



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Antonio Jorge de Freitas Ramos

Frações Contínuas: Uma Introdução

São Luis - MA

2023

Antonio Jorge de Freitas Ramos

Frações Contínuas: Uma Introdução

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenação dos Cursos de Matemática, da
Universidade Federal do Maranhão, comorequisito parcial
para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura Plena
Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Me. José Mairton Barros da Silva

São Luis - MA

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

RAMOS, Antonio Jorge de Freitas.

FRAÇÕES CONTÍNUAS: UMA INTRODUÇÃO / Antonio Jorge de
Freitas RAMOS. - 2023.
85 p.

Orientador (a): José Mirton Barros da Silva. Monografia
(Graduação) - Curso de Matemática,
Universidade Federal do Maranhão, São Luis-MA, 2023.

1. Aproximações Diofantinas. 2. Convergentes. 3.
Equações de Pell. 4. Frações Contínuas. 5. Teoria dos
números. I. Silva, José Mirton Barros da. II. Título.

Antonio Jorge de Freitas Ramos

Frações Contínuas: Uma Introdução

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenação dos Cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Maranhão,
comorequisito parcial para obtenção do grau de
Licenciado em Matemática

Trabalho **APROVADO**. São Luis-MA, em 22/12/2023

Prof. Me. José Mairton Barros da Silva

Prof.^a Me. Sonia Rocha Santos Sousa

Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo

A minha esposa Edilene e filhas: Amanda, Larissa e Alana,
pelo apoio e incentivo que a mim sempre foi confiado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram para a concretização de mais uma etapa na busca de fonte inesgotável da vida que é o conhecimento.

A minha esposa Edilene pela paciência, apoio e incentivo.

As filhas Amanda, Larissa e Alana por me ensinarem que conhecimento sempre é motivador e que devemos estar abertos a novas aventuras.

A minha neta Alice como incentivo.

Aos meus pais e irmãos por acreditarem em mim.

Ao professor José Mairton pela orientação e disponibilidade irrestrita ao seu acervo.

Aos professores do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, que direta ou indiretamente contribuíram para elaboração desta monografia.

“O homem erudito é um descobridor de fatos que já existam – mas o homem sábio é um criador de valores que não existem e que ele faz existir.”

Albert Einstein

RESUMO

Este estudo aborda as frações contínuas simples, revisando o contexto histórico, a contribuição de diversos matemáticos, retoma conceitos básicos dos conjuntos numéricos, a relação com o algoritmo de Euclides, a interpretação geométrica e a expansão por fração contínua dos racionais e irracionais. A partir desses conhecimentos básicos são demonstradas propriedades dos convergentes e seus aspectos de obtenção de sequências de aproximações dos números racionais para números irracionais. Pretende-se, assim, melhor compreender a construção dos números reais e apresentar um pouco de aplicações como as Equações Diofantinas e Equação de Pell.

Palavras-chaves: Teoria dos Números, Frações Contínuas, Convergentes, Aproximações Diofantinas.

ABSTRACT

This study explores simple continued fractions, going over the historical context, the contribution of many mathematicians, recovers basic concepts of numerical sets, the relation with Euclidean algorithm, geometrical interpretation, and rational and irrational numbers expansion by continued fraction. From this basic knowledge, the properties of converging numbers are demonstrated as well as aspects for obtaining approximation sequences from rational numbers to irrational numbers. This way, it is intended to better understand the real numbers construction and show some applications, as Diophantine Equations and Pell's Equation.

Keywords: Number theory, Continued Fractions, Convergent number, Diophantine approximation

Sumário

	INTRODUÇÃO	9
1	CONTEXTO HISTÓRICO	11
2	CONJUNTOS NUMÉRICOS	16
2.1	Conjunto dos números Naturais	16
2.1.1	Axiomas de peano	17
2.2	Conjunto dos números Inteiros	18
2.3	Conjunto dos números Racionais	20
2.4	Conjunto dos números Irracionais	21
2.5	Conjunto dos números Reais	23
2.5.1	Números Algébricos	24
2.5.2	Números Transcendentes	25
3	ALGORITMO DE EUCLIDES	26
3.1	Algoritmo da divisão	26
3.2	Algoritmo de Euclides	27
4	FRAÇÕES CONTÍNUAS	30
4.1	Nota histórica	30
4.2	Definição - notação	31
4.3	Frações contínuas e o algoritmo de Euclides	36
4.4	Interpretação geométrica das frações contínuas	38
4.4.1	Número racional	38
4.4.2	Número irracional	41
5	FRAÇÕES CONTÍNUAS- representações e convergentes	44
5.1	Representação por fração continua de número racional	44
5.2	Representação por fração continua de número irracional	46
5.2.1	Frações periódicas	50
5.3	Convergentes e suas propriedades	50
6	ALICAÇÕES DE FRAÇÕES CONTÍNUAS	71
6.1	Introdução	71
6.2	Equações Diofantinas lineares com duas incógnitas	72
6.3	Equação de Pell	79
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	83
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	85

Introdução

A matemática quase sempre nos parece uma coleção de áreas isoladas, cada uma com suas peculiaridades: álgebra, análise, geometria, trigonometria, combinatória, probabilidade. E tende a ser ensinada dessa forma, unicamente com o objetivo de situar cada tópico separadamente em uma área específica bem definida, de forma a ajudar o aluno a organizar o material individualmente. Essa é, portanto, uma primeira aproximação razoável para a estruturação da matemática, sobretudo aquela que foi estabelecida há muito tempo.

As Frações Contínuas estão inserida numa grande área da matemática, a teoria dos números, que estuda as propriedades dos números inteiros, e pode até parecer elementar, mas na verdade é uma das áreas mais difíceis da matemática, que está em constante mudança e trazendo questões que nos fazem refletir como esses conhecimentos podem ser inseridos no contexto educacional, inclusive.

Nosso objetivo, nesta monografia, é apresentar conhecimentos introdutórios sobre frações contínuas, mas especificamente, contextualizar os fatos históricos, em cujas bases teóricas esses estudos foram construídos a partir das primeiras décadas do século XVII e contou com a contribuição de diversos matemáticos, dentre alguns, John Wallis (1616 - 1703) que foi o primeiro a utilizar o termo frações contínuas em seu livro "*Opera Mathematica*", de 1695. Retomar alguns conceitos básicos dos conjuntos numéricos e mostrar o algoritmo de Euclides como ferramenta para o cálculo do máximo divisor comum, mdc. A partir desses conhecimentos, utilizar a teoria das frações contínuas simples na obtenção de boas aproximações dos números racionais para os números irracionais. E por fim, mostrar aplicações de aproximações diofantinas e a equação de Pell.

A teoria das frações contínuas simples, quando aplicada a números racionais, fornece expansões finitas em decorrência da sua relação com o algoritmo de Euclides. Desse tipo de expansão, por exemplo, vem as informações necessárias para definirmos frações contínuas e deduzirmos um método para solucionar equações diofantinas lineares com duas incógnitas.

No item cinco, apresentamos representações por frações contínuas dos números racionais e irracionais e, assim como algumas propriedades fundamentais

dos convergentes que nos permitem quantificar o erro e comprovar que as melhores aproximações racionais para números irracionais vêm das frações contínuas simples.

Este estudo está fundamentado em seis tópicos: no primeiro item contextualiza-se a parte histórica das frações contínuas, tais como, origem, precursores e apresentações de algumas expansões em frações contínuas.

No segundo item mostra-se, de forma introdutória e conceitual, a construção dos conjuntos numéricos, suas principais propriedades e algumas diferenças entre números transcendentos e algébricos.

No terceiro item, apresentamos o algoritmo de Euclides como ferramenta para se encontrar o máximo divisor comum entre dois números inteiros diferente de zero.

No quarto e quinto itens, abordamos as frações contínuas com destaque a obtenção de aproximações de números irracionais por racionais. Ressalte-se que por se tratar de uma vasta área em Teoria dos Números nos limitamos a definições, notações, interpretação geométrica, expansões e demonstrações de algumas propriedades dos convergentes, de forma a compreender as aproximações sucessivas.

No sexto item, de forma simples e introdutória, fornecemos algumas aplicações das frações contínuas, em especial as equações diofantinas lineares com duas incógnitas e equação de Pell.

Item 1

Contexto Histórico

Ao longo da história da matemática há estudos que sinalizam a existência de alguns vestígios de frações contínuas nas escritas das antigas civilizações grega e árabe, apesar de não se poder precisar o período exato do surgimento desses estudos.

Por volta 306 a.C., o matemático Euclides de Alexandria (325 a.C.-265 a.C.) apresentou em sua obra, intitulada “*Os Elementos*”, um algoritmo denominado algoritmo da divisão de Euclides que já trazia o cálculo do máximo divisor comum, mdc, que teve muita influência no estudo das frações contínuas. Com a formulação desse algoritmo existem possibilidades de que as civilizações o tivessem utilizado para o cálculo do máximo divisor comum entre dois números inteiros positivos e no conceito das frações contínuas, provavelmente, não da forma que se utiliza nos dias atuais como aplicação na expansão dos números racionais. Portanto, não há evidências de que o desenvolvimento da teoria tenha sido concreta.

Há que registrar que à medida que os matemáticos estudavam as aproximações de números reais por números racionais surgiam as representações das frações contínuas para um número real arbitrário. Somente mais adiante, com o avanço da matemática pura, tais representações foram observadas como as melhores aproximações que poderiam ser obtidas.

Um pouco mais adiante, há registros de um método resolutivo para se encontrar soluções inteiras de equações Diofantinas, a partir de um desenvolvimento que assemelha-se ao método utilizado para se encontrar a fração contínua de um número. Esse método usado por Ariabata só foi generalizado mais tarde, no sec. XII, pelo matemático, também Hindu, Bhascara II.

Ariabata, em 499 d.C., criou a obra “*Aryabhatiya*” que apresenta regras de cálculo para astronomia, conceitos matemáticos e vários outros problemas. Ensina a elevar ao quadrado e ao cubo, a extrair raízes quadradas e cúbicas e deu uma indicação muito próxima para o número π . Foi considerado o primeiro astrônomo a tentar medir a circunferência da terra desde Eratóstenes (200 a.C.), calculando a circunferência do planeta em 24.835 milhas, apenas 0,2% menor que o valor real de

24,902 milhas. Tal valor permaneceu como o mais preciso durante mais de mil anos.

Ainda sobre Ariabata, um de seus livros está dedicado a resolver equações lineares indeterminadas, cujo algoritmo descrito na resolução de tais equações é denominado algoritmo ariabata.

Na Europa, século XVI, as frações contínuas voltaram a ser temas de estudo e o primeiro uso conhecido de frações contínuas foi dado por Rafael Bombelli (1526 - 1572) que em 1572 deu a aproximação de raiz quadrada de 13. Um pouco mais adiante, em 1613, Cataldi (1548 -1626), cientista italiano considerado o descobridor das frações contínuas, obteve aproximação para raiz quadrada de 18. Esses dois matemáticos não prosseguiram nos estudos.

$$\sqrt{13} \approx 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \frac{4}{\ddots}}} = \frac{18}{5}$$

$$\sqrt{18} \approx 4 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \frac{2}{\ddots}}}$$

No século XVII, com os estudos de John Wallis (1616-1703), as frações contínuas passaram a ser objeto de atenção. Em seu livro “*Arithmetica Infinitorum*” (1655) desenvolveu e apresentou a identidade conhecida como Produto de Wallis:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times \dots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times \dots}$$

Outro matemático que contribuiu para esses estudos, cujas realizações incluem trabalhos sobre frações contínuas e logaritmos através de cálculo por séries infinitas, foi o inglês Willian Brouncker (1620 -1684) que em 1655 forneceu uma expansão na forma de fração contínua do número $4/\pi$.

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{\ddots}}}}$$

Em um artigo, o matemático e astrônomo holandês Christian Huygens (1629-1695) foi o primeiro a mostrar uma aplicação prática para as frações contínuas, utilizando os convergentes para encontrar as melhores aproximações racionais que permitiram escolher as engrenagens com o número correto de dentes.

Obviamente, com auxílio das contribuições de grandes matemáticos, coube a Leonhard Paul Euler (1707 - 1783) desenvolver a teoria moderna das frações contínuas. Euler foi um importante matemático e cientista suíço, considerado um dos maiores estudiosos da matemática em sua época. Nasceu na Basileia, Suíça, no dia 15 de abril de 1707 e faleceu em São Petersburgo, Rússia, no dia 18 de setembro de 1783.

Uma de suas maiores realizações foi o desenvolvimento do método dos algoritmos com o qual conseguiu, por exemplo, fazer a previsão das fases da lua, com a finalidade de obter informações para a elaboração de tabelas para ajudar o sistema de navegação.

Ainda sobre esse grande matemático, ele escreveu o primeiro texto abrangente em que explicava as propriedades de frações contínuas. Demonstrou que os racionais são escritos como frações contínuas finitas e provou que a representação dos irracionais é na forma de fração contínua infinita. Uma constante matemática estudada nesse contexto é o número **e**. É interessante saber que o número **e**, definido por $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, cujo o valor aproximado é 2,718181..., pode ser expresso na forma de fração contínua, conforme abaixo:

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \ddots}}}}}}} = [2; 1, 2, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \dots]$$

mostrando que e e e^2 são números irracionais. O trabalho de Euler sobre o número e foi generalizado em 1766 por Lambert que mostrou que

$$\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = \frac{1}{\frac{2}{x} + \frac{1}{\frac{6}{x} + \frac{1}{\frac{10}{x} + \frac{1}{\frac{14}{x} + \ddots}}}}$$

A primeira prova rigorosa de que o valor de π (relação entre o perímetro de um círculo e seu diâmetro) é um número irracional, o que significa que não pode ser expresso como o quociente entre dois números inteiros, foi fornecida pelo matemático, astrônomo, físico e filósofo Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777).

Em 1764, Lambert foi para Berlim e depois de quatro anos publicou a obra que comprova o fato de que π é um número irracional, fornecendo assim, por frações contínuas, a primeira demonstração de que o número π é irracional, através da relação a seguir:

$$\tan(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{3}{\frac{1}{x} - \frac{5}{\frac{1}{x} - \frac{7}{\frac{1}{x} - \ddots}}}}$$

Essa expressão foi utilizada para concluir que se x é um número racional não-nulo, então $\tan(x)$ não pode ser um número racional. Sendo assim, como $\tan(\pi/4) = 1$, então π não pode ser racional, logo é irracional.

Outro grande matemático, orientando de Euler, que muito contribuiu para a teoria das frações contínuas, foi Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813). É considerado um matemático francês, mas na realidade ele nasceu em Turim, Itália, e foi batizado com o nome Giuseppe Lodovico Lagrangia.

Lagrange demonstrou em 1770 que as raízes irracionais de equações quadráticas com coeficientes inteiros tem expansão na forma de fração contínua periódica e que se um número é expresso por uma fração contínua periódica, então é solução de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros. A partir de então, esses números passaram a ser chamados de irracionais quadráticos. Dessa forma, as frações contínuas permitiram caracterizar melhor esses números e mostrou que eles constituem um conjunto bem definido dentro do universo dos números irracionais.

Há registro de outros gênios da matemática que se ocuparam desse tema, seja

desenvolvendo ou aplicando esses estudos em suas pesquisas, a saber, Évariste Galois (1811 - 1832), matemático francês, que em abril de 1829, no seu primeiro texto publicado, "*Demonstration dun theoreme sur les fractions continues periodiques*", encontra uma condição necessária e suficiente para que uma fração contínua seja imediatamente periódica. Joseph Liouville (1809 - 1882), matemático francês, que através do uso de frações contínuas deu os primeiros exemplos de números transcendentos. Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918), matemático nascido na Rússia, que demonstrou que os pontos de um seguimento de reta podem ser colocados em bijeção do interior de um quadrado com a ajuda de frações contínuas. Brezinski , Jacobi, Perron , Hermite , Cauchy , Stieltjes, Felix Klein, também deram notáveis contribuições.

Item 2

Conjuntos Numéricos

Há registro de que o número surgiu há mais de 30.000 anos, quando os seres humanos sentiram a necessidade de contar aquilo que caçavam, pescavam ou desenhavam nas paredes animais como forma de indicar suas quantidades. Com o passar do tempo as pessoas passaram a viver em grupos maiores o que exigiu um modo específico de contar. Isso nos leva a pensar que os números não foram inventados por uma só pessoa, mas sim por vários povos.

Os egípcios, por volta de 3.500 a.C., criaram seu próprio sistema de contagem e escrita, cuja base da numeração era decimal e utilizava o princípio multiplicativo para desenvolver os números.

