(b, a)$ para todo $b \in B$. A função $g: A^{B \times C} \rightarrow (A^B)^C$, que associa a cada $f \in A^{B \times C}$ a função $h \in (A^B)^C$, dada por $h(a) = f^a$ para todo $a \in C$ é uma bijeção.

(iii) Tomaremos A, B e C conjuntos com cardinalidade a, b e c nessa ordem. A função $f: (A^C \times B^C) \rightarrow (A \times B)^C$, que associa cada função $f: C \rightarrow A \times B$ com função $(f_A \circ f, f_B \circ f)$ em $A^C \times B^C$. Sendo assim, $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$.

(iv) Seja a, b, c e d números cardinais dos conjuntos A, B, C e D , nessa ordem. Como $a \leq b$ e $c \leq d$, podemos assumir que $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$. Por definição, temos $\text{card}(A^C) = a^c$ e $\text{card}(B^D) = b^d$. Como $A \subseteq B$ podemos afirmar que $\text{card}(A^C) \subseteq \text{card}(B^D)$, o que nos dá $a^c \leq b^d$. Se $c = d$, é evidente que $a^c \leq b^d$. Se $c \neq d$ como $a \leq b$ e $c \leq d$, existe

um p tal que $d = c + p$, onde podemos escrever $b^d = b^c + b^p$. Portanto, $a \leq b$ e $c \leq d \Rightarrow a^c \leq b^d$. ■

As operações anteriormente definidas com suas respectivas propriedades, quando utilizadas com os números cardinais de conjuntos finitos, não há nada de novo, pois resulta na aritmética já conhecida. A surpresa está quando tratamos de cardinais transfinitos.

Proposição 4.13. *Se a e b são números cardinais tais que a é finito e b é um número cardinal transfinito, então:*

$$a + b = b$$

Demonstração: Uma vez que a é finito, temos $a < b$. Portanto, existe um cardinal c tal que $b = a + c$. Logo, $c = b$ ou c é um cardinal finito. Se c é um cardinal finito, então $a + c$ é finito, o que contradiz que b é um cardinal transfinito. Portanto, $c = b$ e temos que $a + b = b$. ■

Exemplo 4.14. *Quando adicionamos qualquer conjunto com cardinalidade finita ao conjunto dos números naturais, que possui cardinalidade $\aleph_0$, obtemos o próprio $\aleph_0$.*

Proposição 4.15. *Se a é um número cardinal transfinito, então $a + a = a$.*

Observação 4.16. A demonstração desta proposição exige ferramentas que não foram tratadas neste trabalho, desse modo vamos ilustrá-la com um exemplo que podemos provar com o que estudamos.

Exemplo 4.17. *A soma do cardinal $\aleph_0$ com ele mesmo tem como resultado o próprio cardinal transfinito, ou seja, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.*

Demonstração: Sejam $\aleph_p$ a cardinalidade dos números pares e $\aleph_i$ a cardinalidade dos números ímpares, conjuntos enumeráveis, disjuntos e $\mathbb{N} = \mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_i$. Notemos que $\aleph_0 + \aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N}_p) + \text{card}(\mathbb{N}_i) = \text{card}(\mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_i) = \text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. ■

Proposição 4.18. *Se a e b são números cardinais e pelo menos um deles é transfinito, então $a + b = \max\{a, b\}$.*

Proposição 4.19. *Se a é um número cardinal transfinito, então $a \cdot a = a$.*

Observação 4.20. A demonstração desta proposição exige ferramentas que não foram tratadas neste texto. Desse modo, vamos assumi-lá como verdadeira e ilustra-lá com o exemplo seguinte.

Exemplo 4.21. *O produto de $\aleph_0$ por ele mesmo é o próprio $\aleph_0$, ou seja, $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.*

Demonstração: Sabemos que o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, assim $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Desse modo, por definição do produto, temos $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \aleph_0$. ■

Até o momento, vimos que ao adicionar e multiplicar cardinais de conjuntos infinitos por cardinais finitos ou infinitos não é possível passar para um próximo número transfinito realizando tais operações. Mas, Cantor mostrou que a potenciação muda a cardinalidade de um conjunto. Desse modo, veremos que a cardinalidade do conjunto dos reais $\mathbb{R}$ é igual à cardinalidade do conjunto das partes dos naturais $\mathbb{N}$.

Proposição 4.22. *Seja 2 um cardinal finito e $\aleph_0$ o cardinal do conjunto dos naturais $\mathbb{N}$, então $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.*

Demonstração: Usando o Teorema de Cantor-Schroder-Bernstein, é suficiente mostrar que $2^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}$ e $2^{\aleph_0} \geq \mathfrak{c}$.

Note que $\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{Q})$, o que implica que $2^{\aleph_0} = \text{card}(\wp(\mathbb{Q}))$. Considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \wp(\mathbb{Q})$, definida por $f(a) = \{x \in \mathbb{Q}; x < a\} \in \wp(\mathbb{Q})$, para cada $a \in \mathbb{R}$. Se a e b são números reais distintos, então, sem perda de generalidade, podemos supor que $a < b$. Logo, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$, o que implica que $r \in f(b)$ e $r \notin f(a)$, o que mostra que $f(a) \neq f(b)$. Consequentemente, f é uma função injetora. Portanto, $\aleph_1 = \text{card}(\mathbb{R}) \leq \text{card}(\wp(\mathbb{Q})) = 2^{\aleph_0}$.

