



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura

FLAIANDERSON PEREIRA FERREIRA

O CONCEITO DE INFINITO: uma abordagem a partir da probabilidade.

São Luís - MA
2023

FLAIANDERSON PEREIRA FERREIRA 

O CONCEITO DE INFINITO: uma abordagem a partir da probabilidade.

Monografia apresentada à Coordenação do curso de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa

São Luís - MA

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Ferreira, Flaianderson Pereira.

O CONCEITO DE INFINITO : uma abordagem a partir da
probabilidade / Flaianderson Pereira Ferreira. - 2023.
67 p.

Orientador(a): José Santana Campos Costa.

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática,
Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2023.

1. Conjuntos Infinito. 2. Espaço Amostral Infinito.
3. Probabilidade. 4. Teoria dos Conjuntos. I. Costa,
José Santana Campos. II. Título.

FLAIANDERSON PEREIRA FERREIRA

O CONCEITO DE INFINITO: uma abordagem a partir da probabilidade.

Monografia apresentada à Coordenação do curso de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 07/12/2023

Prof. Dr. José Santana Campos Costa
DEMAT/CCET/UFMA
Orientador

Prof. Dr. Valeska Martins de Souza
DEMAT/CCET/UFMA
Primeira Examinadora

Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo
DEMAT/CCET/UFMA
Segundo Examinador

Agradecimentos

Ao sagrado pela vida, pela saúde e pela oportunidade de alcançar mais esta etapa em minha jornada.

Ao professor José Santana Campos Costa, pela orientação, paciências e compreensão na realização desse trabalho.

Em especial, à minha avó Silvana, pelo apoio, incentivo e por sonhar comigo nessa grande realização.

Aos meus pais, familiares, amigos, colegas e a todos que desempenharam um papel fundamental nesta conquista. Expresso profunda gratidão a todos que tornaram possível este momento especial em minha vida.

Resumo

Neste trabalho, abordou-se as definições de conjuntos numéricos finitos e infinitos, probabilidade axiomática e definição em espaços amostrais infinitos. A discussão histórica e conceitual sobre o infinito é aprofundada, com ênfase nas contribuições fundamentais de Georg Cantor na teoria dos conjuntos. No âmbito da teoria das probabilidades, o estudo concentrou-se nos espaços amostrais, generalizando a definição clássica para eventos em que o espaço amostral é infinito. Os objetivos gerais incluem a análise de conjuntos numéricos infinitos e a investigação de problemas específicos na Teoria da Probabilidade com espaços amostrais infinitos. Os objetivos específicos abrangem a compreensão da construção histórica dos números infinitos, a discussão sobre a enumerabilidade e não enumerabilidade de conjuntos infinitos, e a contextualização histórica da Teoria da Probabilidade. A metodologia adotada baseou-se em uma revisão bibliográfica. Como resultados, foram apresentadas soluções para problemas de probabilidade em que o espaço amostral é infinito.

Palavras-chave: Conjuntos Infinito; Teoria dos Conjuntos; Probabilidade; Espaço Amostral Infinito.

Abstract

In this work, the definitions of finite and infinite numerical sets, axiomatic probability and definition in infinite sample spaces were discussed. The historical and conceptual discussion of infinity is explored in depth, with emphasis on Georg Cantor's fundamental contributions to set theory. In the field of probability theory, the study focuses on sample spaces, generalizing the classical definition to events in which the sample space is infinite. The general objectives include the analysis of infinite numerical sets and the investigation of specific problems in Probability Theory with infinite sample spaces. The specific objectives include understanding the historical construction of infinite numbers, discussing the enumerability and non-enumerability of infinite sets, and the historical contextualization of Probability Theory. The methodology adopted was based on a literature review. As a result, solutions were presented for probability problems in which the sample space is infinite.

Keywords: Infinite Sets; Set Theory; Probability; Infinite Sample Space.

Lista de ilustrações

Figura 5.1 – Probabilidade envolvendo comprimento.	54
Figura 5.2 – Segmento $[0,1]$	55
Figura 5.3 – Como escolher os pontos a e b	56
Figura 5.4 – Representação da situação do exemplo 5.9.	57
Figura 5.5 – Intervalo $[a, b]$	60
Figura 5.6 – Intervalo $[0.5, 1]$	60
Figura 5.7 – Intervalo $[0.3, 0.4]$	60
Figura 5.8 – Intervalos em que o primeiro número após a virgula é ímpar.	61
Figura 5.9 – Intervalo $[0.2, 0.3]$	61
Figura 5.10 – Intervalo $[0.23, 0.24]$	61

Lista de tabelas

Tabela 4.1 – Distribuição de Probabilidade para a Variável s	48
--	----

Sumário

	Lista de ilustrações	6
	Lista de tabelas	7
	INTRODUÇÃO	9
1	NOÇÕES SOBRE CONJUNTOS NUMÉRICOS	11
1.1	Definições e Exemplos	11
2	CONJUNTOS FINITOS	16
3	CONJUNTOS INFINITOS	20
3.1	Considerações sobre o Infinito	20
3.2	Definições e Exemplos	25
3.2.1	Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis	26
4	PROBABILIDADE	33
4.1	Consideração Históricas sobre Probabilidade	33
4.1.1	Escola Italiana	35
4.1.2	Pascal e a Teoria da Probabilidades	36
4.1.2.1	A aposta de Pascal	36
4.1.3	Fermat e a Teoria da Probabilidades	38
4.1.4	Huygens e a Teoria da Probabilidade	39
4.1.5	A Família Bernoulli e a Teoria da Probabilidade	40
4.2	Definições e Exemplos	41
4.3	Probabilidade Condicional	48
5	PROBABILIDADE COM ESPAÇO AMOSTRAL INFINITO	50
5.1	Definições e Exemplos	50
5.2	Espaço Amostral Infinito	54
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
	REFERÊNCIAS	66

INTRODUÇÃO

Do período pré-socrático até os avanços de Cantor, a reflexão sobre o infinito permeou e estimulou o pensamento ocidental, especialmente durante a segunda metade do século XIX. Essa ênfase filosófica e matemática gerou uma curiosidade incessante em torno do infinito e seus paradoxos, marcando um período de transição na compreensão do conceito de infinito. A perspectiva aristotélica, influente por séculos, permeou tanto a filosofia quanto a matemática, moldando a compreensão do infinito.

Georg Cantor introduziu o conceito de cardinalidade, demonstrando a existência de diferentes tipos de infinito, desafiando as concepções tradicionais. Sua teoria revolucionou a compreensão do infinito, abrindo novos horizontes para pesquisas e desenvolvimentos matemáticos. Ao adentrar o século XIX, Georg Cantor enfrentou resistência considerável de seus contemporâneos matemáticos. Suas descobertas sobre conjuntos infinitos e cardinalidade foram inicialmente rejeitadas, provocando debates intensos. O trabalho de Cantor levou à formalização da teoria dos conjuntos infinitos, destacando a importância da equivalência e da cardinalidade. Sua abstração permitiu a extensão do conceito de número natural para incluir conjuntos infinitos, pavimentando o caminho para o estudo de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis.

As contribuições de Georg Cantor refinaram a compreensão sobre o infinito, formando a base matemática para explorar espaços amostrais finitos e infinitos.

A história da teoria da probabilidade remonta a civilizações antigas, onde ideias intuitivas sobre eventos aleatórios surgiram por meio de brincadeiras, jogos de azar e adivinhações. Contudo, o caráter matemático dessas ideias ganhou destaque apenas no século XVI, marcado pela correspondência entre os estudiosos franceses Blaise Pascal e Pierre de Fermat no século XVII.

O matemático holandês Christiaan Huygens desempenhou um papel crucial ao formalizar a teoria da probabilidade em seu tratado sobre jogos de azar. A partir desse ponto, diversos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento e consolidação da teoria, moldando-a como a conhecemos hoje.