Já no século VI, os hindus desenvolveram um sistema que foi difundido pela Europa Ocidental, provavelmente através dos árabes, onde cada número era um símbolo e não era preciso escrever um sinal diferente para indicar cada agrupamento de objetos, como tinham feitos os egípcios. Assim, ao modelo dos babilônios, os algarismos ocupavam diferentes posições de acordo com os valores que possuíam. Esse sistema hindu-arábico são os algarismos que utilizamos hoje.

Mais adiante, no período da idade média, o matemático persa Al-Khwarizmi (c.780-c.850) utilizava essa forma de escrever números nos seus cálculos. O nome desse estudioso em latim era "*Alcuarismi*" e daí vem a palavra "algarismo" em português.

2.1 Conjunto dos Números Naturais (N)

Um dos conjuntos numéricos existente é o dos números naturais que, segundo o matemático Leopold Kronecker (1823-1891), foi criado por Deus, o resto foi criado pelo homem. Entretanto, como consta nos registros ao longo da história, os números Naturais vieram pela primitiva e simples necessidade de organização e contagem dos povos. As demais "espécies" de números surgiram da necessidade de resolver problemas do dia a dia, em diferentes épocas.

Na antiguidade, os números surgiram com a necessidade da contagem e para

isso usava-se pedras para efeito de comparação, daí vem o nome cálculo do latim “*Calculus*” que significa pedrinha. E por volta de 3.000 a.C. nasceram os algarismos sumérios (os mais antigos da História). Com a evolução, os algarismos passaram por modificações, até chegar nos que usamos hoje em dia.

2.1.1 Axiomas de Peano

No início do século XX, o matemático Italiano Giuseppe Peano fez a caracterização do conjunto dos naturais de forma axiomática, tomando como base seus quatro axiomas, conhecidos como Axiomas de Peano.

Faremos a construção do conjunto naturais considerando o zero, pois sabemos que a inclusão desse número no sistema de numeração é uma questão de convenção. Alguns matemáticos, por razões histórica, não o consideram como tal, uma vez que esse foi criado após os outros naturais.

Definiremos, também, as operações de adição, multiplicação, a relação de ordem e algumas propriedades.

Em $\mathbb{N}$ temos que a principal ideia é a de sucessor e que sucessor é aquele que aparece logo após. Esses axiomas são as regras básicas para construção de $\mathbb{N}$. Usaremos a notação A_1, A_2, A_3, A_4 conforme a seguir:

A_1 - Todo número natural tem um único sucessor.

A_2 - Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes.

A_3 - Existe um único número natural, chamado de “zero” e representado pelo símbolo 0, que não é sucessor de nenhum outro.

A_4 - Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subseteq \mathbb{N}$). Se $0 \in X$ e se além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertencer a X , então temos $X = \mathbb{N}$.

Tudo o que se sabe sobre números naturais tem como base os Axiomas de Peano que consistem em um processo chamado sistema de numeração decimal que se utiliza dos dez símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e permite representar qualquer número natural.

Os símbolos que compõem esse sistema de numeração decimal seguem a convenção de que aquele que não é sucessor de nenhum outro chama-se “zero”, seu sucessor representado pelo símbolo 1 chama-se “um”, o sucessor representado pelo

símbolo 2 chama-se “dois”, o sucessor do dois representado pelo símbolo 3 chama-se “três” e assim sucessivamente.

Dessa forma, temos que o conjunto dos números naturais é representado por: $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$. E para quaisquer naturais a , b e c temos a seguinte tabela 2.1 de propriedades dos números naturais:

	ADIÇÃO	MULTIPLICAÇÃO
Fechamento ou Fecho	$(a + b) \in N$	$(a \cdot b) \in N$
Associatividade	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Comutatividade	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Existência de Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Distributividade	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	
Nenhum divisor de zero	$a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$	

Tabela 2.1 - propriedades dos números naturais

2.2 Conjunto dos Números Inteiros (Z)

Por milênios os matemáticos não utilizavam o zero nos sistemas numéricos, nem tinham representação para os números negativos, assim como usamos hoje. Com a incorporação do zero permitiu que se prolongasse os números naturais, por exemplo, aos números relativos, pela incorporação a esses de seus “simétricos” em relação ao zero.

Não obstante os números inteiros não terem sido os primeiros números a surgirem dos naturais, sim as frações positivas que vieram antes, na China, bem antes do século III a.C., e mais tarde na Índia, em torno do século VI d.C., esses números surgiram de maneira informal, em decorrência de questões práticas.

Em 1484 o matemático Francês Nicolas Chuquet utilizou zero e também os números negativos em seus estudos. Já em 1489 o matemático alemão Johann Widmann de Eger introduziu os sinais + e - em substituição as letras “p” inicial de piu (mais) e de “m” inicial de minus (menos).

Um pouco mais adiante, em 1582, o matemático Belga Simon Stevin (1548 d.C.-1620 d.C.) elaborou um sistema de notação unificando o domínio de aplicação das regras aritméticas, que é uma aproximação das regras que hoje são aplicadas aos números inteiros.

Esse conjunto infinito abrange os elementos dos números naturais e seus opostos, ou seja, os números que são positivos e negativos. Assim, pode se deduzir

que N é um subconjunto de Z ($N \subset Z$). E o conjunto dos números inteiros é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

O conjunto Z dos inteiros movidos das operações de adição e multiplicação possui as propriedades fundamentais, onde a, b, c são inteiros quaisquer, isto é, elementos de Z . E as notações dos subconjuntos do conjunto dos números inteiros são representadas conforme a seguir:

$$Z^* = Z - \{0\} = \{x \in Z | x \neq 0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\} \text{ (Conjunto inteiros não nulos)}$$

$$Z_+ = \{x \in Z | x \geq 0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ (Conjunto dos inteiros não negativos)}$$

$$Z_+^* = \{x \in Z | x > 0\} = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ (Conjunto dos inteiros não negativos, excluído o zero)}$$

$$Z_- = \{x \in Z | x \leq 0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\} \text{ (Conjunto inteiros não positivos)}$$

$$Z_-^* = \{x \in Z | x < 0\} = \{\dots, -3, -2, -1\} \text{ (Conjunto inteiros não positivos, excluído o zero)}$$

As propriedades indicadas a seguir, para as operações de adição e multiplicação de números inteiros, serão assumidas como válidas.

Dados $a, b, c \in Z$, em $(Z, 0, 1, +, <)$ valem as seguintes propriedades:

1. Fechamento: $a + b \in Z$ e $ab \in Z$
2. Comutatividade: $a + b = b + a$ e $ab = ba$
3. Associatividade: $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a.(bc) = (ab)c$
4. Elemento neutro da adição (zero): existe $0 \in Z$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$
5. Elemento neutro da multiplicação (um): existe $1 \in Z$ tal que $1.a = a.1 = a$
6. Distributividade: $a.(b + c) = ab + ac$
7. Multiplicação por zero: $0a = 0$
8. Inverso aditivo (oposto): Para cada $a \in Z$, existe $-a \in Z$ tal que $a + (-a) = 0$
9. Integridade: Se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$
10. Regra do sinal: $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ e $(-a)(-b) = ab$
11. Tricotomia: Dados os inteiros a e b , então $a < b$ ou $a = b$ ou $b < a$
12. Desigualdades:
 - (i) $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$
 - (ii) Se $0 < c$, então $a < b \Leftrightarrow ac < bc$
 - (iii) Se $c < 0$, então $a < b \Leftrightarrow ac > bc$

13. Cancelamento:

- (i) $a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$
- (ii) Se $a \neq 0$, então $ab = ac \Leftrightarrow b = c$

2.3 Conjunto dos Números Racionais (Q)

Vem do latim “fractus”, que significa partido, quebrado, a palavra fração. Assim pode-se dizer que fração é a representação das partes iguais de um todo.

No Egito, por volta de 3.000 a.C., se utilizava $1/n$ para representar frações, de modo que todas as demais frações tinham que ser expressas como somas de frações de numerador 1 e denominadores diferentes. As exceções a essa regra eram as frações $3/4$ e $2/3$, sendo que essa última era contemplada como fração geral e utilizada como base para diversas operações matemáticas.

Já os babilônios usavam em geral frações com denominador 60. É provável que o uso do número 60 se deva ao fato de que esse número, por ser menor do que 100, e tenha maior quantidade de divisores inteiros. Por sua vez, os romanos usavam constantemente frações com denominador 12, provavelmente, por ser um que embora pequeno, possui um número expressivo de divisores inteiros.

Com o decorrer dos tempos, muitas notações foram usadas para representar frações. E vem dos Hindus, a forma de escrever frações usando um número sobre outro: era colocado um número sobre outro sem o traço, com o tamanho da parte abaixo e o número de vezes que essa parte devia ser contada em cima. Esse costume se espalhou pela Europa mais tarde.

O conjunto dos números racionais é representado por **Q** e reúne todos os números que podem ser escritos na forma p/q , sendo p e q números inteiros e $q \neq 0$.

$$Q = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$$

Importante ressaltar que as dízimas periódicas são números racionais. Elas são números decimais que se repetem após a vírgula, por exemplo: 1,444444444... que apesar de possuir infinitas casas decimais, pode ser escrito como a fração $13/9$. Assim, todo número que pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros, com o denominador diferente de zero, é chamado de número racional.

Em particular, os números naturais e inteiros são racionais, pois podem ser representados como quocientes deles mesmos por 1. Sendo assim, podemos afirmar que os conjuntos dos números naturais e inteiros podem ser vistos como subconjuntos do conjunto dos números racionais. Além dos naturais e dos inteiros, as frações, os decimais finitos e os decimais infinitos periódicos são números racionais.

Utilizamos as seguintes notações para representar os subconjuntos do Conjuntos dos Números Racionais.

$Q^* = Q - \{0\}$ (Conjunto dos Racionais não nulos)

$Q_+ =$ (Conjunto dos Racionais não negativos)

$Q_+^* =$ (Conjunto dos Racionais não negativos, excluído o zero)

$Q_- =$ (Conjunto dos Racionais não positivos)

$Q_-^* =$ (Conjunto dos Racionais não positivos, excluído o zero)

As propriedades indicadas na tabela 2.2 a seguir, para as operações de adição e multiplicação, para quaisquer racionais $a/b, c/d, e/f$, serão assumidas como válidas.

	ADIÇÃO	MULTIPLICAÇÃO
Fechamento ou Fecho	$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \in Q$	$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \in Q$
Associatividade	$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$	$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$
Comutatividade	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$
Existência de Elemento neutro	$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$	$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$
Existência de inverso (simétrico)	$\forall \frac{a}{b}, \exists \frac{a'}{b'} \in Q \mid \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = 0$	$\forall \frac{a}{b} \in Q^*, \exists \frac{b}{a} \mid \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$
Distributividade	$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$	

Tabela 2.2 – propriedades números Racionais

2.4 Conjunto dos Números Irracionais (I)

O conjunto dos números irracionais reúne os números decimais infinitos e não periódicos. Portanto, esses números não podem ser representados por frações

irredutíveis.

Acreditava-se que todo número poderia ser escrito como a razão entre dois inteiros. Isso começou a ser extinto na Grécia Antiga, entre a sociedade pitagórica. Para eles foram duas sensações bem opostas, algo surpreendente e intrigante: primeiro o fato de que a medida do comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário não poderia ser expressa como um número racional e segundo o fracasso na busca de encontrar uma fração que multiplicada por ela mesma resultasse em 2. Isso abalou os alicerces da filosofia pitagórica que para tudo dependia dos números inteiros.

Prosseguindo nessa contemporização, a descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ provocou tamanha consternação entre os pitagóricos que, por algum tempo, se manteve a questão em segredo. Alguns historiadores acreditam que o pitagórico Hipaso foi expulso da sociedade por revelar o segredo e teria sido lançado ao mar.

Nos dias atuais os números Irracionais definidos como números que não podem ser expressos como a razão entre dois inteiros são bem aceitos. Nessa definição, os números racionais parecem ilhas de ordem numa imensidão de desordem representado pelos irracionais, uma vez que há infinitos racionais, porém os irracionais são bem mais numerosos, no sentido de que os racionais são contáveis e os irracionais não. Além disso, enquanto os números racionais tem um padrão como as dízimas periódicas, os irracionais são desprovidos de padrão. Os números irracionais formam espaços entre os padrões.

Portanto, um número irracional é um número real que não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros, ou seja, são números reais mas não racionais.

Como exemplo, podemos representar $2/7 = 0,28571428571 \dots$ logo $(2/7) \in \mathbb{Q}$, e pode ser escrito na forma p/q o que não ocorre com

- $\sqrt{2} = 1,41421356237 \dots$
- $\sqrt{3} = 1,732050807568 \dots$
- $\sqrt{5} = 2,2360679774999 \dots$
- $\sqrt{7} = 2,645751311064 \dots$

que não podem ser escritos como quocientes de inteiros, logo são irracionais.

2.5 Conjunto dos Números Reais (R)

O conjunto dos números reais é representado por $\mathbb{R}$. Esse conjunto é formado pelos números racionais ($\mathbb{Q}$) e irracionais ($\mathbb{I}$). Assim, temos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Além disso, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Utilizamos as seguintes notações para representar os subconjuntos do Conjunto dos Números Reais.

$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$: conjunto dos números reais não-nulos.

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$: conjunto dos números reais não-negativos.

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$: conjunto dos números reais positivos.

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$: conjunto dos números reais não-positivos.

$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$: conjunto dos números reais negativos.

Os números reais são resultado de medições de grandezas contínuas. Toda representação decimal infinita corresponde a um único número real, e vice-versa (com a ressalva de que números que admitem uma representação decimal finita admitem duas representações decimais, por exemplo, $1 = 0,9999\dots$).

O matemático Georg Cantor estudou os conjuntos infinitos e perguntou se era possível contá-los. Ele descobriu que os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais são enumeráveis (ou contáveis), pois era possível estabelecer uma bijeção entre esses conjuntos e o conjunto dos números naturais. Porém o conjunto dos números irracionais não é enumerável (incontável).

A união dos conjuntos dos números racionais e dos irracionais formam o conjunto dos números Reais, representado por $\mathbb{R}$, que não é enumerável, e podem ser classificados em Algébricos e Transcendentes.

Um número é considerado algébrico se for solução de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Caso contrário, o número é dito transcendente.

Deste fato podemos deduzir que todo número racional é algébrico, pois é solução da equação polinomial de coeficientes inteiros $qx - p = 0$. Além disso, alguns irracionais também são algébricos como por exemplo $\sqrt{2}$ que é solução da equação $x^2 - 2 = 0$.

Por outro lado, existem alguns números irracionais que não são solução de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. É o caso do

π, e , números de Liouville. Esses são chamados números transcendentos.

O matemático francês Joseph Liouville foi o autor da primeira demonstração da existência de números transcendentos estabelecendo um critério para que um número seja transcendente.

2.5.1 Conjuntos dos Números Algébricos

Um determinado número real (ou complexo) é dito algébrico, $\overline{Q}$, se for solução de uma equação polinomial, ou seja se existe algum

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

em que $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, não todos nulos, tal que $P(x) = 0$. Caso contrário é transcendente.

Definição 2.5.1. Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\alpha \in \mathbb{C}$), dizemos que $\alpha \in \overline{Q}$, se existe algum $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, tal que $P(\alpha) = 0$.

Exemplo1. Todo número racional é algébrico.

De fato, sendo $x \in \mathbb{Q}$, então $x = p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Como x é solução de equações do tipo $qx - p = 0$, logo x é um número algébrico.

Exemplo 2. Nem todo número algébrico é racional.

O número irracional é algébrico.

De fato, supondo que $\sqrt{2}$ seja um número racional e, como tal, podemos escrever $\sqrt{2} = p/q$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$ e $(p, q) = 1$

Multiplicando ambos os membros por q e elevando-os ao quadrado temos:

$$p^2 = 2q^2$$

Portanto, p^2 é par, pois é o dobro do número inteiro q^2 . Por outro lado, se $p = 2s+1$, com $s \in \mathbb{Z}$ (p ímpar), teríamos $p^2 = 2r + 1$ com $r = 2s(s+1)$ o que é uma contradição, pois p^2 é par. Então escrevendo $p = 2s$, teríamos

$$(2s)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4s^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2s^2 = q^2$$

Assim, vemos que q^2 tem de ser par e, pelo mesmo raciocínio usado para p e q^2 , q também terá de ser par. Mas se p e q são pares, então são ambos divisíveis por 2 e a fração p/q pode ainda ser simplificada, mas como $(p, q) = 1$, temos uma contradição e, portanto, $\sqrt{2}$ não é um número racional (ou seja, é irracional). Além disso, fazendo $x = \sqrt{2}$ teríamos: $x = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2 = 0$, logo $\sqrt{2}$ é solução da equação, portanto, é algébrico.