Por outro lado, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são, respectivamente, a coleção dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ e a coleção dos subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$, é fácil ver que $\mathbb{N} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ e que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Consideremos a função $g: \wp(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$g(X) = \begin{cases} 0, & \text{se } X = \emptyset, \\ \sum_{n \in X} \frac{1}{2^n}, & \text{se } X \in \mathcal{A} - \{\emptyset\}, \\ 1 + \sum_{n \in X} \frac{1}{2^n}, & \text{se } X \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

A unicidade da representação finita de um número real em base 2 garante que, se $X, Y \in \mathcal{A}$ então $g(X) = g(Y) \Leftrightarrow X = Y$. O mesmo argumento garante que, se $X, Y \in \mathcal{B}$ então $g(X) = g(Y) \Leftrightarrow X = Y$. Finalmente, se $X \in \mathcal{A}$ e $Y \in \mathcal{B}$, então $0 \leq g(X) < 1$ e $1 < g(Y) \leq 2$, ou seja, $g(X) \neq g(Y)$. Logo, g é injetiva e isto nos fornece a desigualdade oposta. ■

5 Considerações finais

Durante séculos, o conceito do infinito passou despercebido ou até fora evitado. Todavia, quando ousavam ir além das portas do pomar secreto, era quase certo que o infinito os surpreenderia. Neste trabalho, foi nos dada a oportunidade de explorarmos este pomar e perceber que o infinito é um conceito intimidador e capaz de pregar peças na intuição humana, o que leva a vermos e não acreditarmos.

Ao decorrer da construção deste estudo, foi possível trazer aquilo que já é conhecido a respeito das características do infinito, ou seja, mostramos que em termos de tamanho o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e os subconjuntos dos naturais $\mathbb{N}$ são iguais ao conjunto dos naturais $\mathbb{N}$, algo surpreendente visto que intuitivamente os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ parece que tem mais elementos e os subconjuntos parecem ter menos que os naturais. De mesmo modo, mostramos que realmente existem infinitos maiores que outros, ou seja, apesar de serem conjuntos que sempre poderemos encontrar mais um elemento vimos que o infinito de um conjunto pode ser maior sem que o outro conjunto deixe de ser infinito, como o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ e o conjunto das partes $\wp$ de qualquer conjunto infinito.

Por fim, vimos cada cardinal infinito ser nomeado de Alephs acompanhado de algum índice e o conjunto deles formarem os números transfinitos e a sua aritmética com suas operações bem definidas. Ademais, como o infinito é um território vasto ainda há espaço para a hipótese do *continuum*, que podemos admitir ser verdadeira ou falsa.

Por fim, ressaltamos a importância da exposição destes elementos para o conhecimento da natureza desconcertante do infinito e também para o incentivo de novas pesquisas.

Bibliografia

- ACZEL, Amir D. **O mistério do Alef: a matemática, a cabala e a procura pelo infinito. Tradução: Ricardo Gouveia.** [S.l.]: São Paulo: Globo, 2003. Citado nas pp. 10, 12, 14, 17, 20, 22, 23.
- BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. **História da matemática. Tradução: Helena Castro.** [S.l.]: 3 ed. São Paulo, Editora Blucher, 2012. Citado nas pp. 13, 14.
- DIAS, Ires; GODOY, Sandra Maria Semensato de. **Elementos de Matemática: Notas de Aulas.** [S.l.]: São Carlos, 2012. Disponível em:
<<https://web.icmc.usp.br/SMA/Portal%20SMA/Material%20Didatico/SMA0341%20-%20SLC%200603.pdf>>. Citado na p. 47.
- EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática. Tradução: Hygino H. Domingues.** [S.l.]: 5 ed. Campinas, Unicamp, 2011. Citado na p. 15.
- HALMOS, Paul Richard. **Teoria ingênua dos conjuntos. Tradução: Lázaro Coutinho.** [S.l.]: Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2001. Citado nas pp. 24, 34, 47.
- LEÃO, Alessandro Mignac Carneiro. Números Transfinitos e Aritmética Cardinal. **Revista Seminário de Visu**, v. 5, 2, p. 114-122, 2017. Disponível em:
<<https://semiaridodevisu.ifsertao-pe.edu.br/index.php/rsdv/article/download/133/90/841>>. Citado na p. 47.
- LIMA, Elon Lages. **Análise Real.** [S.l.]: 6 ed. Rio de Janeiro, IMPA, 1989. Citado nas pp. 24, 34.
- LIPSCHUTZ, Seymour. **Teoria dos Conjuntos. Tradução: Fernando Vilain.** [S.l.]: McGraw-Hill, 1967. Citado nas pp. 24, 47, 48.
- OBMEP. **Portal da OBMEP.** [S.l.: s.n.], 2024. Disponível em:
<:[%20portaldaobmep.impa.br](https://portaldaobmep.impa.br)>. Citado na p. 34.