O presente estudo se concentra em uma abordagem teórica da Teoria da Probabilidade, explorando aspectos históricos e conceituais. Nosso foco recai sobre a probabilidade em espaços amostrais infinitos, ampliando a compreensão além das situações convencionais.

Este trabalho abordou-se os seguintes problemas de pesquisa: considerando uma vida infinita, e supondo que alguém comece a jogar na Mega-Sena sem interrupções, exploraremos a probabilidade dessa pessoa ganhar todos os jogos ou nunca ganhar. Adicio-

nalmente, investigou-se a probabilidade associada à escolha aleatória de um número real no intervalo $[0, 1]$, abordando diversas situações específicas.

Objetivou, assim, analisar os conceitos fundamentais de conjuntos, funções, o infinito e a teoria da probabilidade, além de investigar a evolução histórica e a inter-relação desses conceitos na matemática. De maneira específica, buscou-se compreender a importância dos conjuntos na organização matemática, explorar a evolução histórica do conceito de função, analisar as contribuições de Georg Cantor para a compreensão do infinito, investigar desafios matemáticos relacionados a espaços amostrais infinitos na teoria da probabilidade, e resolver problemas específicos relacionados a probabilidades.

Neste trabalho a metodologia adotada foi de revisão bibliográfica. Divido em cinco seções. O primeiro capítulo abordou-se as noções fundamentais de conjuntos. No capítulo dois foi abordado definições e noções sobre conjuntos finitos. No capítulo três foi apresentado um levantamento histórico sobre os conjuntos infinitos e algumas definições. No capítulo quatro foi apresentado um levantamento histórico sobre a probabilidade e as definições de probabilidade clássica. No capítulo 5 foi apresentada a definição de probabilidade com espaço amostral infinito e a resolução dos problemas da pesquisa.

1 NOÇÕES SOBRE CONJUNTOS NUMÉRICOS

Nesse capítulo, é apresentada a noção fundamental de conjunto e são estabelecidas as relações de pertinência, inclusão, união, interseção e função, que são conceitos importantes para a compreensão dos conjuntos. As principais fontes de referência utilizadas neste capítulo são os livros de Gelson Iezzi ([IEZZI et al., 1995](#)), Geraldo Ávila ([ÁVILA, 2001](#)) e o trabalho de conclusão de curso de Andréa Pruner de Oliveira ([OLIVEIRA, 2004](#)).

Em matemática, a noção de conjunto é considerada primitiva, o que significa que não se estabelece uma definição formal de conjunto. De maneira geral, um conjunto pode ser entendido como uma coleção ou agrupamento de elementos que compartilham uma ou mais propriedades em comum. É importante notar que existe um conjunto especial, denominado conjunto vazio, que não possui nenhum elemento. Esses conceitos são fundamentais no estudo da matemática e suas aplicações.

1.1 Definições e Exemplos

Os conjuntos são denotados por letras maiúsculas $A, B, C, \dots$, e seus elementos são representados por letras minúsculas $a, b, x, y, \dots$, seguindo uma convenção comum em matemática. Além disso, alguns símbolos já estabelecidos são utilizados para representar conjuntos específicos: o símbolo $\emptyset$ representa o conjunto vazio, o símbolo $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais, o símbolo $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros, o símbolo $\mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números racionais, o símbolo $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números irracionais e o símbolo $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais.

Definição 1.1. *A relação de pertinência é uma relação entre um elemento a e um conjunto X que permite dizer se o elemento faz parte ou não do conjunto.*

$$a \in X \tag{1.1}$$

e lê-se " a pertence a X ", caso contrário,

$$a \notin X \tag{1.2}$$

e lê-se " a não pertence a X ".

Para que um conjunto esteja bem definido, é necessário que a regra de pertinência seja clara e não dê margem para ambiguidades ou contradições.

Pode-se representar um conjunto de diferentes maneiras. Uma das formas mais comuns é por meio da enumeração dos seus elementos, separados por vírgulas, e delimitando o conjunto por chaves. Por exemplo, o conjunto dos números pares menores que 20 pode ser representado como $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$.

Outra forma de ser representado é por meio de uma propriedade que caracterize os elementos do conjunto. Por exemplo, o conjunto dos números inteiros negativos pode ser representado como $\{x \in \mathbb{Z} | x < 0\}$, que significa "o conjunto dos elementos x pertencentes ao conjunto dos números inteiros tais que x é menor que 0".

Exemplo 1.2. *Seja X o conjunto dos segmentos de reta de comprimento igual a 1cm e seja a um elemento. Como este conjunto está bem definido, então se a for um segmento de reta e seu comprimento é 1cm, $a \in X$. Se $a \notin X$, ou a não é um segmento de reta ou, se é, seu comprimento não é 1cm. Pode-se representar um conjunto indicando-se*

$$X = \{a, b, c, d, \dots\} \quad (1.3)$$

onde a, b, c e d representam alguns de seus elementos, e os pontilhados indicam a presença de outros elementos.

Definição 1.3. *Diz-se que o conjunto X é um subconjunto próprio de Y se, e somente se, quando todo elemento de X também é elemento de Y , mas há elementos em Y que não estão em X , indica-se*

$$X \subset Y \quad (1.4)$$

lê-se “ X está contido em Y ” ou “ Y contém X ”. Esta relação de inclusão indica se um conjunto é um subconjunto de outro. Caso contrário, indica-se

$$X \not\subset Y \quad (1.5)$$

lê-se “ X não está contido em Y ” ou “ Y não contém X ”, ocorre quando X tem pelo menos um elemento que não pertence a Y . Diz-se que X é igual a Y quando todo elemento de X pertence a Y e todo elemento de Y pertence a X . Isso é indicado por

$$X = Y \quad (1.6)$$

É importante notar que dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles possuem exatamente os mesmos elementos, ou seja, se

$$X \subseteq Y \quad (1.7)$$

e

$$Y \subseteq X \quad (1.8)$$

lê-se “ X está contido em Y ” e “ Y está contido em X ” respectivamente, ocorre quando todo elemento de X é também elemento de Y e todo elemento de Y é também elemento de X , ocorre a igualdade.

Teorema 1.4. *Seja X e Y dois conjuntos. Suponha $X \subset Y$ e $Y \subset X$. Ocorre se, e somente se $X = Y$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Como $X \subset Y$ e $Y \subset X$, então $\forall a, a \in X \Rightarrow a \in Y$, e $\forall a, a \in Y \Rightarrow a \in X$. Como vale a implicação nas duas direções, isso é equivalente a dizer que $\forall a, a \in X \iff a \in Y$, ou seja, $X = Y$.

($\Leftarrow$) A recíproca é trivial, isto é, $X = Y \iff X \subset Y$ e $Y \subset X$. ■

Definição 1.5. *Dados X e Y dois conjuntos quaisquer. A união de X e Y é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a X ou pertencem a Y , e indica-se*

$$X \cup Y = \{a \mid a \in X \text{ ou } a \in Y\} \quad (1.9)$$

lê-se “ X união Y ” ou “ X reunião Y ”. Dizer que $a \in X$ ou $a \in Y$ significa que pode ocorrer uma dessas possibilidades ou as duas respectivamente.

Definição 1.6. *Sejam dois conjuntos quaisquer X e Y . Chama-se interseção de X e Y o conjunto formado pelos elementos que estão em X e estão em Y , é denotado por*

$$X \cap Y = \{a \mid a \in X \text{ e } a \in Y\} \quad (1.10)$$

lê-se “ X interseção Y ”. Dizer que $a \in X$ e $a \in Y$ significa que deve ocorrer as duas possibilidades simultaneamente.