2.5.2 Números Transcendentes

Desde a antiguidade, o surgimento de números “estranhos”, por exemplo, o número π , intrigavam os matemáticos da época que buscavam explicações para tais fatos e soluções de problemas.

O estudo dos números transcendentos, cujo termo foi utilizado pela primeira vez por Leibniz, em 1682, provém de diversos problemas antigos como a clássica questão grega da quadratura do círculo, as pesquisas de Liouville e Cantor, as investigações de Hermite sobre a função exponencial, o sétimo problema da famosa lista dos 23 problemas de Hilbert e as formas lineares em logaritmos devidas a Baker.

No século XVIII, Euler foi provavelmente a primeira pessoa a criar uma definição para números transcendentos. E Liouville, em 1844, provou a existência de números transcendentos e, em 1851, produziu os primeiros exemplares dos mesmos, como por exemplo, a Constante de Liouville.

Assim, podemos dizer que um número transcendente é um número real ou complexo que não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros, ou racionais, equivalentemente. Portanto, um determinado número real que não seja algébrico, será transcendente.

Definição 2.5.2 Os números que não são algébricos são chamados transcendentos e o conjunto destes números será denotado por T . Observe que, por definição, o conjunto T é o complementar do conjunto $\bar{Q}$, também denotado por $T = \bar{Q}^c$

Exemplo: São transcendentos os números π , e (base do logaritmo neperiano), os números de Liouville.

Item 3

Algoritmo de Euclides

O algoritmo Euclidiano ou algoritmo de divisão em $\mathbb{Z}$ garante a possibilidade de uma divisão aproximada em $\mathbb{Z}$. Esse algoritmo estabelece uma “divisão com resto” e é a base da aritmética teórica. Seu nome deriva do fato de Euclides, matemático de Alexandria, o ter usado em seus “*Elementos*” (c.300 a.C.) para calcular o máximo divisor comum, mdc, de dois números inteiros positivos, onde o maior dos números é reduzido, a partir de sucessivas divisões, até o resto convergir em zero .

O processo que conhecemos como algoritmo euclidiano da divisão, assim como o processo para encontrar o máximo divisor comum, MDC, de dois números inteiros servem de base também para resolução de equações diofantinas lineares.

O algoritmo original foi descrito apenas para números naturais e comprimentos geométricos, porém a partir do século XIX foi generalizado para outras classes numéricas, conduzindo à noções da Álgebra Abstrata.

3.1 Algoritmo da Divisão

O objetivo é encontrar o mdc de dois números inteiros a e b , por meio de aplicações sucessivas do algoritmo euclidiano, até o resto convergir em zero.

Teorema 3.1 Dados dois inteiros a e b , $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que

$$a = qb + r \quad \text{com} \quad 0 \leq r < b \quad (r = 0 \Leftrightarrow b|a)$$

(q é o quociente e r o resto da divisão de a por b)

Observação: o teorema é válido para a e b inteiros, porém a desigualdade torna-se $a \leq r < |b|$

Demonstração: Pelo teorema de Eudoxius, como $b > 0$, existe q satisfazendo

$$qb \leq a < (q + 1)b$$

o que implica $0 \leq a - qb$ e $a - qb < b$. Assim, se definirmos $r = a - qb$, teremos

garantido a existência de q e r . Com o objetivo de mostrar a unicidade, vamos supor a existência de um outro par q_1, r_1 e verificaremos

$$a = q_1b + r_1 \quad \text{com} \quad 0 \leq r_1 < b$$

Desta forma, substituindo a na equação acima vem:

$qb + r = q_1b + r_1 \Rightarrow qb + r - q_1b - r_1 = 0 \Rightarrow b(q - q_1) = r_1 - r$ o que implica $b \mid (r_1 - r)$. Como $r_1 < b$ e $r < b$, temos $|r_1 - r| < b$ e portanto como $b \mid (r_1 - r)$ devemos ter $r_1 - r = 0$ o que implica em $r = r_1$, logo $q_1b = qb \Rightarrow q_1 = q$, uma vez que $b \neq 0$

A partir dessa demonstração, podemos definir o algoritmo da divisão conforme a seguir.

Definição 3.1 Dados dois inteiros a, b com $b \neq 0$ existe um único par de inteiros q e r tais que $a = qb + r$ com $0 \leq r < |b|$

O teorema a seguir, apesar de apresentar um resultado elementar, será de grande importância na demonstração do algoritmo de Euclides que demonstramos após esse resultado.

Teorema 3.2 Se a e b são inteiros e $a = qb + r$ com $0 \leq r < b$ ($r = 0 \Leftrightarrow b \mid a$), onde q e r são inteiros, então $(a, b) = (b, r)$

Demonstração: da relação acima, $a = qb + r$, temos que todo divisor de b e r é um divisor de a (os inteiros são relativamente primos quando $(a, b) = 1$). Esta mesma relação, na forma $a = qb + r$ nos diz que todo divisor de a e b é um divisor de r , logo o conjunto de divisores comuns de a e b é igual ao conjunto de divisores comuns de b e r , o que nos garante o resultado $(a, b) = (b, r)$.

3.2 Algoritmo de Euclides

Antes da demonstração do próximo teorema de Euclides, daremos um exemplo do cálculo do máximo divisor comum dos inteiros 542 e 234, utilizando o algoritmo da divisão.

Exemplo 3.1. Sejam dois inteiros $a = 542$ e $b = 234$, aplique o algoritmo da divisão e determine $\text{MDC}(a, b)$.

Sabemos pelo teorema da divisão que e se a e b são inteiros e $a = qb + r$ com $0 \leq r < b$ ($r = 0 \Leftrightarrow b|a$), onde q e r são inteiros, então $(a, b) = (b, r)$.

Logo aplicando esse teorema 3.2 em uma divisão simples entre dois números inteiros a e b , com $a > b$, onde a é o dividendo, b o divisor, q o quociente e r o resto, temos:

$$542 = q \cdot 234 + r$$

Então dividimos 542 por 234. Em seguida dividimos 234 pelo resto 74. Depois 74 pelo resto 12 e assim até encontramos o resto zero.

$$542 = 2 \cdot 234 + 74$$

$$234 = 3 \cdot 74 + 12$$

$$74 = 6 \cdot 12 + 2$$

$$12 = 6 \cdot 2 + 0$$

Da última última equação $(12, 2) = 2$ e pelo teorema 3.2 é verdadeiro que $74 = 6 \cdot 12 + 2$ e portanto $(74, 12) = (12, 2)$. Da equação $234 = 3 \cdot 74 + 12$, concluímos que $(234, 74) = (74, 12)$ e por sucessivas aplicações do teorema encontraremos a sequência de igualdades $(2, 12) = (12, 74) = (74, 234) = (234, 542)$, tendo assim encontrado o mdc de 234 e 534 que é o último resto não-nulo das igualdades acima., ou seja $(542, 234) = 2$.

Teorema 3.3 Sejam $r_0 = a$ e $r_1 = b$ inteiros não-negativos com $b \neq 0$. Se o algoritmo da divisão for aplicado sucessivamente para se obter

$$r_n = q_{n+1} \cdot r_{n+1} + r_{n+2} \quad \text{com} \quad 0 \leq r_{n+2} < r_{n+1}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ e $r_{n+1} = 0$ então $(a, b) = r_n$, o último resto não-nulo

Demonstração: aplicando o teorema 3.1 para dividir $r_0 = a$ por $r_1 = b$, teremos $r_0 = q_1 r_1 + r_2$. Em seguida dividimos r_1 por r_2 obtendo $r_1 = q_2 r_2 + r_3$ e assim sucessivamente, até encontrar o resto $r_{n+1} = 0$. A cada etapa o resto é sempre menor do que o anterior, e como estamos lidando com números inteiros positivos, é certo que após um número finito de aplicações do teorema da divisão, chegaremos ao resto

nulo.

A seguir a sequência de equações

$$\begin{aligned}
 r_0 &= q_1 r_1 + r_2 & \text{com} & \quad 0 < r_2 < r_1 \\
 r_1 &= q_2 r_2 + r_3 & \text{com} & \quad 0 < r_3 < r_2 \\
 r_2 &= q_3 r_3 + r_4 & \text{com} & \quad 0 < r_4 < r_3 \\
 & \vdots \\
 r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n & \text{com} & \quad 0 < r_n < r_{n-1} \\
 r_{n-1} &= q_n r_n + 0
 \end{aligned}$$

Essa última equação nos mostra que o mdc de r_n e r_{n-1} é r_n e que este número é igual a (r_{n-1}, r_{n-2}) , na penúltima equação. Prosseguindo na análise teremos, por repetidas aplicações do teorema, a sequência a seguir

$$r_n = (r_{n-1}, r_n) = (r_{n-2}, r_{n-1}) = \cdots = (r_1, r_2) = (r_0, r_1) = (a, b)$$

Daí se conclui que o mdc de a e b é o último resto não-nulo da sequência de divisões sucessivas descritas acima, isto é, se $r_n = 0$, o processo termina e r_{n-1} é o MDC (a, b) da aplicação.

Item 4

Frações Contínuas

4.1 Nota Histórica

As bases teóricas das frações contínuas têm origem na Grécia, onde eram escritas com numerador 1, e foram construídas ao longo de quase três séculos, a partir das primeiras décadas do século XVII. Contaram com contribuições de diversos matemáticos, dentre alguns, Pietro Antonio Cataldi(1548-1626) que deu os primeiros passos na teoria das frações contínuas; John Wallis (1616-1703), que foi o primeiro a utilizar o termo frações contínuas; o matemático britânico Willian Brounker(1602-1684) que se propôs a investigar e usar as propriedades das frações contínuas. Um pouco mais adiante, no século XVIII, as frações contínuas tiveram contribuições de outros grandes matemáticos como Leonardo Euler (1707-1783), John Heinrich, Lambert (1728-1777), Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

As frações contínuas são uma forma de representação de números reais, distintas da representação decimal. Constituem um exemplo interessante de procedimento que é finito, quando operado sobre números racionais, e infinito, quando, é irracional.

Outro aspecto importante das frações contínuas está relacionado com aproximação de um número real por um número racional que torna possível obter frações parciais, chamadas de convergentes. E esses convergentes, por suas características e propriedades, são um dos melhores instrumentos de investigação da natureza aritmética dos números irracionais e tem aplicações na própria matemática e em outras diferentes áreas de conhecimento.

Obviamente essas considerações visam apenas a dar uma ideia despretensiosa da construção e importância das frações contínuas e de maneira simples e introdutória apresentar uma forma de representar os números reais por frações contínuas, que sempre fornecem as melhores aproximações de números reais por racionais. Para auxiliar nessa atividade, ou seja, converter frações em frações contínuas, utilizamos o algoritmo euclidiano ou algoritmo da divisão em $\mathbb{Z}$, que garante a possibilidade de uma divisão aproximada em $\mathbb{Z}$. Esse algoritmo ao longo da história da matemática já

trazia o cálculo do Máximo Divisor Comum (MDC) de dois números e teve grande influência no estudo das frações contínuas.

4.2 Definição – Notação

As frações contínuas simples são também denominadas frações contínuas regulares ou ainda podemos chamar de forma canônica de uma de fração contínua. Nessas, os numeradores são todos iguais a 1 e os termos $a_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ são denominados quocientes parciais. Esses são inteiros positivos, com exceção do primeiro termo a_0 que pode ser positivo, nulo ou negativo.

Assim, dado um número real x , existe um único número inteiro $[x]$ denominado o maior inteiro menor do que ou igual a x e um número real $\{x\} \in [0, 1[$, denominado parte fracionária de x , tal que

$$x = [x] + \{x\}, \text{ com } [x] \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq \{x\} < 1$$

Se x não for um número inteiro, então $\{x\} \neq 0$ e definindo $x_1 = 1/\{x\}$ temos

$$x = [x] + \frac{1}{x_1} = [x] + \frac{1}{\frac{1}{\{x\}}}$$

Sucessivamente, se x não for um número inteiro, então $\{x_1\} \neq 0$ e definindo $x_2 = 1/\{x_1\}$, temos

$$x = [x] + \frac{1}{x_1} = [x] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{x_2}}$$

Esse processo termina se $n \geq 1$, ocorrer $\{x_n\} = 0$. Caso contrário, o processo continua, recursivamente.

Definição 4.1 Seja x um número real, definimos a fração contínua simples de x como a sequência de inteiros (a_n) , com $n \in \mathbb{N}$ definidos por $a_n \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha_n]$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ em que (α_n) é definido recursivamente por

$$\begin{cases} \alpha_0 = x \\ \alpha_{n+1} = \frac{1}{\{\alpha_n\}} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} \text{ onde } \alpha_n \notin \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Se para algum n , $\alpha_n = a_n$ ou seja, $\{\alpha_n\} = 0$, a fração contínua é finita e sua representação será:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} \stackrel{\text{def}}{=} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] \quad (4.1)$$

- Caso contrário, a fração contínuas será infinita

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n} + \ddots}}}} \stackrel{\text{def}}{=} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots] \quad (4.2)$$

- De um modo geral, temos que

Se $a = a_0$ o processo termina

Se não $a_n > 1$, continua e teremos recursivamente

$$a = \frac{1}{a - a_0} > 1 \Rightarrow a = a_0 + \frac{1}{a_1} \text{ para } n \geq 1 \text{ e } [a_n] \in \mathbb{N}^*$$

Então

$$[a_0] = a_0; [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}; [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \dots$$

- As expressões (4.1) e (4.2) são representações, sob a forma de frações contínuas, de um número racional e de um número irracional, respectivamente, cujas notações usadas são $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n]$ e $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots]$.

Exemplo 4.2.1 Expressar o número racional $11/7$ em forma de fração contínua.

Como α é um número racional, ou seja, $a_n = [\alpha]$ e aplicando a definição (4.1) temos

$$\alpha = a_n + \frac{1}{x_n} \left(0 < \frac{1}{x_n} < 1 \right) \text{ e } x_n = \frac{1}{\alpha - a_n}, \text{ com } x_n > 1$$

Inicialmente, como a_0 é a parte inteira da divisão dos números racionais, vem

$$a_0 = \left\lfloor \frac{11}{7} \right\rfloor = 1$$

$$a_0 = \left\lfloor \frac{11}{7} \right\rfloor = 1 \text{ e } \frac{11}{7} = a_0 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow \frac{11}{7} = 1 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\frac{11}{7} - 1} = \frac{7}{4}$$

$$a_1 = \left\lfloor \frac{7}{4} \right\rfloor = 1 \text{ e } \frac{7}{4} = a_1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{7}{4} = 1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\frac{7}{4} - 1} = \frac{4}{3}$$

$$a_2 = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1 \text{ e } \frac{4}{3} = a_2 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{\frac{4}{3} - 1} = 3$$

$$a_3 = \lfloor 3 \rfloor = 1 \text{ e } 3 = a_3 + \frac{1}{x_4} \Rightarrow 3 = 1 + \frac{1}{x_4} \Rightarrow x_4 = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2} \text{ como } (x_4 < 1) \text{ não atende}$$

A condição pra continuar recursivamente o processo é de que $x_n > 1$ logo a fração contínua é finita e é dada por $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ ou seja $[1; 1, 1, 3]$ e sua representação será:

$$\frac{11}{7} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = [1; 1, 1, 3]$$

Exemplo 4.2.2 Expressar o número de ouro Φ ou seja, o irracional $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ em forma de fração contínua.

Seguindo os mesmos passos do exemplo anterior, temos

$$a_0 = \left\lfloor \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\rfloor = 1$$

$$a_0 = \left\lfloor \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\rfloor = 1 \text{ e } \frac{\sqrt{5}+1}{2} = a_0 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$a_1 = \left\lfloor \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right\rfloor = 1 \text{ e } \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = a_1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$a_2 = \left\lfloor \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right\rfloor = 1 \text{ e } \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = a_2 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$a_3 = \left\lfloor \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right\rfloor = 1 \text{ e } \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = a_3 + \frac{1}{x_4} \Rightarrow \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{x_4} \Rightarrow x_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Continuando o processo, ele se repetirá indefinidamente, o que implica em

$$\alpha_n = \alpha_0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \text{ e } [\alpha_n] = [\alpha_0] = 1 \forall n$$

Assim a representação em fração contínua infinita será o número de ouro

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}} = [1; 1, 1, 1, \dots] = (1; \bar{1})$$

Observemos que nos exemplos anteriores, a partir de um número racional ou de um números irracional dados, encontramos a representação desses números sob a forma de fração contínua finita ou infinita.

A seguir, faremos o processo inverso, ou seja, conhecendo as frações contínuas representadas por $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n]$ ou $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots]$, encontraremos os números racionais ou irracionais que serão representados por essas frações contínuas.

Exemplo 4.2.3 Encontrar os números racional e irracional representados sob a forma de frações contínuas nos itens abaixo:

a) $[3; 6, 1, 7]$

b) $[1; 2, 2, 2, \dots]$

Assumiremos que as expansões em frações contínuas dos números racionais foram encontradas com aplicação do algoritmo da divisão, teorema 3.2.

a) Inicialmente, representamos a fração contínua $[3; 6, 1, 7]$ conforme expressão abaixo

$$[3; 6, 1, 7] = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}}$$

Em seguida, revertemos o processo acima para a obter o número racional representado por ela. Para isso, resolvemos cada fração de baixo para cima, conforme a seguir:

$$\begin{aligned} [3; 6, 1, 7] &= 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{7+1}{7}}} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{8}} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{7}{8}} \\ &= 3 + \frac{1}{\frac{48+7}{8}} = 3 + \frac{1}{\frac{55}{8}} = 3 + \frac{8}{55} = \frac{3 \cdot 55 + 8}{55} = \frac{173}{55} \end{aligned}$$

Logo a fração contínua $[3; 6, 1, 7]$ representa o número Racional $173/55$

b) Encontrar o irracional representado pela fração contínua $[1; 2, 2, 2, \dots]$.

Consideremos a fração contínua $[1; 2, 2, 2, \dots]$. A sua representação em forma de fração contínua é dada por:

$$[1; 2, 2, 2, \dots] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}} \quad (4.3)$$

A exemplo do item a, realizamos o processo inverso para obter o número irracional representado por essa fração contínua.

Assim, seja x um número irracional, então,

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}} \quad (4.4)$$

ou

$$x - 1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}} \quad (4.5)$$

Podemos expressar a fração contínua (4.4) da seguinte forma

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}} \right)} \quad (4.6)$$

Inserindo a expressão (4.5) em (4.6), temos

$$x = 1 + \frac{1}{2 + (x - 1)} = 1 + \frac{1}{x + 1}$$

Dessa forma a equação será reduzida a

$$x = 1 + \frac{1}{x + 1} \Rightarrow x(x + 1) = (x + 1) + 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Portanto, a fração contínua $[1; 2, 2, 2, \dots]$ representa o número irracional $\sqrt{2}$

4.3 Frações Contínuas e o algoritmo de Euclides

Uma outra forma, mais simples, de se encontrar a fração contínua é utilizando o algoritmo euclidiano.

Descrevemos no item 3 um método para encontrar o máximo divisor comum, mdc, entre dois números inteiros e conseqüentemente para se converter uma fração em fração contínua.

A seguir daremos um exemplo para encontrar esse mdc utilizando o processo de divisões sucessivas.

Exemplo 4.3.1 Dado o número racional $542/234$, aplique o algoritmo de Euclides e encontre o MDC (a, b) e expresse esse número em forma de fração contínua.

Sabemos pelo teorema da divisão, teorema 3.2, que se a e b são inteiros, com $a > b$, onde a é o dividendo, b o divisor, q o quociente e r o resto, então

$$a = q \cdot b + r$$

Aplicando o teorema 3.2 em uma divisão simples entre esses inteiros a e b, temos:

$$542 = q \cdot 234 + r$$

Então dividimos 542 por 234. Em seguida dividimos 234 pelo resto 74. Depois 74 pelo resto 12 e assim até encontramos o resto zero.

$$542 = 2 \cdot 234 + 74$$

$$234 = 3 \cdot 74 + 12$$

$$74 = 6 \cdot 12 + 2$$

$$12 = 6 \cdot 2 + 0$$

Da última equação $(12, 2) = 2$, temos que 2 é o último resto não-nulo na sequência de divisões sucessivas e dessa forma podemos expressar o racional em forma de fração contínua conforme abaixo:

$$\frac{542}{234} = 2 + \frac{74}{234} = 2 + \frac{1}{\frac{234}{74}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{12}{74}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{2}{12}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6}}}$$

Logo, o número racional $542/234$ em forma de fração contínua será representada por

$$\frac{542}{234} = [2; 3, 6, 6] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6}}}$$

E será denotado por $[2; 3, 6, 6]$, cujos números inteiros são chamados de quocientes parciais.

Podemos, utilizar uma tabela de cálculo de mdc para auxiliar na determinação dos quocientes parciais da fração contínua, conforme tabela 4.1 abaixo.

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
p_n	q_n	r_1	r_2	$\dots$	r_{n-1}	r_n	$r_{n+1} = 0$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\dots$	r_{n-1}	r_n	0

Tabela 4.1 – algoritmo de Euclides para cálculo mdc

Observemos na tabela 4.1 que $r_{n-1} > r_n$ e $r_{n+1} = 0$ temos que $a_n \geq 2$. Logo, a representação da fração contínua $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$ para o número racional será única através do algoritmo de Euclides.

Utilizando essa tabela no exemplo 4.1, encontraremos a fração contínua dada por $[2; 3, 6, 6]$ do número racional $542/234$, aplicando o processo de divisão sucessiva, conforme abaixo

a_n	2	3	6	6
542	234	74	12	2
74	12	2	0	

Tabela 4.2 – cálculo $\text{mdc}(542, 234) = 2$

4.4 Interpretação geométrica das frações contínuas

Nos caso em que os termos $a_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, denominados quocientes parciais, inteiros positivos, com exceção do primeiro termo a_0 que pode ser positivo, nulo ou negativo, podemos fornecer uma interpretação geométrica da definição de uma fração contínua para a representação desses números por meio de frações contínuas.

4.4.1 Número Racional

Seja x um número racional, então existem p e q inteiros, com $q \neq 0$, tais que $x = p/q$.

Vamos considerar, para nossa análise, sem perda de generalidade que o máximo divisor comum, $\text{mdc}(p, q) = 1$, pois do contrário, se $\text{mdc}(p, q) = c$, existem números a e b inteiros, tais que $p = ac$ e $q = bc$. Nesse caso, utilizaríamos os inteiros a e b com $\text{mdc}(a, b) = 1$.

Dado um retângulo de lados p e q , inteiros positivos, com $p < q$, desejamos encontrar o número máximo de quadrados de lado p que possam ser construídos sobre o lado de comprimento q , ou seja, pretendemos preencher a área retangular de

dimensões $p \times q$ com o maior número possível de quadrados que couberem nessa área retangular. Essa quantidade chamaremos de a_0 e será a parte inteira da fração

$$x = \alpha_0 = \frac{q}{p}, \text{ ou seja, } a_0 = [x]$$

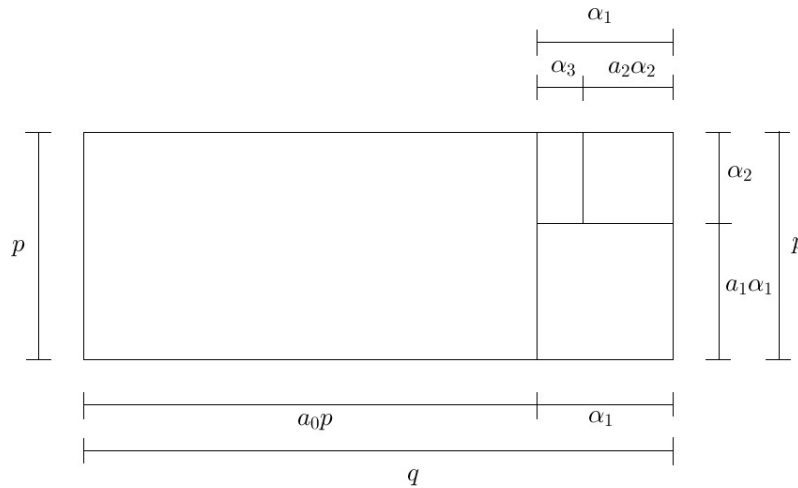


Figura 4.1 – representação geométrica do caso racional

Interpretando a figura 4.1, temos que

$$q = a_0 p + \alpha_1, \quad 0 \leq \alpha_1 < p \quad (4.7)$$

Dividindo a equação (4.7) por p , temos

$$x = \frac{q}{p} = \frac{a_0 p}{p} + \frac{\alpha_1}{p} \Rightarrow \frac{q}{p} = a_0 + \frac{\alpha_1}{p} \quad (4.8)$$

Da figura 4.1, podemos obter a relação a seguir

$$p = a_1 \alpha_1 + \alpha_2, \quad 0 \leq \alpha_2 < \alpha_1 \quad (4.9)$$

Em seguida substituímos a expressão (4.9) na expressão (4.8), vem

$$x = a_0 + \frac{\alpha_1}{p} = a_0 + \frac{\alpha_1}{a_1 \alpha_1 + \alpha_2} \quad (4.10)$$

Na expressão (4.10), fazendo as operações e substituições devidas, vem

$$x = a_0 + \frac{\alpha_1}{a_1\alpha_1 + \alpha_2} \Rightarrow x = a_0 + \frac{1}{\frac{a_1\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1}} \Rightarrow a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \quad (4.11)$$

Na expressão (4.11), notemos que α_1 significa a quantidade máxima de quadrados com lado α_1 que podem ser construídos sobre o lado de comprimento p.

Assim, observando e interpretando a figura 4.1, temos que

$$\alpha_1 = a_2\alpha_2 + \alpha_3, \quad 0 \leq \alpha_3 < \alpha_2 \quad (4.12)$$

Continuando com os passos de substituição, agora substituindo a expressão (4.12) na expressão (4.11), vem

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \Rightarrow x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{\alpha_2}{a_2\alpha_1 + \alpha_3}} \quad (4.13)$$

Na expressão (4.13), temos

$$\frac{\alpha_2}{a_2\alpha_1 + \alpha_3}$$

que é equivalente a expressão a seguir

$$\frac{1}{\frac{a_2\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_2}} = \frac{1}{a_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}}$$

Dessa forma, substituindo essa expressão equivalente na expressão (4.13) chegaremos a seguinte relação

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}}} \quad (4.14)$$

Sendo p e q números inteiros, sabemos pelo algoritmo de Euclides, que para

algum número racional, teremos sempre

$$\alpha_{m-1} = a_m \alpha_m$$

o que nos leva a concluir que

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots + \frac{\alpha_m}{a_m \alpha_m}}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots + \frac{1}{a_m}}}} \quad (4.15)$$

4.4.2 Número irracional

Vamos supor agora que x seja um número irracional. Assim, vamos definir a fração contínua da mesma forma que o fizemos para o caso anterior.

Seja um retângulo em que os lados sejam 1 e x , conforme definidos na figura 4.2. Queremos encontrar o maior número possível de quadrados, de lado unitário, que possam ser construídos sobre o lado de comprimento x . A essa quantidade de quadrados chamaremos de a_0 , que representa a parte inteira de x , ou seja $a_0 = \lfloor x \rfloor$.

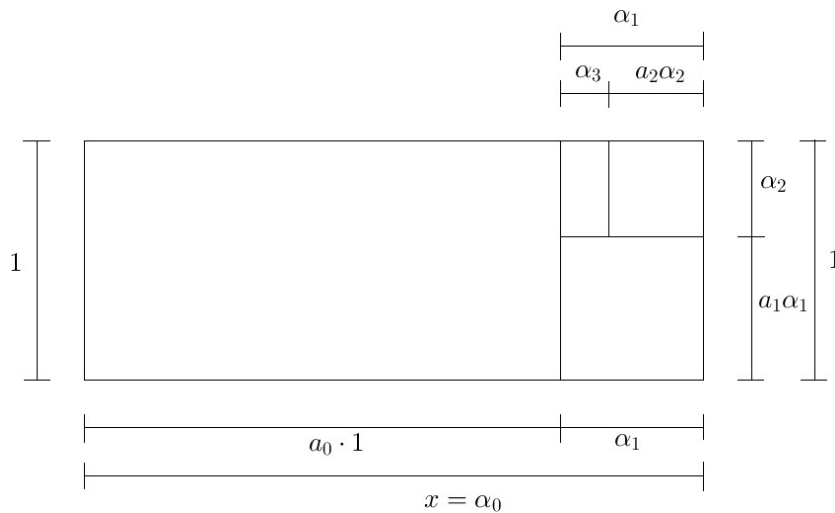


Figura 4.2 – representação geométrica do caso irracional

Da mesma forma que procedemos para os racionais, faremos para os irracionais. Assim, observando a figura 4.2, temos que

$$x = \alpha_0 = a_0 \cdot 1 + \alpha_1, \quad 0 \leq \alpha_1 < 1 \quad (4.16)$$

Da figura 4.2, observemos que

$$1 = a_1 \alpha_1 + \alpha_2, \quad 0 \leq \alpha_2 < \alpha_1 \quad (4.17)$$

Substituindo esta expressão (4.17) na expressão (4.16), vem

$$x = \alpha_0 + a_0 \cdot 1 + \alpha_1 \Rightarrow x = \alpha_0 (a_1 \cdot \alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \Rightarrow x = \alpha_0 = a_0 + \frac{\alpha_1}{a_1 \alpha_1 + \alpha_2} \quad (4.18)$$

Na expressão (4.18), temos que

$$\frac{\alpha_1}{a_1 \alpha_1 + \alpha_2}$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{\frac{a_1 \alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1}} = \frac{1}{a_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$$

Assim, substituindo essa expressão em (4.18) chegaremos a seguinte relação

$$x = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \quad (4.19)$$

Ainda observando a figura 4.2, temos que

$$\alpha_1 = a_2 \alpha_2 + \alpha_3, \quad 0 \leq \alpha_3 < \alpha_2 \quad (4.20)$$

Substituindo a expressão (4.20) na expressão (4.19), vem

$$x = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{\alpha_2}{a_2 \alpha_2 + \alpha_3}} \quad (4.21)$$

Próxima etapa, será determinar o inverso de

$$\frac{\alpha_2}{a_2 \alpha_2 + \alpha_3}$$

Obteremos assim a expressão:

$$\frac{1}{\frac{a_2\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_2}} = \frac{1}{a_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}}$$

Substituindo essa expressão em (4.21), temos a seguinte relação

$$x = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}}} \quad (4.22)$$

Observemos que nesse caso, como x não é racional, teremos para todo número m natural que $\alpha_{m-1} \neq a_m \alpha_m$. Sendo assim, o processo se repete infinitamente o que será representado da forma a seguir

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}} \quad (4.23)$$

Item 5

Frações Contínuas – representações e convergentes

5.1 Representação por Fração Contínua de número Racional

Verificamos nos exemplos de números racionais que toda fração contínua simples finita $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ representa um número racional. A recíproca também é verdadeira, ou seja, um número racional pode ser representado sob a forma de fração contínua finita, uma vez que o processo de divisões sucessivas, sempre depois de um número finito de divisões, nos fornece resto nulo.

O número de quocientes parciais a_n na representação dos números racionais sob a forma de fração contínua pode ser par ou ímpar, pois quando $a_n > 1$ podemos substituí-lo por $a_n - 1 + \frac{1}{1}$.

Na representação do número Racional $173/55$ do exemplo 4.2.3.a, temos

$$\frac{173}{55} = [3; 6, 1, 7] = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}} \quad \text{ou} \quad \frac{173}{55} = [3; 6, 1, 6, 1] = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1}}}}$$

Portanto, percebemos que um número racional pode ser representado de duas maneiras distintas, a saber, $[3; 6, 1, 7] = [3; 6, 1, 6, 1]$ o que nos diz que de um modo geral, sempre que o último quociente $a_n > 1$, esse poderá ser substituído por $a_n - 1 + \frac{1}{1}$, comprovando a duplicidade na representação, conforme abaixo

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$$

Dessa forma, podemos enunciar o seguinte teorema que resume o que observamos

Teorema 5.1 Todo número racional pode ser representado de duas maneiras distintas sob a forma de fração contínua finita e toda fração contínua simples finita representa um número racional.

Essa unicidade da representação de um número racional em fração contínua, isto é, a menos da modificação do último termo a_n é garantido pelo teorema 3.1 (algoritmo da divisão).

Por outro lado, consideremos o racional p/q com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ respectivamente, o numerador e o denominador desse número. O primeiro quociente parcial, a_0 , pode ser positivo, nulo ou negativo, isto é:

- a) $0 < q < p$, então $a_0 > 0$
- b) $0 < p < q$, então $a_0 = 0$
- c) $p < 0$, então $a_0 < 0$

Assumiremos que as expansões em frações contínuas dos números racionais são obtidas aplicando o algoritmo da divisão, teorema 3.1. Assim, daremos, a seguir, três exemplos simples mostrando os valores que o primeiro quociente parcial pode assumir.