Exemplo 1.7. *Para $X = \{a, b\}$ e $Y = \{c, d\}$ tem-se que $X \cap Y = \emptyset$.*

Definição 1.8. *Dados X e Y dois conjuntos quaisquer. Chama-se a diferença entre X e Y o conjunto formado pelo elementos de X que não estão em Y .*

$$X - Y = \{a \mid a \in X \text{ e } a \notin Y\} \quad (1.11)$$

Definição 1.9. *O conjunto das partes de um conjunto A dado, é aquele que é formado por todos os subconjuntos de A . Em símbolos:*

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\} \quad (1.12)$$

A palavra “função” foi inicialmente usada por Leibniz em 1673 para descrever as várias variáveis geométricas associadas a uma curva. Ao longo do tempo, o conceito foi se tornando independente de curvas específicas e passou a significar a dependência de uma variável em relação a outras. No entanto, durante o século XVIII, a ideia de função ainda estava restrita a uma única variável (dependente) expressa por meio de fórmulas em termos de outras variáveis (independentes).

Definição 1.10. *Dados dois conjuntos X e Y não vazios, chama-se de função uma relação entre X e Y que associa cada elemento de X a um único elemento de Y . Essa associação é indicada pela lei de correspondência $y = f(x)$, em que x é um elemento do domínio X e y é o elemento correspondente em Y . O conjunto X é chamado de domínio da função, Y é o contradomínio e a imagem é o conjunto de todos os elementos de Y que são associados a algum elemento de X pela função f . Uma função f de X em Y pode ser denotada por*

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Definição 1.11. *Diz-se que uma função $f : X \rightarrow Y$ é sobrejetiva se $f(X) = Y$, isto é, para qualquer elemento $y \in Y$ encontra-se pelo menos um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Isso significa que para cada elemento do conjunto Y , existe pelo menos um elemento correspondente em X através da função f . Ou seja, não há elementos em Y que não tenham um correspondente em X . Outra maneira de dizer isso é que a função f abrange todo o conjunto Y .

Definição 1.12. *Diz-se que uma função $f : X \rightarrow Y$ é injetiva quando elementos distintos em X são transformados pela f em elementos distintos em Y . Ou seja, f é injetiva quando dados $x_1, x_2 \in X$ em que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Definição 1.13. *Diz-se que uma função $f : X \rightarrow Y$ é bijetiva quando é ao mesmo tempo sobrejetiva e injetiva.*

Definição 1.14. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ funções. Chama-se função composta de g e f a função $h : X \rightarrow Z$ definida como $h(x) = g(f(x))$. A função h pode ser indicada por $h = g \circ f$ e lê-se “ g composta com f ”, ou $h(x) = (g \circ f)(x)$.*

Teorema 1.15. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ funções bijetoras. Então a composta $g \circ f : X \rightarrow Z$ também é bijetora.*

Demonstração: Devemos mostrar que a função $g \circ f : X \rightarrow Z$, satisfaz as seguintes condições:

- (I) Injetividade: Para todos $x_1, x_2 \in X$, se $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. Em outras palavras, sejam $x_1, x_2 \in X$ e suponha que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, ou seja, $g \circ (f(x_1)) = g \circ (f(x_2))$. Sendo g injetiva, segue que $f(x_1) = f(x_2)$. De mesmo modo, uma vez que f é injetiva, concluímos que $x_1 = x_2$. Assim, podemos concluir que se g é injetiva e f é injetiva, então a composição $g \circ f$ é injetiva.
- (II) Sobrejetividade: Dado $z \in Z$ existe $x \in X$ tal que $g \circ f(x) = z$. Em outras palavras, Suponha que $z \in Z$. Como $g : Y \rightarrow Z$ é sobrejetiva, segue que existe $y \in Y$ tal que $g(y) = z$. Do mesmo modo, como $f : X \rightarrow Y$ é sobrejetiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Deste modo, para esse $x \in X$, valem as equações

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z. \quad (1.14)$$

Portanto, a função $g \circ f : X \rightarrow Z$ é sobrejetiva.

Por (I) e (II), concluímos que a função $g \circ f : X \rightarrow Z$ é bijetiva. ■

2 CONJUNTOS FINITOS

Este trabalho tem como um dos principais objetivos o estudo dos conjuntos infinitos. No entanto, é necessário abordar algumas definições e noções relacionadas a eles que são extensões de conceitos oriundos do estudo de conjuntos finitos. Por essa razão, é importante discutir brevemente esses conceitos iniciais. As referências utilizadas nesse capítulo são o trabalho de conclusão de curso de Andréa Pruner de Oliveira ([OLIVEIRA, 2004](#)), os livros de Augusto César Morgado ([MORGADO, 2012](#)) e Elon Lages Lima ([LIMA, 2006](#)).

Dado um número natural n , denotamos por I_n o conjunto dos números naturais de 1 até n . Por exemplo, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$ e, de forma geral, um número natural k pertence a I_n se, e somente se, $1 \leq k \leq n$.

Definição 2.1. *Seja Y um conjunto. Diz-se que Y é um conjunto finito quando é vazio ou então existe uma bijeção*

$$f : I_n \rightarrow Y \quad (2.1)$$

o número natural n é chamado de cardinalidade do conjunto Y , ou simplesmente o número de elementos do conjunto finito Y . Escrevendo $f(1) = y_1$, $f(2) = y_2$, $f(3) = y_3$, $\dots$, $f(n) = y_n$ temos então $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$. A bijeção f chama-se de contagem dos elementos de Y .

Para evitar exceções, é comum incluir o conjunto vazio $\emptyset$ entre os conjuntos finitos. Nesse caso, diz-se que $\emptyset$ tem zero elementos, e, portanto, o número cardinal do conjunto vazio é zero.

Exemplo 2.2. *Seja $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $A = \{2, 3, 4, \dots, k+1\}$ é finito. A função $h : I_k \rightarrow A$ definida como $h(n) = n + 1$, $n = 1, \dots, k$, é injetiva pois, dados $n_1, n_2 \in I_k$, $n_1 < n_2$, para $h(n_1) = h(n_2)$ tem-se $h(n_1) = n_1 + 1$ e $h(n_2) = n_2 + 1$, assim, $n_1 + 1 = n_2 + 1$ e, portanto, $n_1 = n_2$. É também sobrejetora, pois para todo $k \in A$, existe $n' = n - 1 \in I_k$, tal que $h(n') = n$. Portanto, h é bijetiva.*

Teorema 2.3. *Seja D um subconjunto própria de I_n . Não pode existir uma função bijetora $f : D \rightarrow I_n$.*

Demonstração: A demonstração será realizada por absurdo. Suponha que o teorema seja falso e considere $k_0 \in \mathbb{N}$, o menor numero natural para qual existem um subconjunto próprio $D \subset I_{k_0}$ e uma bijeção $D \xrightarrow{f} I_{k_0}$. Evidentemente tem-se que $k_0 > 1$. Agora, seja $b \in D$ tal que $f(b) = k_0$. A restrição de f ao subconjunto próprio $D - \{b\} \subset I_{k_0} - 1$ ocorrerá uma bijeção sobre $I_{k_0} - 1$ o que contrária a ideia de minimalidade de k_0 . ■

Corolário 2.4. Se $f : I_n \rightarrow Y$ e $g : I_k \rightarrow Y$ são bijeções, então $n = k$.

Demonstração: Se $n < k$ pode-se dizer que I_n seria um subconjunto próprio de I_k , o que iria contra o Teorema 2.3 pois $g^{-1} \circ f : I_n \rightarrow I_k$ é uma bijeção. De mesmo modo é mostrado para $k < n$. Portanto, $n = k$. ■

Corolário 2.5. Seja Y um conjunto finito. Uma aplicação $g : Y \rightarrow Y$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva.