Exemplo 5.1.a - A representação do número racional $10/7$, com $0 < q < p$, em fração contínua é dada por $[1; 2, 3]$, ou seja:

$$\frac{10}{7} = [1; 2, 3] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$$

como $p > q$, então $p/q = [a_0; a_1, \dots, a_n]$.

Já a representação p/q , com $p < q$ será dada por $[0; a_1, a_2, \dots, a_n]$. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 5.1.b - A representação do número racional $7/10$, com $0 < p < q$, em fração contínua é dada por $[0; 1, 2, 3]$, ou seja:

$$\frac{7}{10} = [0; 1, 2, 3] = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} \quad (5.1)$$

Em termos gerais, as representações em frações contínuas dos racionais,

podem ser dadas das seguintes formas:

$$\frac{p}{q}, \text{ se } p > q, \text{ logo } \frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$$\frac{q}{p}, \text{ se } p < q, \text{ logo } \frac{q}{p} = [0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Essa última relação é consequência imediata do fato de

$$\frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{\frac{p}{q}}$$

Exemplo 5.1.c - A representação do número racional $-11/7$ em fração contínua é dada por $[-2; 2, 3]$.

Aplicando o teorema da divisão, para expandir em fração contínua, o número racional, vem:

$$-11 = q \cdot 7 + r$$

Dividindo -11 por 7. Depois dividindo 7 pelo resto 3, e assim até encontrar o resto zero, conforme abaixo

$$\begin{aligned} -11 &= -2 \cdot 7 + 3 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 1 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

Logo teremos

$$\frac{-11}{7} = [-2; 2, 3] = -2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} \quad (5.2)$$

Observemos no processo de divisões sucessivas que somente o primeiro quociente parcial pode ser negativo. Daí concluímos que na fração contínua simples todos os termos são positivos, com exceção do primeiro termo, conforme o caso.

5.2 Representação por Fração Contínua de número irracional

Vimos que os números racionais podem ser expressos por meio de frações contínuas finitas e vice-versa. Isso também é possível para os números irracionais,

com a diferença de que para os irracionais a expansão não acaba e a sequência de quocientes parciais tem infinitos termos. Em consequência disso, pode ser questionado se esses irracionais podem ser expressos sob a forma de frações contínuas, o que de antemão já respondemos que sim e veremos neste subitem esse processo.

Uma importante propriedade do conjunto dos números reais é de que para qualquer número real x , podemos obter aproximações sucessivas para x por meio dos números racionais, para um número irracional, que podem ser tão boas quanto desejarmos, pois tomando qualquer número real positivo a , existe um número racional b tal que $|x - b| < a$.

Já conhecemos, em alguns exemplos anteriores de números irracionais, que toda fração contínua simples infinita $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots]$ representa um número irracional. A recíproca também é verdadeira, ou seja, um número irracional pode ser representado sob a forma de fração contínua infinita, uma vez que o processo de divisões sucessivas sempre será infinito.

No exemplo 4.2.3.b, o número irracional $\sqrt{2}$, expandido na forma $[1; 2, 2, 2, \dots]$, tem sua expansão representada na forma de fração contínua, conforme abaixo:

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}} \quad (5.3)$$

Podemos, assim, ver a construção desse processo da seguinte forma:

Definição 5.1 Seja α um número irracional qualquer e $a_0 = [\alpha]$, onde a_0 é o maior inteiro menor do que α . Então α pode ser escrito como:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{x_0}, \quad 0 < \frac{1}{x_0} < 1$$

Explicitando x na equação acima, encontraremos um número irracional

$$x_0 = \frac{1}{\alpha - a_0} \text{ e } x_0 > 1$$

Continuando o processo, podemos escrever o termo x_0 na forma a seguir

$$x_0 = a_1 + \frac{1}{x_1}$$

onde $a_1 = [x_0]$, x_1 é irracional e $x_1 > 1$. Dessa forma repetindo o processo, encontraremos:

$$\begin{aligned}\alpha &= a_0 + \frac{1}{x_0}, \quad 0 < \frac{1}{x_0} < 1 \\ x_0 &= a_1 + \frac{1}{x_1}, \quad x_0 > 1 \\ x_1 &= a_2 + \frac{1}{x_2}, \quad x_1 > 1 \quad (5.4) \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad x_n > 1 \quad (5.4)\end{aligned}$$

Na expressão (5.4) todos a_n ($n > 1$) são inteiros maiores ou iguais a 1 e todos x_n são irracionais maiores que 1.

Se cada x_n é irracional, isso nos garante que o processo será repetido um determinado número de vezes. Com base na equação (5.4), temos:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{x_0} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_2}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{x_3}}}} \quad (5.5)$$

Dáí definimos $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ o que nos mostra que o processo nunca termina, é infinito.

A seguir, daremos um exemplo da expansão de número irracional.

Exemplo 5.2.1 Utilizando o exemplo 4.2.3.b, encontrar a expansão do número irracional $\sqrt{2}$ em fração contínua.

Inicialmente, temos que o maior inteiro de $a_0 = [\sqrt{2}] = 1$ e

$$\sqrt{2} = a_0 + \frac{1}{x_0} = 1 + \frac{1}{x_0}$$

Isolando o valor de x , vem

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1 \cdot (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2} + 1$$

Assim, podemos escrever o termo x_0 da seguinte forma:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_0} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

Como o maior inteiro de $a_1 = \lfloor \sqrt{2} + 1 \rfloor = 2$ temos

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_1}$$

Donde obtemos

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2} + 1$$

Logo

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_0} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}$$

Continuando o processo, e sendo o maior inteiro de $a_2 = \lfloor \sqrt{2} + 1 \rfloor = 2$, vem

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2} + 1$$

Como resultado, temos que $x_1 = x_2$. Repetindo-se o processo de aproximações sucessivas, encontraremos $x_3 = x_2$, $x_4 = x_3$, ... Portanto, depois das substituições feitas em cada etapa desse processo, obteremos a fração contínua infinita, representada conforme a seguir:

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}} \quad (5.6)$$

5.2.1 Frações periódicas

Fração periódica é uma representação em que a sequência de números, chamados de quocientes incompletos, se repetem periodicamente e indefinidamente na mesma ordem. Quando o período se inicia no primeiro quociente, a fração contínua é denominada periódica simples; nos demais casos, é denominada periódica composta. Colocamos uma barra sobre a parte que se repete que é chamada de período da fração contínua.

No exemplo 5.2.1 encontramos a sequência de quocientes do número irracional $\sqrt{2}$ cuja representação em fração contínua é dada por $[1; 2, 2, 2, \dots] = [1, \bar{2}]$:

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots] = [1, \bar{2}] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}$$

Outros exemplos de representações de frações contínuas periódicas

$$-\sqrt{2} = [-2; 1, 1, 2, 2, 2, \dots] = [-2; 1, 1, \bar{2}]$$

$$-\sqrt{3} = [-2; 3, 1, 2, 1, 2, \dots] = [-2; 3, \bar{1}, \bar{2}]$$

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots] = [1, \bar{1}, \bar{2}]$$

$$\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, 4, \dots] = [2, \bar{4}]$$

$$\sqrt{10} = [3; 6, 6, 6, 6, \dots] = [3, \bar{6}]$$

Vimos também, no exemplo 4.2.3.b, que podemos reverter o processo, ou seja, dada a fração contínua periódica, encontrar o número irracional.

Observemos que nem todo número irracional possui uma representação periódica quando representado sob a forma de fração contínua. Um exemplo disso é o número π que tem a representação $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 2, 3, \dots]$ em que não existe sequência, período, que se repete. Em 1770, Lagrange caracterizou todos os irracionais que possuíam representação periódica, quando expressos sob a forma de fração contínua. Foi demonstrado que a fração contínua infinita que representa os irracionais é periódica se, e somente se, esta for raiz de um polinômio da forma $x^2 + bx + c = 0$ onde a, b, c são inteiros.

5.3 Convergentes e suas propriedades

Chamamos de convergentes todo número real x cuja sequência $(C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots)$ converge para x .

Por definição, os convergentes de uma fração contínua são todos os números racionais que podem ser escritos sob a forma p/q e são representados sob a forma de fração contínua simples.

Definição 5.3.1 Sejam $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$, $p_n \in \mathbb{Z}$ e $q_n \in \mathbb{N}$, primos entre si, tais que

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] \text{ para todo } n \geq 0$$

A fração contínua

$$C_n = \frac{p_n}{q_n}$$

A relação acima é denominada n -ésima reduzida ou convergente da fração contínua do número real x .

Podemos expressar as convergentes conforme a seguir:

$$c_0 = [a_0] = \frac{a_0}{1}; \quad c_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}; \quad c_2 = [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \dots$$

Em que $c_0, c_1, c_2, \dots$ são, respectivamente, os convergentes de $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$ e são chamados de primeiro, segundo, terceiro convergentes e assim sucessivamente. Nesse caso o n -ésimo convergente é a própria fração contínua, ou seja, o próprio número racional.

Exemplo 5.3.1 Determinar, usando a definição, os convergentes do número racional $11/7$.

O número racional $11/7$ pode ser representado sob a forma da fração contínua a seguir, conforme resolução no exemplo 4.2.1

$$\frac{11}{7} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = [1; 1, 1, 3]$$

Determinando os convergentes vem:

$$c_0 = [a_0] = [1] = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = 1$$

$$c_1 = [a_0; a_1] = [1; 1] = \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{1 \cdot 1 + 1}{1} = 2$$

$$c_2 = [a_0; a_1, a_2] = [1; 1, 1] = \frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{1 \cdot 2 + 1}{1 \cdot 1 + 1} = \frac{3}{2}$$

$$c_3 = [a_0; a_1, a_2, a_3] = [1; 1, 1, 3] = \frac{p_3}{q_3} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{3 \cdot 3 + 2}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{11}{7}$$

Vimos que todo número racional pode ser representado na forma de fração contínua e que se um número é irracional, ele pode ser representado, também, sob a forma de fração contínua simples, Isto é,

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$$

com a_0 inteiro positivo, negativo ou zero e $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ inteiros positivos

Portanto, podemos expressar as seguintes frações:

$$c_0 = [a_0] = \frac{a_0}{1} \quad \text{convergente de ordem zero}$$

$$c_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} \quad \text{convergente de ordem 1}$$

$$c_2 = [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} \quad \text{convergente de ordem 2}$$

$$c_3 = [a_0; a_1, a_2, a_3] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} \quad \text{convergente de ordem 3}$$

$\vdots$

$$c_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} \quad \text{convergente de orde n}$$

em que $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ são, respectivamente, os convergentes de $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$

e são chamados de primeiro, segundo, terceiro, n-ésimo convergentes. O último convergente é o número racional, ou seja, o n-ésimo convergente é a própria fração contínua.

Exposto isso, vamos considerar que $p_{-1} = 1$ e $q_{-1} = 0$. Assim,

$$c_0 = [a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}, \text{ onde } p_0 = a_0 \text{ e } q_0 = 1$$

Prosseguindo, teremos,

$$c_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}, \text{ onde } p_1 = a_0 a_1 + 1 \text{ e } q_1 = a_1$$

E determinando os demais convergentes, encontraremos, respectivamente:

$$c_2 = [a_0; a_1, a_2] = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2}, \text{ onde } p_2 = a_2 p_1 + p_0 \text{ e } q_2 = a_2 q_1 + q_0$$

$$c_3 = [a_0; a_1, a_2, a_3] = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{p_3}{q_3}, \text{ onde } p_3 = a_3 p_2 + p_1 \text{ e } q_3 = a_3 q_2 + q_1$$

$$c_4 = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4] = \frac{a_4 p_3 + p_2}{a_4 q_3 + q_2} = \frac{p_4}{q_4}, \text{ onde } p_4 = a_4 p_3 + p_2 \text{ e } q_4 = a_4 q_3 + q_2$$

Analisando esses resultados, e o exemplo 5.3.1, podemos inferir que os numeradores e os denominadores dos convergentes satisfazem as seguintes relações:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

Sendo assim podemos provar no teorema que segue, usando indução, que essas relações se verificam para $n = 2, 3, 4, \dots, n$.

Teorema 5.2 (Relações de Euler-Wallis) Seja $C_n = p_n/q_n$ o n-ésimo convergente da fração contínua $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$ para todo $n \geq 0$, então, o numerador p_n e denominador de q_n de c_n satisfazem as seguintes relações de recorrência:

$$\begin{cases} p_{n+2} = a_{n+2} p_{n+1} + p_n \\ q_{n+2} = a_{n+2} q_{n+1} + q_n \end{cases} \text{ onde } \begin{cases} p_0 = a_0, p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_0 = 1, q_1 = a_1 \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] \text{ para todo } n \geq 0$$

Demonstração

A prova será por indução matemática

Vamos mostrar inicialmente que a relação se verifica para $n = 0, 1$ e 2

para $n = 0$, temos $c_0 = [a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$, onde $p_0 = a_0$ e $q_0 = 1$

para $n = 1$, $c_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$, onde $p_1 = a_0 a_1 + 1$ e $q_1 = a_1$

para $n = 2$, $c_2 = [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2}$,

onde $p_2 = a_2 p_1 + p_0$ e $q_2 = a_2 q_1 + q_0$

Logo, o teorema é válido para $n = 0, 1, 2$

Por hipótese de indução, admitimos que para $n \leq 2$ o teorema seja válido, ou seja,

$$c_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n} \quad (5.8)$$

Por definição e utilizando hipótese de indução, assumimos que também seja válido para $a \geq 3$ ou seja para a_{n+1}

Dai

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}] = \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) \right] \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right)}}}}} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{a_{n+1} a_n p_{n-1} + a_{n+1} p_{n-2} + p_{n-1}}{a_{n+1} a_n q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2} + q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = c_{n+1} \end{aligned}$$

O que demonstra a validade do teorema e conclui a demonstração

Observemos que c_{n+1} pode ser obtido de c_n somente com a substituição de a_n por $\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$ o que nos garante que se pudermos mostrar que os números $p_{n-1}, p_{n-2}, q_{n-1}$ e q_{n-2} dependem somente dos quocientes parciais $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$.

Assim, podemos utilizar a equação (5.8) para determinarmos c_{n+1} pois assumimos, por hipótese de indução, que a expressão (5.8) é válida para todo $n \geq 0$, isto é:

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}}{a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}}$$

Notemos que os números p_{n-1} e q_{n-1} dependem somente dos números a_{n-1} e dos números $p_{n-2}, q_{n-2}, p_{n-3}, q_{n-3}$ os quais dependem dos primeiros $n-1$ quocientes parciais $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ sendo independentes de a_n . De tudo isso se conclui que eles não serão alterados com a substituição de a_n por $\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$, de forma que se pode usar a equação (5.8) para obtenção do convergente c_{n+1} .

No exemplo (5.3.1), vimos a determinação dos convergentes usando a definição. Vamos, agora, para auxiliar a tarefa de se encontrar os convergentes de forma mais simples e rápida, usar uma tabela construída a partir das relações (5.7) e (5.8), conforme abaixo.

n	-1	0	1	2	3	...	n
a_n		a_0	a_1	a_2	a_3		a_n
p_n	1	a_0	$a_0a_1 + 1$	$a_2p_1 + p_0$	$a_3p_2 + p_1$	...	$a_np_{n-1} + p_{n-2}$
q_n	0	1	a_1	$a_2q_1 + q_0$	$a_3q_2 + q_1$	...	$a_nq_{n-1} + q_{n-2}$
$c_n = \frac{p_n}{q_n}$		a_0	$\frac{p_1}{q_1}$	$\frac{p_2}{q_2}$	$\frac{p_3}{q_3}$	...	$\frac{p_n}{q_n}$

Tabela 5.1 – determinação de convergentes

Exemplo 5.3.2 Determinar os convergentes do número racional 384/157.

Inicialmente, aplicamos o algoritmo de Euclides, para determinar o mdc (384,147) e consequentemente encontrar os quocientes parciais da fração contínua (ver exemplo 4.1). Em continuidade preencheremos a tabela 5.1 de convergentes para encontrar as frações convergentes, conforme tabela 5.2 abaixo.