Demonstração: Suponha que exista uma bijeção $h : I_n \rightarrow Y$. A aplicação $g : Y \rightarrow Y$ é injetiva ou sobrejetiva se, e somente se, $h^{-1} \circ g \circ h : I_n \rightarrow I_n$ é. Consideremos $g : I_n \rightarrow I_n$. Se g for injetiva então pondo $D = g(I_n)$, teremos uma bijeção $g^{-1} : D \rightarrow I_n$, pelo Teorema 2.3 $A = I_n$ e g é sobrejetiva. Fazendo a recíproca, suponha g sobrejetiva, então para cada $x \in I_n$ podemos escolher $y = \varphi(x) \in I_n$ tal que $g(y) = x$. Isso define uma aplicação $\varphi : I_n \rightarrow I_n$ tal que $g(\varphi(x)) = x$ para todo $x \in I_n$. Então φ é injetiva, e como acabamos de provar, φ é sobrejetiva. Assim, se $y_1, y_2 \in I_n$ forem tais que $g(y_1) = g(y_2)$, tomamos $x_1, x_2 \in I_n$. Como $\varphi(x_1) = y_1$, $\varphi(x_2) = y_2$ e teremos $x_1 = g(\varphi(x_1)) = g(y_1) = g(y_2) = g(\varphi(x_2)) = x_2$, donde $y_1 = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = y_2$ logo g é injetiva. ■

Teorema 2.6. Sejam dados os conjuntos X e Y e uma função bijetora $g : X \rightarrow Y$, um desses conjuntos é finito se, e somente se, o outro também é.

Demonstração: Suponha que X é finito e $g : X \rightarrow Y$ é uma função bijetora. Como X é finito, existe uma função bijetiva $h : I_n \rightarrow X$. Tem-se, assim, o seguinte esquema:

$$I_n \xrightarrow{h} X \xrightarrow{g} Y \quad (2.2)$$

A função

$$g \circ h : I_n \rightarrow Y \quad (2.3)$$

é uma função bijetiva, pois g e h o são, pelo Teorema 1.15. Portanto, Y é finito.

Agora, suponha que Y é finito. Então, existe uma função bijetiva $h : I_n \rightarrow Y$. Como g é bijetora, existe $g^{-1} : Y \rightarrow X$ e se chega ao seguinte esquema

$$I_n \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g^{-1}} X \quad (2.4)$$

A função

$$g^{-1} \circ h : I_n \rightarrow X \quad (2.5)$$

é bijetiva, pois g^{-1} e h o são, pelo Teorema 1.15. Portanto, X é finito. ■

O Teorema 2.6 afirma que se X e Y são conjuntos e $g : X \rightarrow Y$ é uma função bijetiva, então X e Y têm a mesma cardinalidade, ou seja, têm o mesmo número de

elementos. Isso implica que se um desses conjuntos é finito, então o outro também é finito, e se um deles é infinito, então o outro também é infinito.

Outra prova desse teorema pode ser feita por contrapositiva. Suponha que X seja finito e que Y seja infinito. Precisamos mostrar que g não pode ser uma função bijetiva. Como Y é infinito e g é sobrejetiva, para cada elemento y em Y existe pelo menos um elemento x em X tal que $g(x) = y$. Se g fosse injetiva, isso significaria que cada elemento de X está associado a um único elemento de Y , o que implicaria que X teria o mesmo número de elementos que Y , o que contradiz o fato de que Y é infinito e X é finito. Portanto, g não pode ser uma função bijetiva nesse caso.

Da mesma forma, se Y é finito e X é infinito, podemos mostrar que g não é uma função bijetiva. Como X é infinito e g é injetiva, para cada elemento x em X existe pelo menos um elemento y em Y tal que $g(x) = y$. Mas como Y é finito e g é sobrejetiva, existem elementos em Y que não têm correspondência em X , o que implica que g não pode ser uma função bijetiva. Portanto, concluímos que se um dos conjuntos é finito, então o outro também é finito.

Exemplo 2.7. Considere os conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $Y = \{a, b, c, d\}$ e a função $g : X \rightarrow Y$ definida por $g(1) = a, g(2) = b, g(3) = c$ e $g(4) = d$. Essa função é uma bijeção, pois associa cada elemento de X a um único elemento de Y e cada elemento de Y a um único elemento de X .

Como X é finito, pelo Teorema 2.6, Y também é finito e tem 4 elementos. Da mesma forma, como Y é finito, X também é finito e tem 4 elementos. Portanto, esse exemplo ilustra como o Teorema 2.6 estabelece uma relação entre a finitude ou infinitude de dois conjuntos relacionados por uma bijeção.

Lema 2.8. Se existe uma bijeção $f : X \rightarrow Y$ então, dados $x \in X$ e $y \in Y$, existe também uma bijeção $g : X \rightarrow Y$ tal que $g(x) = y$.

Demonstração: Seja $y_1 = f(x)$. Como f é sobrejetiva, existe $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) = y$. Definamos $g : X \rightarrow Y$ pondo $g(x) = y, g(x_1) = y_1$ e $g(a) = f(a)$ se $a \in X$ não é igual a x nem a x_1 . Logo, é fácil ver que g é uma função bijetiva. ■

Teorema 2.9. Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

Demonstração: Começaremos a demonstração provando para um caso particular: seja Y um conjunto finito e $a \in Y$ então $Y - \{a\}$ é finito. Com efeito, existe uma bijeção $f : I_n \rightarrow Y$ a qual, pelo Lema 2.8 podemos supor que cumpre $f(n) = a$. Se $n = 1$ então $Y - \{a\} = \emptyset$ é finito. Se $n > 1$ é uma restrição de f a I_{n-1} é uma bijeção sobre $Y - \{a\}$, logo $Y - \{a\}$ é finito e tem $n - 1$ elementos. O caso geral se prova por indução no número n de elementos de Y . Ele é evidente em dois casos: quando $Y = \emptyset$ ou $n = 1$. Agora

suponha o Teorema seja verdadeiro para conjuntos com n elementos, seja Y um conjunto com $n + 1$ elementos, e X um subconjunto de Y . Caso $Y = X$, nada há de provar, caso contrário, existe $a \in Y$ com $a \notin X$. Então $X \subset Y - \{a\}$. Como $Y - \{a\}$ tem n elementos, segue X é finito. ■

Corolário 2.10. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, é limitado.*

Demonstração: Suponha X não vazio,

$$X = \{x_1, \dots, x_n\} \tag{2.6}$$

é finito, pondo

$$p = x_1 + \dots + x_n \tag{2.7}$$

vemos que $x \in X \Rightarrow x \leq p$, logo X é limitado. Suponha, agora, $X \subset \mathbb{N}$ é limitado, então $X \subset I_p$ para algum $p \in \mathbb{N}$ segue-se do Teorema 2.9 que X é finito. ■

3 CONJUNTOS INFINITOS

Do período pré-socrático até o século XIX, o conceito do infinito tem intrigado filósofos e matemáticos, desafiando sua compreensão e estimulando novas perspectivas no pensamento ocidental. A ênfase no infinito, ao longo desse período, influenciou diversas áreas do conhecimento, gerando considerações filosóficas e matemáticas que alimentaram a curiosidade sobre suas propriedades e paradoxos.

Na filosofia, grandes pensadores como Aristóteles exploraram a natureza do infinito, categorizando-o em dois tipos: o infinito potencial e o infinito atual. A discussão sobre a existência desses infinitos e suas implicações permeou a reflexão filosófica por séculos, moldando as concepções do universo e da realidade.

A matemática também se debruçou sobre o infinito, mas durante muito tempo evitou considerá-lo como um objeto de estudo formal. No entanto, com o advento da matemática moderna, Georg Cantor ousou ir além e revolucionou a compreensão do infinito. Ao introduzir o conceito de cardinalidade e mostrar que existem infinitos diferentes, Cantor abriu novas possibilidades de pesquisa e desenvolvimento matemático.

Esse trabalho pioneiro de Cantor, no entanto, não foi imediatamente aceito pela comunidade matemática, gerando controvérsias e resistência. No entanto, uma nova geração de matemáticos e filósofos começou a reconhecer a importância do trabalho de Cantor. Suas contribuições foram fundamentais para estabelecer o conceito de números infinitos e a compreensão de que existem conjuntos infinitos com a mesma cardinalidade de seus subconjuntos próprios.