Assim, utilizando a tabela 5.2, e aplicando o processo de divisões sucessivas, encontraremos a fração contínua do número $384/157$ que será dada por $[2; 3, 6, 6]$, conforme abaixo:

a_n	2	2	4	8	2
384	157	70	17	2	1
70	17	2	1	0	

Tabela 5.2 – algoritmo de Euclides - $(384, 157) = 1$

Extraindo os coeficientes na tabela 5.2, a fração contínua do número racional é dada por:

$$\frac{384}{157} = [2; 2, 4, 8, 2]$$

Transportando esses números, os quocientes parciais, para a tabela dos convergentes, vem:

n	-1	0	1	2	3	4
a_n		2	2	4	8	2
p_n	1	2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	$(2 \cdot 2 + 1)4 + 2 = 22$	$22 \cdot 8 + 5 = 181$	$181 \cdot 2 + 22 = 384$
q_n	0	1	2	$2 \cdot 4 + 1 = 9$	$9 \cdot 8 + 2 = 74$	$74 \cdot 2 + 9 = 157$
$c_n = \frac{p_n}{q_n}$		$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{22}{9}$	$\frac{181}{74}$	$\frac{384}{157}$

Tabela 5.3 – determinação de convergentes

Da tabela 5.3, temos os seguintes convergentes:

$$c_0 = [2] = \frac{2}{1} = 2$$

$$c_1 = [2; 2] = \frac{5}{2}$$

$$c_2 = [2; 2, 4] = \frac{22}{9}$$

$$c_3 = [2; 2, 4, 8] = \frac{181}{74}$$

$$c_4 = [2; 2, 4, 8, 2] = \frac{384}{157}$$

Definimos anteriormente que $p_{-1} = 1, p_0 = a_0, p_1 = a_0 a_1 + 1$ e $q_{-1} = 0, q_0 = 1, q_1 = a_1$. Assim, podemos deduzir que para todo convergente, $C_n = p_n/q_n$, temos que o máximo divisor comum será 1, $\text{mdc} = (p_n, q_n) = 1$, conforme teorema a seguir.

Teorema 5.3 A relação

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n \quad (5.8)$$

se verifica para todo $n \geq 0$ onde p_n e q_n são respectivamente o numerador e denominador do n -ésimo convergente.

Demonstração

Demonstraremos por indução e vamos considerar as condições iniciais definidas como:

$$\begin{cases} p_0 = a_0, & p_1 = a_0a_1 + 1 \\ q_0 = 1, & q_1 = a_1 \end{cases}$$

então, para $n=0$, vem

$n = 0 \Rightarrow p_1q_0 - p_0q_1 = (a_0a_1 + 1) \cdot 1 - a_0a_1 = (-1)^0 \Rightarrow 1 = 1$ o que valida que a igualdade é verdadeira para $n=0$.

Assumimos, por hipótese de indução, que para $n = 0$, sendo $n \in \mathbb{N}$, a relação $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$ seja válida.

Admitindo que a relação é verdadeira para $n = 0$, daí mostraremos que a relação também se aplica para $n + 1$.

Por definição e usando a hipótese de indução, vem:

$$\begin{aligned} p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} &= (a_{n+1}p_{n+1} + p_n)q_{n+1} - p_{n+1}(a_{n+1}q_{n+1} + q_n) \\ &= a_{n+1}p_{n+1}q_{n+1} + p_nq_{n+1} - p_{n+1}a_{n+1}q_{n+1} - q_n p_{n+1} \\ &= p_nq_{n+1} - q_n p_{n+1} \\ &= (-1)(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}) \\ &= (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Logo a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ o que conclui e demonstra que a relação 5.8 é verdadeira.

Consideremos a tabela 5.3 do exemplo 5.3.2, vamos substituir os valores encontrados na relação 5.8. Assim teremos os resultados que comprovam a validade da referida relação.

$$n = 0 \Rightarrow p_1q_0 - p_0q_1 = 5.1 - 2.2 = 1 - 0 = 1 \Rightarrow 1 = (-1)^0 \Rightarrow 1 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow p_2q_1 - p_1q_2 = 22.2 - 5.9 = 44 - 45 = -1 \Rightarrow -1 = (-1)^1 \Rightarrow -1 = -1$$

$$n = 2 \Rightarrow p_3q_2 - p_2q_3 = 181.9 - 22.74 = 1629 - 1629 = 0 \Rightarrow 0 = (-1)^2 \Rightarrow 0 = 0$$

$$n = 3 \Rightarrow p_4q_3 - p_3q_4 = 384.74 - 181.157 = -1 \Rightarrow -1 = (-1)^3 \Rightarrow -1 = -1$$

O que comprova a validade da identidade.

Corolário 5.3.1 Para todo convergente $C_n = p_n/q_n$ temos que o máximo divisor comum, $\text{mdc} = (p_n, q_n) = 1$.

Demonstração

Se $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$ para $n \geq 0$ em que p_n e q_n são inteiros não nulos, então $\text{mdc} = (p_n, q_n) = 1$.

Vamos supor que $p_n = k\tilde{p}_n$ e $q_n = k\tilde{q}_n$, $0 < k < \mathbb{Z}$

Então,

$$p_{n+1}k\tilde{q}_n - k\tilde{p}_nq_{n+1} = (-1)^n$$

Dividindo ambos os membros da expressão acima por k , vem

$$p_{n+1}\tilde{q}_n - \tilde{p}_nq_{n+1} = \frac{(-1)^n}{k}$$

A igualdade é verdadeira para $k = \pm 1$ e, portanto, p_n e q_n são coprimos.

Como consequência, os p'_n s e q'_n s, obtidos da relação 5.7, são coprimos, isto é, os racionais p_n/q_n são frações irredutíveis, em termos de fração contínua são convergentes.

Estudamos no item 5.2 que é possível expressar um número irracional sob a forma de fração contínua infinita, porém a sequência de quocientes parciais tem infinitos termos.

Vimos alguns teoremas sobre convergentes e a partir de agora descreveremos outras propriedades que consolidem a obtenção de aproximações sucessivas, por racionais, para um número irracional.

Proposição 5.3.1 Seja α um número irracional qualquer e $\{p_n/q_n\}$ a sequência de seus convergentes, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = 0$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} \right| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} \right| = 0 \end{aligned}$$

Vimos no teorema 5.3 que o e-nésimo convergente associado a fração contínua simples $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots]$ é $C_n = p_n/q_n$, para todo $n \geq 1$, então, vale a relação $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, independente da fração contínua ser finita ou infinita.

Assim, podemos enunciar o seguinte teorema que complementa esse processo.

Teorema 5.4 Se e-nésimo convergente associado a fração contínua simples $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots]$ é $C_n = p_n/q_n$, para todo $n \geq 0$, então, vale

$$c_{n+1} - c_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}, \forall n \geq 0 \quad (5.9)$$

Demonstração

Tomando como base a relação 5.8 e dividindo todos os termos por $q_n q_{n+1}$ vem:

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n \Rightarrow \frac{p_{n+1}q_n}{q_n q_{n+1}} - \frac{p_nq_{n+1}}{q_n q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} \Rightarrow \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$$

Logo

$$c_{n+1} - c_n = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} \quad (5.10)$$

Esse resultado é positivo se n for par e negativo se, ímpar, o que implica que para dois convergentes, consecutivos, o de ordem ímpar é sempre maior do que o de ordem par.

Teorema 5.5 (monotonicidade dos convergentes) Sejam as sequências (p_n) e (q_n) de uma fração contínua simples definidas nas relações de recorrência (5.7) do teorema 5.2, para todo $n \geq 0$, então, temos:

- i) Os convergentes de ordem par crescem e os de ordem ímpar decrescem, à medida que suas ordens aumentam.
- ii) Os convergentes de ordem ímpar são, sempre maiores que os de ordem par, isto é,

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leq \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} \leq x \leq \frac{p_{2n+3}}{q_{2n+3}} \leq \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$$

Demonstração

Prova do item i)

- i) Para todo $n > 0$, vamos tomar dois convergentes consecutivos de mesma ordem em seguida apliquemos a relação de Euler-Wallis, (5.7), conforme a seguir:

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= a_{n+2}p_{n+1} + p_n \\ q_{n+2} &= a_{n+2}q_{n+1} + q_n \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{a_{n+2}p_{n+1} + p_n}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{a_{n+2}p_{n+1}q_n + p_nq_n - a_{n+2}q_{n+1}p_n - p_nq_n}{q_n(a_{n+2}q_{n+1} + q_n)} \\ &= \frac{a_{n+2}(p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n)}{q_n(a_{n+2}q_{n+1} + q_n)} \\ &= \frac{(-1)^n a_{n+2}}{q_n + 2q_n} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Assim, temos que se

$$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n a_{n+2}}{q_n + 2q_n} \Rightarrow c_{n+2} - c_n = \frac{(-1)^n a_{n+2}}{q_n + 2q_n} \quad (5.12)$$

Esse resultado é positivo se n for par e negativo se, ímpar, o que implica que a sequência de convergentes de ordem par (c_{2n}) é decrescente e de ordem ímpar (c_{2n+1}) é crescente, o que prova o item i).

Prova do item ii)

ii) Sabemos que

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(a_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}$$

De fato

a) Se n for par, então $x - p_n/q_n > 0 \Rightarrow x > p_n/q_n$

b) Se n for ímpar, então $x - p_n/q_n < 0 \Rightarrow x < p_n/q_n$

Dos itens acima, concluímos que x é maior que qualquer convergente de ordem ímpar e menor que qualquer convergente de ordem par, o que prova o item ii) e dessa forma se conclui a demonstração.

Disso, concluímos que a sequência de convergentes de índices pares (c_{2n}) é crescente e limitada superiormente por x , e de outra forma, a sequência dos convergentes de índices ímpares (c_{2n+1}) é decrescente e limitada inferiormente por x , isto é,

$$C_0 < C_2 < C_4 < \dots C_{2n} < \dots x \dots C_{2n+1} < \dots C_5 < C_3 < C_1$$

Observemos no resultado acima, que a sequência crescente e limitada superiormente assim como a sequência decrescente e limitada inferiormente convergem.

Temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = +\infty$ pois a sequência $(q_n)_{n \geq 1}$ é estritamente crescente.

Segue da identidade fundamental $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$ para $n \geq 0$ que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{q_n q_{n+1}} \right| = 0$$

Além disso, pelo teorema 5.5 podemos expressar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(a_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \right| = 0$$

Donde se conclui que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

Observemos pelo limite acima que os termos da sequência (c_n) se aproximam de x a proporção que n tende ao infinito, o que nos garante afirmar a convergência no caso de fração contínua simples com infinitos termos.

Percebemos até agora, que as frações contínuas são uma forma de obter aproximações racionais para números irracionais e que os convergentes são aproximações por falta ou por excesso dessas aproximações e quanto maior for a ordem de um convergente, mais próxima estará o seu valor de x .

Vamos dar um exemplo de forma a melhor entender esse teorema.

Exemplo 5.3.3 Dada a função contínua $[1; 1, 2, 1, 2, 1]$ verifique a propriedade anterior.

Inicialmente encontraremos os convergentes com o auxílio da tabela 5.1 de convergentes abaixo.

n	-1	0	1	2	3	...	n
a_n		a_0	a_1	a_2	a_3		a_n
p_n	1	a_0	$a_0 a_1 + 1$	$a_2 p_1 + p_0$	$a_3 p_2 + p_1$		$a_n p_{n-1} + p_{n-2}$
q_n	0	1	a_1	$a_2 q_1 + q_0$	$a_3 q_2 + q_1$		$a_n q_{n-1} + q_{n-2}$
$c_n = \frac{p_n}{q_n}$		a_0	$\frac{p_1}{q_1}$	$\frac{p_2}{q_2}$	$\frac{p_3}{q_3}$	...	$\frac{p_n}{q_n}$

Tabela 5.1 – determinação de convergentes

Substituindo os números na tabela 5.1 e fazendo as operações encontraremos os convergentes, conforme tabela 5.4.

n	-1	0	1	2	3	4	5
a_n		1	1	2	1	2	1
p_n	1	1	2	5	7	19	26
q_n	0	1	1	3	4	11	15
$c_n = \frac{p_n}{q_n}$		$c_0 = \frac{1}{1}$	$c_1 = \frac{2}{1}$	$c_2 = \frac{5}{3}$	$c_3 = \frac{7}{4}$	$c_4 = \frac{19}{11}$	$c_5 = \frac{26}{15}$

Tabela 5.4 – determinação de convergentes

Da tabela 5.4, notemos que os convergentes de ordens ímpares c_1, c_3, c_5 decrescem até $26/15$ e os de ordens pares c_0, c_2, c_4 crescem pois são menores que $26/15$, logo:

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}$$

Ou seja,

$$C_0 < C_2 < C_4 < x = C_5 < C_3 < C_1$$

No teorema anterior, mostramos que o limite para o qual a sequência dos convergentes converge é, na verdade, um número irracional que gerou a fração contínua, por meio do processo de obtenção de aproximações sucessivas, por racionais, para um número irracional.

A seguir veremos um resultado que confirmará esse fato.

Teorema 5.6 Seja $x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$ em que $\alpha_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4}, \dots]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para qualquer número real α , temos:

$$x = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} \text{ e } \alpha_{n+1} = \frac{p_{n-1} - q_{n-1}x}{q_n x - p_n} \quad (5.13)$$

Demonstração

Pelo teorema 5.2, ou seja, $\begin{cases} p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n \\ q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n \end{cases}$ temos que

$$x = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$$

Isolando α_{n+1} na expressão acima temos que

$$x(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}) = \alpha_{n+1}p_n + p_{n-1} \Rightarrow$$

$$x\alpha_{n+1}q_n + xq_{n-1} = \alpha_{n+1}p_n + p_{n-1} \Rightarrow$$

$$\alpha_{n+1}(xq_n - p_n) = p_{n-1} - xq_{n-1} \Rightarrow$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{p_{n-1} - xq_{n-1}}{xq_n - p_n}$$

o que prova a expressão (5.13)

Vamos considerar, agora, a sequência $a_0, a_1, a_2, \dots$ dada por (5.4), abaixo, e a sequência de convergentes $c_n = p_n/q_n$, ou seja,

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 + \frac{1}{x_0} = [a_0, x_0] = \left[a_0, a_1 + \frac{1}{x_1} \right] \\ &= [a_0, a_1, x_1] = \left[a_0, a_1, a_2 + \frac{1}{x_2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [a_0, a_1, a_2, x_2] = \left[a_0, a_1, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \right] \\
&= [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_{n-1}]
\end{aligned}$$

Assim, pelo teorema 5.6, vem que

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha_{n+1}] = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$$

Fazendo a diferença entre $\alpha - c_n$, vem

$$\begin{aligned}
\alpha - c_n &= \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\
&= \frac{q_n(\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}) - p_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} \\
&= \frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} \\
&= \frac{-(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} \\
&= \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} \tag{5.14}
\end{aligned}$$

A expressão (5.14) representa a diferença entre um número irracional e o seu e-nésimo convergente, isto é, o tamanho do erro entre esses termos e com isso se conclui que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \right| = 0$$

Tendo em vista que a sequência dos q_n é crescente e os números reais são positivos.

Por fim, temos que

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

Como o limite do convergente é igual a α e temos que o limite de q_n tende para o infinito, uma vez que a sequência de q_n é estritamente crescente, podemos concluir que $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ e portanto é irracional.

No teorema 5.5, mostramos que toda fração contínua simples infinita representa um irracional e por conseguinte o limite para o qual a sequência dos convergentes converge é, na verdade, esse número irracional. Veremos no teorema a seguir essa propriedade.

Teorema 5.7 Toda fração contínua simples infinita $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ representa um número irracional.

Demonstração

Consideremos $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ e pelo teorema 5.5 vimos que α está entre c_n e c_{n+1} e que

$$0 < |\alpha - c_n| < |c_{n+1} - c_n|$$

Multiplicando a desigualdade acima por q_n e usando (5.9), $c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}$, vem

$$0 < |\alpha q_n - p_n| < |c_{n+1} q_n - c_n q_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$$

Vamos considerar que α seja racional, ou seja, $\alpha = a/b$, a e b inteiros com $b > 0$, assim a desigualdade acima após feita a multiplicação por b , ficará

$$|\alpha q_n - b p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$$

Notemos que a sequência q_n é crescente e podemos definir n suficientemente grande de forma que $b < q_{n+1}$.

Isso nos garante que o inteiro $\alpha q_n - b p_n$ estaria entre 0 e 1, o que é impossível, e portanto, se conclui a demonstração.

Nos próximos teoremas, apresentaremos algumas importantes propriedades, a saber : todo convergente p_n/q_n do irracional α satisfaz $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$ e se o racional a/b , com $b > 0$, $\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$, então a/b é um dos convergentes da representação do irracional em fração contínua.

É importante observar que uma condição necessária para que uma aproximação, por número racional, seja considerada boa é que o tamanho do erro absoluto $|x - p/q|$ seja o menor possível e que também os inteiros p, q não sejam tão grandes. Por isso, devemos minimizar o erro $|x - p/q|$, bem como o valor do denominador q_n para que essas aproximações sejam tão boas quanto se desejar.

Por definição, o erro reduzido da aproximação de x por p/q , denotado por $|q_x - p|$ é a razão entre $|x - p/q|$ e o erro máximo da aproximação por falta com denominador q é igual a $1/q$.

O teorema 5.8 a seguir nos mostrará que o erro absoluto decorrente da substituição de x pelo convergente p_n/q_n é menor que $1/2q_n^2$ e, pelo menos uma de duas aproximações racionais consecutivas, tem erro menor do que $1/2q_n^2$ ou menor do que $1/2q_{n+1}^2$

Teorema 5.8 (teorema de Dirichlet) Todo convergente $c_n = p_n/q_n$ de x satisfaz a desigualdade

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

além disso

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{ou} \quad \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}$$

Demonstração

Inicialmente, vamos considerar que x pertence ao intervalo de extremos p_n/q_n e p_{n+1}/q_{n+1} , em que o comprimento é dado por

$$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Assim, teremos

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| \frac{1}{q_n q_{n+1}} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

Agora, vamos supor, por absurdo que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{e} \quad \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{2q_{n+1}^2}$$

Daí segue que

a) Se n for par e $x \in \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \frac{p_n}{q_n} \right)$ então

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - x \right| \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2}$$

b) Se n for ímpar, $x \in \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right)$

Então,

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - x \right| \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2}$$

O que implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_n q_{n+1}} &\geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} \Leftrightarrow \frac{1}{q_n q_{n+1}} \geq \frac{q_{n+1}^2 + q_n^2}{2q_n^2 q_{n+1}^2} \Leftrightarrow 2q_n q_{n+1} \geq q_{n+1}^2 + q_n^2 \Leftrightarrow \\ 0 &\geq q_{n+1}^2 - 2q_n q_{n+1} + q_n^2 \Leftrightarrow 0 \geq (q_{n+1} - q_n)^2 \Leftrightarrow 0 \geq q_{n+1} - q_n \end{aligned}$$

O que se deduz que $q_n = q_{n+1}$ é um absurdo, pois na verdade $q_n < q_{n+1}$

Notemos que todas as aproximações racionais que se origem das frações contínuas simples tem erro absoluto menor do que o inverso do denominador convergente ao quadrado. Associa-se a isso, que uma dentre duas aproximações consecutivas te, erro absoluto menor do que a metade do inverso do denominador do convergente ao quadrado.

A título de informação, o teorema de Dirichlet marca o início do ramo da matemática denominado aproximações diofantina que conecta assuntos ligados a teoria dos números com questões de aproximações de números irracionais.

Teorema 5.9 Seja α um irracional e p_n/q_n os convergentes da expansão de α em fração contínua. Se a/b for um número racional com $b > 0$ tal que

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|$$

sendo $n \geq 1$ então $b > q_n$. E se $|ab - a| < |aq_n - p_n|$ para algum $n \geq 0$, então $b \geq q_{n+1}$

Demonstração

Vamos, inicialmente, demonstrar que a segunda parte do teorema implica a primeira.

Consideremos falsa a primeira parte, teremos a existência de um racional a/b tal que

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \text{ e } b \leq q_n$$

Assim, das desigualdades acima, obteremos

$$|\alpha b - a| < |\alpha q_n - p_n|$$

Entretanto a segunda parte do teorema nos diz que isto implica em $b \geq q_{n+1}$ o que nos leva a uma contradição, pois $q_n < q_{n+1}$ para $n \geq 0$

Vamos provar a segunda parte, procedendo, outra vez, por contradição. Assim, vamos supor que

$$|\alpha b - a| < |\alpha q_n - p_n| \text{ e } b < q_{n+1}$$

Além disso, consideremos o sistema linear em x e y , conforme abaixo

$$\begin{cases} p_n x + p_{n+1} y = a \\ q_n x + q_{n+1} y = b \end{cases} \quad (5.15)$$

E tendo como base a expressão (5.8), isto é, $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, veremos que o determinante principal do sistema é ± 1 o que nos diz que este sistema tem solução em inteiros x e y .

Na verdade os termos x e y são diferentes de zero, pois caso fosse $x=0$ teríamos que $b = yq_{n+1}$ o que implicaria $y > 0$ e $b \geq q_{n+1}$ em contradição com $b < q_{n+1}$.

Se $y = 0$, então $a = xp_n, b = xq_n$ e

$$\begin{aligned} |\alpha b - a| &= |\alpha x q_n - x p_n| \\ &= |x| |\alpha q_n - p_n| \geq |\alpha q_n - p_n| \end{aligned}$$

Tendo em vista que $|x| \geq 1$ nos mostra outra vez uma contradição.

Mostraremos a seguir que x e y possuem sinais opostos.

- Se $y < 0$, então $xq_n = b - yq_{n+1}$, isto é $x > 0$
- Se $y > 0$, então $b < yq_{n+1}$, pois $b < q_{n+1}$

Portanto, xq_n é negativo o que nos diz que $x < 0$

Dessa forma, de (5.14), concluímos que $\alpha q_n - p_n$ e $\alpha q_{n+1} - p_{n+1}$ possuem sinais opostos e, portanto, $x(\alpha q_n - p_n)$ e $y(\alpha q_{n+1} - p_{n+1})$ possuem o mesmo sinal.

Assim da expressão do sistema (5.15), vem que

$$\alpha - b = x(\alpha q_n - p_n) + y(\alpha q_{n+1} - p_{n+1})$$

Como os dois termos da direita da igualdade acima tem o mesmo sinal, temos

$$\begin{aligned} |\alpha b - a| &= |x(\alpha q_n - p_n) + y(\alpha q_{n+1} - p_{n+1})| \\ &= |x(\alpha q_n - p_n)| + |y(\alpha q_{n+1} - p_{n+1})| \\ &> |x(\alpha q_n - p_n)| = |x||\alpha q_n - p_n| \\ &\geq |\alpha q_n - p_n| \end{aligned}$$

Concluímos pelas demonstrações acima que há uma contradição e portanto o teorema está provado.

Teorema 5.10 (Lagrange) Seja α um irracional. Se existir um racional a/b , $b \geq 1$ tal que

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$$

então a/b é um dos convergentes da expansão de α em fração contínua.

Demonstração

Admitimos que exista um racional a/b que satisfaça a hipótese do teorema e que a/b não seja um convergente da fração contínua de α . Sem perda de generalidade podemos que o máximo divisor comum $(a, b) = 1$.

Seja, então, n inteiro tal que $q_n \leq b < q_{n+1}$. E vamos supor que

$$\frac{a}{b} \neq \frac{p_n}{q_n}$$

De modo que

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{bq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}} \text{ sendo que } q_n \leq b < q_{n+1}$$

Assim, sendo a/b está fora do intervalo de extremos p_n/q_n e p_{n+1}/q_{n+1}

Dessa forma, temos duas possibilidades

$$\text{Se } b \geq \frac{q_{n+1}}{2}, \text{ então } \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| \geq \frac{1}{bq_{n+1}} \geq \frac{1}{2b^2}$$

Isso é um absurdo, pois contraria a hipótese inicial de que $b < q_{n+1}$

$$\text{Ou Se } b < \frac{q_{n+1}}{2},$$

$$\text{então } \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| \geq \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{a}{b} \right| - \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{bq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - b}{bq_n q_{n+1}} > \frac{1}{2bq_n} \geq \frac{1}{2b^2}$$

o que é um absurdo.

Logo, se uma aproximação do irracional α por um racional a/b tem um erro absoluto menor que o inverso do dobro do quadrado do denominador c , essa aproximação do irracional pertence necessariamente a sequência de convergentes de fração contínua de α .

Conclui-se, portanto, que um racional a/b é uma excelente aproximação, a melhor aproximação, do irracional α , então a/b pertence a sequência dos convergentes da fração contínua.

Em geral, os coeficientes de uma fração contínua podem ser qualquer número natural, quão maiores, mais rapidamente suas convergentes se aproximam do número irracional.

Item 6

Aplicações de Frações Contínuas

6.1 Introdução

No que se referem as aplicações, as frações contínuas podem ser utilizadas em diversas áreas da matemática tais como aproximações de números irracionais como o número π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{e}$, por exemplo, que são obtidos por meio de convergentes de frações contínuas. Na física teórica, podemos ver utilização na modelagem e compressão de fenômenos naturais, assim como na teoria quântica de campos e na teoria das cordas. Na computação, podemos ter aplicações no algoritmos de convergências, para calcular convergentes de frações contínuas, importantes em área de criptografia e método de otimização. Também podem ser exploradas em outras áreas como estatística para análise de dados fracionais e modelagem probabilística.

Ao longo deste estudo, vimos algumas formas de se aproximar números irracionais e algumas propriedades dos convergentes. Agora, de forma introdutória, apresentamos as equações diofantinas lineares e a equação de Pell que nos permitem melhor entender os problemas da teoria dos números, envolvendo números inteiros e combinações lineares.

As equações diofantinas lineares apesar de ser um assunto recente, já vinham sendo discutidas há séculos, e nesse período acreditavam que essas equações tratavam-se de erros de enunciados por ser uma abordagem que envolvia problemas indeterminados ou impossíveis e por isso, raramente, eram foco de atenção de muitos matemáticos. A maioria dos problemas assim tratados pelas civilizações antigas admitiam uma única solução, por exemplo, as equações polinomiais do segundo grau.

Porém, alguns problemas de indeterminação linear foram encontrados nos manuscritos de Aryabhata, um astrônomo e matemático Hindu que viveu em cerca de 500 d.C. Esses manuscritos indicam que foi o matemático e astrônomo Brahma-gupta (598-665 d.C.) o primeiro a encontrar a solução geral para a equação polinomial.

A Teoria dos Números é uma área da Matemática que estuda as propriedades de números em geral e, particularmente, dos números inteiros. Inserido nessa teoria, encontra-se o estudo das equações representadas na forma a seguir:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

onde f é uma função polinomial de n variáveis com $n \geq 2$ e $x_1, x_2, \dots, x_n$ e assumem somente valores inteiros. A esse tipo de equações chamamos de equações diofantinas, que recebe esse nome em homenagem ao matemático grego Diofanto de Alexandria, que se interessou em resolver problemas cujas soluções fossem números inteiros ou racionais.

Nada se sabe sobre a nacionalidade de Diofanto e da época exata em que viveu, levando os historiadores a situá-lo no século III. Diofanto de Alexandria teve uma enorme importância no desenvolvimento da Álgebra influenciando fortemente os europeus que posteriormente se dedicaram à Teoria dos Números. De sua produção matemática se conhecem apenas fragmentos de uma obra que trata de números poligonais e *Arithmetica*, razão pela qual ele é, muitas das vezes, considerado o “pai da álgebra”.

A título de exemplo, entre as Equações Diofantinas mais famosas, encontra-se a equação $x^n + y^n = z^n$. Muitos matemáticos estudaram essa equação ao longo da história, dentre alguns, o matemático francês, Pierre de Fermat, que após ler a obra *Arithmetica* de Diofanto, sugeriu que as equações do tipo $x^n + y^n = z^n$ não possuem soluções com valores inteiros e positivos para x , y e z , quando n for um inteiro maior do que 2.

6.2. Equações Diofantinas lineares com duas variáveis

Devido a *Arithmetica*, hoje são chamadas *equações diofantinas* todas as equações polinomiais, com duas ou mais incógnitas, com coeficientes inteiros, em que o expoente de maior grau é igual a dois e cujas soluções estão contidas no conjunto dos números inteiros.

Uma equação diofantina é linear se esta estiver na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = c \quad (6.1)$$

em que seus coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números inteiros. Isto significa escrever c como combinação linear inteira de todos os a_i , $1 \leq i \leq n$.

Dessa forma, encontrar uma solução para a Equação (6.1) implica em encontrar um conjunto de valores inteiros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tais que, ao serem substituídos nos respectivos lugares da n-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, a condição (6.1) é verificada.

Entretanto, tratamos neste item, de forma introdutória, de equações desse tipo, nos restringindo somente àquelas com duas variáveis x e y , com coeficientes $a_1 = a$ e $a_2 = b$, ou seja, as equações do tipo:

$$ax + by = c \quad (6.2)$$

em que a, b são inteiros não nulos.

O termo diofantina se refere a qualquer equação cujos coeficientes são números inteiros, enquanto que o termo linear é uma referência ao fato de que a equação acima representa uma reta no plano cartesiano, ou seja, resolver uma equação diofantinas do tipo $ax + by = c$, nas variáveis $x, y \in \mathbb{Z}$, é determinar os pontos da reta que contêm coordenadas inteiras.

Uma solução para a equação (6.2) é um par (x_0, y_0) de inteiros tais que a sentença abaixo seja verdadeira

$$ax_0 + by_0 = c$$

Definição 6.1 Uma equação diofantina linear em duas variáveis é uma expressão da forma

$$ax_0 + by_0 = c$$

com $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e cujas soluções são inteiros com $a, b \neq 0$

Exemplos de equações diofantinas:

$$2x + 3y = 5, \quad 4x - 2y = 7, \quad 2x^2 - y^2 = 18$$

Teorema 6.1 Uma equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução se, e somente se, $d \mid c$, sendo que $d = \text{mdc}(a, b)$ é um divisor de c .

Demonstração

($\Rightarrow$) Se (x_0, y_0) é uma solução, vale a igualdade $ax_0 + by_0 = c$

Como $(a, b) \mid ax_0 + by_0 = c$ ou $(d \mid a \text{ e } d \mid b \Rightarrow d \mid c)$ portanto $(a, b) \mid c$

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se $(a, b) \mid c$ então $c = (a, b)k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$

Por outro lado existem inteiros m e n tais que $(a, b) = ma + nb$

Dai

$$c = (a, b)k = a(mk) + b(nk)$$

Portanto, o par (mk, nk) é a solução da equação considerada e admite-se

Observemos que se (x_0, y_0) é uma solução de $ax + by = c$, com $a, b > 0$, então

$(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, -y_0)$ são soluções respectivamente das equações
 $(-a)x + by = c$, $ax + (-b)y = c$, $(-a)x + (-b)y = c$

Exemplo 6.1 Verificar se as equações diofantinas lineares abaixo tem solução inteira.

- $2x + 4y = 3$

Não possui solução inteira, pois pelo teorema 6.1, $d = \text{mdc}(2, 4) = 2$ que não divide 3.

- $9x + 16y = 35$

Tem solução, pois sendo $d = \text{mdc}(9, 16) = 1$ e d é um divisor de c , isto é, $1 \mid 35$, logo a equação tem uma solução inteira.

Teorema 6.2 Se a equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução (x_0, y_0) então tem infinitas soluções e o conjunto desta é dada por

$$S = \{(x_0 + (b/d)t, y_0 - (a/d)t), t \in \mathbb{Z}\}$$

em que $d \mid c$, sendo que $d = \text{mdc}(a, b)$ é um divisor de c , então,

$$x = x_0 + tb \text{ e } y = y_0 - ta, \text{ com } t \in \mathbb{Z}$$

Demonstração

Vamos mostrar inicialmente que todo par $(x_0 + (b/d)t, y_0 - (a/d)t)$ é solução da equação considerada e que de fato

$a(x_0 + (b/d)t + b(y_0 - (a/d)t)) = ax_0 + by_0 + [(ab - ba)/d]t = ax_0 + by_0 = c$ pois (x_0, y_0) é solução, por hipótese.

De outra parte, vamos considerar (x', y') uma solução genérica da equação, então

$$ax' + by' = c = ax_0 + by_0$$

Daí

$$a(x' - x_0) = b(y_0 - y')$$

Como d é divisor de a e b , então $a = dr$ e $b = ds$ para determinados inteiros r e s primos entre si. Logo

$$dr(x' - x_0) = ds(y_0 - y')$$

Portanto,

$$r(x' - x_0) = s(y_0 - y')$$

Observemos que essa igualdade mostra que r divide $s(y_0 - y')$. Mas como r e s são primos, então, r divide $(y_0 - y')$. Portanto,

$$(y_0 - y') = rt$$

para algum $t \in \mathbb{Z}$.

Considerando que $r = a/d$, então

$$y' = y_0 - (a/d)t$$

Observando-se agora que, em consequência,

$$r(x' - x_0) = s(y_0 - y') = srt$$

O que se obtém:

$$x' = x_0 + (b/d)t$$

Importante observar que o fato de uma equação diofantina $ax + by = c$ ter infinitas soluções significa, geometricamente, que a reta da equação $ax + by = c$ possui uma infinidade de pontos de coordenadas inteiras do plano cartesiano.

Exemplo 6.2 Encontrar todas as soluções das equações diofantinas lineares abaixo.

a) $31x + 11y = 2$

Solução

1. Aplicar o algoritmo de Euclides para encontrar o mdc, teorema 3.2
2. Verificar se tem solução, ou seja, $d|c$, teorema 6.1
3. Expressar o racional em forma de fração contínua
4. Determinar os convergentes, utilizar a tabela 5.1. Dentre os convergentes, os dois últimos, c_n e c_{n-1} , indicarão a solução da equação que satisfaz a relação teorema 5.3.
5. Encontrar a solução geral, teorema 6.2

Vimos que (x_0, y_0) é uma solução particular da equação $31x + 11y = 2$, então $(2x_0, 2y_0)$ é solução da equação dada.