Essas reflexões sobre o infinito e suas implicações continuam a enriquecer a filosofia e a matemática, desafiando a intuição humana e nos conduzindo a novas formas de compreender o universo e suas complexidades. Para este capítulo utilizou-se o artigo de José Lourenço Cindra ([CINDRA, 2012](#)), o livro de Richard Morris ([MORRIS, 1998](#)), o artigo de Joao Antonio Francisoni Lubanco Thome e Fernando de Avila Silva ([THOME; SILVA, s.d](#)) e a dissertação de Rogério Jacinto de Moraes Junior ([JÚNIOR et al., 2015](#)).

3.1 Considerações sobre o Infinito

Do período pré-socrático a Cantor, a ênfase no infinito por vezes influenciou e estimulou o pensamento ocidental durante a segunda metade do século XIX. Considerações filosóficas e matemáticas alimentam a curiosidade sobre o infinito e seus paradoxos. Aristóteles muito sistemático e metódico, considerava dois tipos de infinito: o infinito potencial e o infinito atual. O infinito potencial refere-se a uma noção de crescimento

ilimitado ou potencialmente ilimitado. Pode ser associado a processos que continuam indefinidamente, mas sem necessariamente atingir um estado de conclusão ou totalidade. Por outro lado, o infinito atual sugere uma totalidade, um estado completo ou um conjunto que já contém uma quantidade infinita de elementos. Na matemática, o conceito de infinito potencial é frequentemente encontrado em sequências infinitas, séries infinitas e limites infinitos. Por exemplo, uma sequência que cresce sem limites seria um exemplo de infinito potencial. Enquanto um conjunto infinito, como o conjunto dos números inteiros ou dos números reais, é considerado infinito atual, pois já contém uma quantidade infinita de elementos e não está em processo de crescimento. Ele provou que apenas o infinito potencial pode realmente existir. O outro, infinito atual, não poderia corresponder a qualquer coisa que realmente exista. Essa perspectiva de Aristóteles influenciou a filosofia e a matemática por muitos séculos.

No entanto, com o surgimento da matemática moderna e a obra de Georg Cantor, a compreensão do infinito mudou drasticamente. Cantor introduziu o conceito de cardinalidade e mostrou que existem diferentes tipos de infinito, alguns dos quais são maiores do que outros. Isso revolucionou a compreensão da natureza do infinito e abriu novas áreas de pesquisa e desenvolvimento.

Aristóteles escreve em seu livro *Physics* que tanto Platão quanto os pitagóricos viam o infinito ou a indeterminação como sua própria existência, e não como exemplos de outras coisas, isto é, não viam como um acidente de algo mais. Os pitagóricos consideravam que o ilimitado se encontra além do céu. Platão, pelo contrário, asseverava que nenhum corpo material estaria além do céu.

No tocante aos números inteiros, os pitagóricos identificaram o “indeterminado” com os números pares e o “determinado” com os números ímpares. Pois, a série dos números ímpares, começando com a unidade e terminado em $2n - 1$ é igual n^2 . Enquanto a série dos números, começando com dois e terminando em 2^n é indeterminada (CINDRA, 2012).

Os pitagóricos também enfatizavam a importância dos números na compreensão do universo. Para eles, os números eram a chave para a compreensão da realidade e eram considerados como sendo perfeitos e divinos. Eles acreditavam que a matemática era a linguagem do universo e que a ordem e a harmonia do universo eram resultado da relação entre os números. A identificação dos números ímpares como "determinados" e dos números pares como "indeterminados" é um exemplo de como eles enxergavam a matemática como sendo relacionada à ordem e a estrutura do universo.

Aristóteles escreveu em seu livro *Physics*, III, iv, 1993: 223, afirma que *tudo é determinado por algum tipo de princípio ou é o próprio princípio e coisas que são incertas não podem ser determinadas não dependendo de algo como princípio*. Além disso, pode existir sem começo e sem fim, porque tudo o que acontece deve ter um fim.

Comentando algumas das noções pré-socráticas de infinito, Aristóteles escreveu que a crença na existência de coisas "ilimitadas" parece basear-se em cinco considerações: 1) O tempo, considerado, como sendo desprovido de limite, 2) A divisibilidade infinita das magnitudes, 3) A gênese e o perecimento dos seres, 4) Tudo o que é limitado alcança seu limite em algo mais, não existindo, portanto, limite absoluto, 5) A imaginação pode sempre conceber um “além fronteira”, de modo que a série dos números inteiros parece não ter limite (ARISTOTLE, 1993: 225 apud CINDRA, 2012, p. 3).

O pensamento de Giordano Bruno sobre o infinito é ousado e centrado no infinito atual. No primeiro diálogo sobre o infinito, do universo e do mundo, Filóteo, porta-voz do pensamento de Giordano Bruno, afirma: “não há sentido que veja o infinito ou algum a que possa solicitar essa conclusão, pois o infinito não pode ser objeto dos sentidos”. Por conseguinte, para Bruno, o infinito é o objeto da razão, afirmando o infinito atual: “Se o Universo é infinito, não é necessário procurar seu motor. Depois, que sendo infinitos os mundos que estão nele, como as terras, os fogos e outros tipos de corpos denominados astros, todos se movem pelo princípio interno que é a própria alma [do mundo], como em outra assertiva provamos”.

O conceito de números infinitos intrigou os matemáticos até o final do século XIX. Naquela época, o matemático alemão Georg Cantor demonstrou, em uma série de artigos publicados entre 1874 e 1884, que o infinito poderia ser tratado matematicamente. Cantor conseguiu resultados surpreendentes e foi capaz de mostrar que existem muitos números infinitos diferentes - existem infinitamente muitos deles.

Previsivelmente, as descobertas de Cantor não foram imediatamente aceitas pela comunidade de matemáticos da época . Muitos deles queriam evitar completamente o uso do conceito de infinito, e ali estava Cantor falando sobre infinito de infinidades.

Por exemplo, o matemático alemão Leopold Kronecker foi ex-professor de Cantor e especialmente crítico em relação a seu trabalho. Ele chamou as ideias de Cantor de "matematicamente insanas" e mais tarde impediu o ex-aluno de obter uma vaga na Universidade de Berlim. O matemático francês Henri Poincaré, definiu a teoria matemática da infinidade de Cantor como algo que as futuras gerações iriam ver “como uma doença de que se curou”.

Na primavera de 1884, ele teve um colapso nervoso. Após sua recuperação, ele abandonou a matemática e começou a publicar ensaios em revistas de filosofia. No final de sua vida, Cantor sofreu de depressão severa e vários colapsos mentais. Mais tarde, ele foi demitido de seu cargo de professor na Universidade de Halle e morreu em um hospital psiquiátrico em 1918.

Uma geração mais jovem de matemáticos e filósofos começou a reconhecer a importância do trabalho de Cantor. Em 1926, o eminente matemático alemão David

Hilbert resumiu o recém-surgido respeito por Cantor dizendo: “Ninguém haverá de nos expulsar do paraíso que Cantor criou para nós.” Mas, é claro, quando isso foi dito fazia oito anos que Cantor estava morto.

Por volta de 1872 Georg Cantor começou uma série de estudos sistemáticos, onde culminou em uma teoria axiomática desses conjuntos. Foi nessa época que Cantor iniciou sua carreira profissional, a priori seu estudos eram voltado à representação de funções por meio de séries trigonométricas. Isso o levou a examinar os conjuntos de pontos de descontinuidade dessas funções, sendo os mais básicos compostos por um número limitado de pontos. No entanto, a presença cada vez mais complexa de conjuntos o levou a investigar conjuntos infinitos em geral. Nesta pesquisa, ele introduziu uma ideia simples, que mais tarde se mostrou de enorme importância - a noção de equivalência de conjuntos.