Vamos aplicar o algoritmo de Euclides, teorema 3.2, para encontrar uma solução para a equação, temos:

$$31 = q \cdot 11 + r$$

$$31 = 2 \cdot 11 + 9$$

$$11 = 1 \cdot 9 + 2$$

$$9 = 4 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

Como o mdc $(31, 11) = 1$ e é um divisor de 2, isto é, $1 \mid 2$, logo a equação tem soluções.

Da última equação $(2, 1) = 1$, temos que 1 é o último resto não-nulo na sequência de divisões sucessivas e dessa forma podemos expressar o racional em forma de fração contínua conforme abaixo:

$$\frac{31}{11} = 2 + \frac{9}{11} = 2 + \frac{1}{\frac{11}{9}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{2}{9}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

Logo a fração contínua associada ao número racional

$$\frac{31}{11} = [2; 4, 1, 2] = \frac{p_3}{q_3}$$

Do teorema 5.3, vem,

$$31p_2 - 11q_2 = 1$$

Determinamos os convergentes (ver tabela 5.1), tabela 6.1, e em seguida utilizamos os dois últimos convergentes c_n e c_{n-1} para obtermos a solução da equação que satisfaz a relação do teorema 5.3.

n	-1	0	1	2	3
a_n		2	1	4	2
p_n	1	2	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$(4 \cdot 3 + 2) = 14$	$2 \cdot 14 + 3 = 31$
q_n	0	1	1	$4 \cdot 1 + 1 = 5$	$2 \cdot 5 + 1 = 11$
$c_n = \frac{p_n}{q_n}$		$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{31}{11}$

Tabela 6.1 – determinação de convergentes

Observe na tabela 6.1 os convergentes $c_2 = 14/5$ e $c_3 = 31/11$. Assim, como,

$$\frac{31}{11} - \frac{14}{5} = 1$$

Logo $x_0 = 5$ e $y_0 = -14$ é uma solução particular de

$$31p_2 - 11q_2 = 1.$$

Temos que a equação $31x + 11y = 2$, logo multiplicando a equação acima por 2, vem

$$31(2 \cdot 5) - 11(2 \cdot -14) = 2 \cdot 1 \Rightarrow 31(10) - 11(-28) = 2$$

Assim, $x_0 = 10$ e $y_0 = 28$ é uma solução particular da equação $31x + 11y = 2$

A solução geral, teorema 6.2, que satisfaz a equação geral é dada por

$$x = x_0 + tb \quad \text{e} \quad y = y_0 - ta, \quad \text{com } t \in \mathbb{Z}$$

$$x = 10 + 11t \quad \text{e} \quad y = -28 - 31t, \quad \text{com } t \in \mathbb{Z}$$

b) $12x + 7y = 9$

Vimos que (x_0, y_0) é uma solução particular da equação $12x + 7y = 9$, então $(9x_0, 9y_0)$ é solução da equação dada.

A exemplo do caso anterior, vem

$$12 = 1 \cdot 7 + 5$$

$$7 = 1 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

Como o mdc $(12, 7) = 1$ e é um divisor de 9, isto é, $1 \mid 9$, logo a equação tem

soluções.

Sabemos que o racional $12/7$ é representado pela fração contínua $[1; 1, 2, 2]$, conforme abaixo,

$$\frac{12}{7} = 1 + \frac{7}{12} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{7}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{5}{7}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$$

Logo a fração contínua associada ao número racional

$$\frac{12}{7} = [1; 1, 2, 2] = \frac{p_3}{q_3}$$

Calculando o convergente c_2 , conforme tabela 6.2 vem

n	-1	0	1	2	3
a_n		1	1	2	2
p_n	1	1	$1 \cdot 1 + 1 = 2$	$(2 \cdot 2 + 1) = 5$	$2 \cdot 5 + 2 = 12$
q_n	0	1	1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$2 \cdot 3 + 1 = 7$
$c_n = \frac{p_n}{q_n}$		$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{12}{7}$

Tabela 6.2 – determinação de convergentes

Da tabela 6.2 e do teorema 5.3 segue que

$$12p_2 - 7q_2 = -1$$

Note na tabela 6.2 que o convergente $c_2 = 5/3$. Logo $x_0 = 3$ e $y_0 = -5$ é uma solução particular de $12p_2 - 7q_2 = -1$. Multiplicando-se esta última equação por -9, vem

$$12(-9 \cdot 3) - 7(-9 \cdot -5) = -9 \cdot -1 \Rightarrow 12(-27) + 7(45) = 9$$

Logo $x_0 = -27$ e $y_0 = 45$ é uma solução particular da equação $12x + 7y = 9$

Assim decorre do teorema 6.2 que a equação geral é dada por

$$x = x_0 + tb \quad e \quad y = y_0 - ta, \quad \text{com } t \in \mathbb{Z}$$

$$x = -27 + 7t \quad e \quad y = -45 - 12t, \quad \text{com } t \in \mathbb{Z}$$

Observações

a) Podemos concluir que se, $d \mid c$, sendo que $d = \text{mdc}(a, b)$ é um divisor de c , então a equação diofantina linear $ax + by = c$ admite um número infinito de soluções, uma para cada valor arbitrário t .

b) Se $d = \text{mdc}(a, b) = 1$ e (x_0, y_0) é uma solução da equação diofantina linear $ax + by = c$, então todas as soluções dessa equação são dadas por

$$x = x_0 + tb \text{ e } y = y_0 - ta, \quad \text{com } t \in \mathbb{Z}, \text{ inteiro arbitrário}$$

c) Uma solução particular da equação diofantina pode ser obtida por tentativas e erros ou pelo algoritmo de Euclides, conforme exemplos anteriores.

6.3 Equação de Pell

O nome da equação de Pell vem do matemático Leonard Euler (1707) que em uma carta para Goldbach confundiu o nome de William Brouncker, o primeiro matemático que deu um algoritmo para resolver a equação com o matemático inglês John Pell (1611-1685).

A equação de Pell é na verdade um método eficaz de aproximações de raízes quadradas por números racionais. E suas soluções podem ser usadas para aproximar com precisão a raiz quadrada por números racionais.

Mostraremos como se pode usar o conceito de frações contínuas para encontrar soluções inteiras para a equação de Pell do tipo

$$x^2 - dy^2 = m$$

Onde m é um número inteiro e d um número natural não-nulo e que não seja um quadrado perfeito.

A equação de Pell é um caso particular das equações diofantinas, chamadas de quadráticas quando $x^2 - dy^2 = m$, com x, y inteiros e d um número inteiro positivo e diferente de um quadrado perfeito. No caso, em que $d < 0$ e $d > 0$ é um quadrado perfeito a equação possui um finito de soluções e para $a = 0$ um número infinito.

Definição 6.3.1 Considere d um número natural não nulo que não seja quadrado perfeito. A equação de Pell é dada por,

$$x^2 - dy^2 = m, \text{ com } m \text{ inteiros}$$

Vamos considerar aqui, particularmente o caso em que $m=1$, sendo o par ordenado (x, y) uma solução inteira da equação de Pell.

Justificativa

Supondo que $d = p^2$ seja um quadrado perfeito, p é inteiro, e $m=1$, então

$$(x^2 - p^2 y^2) = 1$$

Assim,

$$(x^2 - p^2 y^2) = 1 \Rightarrow (x - py)(x + py) = 1 \text{ ou } (x - py)(x + py) = -1$$

Como as soluções procuradas são inteiras, temos que

$$(x - py) = 1 \text{ e } (x + py) = 1$$

Assim

$$(x - py)(x + py) = 1 \Rightarrow x - x = py + py \Rightarrow 0 = 2py \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1$$

Mas também temos que

$$(x - py)(x + py) = -1 \Rightarrow x - x = py + py \Rightarrow 0 = 2py \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -1$$

Portanto, somente os pares ordenados $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ são soluções triviais da equação de Pell e por outro lado estamos interessados em encontrar soluções não triviais e, por conseguinte, d não pode ser um número natural positivo que seja um quadrado perfeito.

As soluções da equação de Pell correspondem aos pontos com coordenadas inteiras sobre uma hipérbole, pois a igualdade, abaixo, representa esse tipo de cônicas no sistema cartesiano.

$$x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{d^2}} = 1$$

Exemplo 6.3.1 Encontrar soluções para a equação de Pell dada por

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

Sabemos que $\sqrt{5} = [2; 4, 4, \dots]$, assim a representação em fração contínua será:

$$\sqrt{5} = [2; 4, 4, \dots] = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \ddots}}}$$

Podemos encontrar, uma solução $(x_1, y_1) = (9, 4)$, conforme abaixo

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

O par ordenado $(x_2, y_2) = (161, 72)$, é outra solução, ou seja,

$$a_0 = \lfloor \sqrt{19} \rfloor = 4$$

$$a_0 = \lfloor \sqrt{19} \rfloor = 4 \text{ e } \sqrt{19} = a_0 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow \sqrt{19} = 4 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{19} - 4} = \frac{4 + \sqrt{19}}{3}$$

$$a_1 = \left\lfloor \frac{4 + \sqrt{19}}{3} \right\rfloor = 2 \text{ e } \frac{4 + \sqrt{19}}{3} = a_1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{4 + \sqrt{19}}{3} = 2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\frac{4 + \sqrt{19}}{3} - 2} = \frac{2 + \sqrt{19}}{5}$$

$$a_2 = \left\lfloor \frac{2 + \sqrt{19}}{5} \right\rfloor = 1 \text{ e } \frac{2 + \sqrt{19}}{5} = a_2 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow \frac{2 + \sqrt{19}}{5} = 1 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{\frac{2 + \sqrt{19}}{5} - 1} = \frac{3 + \sqrt{19}}{2}$$

$$a_3 = \left\lfloor \frac{3 + \sqrt{19}}{2} \right\rfloor = 3 \text{ e } \frac{3 + \sqrt{19}}{2} = a_3 + \frac{1}{x_4} \Rightarrow \frac{3 + \sqrt{19}}{2} = 3 + \frac{1}{x_4} \Rightarrow x_4 = \frac{1}{\frac{3 + \sqrt{19}}{2} - 3} = \frac{3 + \sqrt{19}}{5}$$

$$a_4 = \left\lfloor \frac{3 + \sqrt{19}}{5} \right\rfloor = 1 \text{ e } \frac{3 + \sqrt{19}}{5} = a_4 + \frac{1}{x_5} \Rightarrow \frac{3 + \sqrt{19}}{5} = 1 + \frac{1}{x_5} \Rightarrow x_5 = \frac{1}{\frac{3 + \sqrt{19}}{5} - 1} = \frac{2 + \sqrt{19}}{3}$$

$$a_5 = \left\lfloor \frac{2 + \sqrt{19}}{3} \right\rfloor = 2 \text{ e } \frac{2 + \sqrt{19}}{3} = a_5 + \frac{1}{x_6} \Rightarrow \frac{2 + \sqrt{19}}{3} = 2 + \frac{1}{x_6} \Rightarrow x_6 = \frac{1}{\frac{2 + \sqrt{19}}{3} - 2} = \frac{4 + \sqrt{19}}{1}$$

$$a_6 = \left\lfloor \frac{4 + \sqrt{19}}{1} \right\rfloor = 8$$

Assim, concluímos que $4 + \sqrt{19} = [8; \overline{2,1,3,1,2}]$ e $\sqrt{19} = [4; \overline{2,1,3,1,2,8}]$

Vimos também que $x^2 - 19y^2 = 1$ tem como solução x/y ou seja uma convergente p_n/q_n da função contínua $\sqrt{d}$, com $\sqrt{d} = \sqrt{19}$.

Segue que

$$\frac{p_n}{q_n} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} = \frac{170}{39}$$

Logo $(170, 39)$ é uma solução da equação $x^2 - 19y^2 = 1$, pois $170^2 - 39y^2 = 1$ o que nos leva a concluir que também é a solução mínima da equação dada.

Considerações Finais

Nesta monografia apresentei uma abordagem histórica das frações contínuas e revisei conceitos e propriedades de alguns conjuntos numéricos de forma a embasar o real objetivo do trabalho que é o estudo das frações contínuas simples e seus aspectos que envolvem expansões dos números racionais e irracionais obtidas por sucessivas aplicações do algoritmo de divisão de Euclides e, mais especificamente, convergentes, suas propriedades, demonstrações e o processos de aproximações sucessivas que fornecem as melhores aproximações por números racionais para um número irracional, com erros tão pequenos quanto se desejar. E por fim, aplicações das frações contínuas nas resoluções de equações Diofantinas e equação de Pell.

Não obstante o conteúdo frações contínuas ser ministrado no ensino superior, poderá ser abordado no ensino básico de forma a ampliar e fortalecer o pensamento numérico dos alunos em consonância com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no que se refere a unidade temática números a seguir descrita:

“A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo de construção da noção de números, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais de Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.” Brasil (2018, p. 268).

Nesta perspectiva, a inserção introdutória do conteúdo das frações contínuas simples no ensino básico, com atividades bem planejadas, podem contribuir significativamente para a ampliação e o fortalecimento do pensamento numérico dos alunos, à medida que expõe outras formas de se representar e classificar os números reais, não meramente como a união dos conjuntos dos números racionais e irracionais, ou ao definir número irracional como todo número real que não é racional, mas sim explorando as melhores aproximações racionais para números irracionais, de forma a se observar a interação entre a natureza discreta e finita, contínua e infinita dos números reais.

As frações contínuas, por constituírem um processo finito para representar os números racionais e infinito para representar os números irracionais, são consideradas um dos melhores instrumentos de investigação da natureza aritmética dos irracionais. Tem aplicações na própria área da matemática e em diferentes áreas do conhecimento. Suas bases teóricas foram construídas ao longo de quase três séculos e tiveram contribuições de vários matemáticos, dentre os quais, citamos John Wallis (1616-1703) primeiro a utilizar o termo fração contínua em seu livro *Opera Mathematica*, de 1695.

Em síntese, não é pretensão desta monografia esgotar todo assunto estudado, mesmo porque a complexidade do tema não permitiria neste trabalho. O assunto requer pesquisa mais profunda no campo da teoria dos números no que se refere a matemática pura, assim como um planejamento e metodologia de ensino adequados a inserção introdutória das frações contínuas no ensino básico.

Referências Bibliográficas

1. Santos, José Plínio de Oliveira. **Introdução à teoria dos números** / José Plínio de Oliveira Santos. – 3 ed. – Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 198 p.: il. (Coleção matemática universitária)
2. Domingues, Hygino H. **Álgebra moderna** / Hygino H. Domingues e Gelson lezzi. 408 p.
3. Lima, Elon Lages / Análise real volume 1. **Funções de uma variável** / Elon Lages Lima. 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 198 p.: il. (Coleção matemática universitária).
4. Andrade, E. X. L e Bracciali, C. F. **Frações Contínuas: propriedades e aplicações**. SBMAC, São Paulo, Pleiade, 2015.
5. Alencar Filho, Edgard de, 1983 -. Teoria Elementar dos números / Edgard de Alencar Filho. – São Paulo. Nobel, 1981.
6. BOYER, Carl Benjamin, 1906 -. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomides, São Paulo, Edgard Blucher, ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
7. Moreira, Carlos Gustavo. **Frações Contínuas, representações de números e aproximações diofantinas**. IMPA, 2011 (1o Colóquio de Matemática da Região Sudeste).
8. Bezerra, Maria Nazaré Carvalho. **Teoria dos números: um curso introdutório** / Maria de Nazaré Carvalho Bezerra. Belém: AEDI/UFPA, 2018.
9. Martinez, F. E. B.; Moreira, C. G. T. A.; Saldanha, N. C; Tengan, E. Teoria dos números: **um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
10. Andrade, E.X.L. e Bracciali, C.F. **Frações Contínuas**. Editora Plêiade, 2005.
11. Figueiredo, D.G. **Números Irracionais e Transcendentes**. Edição 3. Rio de Janeiro: ed. SBM, 2011.
12. Ifrah, G. **História Universal dos Algarismos**. Tomo I e II. Rio de Janeiro: ed. Nova Fronteira, 1997.
13. Stewart, Ian, 1945 -. **Os maiores problemas matemáticos de todos os tempos** / Ian Stewart; tradução George Schlesinger. – ed. – Rio de Janeiro: Zahar, 2014.
14. BRASIL. Base Nacional Comum Curricular - BNCC. Brasília: MEC, 2017.