De acordo com Cantor, dois conjuntos são considerados equivalentes em termos de cardinalidade, ou seja, têm a mesma quantidade de elementos, quando existe uma correspondência entre eles. Essa correspondência, conhecida como bijeção, permite a associação de elementos distintos de um conjunto com elementos distintos do outro, de forma que todos os elementos de ambos os conjuntos sejam incluídos na correspondência.

Esta ideia de equivalência é o ponto de partida para o conceito abstrato de número natural. A partir da comparação entre conjuntos, é possível atribuir um número natural a cada coleção, o que permite uma representação matemática mais precisa da quantidade de elementos presentes em cada um. Essa abstração permitiu a evolução da matemática e o desenvolvimento de métodos e teoremas importantes na área.

De acordo com as ideias (BARBOSA, 2007), uma criança nos seus primeiros anos pode notar a quantidade de itens em uma cesta, mesmo sem entender completamente o conceito matemático de número natural. Ela é capaz de chegar à conclusão de que há três laranjas em uma cesta, três maçãs em outra, e três ovos em outra, porque é possível estabelecer uma correspondência entre os elementos de cada conjunto.

Essa capacidade de abstração dos elementos concretos de diferentes conjuntos para formar uma noção de quantidade é o que leva à formação do conceito de número natural. É uma parte fundamental de nossas vidas e está presente em muitas situações cotidianas, como na contagem de objetos, na medição de quantidades e na resolução de problemas matemáticos.

Com isso, ao denotarmos o conjunto dos primeiros números naturais como F_n , onde $F_n = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ é justamente o fato de um conjunto A ser equipotente a F_n que nos permite afirmar que A tem n elementos, ou possui a mesma quantidade de elementos que F_n . Por isso, definimos: um conjunto A é finito quando existe um número natural n tal que A seja equipotente ao conjunto F_n . Por outro lado, um conjunto é considerado infinito quando não é finito.

Assim, o conceito de cardinalidade é uma forma natural de estender a ideia de número de elementos de um conjunto, incluindo tanto conjuntos finitos quanto infinitos. Dois conjuntos A e B são considerados com a mesma cardinalidade, ou têm o mesmo número de elementos, se eles são equipotentes. Essa definição, em casos de conjuntos finitos, não traz nada de novo, mas amplia a noção de número de elementos de um conjunto para incluir conjuntos infinitos, cujos números de elementos são chamados de números transfinitos.

Quando estudamos conjuntos infinitos, o primeiro conjunto com o qual nos depa-ramos é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Um conjunto é considerado enumerável se ele for equivalente ao conjunto $\mathbb{N}$. Algo surpreendente que pode ocorrer com conjuntos infinitos é a possibilidade de um conjunto ser equivalente a um subconjunto próprio seu sem ser finito.

Esse fato é conhecido como o paradoxo de Hilbert, nomeado em homenagem ao matemático David Hilbert que o propôs. O paradoxo afirma que, mesmo que um conjunto infinito seja retirado um subconjunto próprio (ou seja, que tenha menos elementos), ainda é possível estabelecer uma correspondência um a um entre os elementos do conjunto original e do subconjunto. Esse fato parece ir contra a intuição de que um conjunto maior deve ter mais elementos do que um conjunto menor, mas é uma consequência das propriedades dos números infinitos.

Um exemplo de equivalência entre conjuntos infinitos é estabelecido entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números ímpares positivos, a correspondência $n \mapsto 2n + 1$, que o 0 faz corresponder a 1, ao 1 faz corresponder a 3, ao 2 faz corresponder ao 5, etc. Embora os números ímpares positivos sejam um subconjunto próprio dos números naturais, eles têm a mesma cardinalidade, o que significa que existem o mesmo número de elementos em ambos os conjuntos. Esse fenômeno é peculiar aos conjuntos infinitos e contradiz o que sabemos sobre conjuntos finitos.

De fato, é surpreendente que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais seja enumerável, ou seja, tenha a mesma cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Isso significa que é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os números naturais e os números racionais. Essa correspondência pode ser estabelecida por meio de uma tabela, onde os números racionais são listados em ordem crescente de módulo e, ainda que existam infinitos números racionais, é possível listar todos eles de forma sistemática.

3.2 Definições e Exemplos

Definição 3.1. Um conjunto X chama-se infinito quando não é vazio e, além disso, dado $n \in \mathbb{N}$ não existe uma bijeção

$$\varphi : I_n \rightarrow X \quad (3.1)$$

Exemplo 3.2. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito. De fato, dado qualquer função

$$\varphi : I_n \rightarrow \mathbb{N} \quad (3.2)$$

dado n qualquer tal que $n > 1$, então seja

$$p = \varphi(1) + \cdots + \varphi(n). \quad (3.3)$$

Então $p > \varphi(x)$ para todo $x \in I_n$, tem-se $p \notin \varphi(I_n)$. Pela definição 3.1 $\mathbb{N}$ é infinito.

Segundo uma proposição devida a Euclides segue o exemplo a seguir.

Exemplo 3.3. O conjunto dos números primos é infinito. De fato, seja $X = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ um conjunto finito de números primos. O número

$$n = (p_1 \cdot p_2 \cdots p_k) + 1 \quad (3.4)$$

possui um divisor primo $q \neq 1$ (pois $n > 1$), pelo Teorema Fundamental da Aritmética todo número natural n pode ser decomposto em fatores primos. No entanto, não pode ocorrer $q \notin X$, pois, do contrário, q seria divisor de n por consequência do produto

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \quad (3.5)$$

além disso, da disparidade

$$n - p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \quad (3.6)$$

O número 1 é igual a si mesmo. Portanto, se dividirmos 1 por qualquer número, o resultado será impossível. Assim, podemos concluir que um conjunto finito não pode abranger todos os números primos. Consequentemente, não há uma função bijetora que mapeia o conjunto dos números naturais para o conjunto dos números primos, independentemente de n .

Teorema 3.4. Dados dois conjuntos X e Y , e uma função bijetora $f : X \rightarrow Y$, um desses conjuntos é infinito se, e somente se, o outro também é.

Demonstração: Suponha que X seja um conjunto infinito e, por absurdo, que Y seja um conjunto finito. Segundo o Teorema 2.6, se existe uma função bijetora $f : X \rightarrow Y$, então X também é finito. No entanto, essa suposição contradiz a hipótese inicial de que X é infinito.

Da mesma forma, suponha que Y seja um conjunto infinito e, por absurdo, que X seja um conjunto finito. Novamente, com base no Teorema 2.6, se existe uma função bijetora $f : X \rightarrow Y$, então Y também é finito. No entanto, essa suposição contradiz a hipótese inicial de que Y é infinito.

Dessa forma, concluímos que se X é infinito, então Y também é infinito, e se Y é infinito, então X também é infinito. ■

Exemplo 3.5. De acordo com Galileu Galilei (1564-1642) é possível estabelecer uma relação biunívoca entre o conjunto dos números naturais e o conjunto de todos os seus quadrados:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 4 & 9 & 16 & \dots & k^2 & \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k & \dots \end{array} \quad (3.7)$$

a função

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X = \{k^2 | k \in \mathbb{N}\} \quad (3.8)$$

definida como

$$\varphi(k) = k^2 \quad (3.9)$$

é bijetora.

De fato, a função é injetora, pois se dados $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, onde $k_1 < k_2$, para $\varphi(k_1) = \varphi(k_2)$, tem-se $\varphi(k_1) = k_1^2$ e $\varphi(k_2) = k_2^2$, assim $k_1^2 = k_2^2$, portanto $k_1 = k_2$ pois $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. É sobrejetora, pois dado $x \in X$, existe $k \in \mathbb{N}$, $k = \sqrt{x}$, tal que $x = \varphi(k)$. Apesar de X ser um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$, há tantos elementos em X como em $\mathbb{N}$.

3.2.1 Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis

De maneira intuitiva, um conjunto infinito é considerado enumerável quando é viável atribuir índices aos seus elementos utilizando os números naturais. Caso essa atribuição não seja possível, diz-se que o conjunto é não enumerável.

Definição 3.6. Um conjunto X é considerado enumerável quando é finito ou quando existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. No último caso, X é também denominado como um conjunto infinito enumerável.

Exemplo 3.7. Um dos primeiros fatos surpreendentes que surgem ao considerar conjuntos infinitos está relacionado à possibilidade de haver uma equivalência entre um conjunto e um de seus subconjuntos próprios. Por exemplo, podemos observar que existe uma correspondência entre o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) e o subconjunto dos números pares positivos. Essa correspondência pode ser estabelecida através da função $f(n) = 2n$, que associa cada número natural n ao seu correspondente par positivo. É interessante notar

que, embora o subconjunto dos números pares seja um subconjunto próprio dos números naturais, eles possuem a mesma quantidade de elementos, ou seja, a mesma cardinalidade. Esse fenômeno é uma particularidade dos conjuntos infinitos e difere do que ocorre com conjuntos finitos, nos quais um subconjunto próprio sempre possui menos elementos do que o conjunto original. Analogamente, a função $f(n) = 2n - 1$ define uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre o conjunto dos números naturais ímpares.

Exemplo 3.8. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável. Basta notar que a função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, definida por

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & n > 0 \\ -2n + 1, & n \leq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

é bijetora.

Observe que, pela f , os números inteiros maiores que zero são associados aos números naturais pares; e os números inteiros menores ou igual a zero são associados aos naturais ímpares.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \cdots & 7 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & \cdots \end{array} \quad (3.11)$$

Teorema 3.9. Todo conjunto infinito tem um subconjunto enumerável.

Demonstração: Para realizar esta demonstração, basta definir uma função injetiva $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$. Para isso, em cada subconjunto não-vazio $A \subset X$, um elemento $x_A \in A$. Em seguida definimos f por indução. Colocamos $f(1) = x_X$ e, supondo já definidos $f(1), \dots, f(n)$, escrevemos $A_n = X - \{f(1), \dots, f(n)\}$. Como X não é finito, A_n não é vazio. Colocaremos então $f(n+1) = x_{A_n}$. Isso completa a definição indutiva da função $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$. Afirmamos que a função φ é injetiva. Com efeito, dados $m \neq n$ em $\mathbb{N}$ tem-se, digamos $m < n$. Então $f(m) \in \{f(1), \dots, f(n-1)\}$ enquanto que $f(n) \notin \{f(1), \dots, f(n-1)\}$. Logo $f(m) \neq f(n)$. A imagem $f(\mathbb{N})$ é, portanto, um subconjunto infinito enumerável de X . ■

Exemplo 3.10. O conjunto números inteiros ($\mathbb{Z}$). Especificamente, podemos considerar o subconjunto dos números inteiros pares. Utilizando a função $f(n) = 2n$, onde n é um número natural, é possível estabelecer uma correspondência um a um entre os elementos desse subconjunto e os números naturais. Portanto, o subconjunto dos números inteiros pares é enumerável, já que pode ser indexado pelos números naturais.

Teorema 3.11. Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração: Se X é um conjunto finito, ele é, por definição, enumerável. No entanto, suponha X infinito, definiremos indutivamente uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Colocaremos

$f(1)$ = menor elemento de X . Suponhamos $f(1), \dots, f(n)$ definidos de modo a satisfazerem as seguintes condições:

- (a) $f(1) < f(2) < \dots < f(n)$;
- (b) pondo $B_n = X - \{f(1), \dots, f(n)\}$.

Em seguida, notando que $B_n \neq \emptyset$ definimos $f(n+1)$ = menor elemento de B_n . Isto completa a definição de $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, de modo a serem mantidas as condições (a) e (b) para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se de (a) que f é injetiva. Por outro lado, (b) implica que f é sobrejetiva pois se existisse algum $x \in X - f(\mathbb{N})$, teríamos $x \in B_n$ para todo n e, portanto, $x > f(n)$, qualquer que fosse $n \in \mathbb{N}$. Então o conjunto infinito $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ seria limitado, uma contradição segundo o Colorário 2.10. ■

Teorema 3.12. *Todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

Demonstração: Suponha que X é um conjunto enumerável, isto é, existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, de modo que $f(n_1) = x_1, f(n_2) = x_2, f(n_3) = x_3, \dots, f(n_k) = x_k, \dots$. Agora tomemos A um subconjunto de X , ou seja, $A \subset X$, de modo que $A = X \setminus \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots\}$, tomaremos também um conjunto Y , tal que, $Y \subset \mathbb{N}$, de modo que $Y = \mathbb{N} \setminus \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots\}$. Podemos construir uma função g bijetora, de modo que $g : Y \rightarrow A$ e como $Y \subset \mathbb{N}$ pelo Teorema 3.11 Y é enumerável, como consequência direta, existe uma função h definida como sendo $h : \mathbb{N} \rightarrow Y$. Logo, $(g \circ h) : \mathbb{N} \rightarrow A$, temos que a função $(g \circ h)$, é uma função bijetora. Portanto A também é enumerável. ■

Corolário 3.13. *Se $f : X \rightarrow Y$ é injetiva e Y é enumerável, então X é enumerável.*

Demonstração: Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função injetiva, onde Y é um conjunto enumerável. Queremos mostrar que X também é enumerável. Como Y é enumerável, existe uma correspondência biunívoca entre os elementos de Y e os números naturais ($\mathbb{N}$). Seja $g : \mathbb{N} \rightarrow Y$ uma função bijetiva que estabelece essa correspondência. Vamos construir uma função $h : X \rightarrow \mathbb{N}$ que será bijetiva, mostrando assim que X é enumerável.

Para cada $x \in X$, sabemos que $f(x)$ pertence a Y , pois f é definida de X para Y . Portanto, podemos aplicar a função g para obter o número natural correspondente a $f(x)$, ou seja, $g(f(x))$. Definimos $h(x) = g(f(x))$. Agora, vamos mostrar que h é uma função bijetiva. Primeiro, mostraremos que h é injetiva. Suponha que $h(x_1) = h(x_2)$ para dois elementos x_1 e x_2 em X . Isso implica que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Como g é uma função bijetora, isso implica que $f(x_1) = f(x_2)$. E como f é injetiva, concluímos que $x_1 = x_2$. Portanto, h é injetiva.

Agora, mostraremos que h é sobrejetiva. Dado um número natural $n \in \mathbb{N}$, consideramos o elemento $y = g(n)$ em Y . Como g é uma função bijetiva, existe um elemento x em X tal que $f(x) = y$. Portanto, $h(x) = g(f(x)) = g(y) = n$. Isso mostra que h é sobrejetiva.

Portanto, h é uma função bijetiva, estabelecendo a enumerabilidade de X . Assim, concluímos que se $f : X \rightarrow Y$ é injetiva e Y é enumerável, então X também é enumerável. ■

Corolário 3.14. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetiva e suponha X um conjunto enumerável. Então, Y é enumerável.*

Demonstração: Existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = id_Y$. Logo f é uma inversa à esquerda de g , e, portanto, g é injetiva. Segue-se que Y é enumerável. ■

Teorema 3.15. *Dados dois conjuntos enumeráveis X e Y , o produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.*

Demonstração: Como X e Y são conjuntos enumeráveis, existem funções injetivas $\varphi : X \rightarrow \mathbb{N}$ e $\psi : Y \rightarrow \mathbb{N}$. Logo $g : X \times Y \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dada $g(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$ é injetiva. Assim pelo Corolário 3.13, basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Definiremos a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, onde $f(m, n) = 2^m \cdot 3^n$. Pela unicidade da decomposição em fatores primos, f é uma função injetiva onde fornece uma bijeção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre o conjunto enumerável $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$, como queríamos provar. ■

Na próxima demonstração, abordaremos o teorema que afirma que o conjunto dos números racionais é enumerável. Especificamente, vamos mostrar que é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os números racionais, representados na forma de fração, e os números naturais. Isso nos permitirá contar e enumerar de forma sistemática todos os elementos desse conjunto, revelando sua natureza enumerável.

Teorema 3.16. *O conjunto dos números racionais*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\} \quad (3.12)$$

é um conjunto infinito enumerável.

Demonstração: De fato, se usarmos $\mathbb{Z}^*$ o conjunto dos números inteiros diferentes de zero, veremos que o conjunto $\mathbb{Z}^*$ é enumerável. Dessa maneira podemos concluir que o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ também é enumerável. Se uma função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$, definida como sendo $f(m, n) = \frac{m}{n}$, é sobrejetiva. De acordo com o Corolário 3.14, concluímos que o conjunto dos números racionais é enumerável. ■

O principal exemplo de conjunto não-enumerável que será tratado nesse trabalho será o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. A noção de cardinalidade entre conjuntos foi desenvolvida por Georg Cantor. Ele introduziu o conceito de cardinalidade como uma medida da quantidade de elementos em um conjunto. Ele foi pioneiro no estudo dos conjuntos infinitos e mostrou que nem todos os conjuntos infinitos são do mesmo tamanho.

Definição 3.17. *Dados dois conjuntos X e Y quaisquer:*

(i) *X e Y têm o mesmo número cardinal quando existe uma bijeção $f : X \rightarrow Y$, e escrevemos*

$$\text{card}(X) = \text{card}(Y) \quad (3.13)$$

dois conjuntos finitos têm o mesmo número cardinal se, e somente se, possuem o mesmo número de elementos.

(ii) *Diremos que*

$$\text{card}(X) = \text{card}(Y) \quad (3.14)$$

quando existir uma função injetiva $f : X \rightarrow Y$, mas não existir uma função sobrejetiva $f : X \rightarrow Y$

Assim o Teorema 3.9 mostra que para qualquer conjunto infinito X , têm-se $\text{card}(\mathbb{N}) \leq \text{card}(X)$. Desse modo, podemos concluir que o número cardinal de um conjunto infinito enumerável é o menor dos números cardinais dos conjuntos infinitos.

Teorema 3.18 (Teorema de Cantor). *Qualquer que seja o conjunto M , sua cardinalidade é sempre menor que a cardinalidade de seu conjunto potência $\mathcal{P}(M)$, isto é, $\text{card}(M) < \text{card}(\mathcal{P}(M))$.*

Demonstração: A aplicação $m \in M \mapsto \{m\} \in \mathcal{P}(M)$ é injetiva. Portanto, prova que $\text{card}(M) \leq \text{card}(\mathcal{P}(M))$.

Para efetivamente provar que $\text{card}(M) < \text{card}(\mathcal{P}(M))$, seja $m \in M \mapsto M_m$ uma aplicação qualquer de M em $\mathcal{P}(M)$, onde M_m é um subconjunto de M , que é a imagem de m pela referida aplicação. Agora consideremos o conjunto $B = \{x \in M; x \notin M_x\}$ que é um subconjunto de M , podendo mesmo ser o conjunto vazio. Vamos mostrar que ele difere de qualquer M_m com m variando em M . De fato, qualquer que seja $m \in M$, B, M_m diferem pelo elemento m pois

$$m \in B \Rightarrow m \notin M_m$$

e

$$m \notin B \Rightarrow m \in M_m$$

Sendo B diferente de todo M_m , com m variando em M , vemos que não existe uma aplicação M sobre $\mathcal{P}(M)$, muito menos uma bijeção. Concluimos que $\text{card}(M) < \text{card}(\mathcal{P}(M))$. ■

Usaremos o símbolo F para indicar o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow Y$.

Teorema 3.19 (Cantor). *Dado X um conjunto arbitrário e Y um conjunto contendo pelo menos dois elementos. Nenhuma função $\varphi : X \rightarrow F : (X; Y)$ é sobrejetiva.*

Demonstração: Seja dada uma função $\varphi : X \rightarrow F : (X; Y)$, onde indicaremos o valor de φ no ponto $x \in X$ como φ_x . Então, φ_x é uma função de X em Y . Encontraremos uma $f \in F : (X; Y)$ tal que $\varphi_x \neq f$ para todo $x \in X$. Para isso, encontraremos para cada $x \in X$, um elemento $f(x) \in Y$, diferente de $\varphi_x(x)$. Pois Y conter pelo menos dois elementos, isso é impossível. Obtida a função $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x) \neq \varphi_x(x)$, e portanto, $f \neq \varphi_x$ para todo $x \in X$. Como $f \notin \varphi(X)$, e concluímos, que φ não é sobrejetiva. ■

Como mencionado anteriormente, Georg Cantor fez uma descoberta fundamental no final do século XIX mostrando que o conjunto dos números reais tem uma cardinalidade superior ao conjunto dos números naturais. Isto significa que os números reais não podem ser listadas de forma numerada. Esta descoberta teve um impacto significativo na matemática, revelando que o infinito tem diferentes tamanhos.

Teorema 3.20. *O intervalo $(0, 1)$ dos números reais é não enumerável.*

Demonstração: Seja o intervalo $(0, 1)$ dos números reais, e suponha que este intervalo seja enumerável, isto é, podemos estabelecer uma bijeção com o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, matematicamente:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1). \quad (3.15)$$

Isso significa que podemos supor que os números pertencentes a esse intervalo possam ser escritos na forma decimal. Podemos dizer que esses números seriam:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13} \cdots a_{1n} \cdots \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23} \cdots a_{2n} \cdots \\ x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33} \cdots a_{3n} \cdots \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ x_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \cdots a_{nn} \cdots \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

onde os a_{ij} são algarismo de 0 a 9. Tomaremos um $q \in (0, 1)$, com $q = 0, b_1b_2b_3 \cdots b_n \cdots$, construído de maneira que $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$, $\cdots$, $b_n \neq a_{nn}$. Com essa construção chegamos a conclusão que $q \neq x_n$ e que $q \notin (0, 1)$. Logo, o intervalo $(0, 1)$ é não enumerável. ■

Teorema 3.21. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não enumerável.*

Demonstração: Dado $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Suponha que $\mathbb{R}$ seja um conjunto enumerável. Pelo Teorema 3.12 todo subconjunto de $\mathbb{R}$, ou seja, $X \subset \mathbb{R}$ também será enumerável. O intervalo $(0, 1)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, $(0, 1) \subset \mathbb{R}$. Pelo Teorema 3.20 mostramos que esse subconjunto é não enumerável, uma contradição. Portanto, concluímos que $\mathbb{R}$ também é não enumerável. ■

Exemplo 3.22. *O conjunto das partes de $\mathbb{N}$ é não enumerável.*

Pelo Teorema 3.18, se tomarmos $M = \mathbb{N}$, teremos que $\text{card}(\mathbb{N}) < \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Logo, concluímos que não existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e o conjunto de suas partes o que implica que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é não enumerável.

Exemplo 3.23. *O conjunto dos números irracionais $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ é não enumerável.*

Demonstração: Vamos considerar o conjunto dos números irracionais $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ seja enumerável. Então, teríamos que:

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$$

é enumerável. O que contraria o Teorema 3.21. ■

4 PROBABILIDADE

Probabilidade é a medida da chance de que um evento específico ocorra, expressa como um número entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 1, maior a probabilidade do evento acontecer, enquanto mais próximo de 0, menor a probabilidade, porém não impossível de acontecer.

A probabilidade é frequentemente usada em estatística, para avaliar e prever eventos futuros. Por exemplo, a probabilidade pode ser usada para prever as chances de um jogador de futebol marcar um gol em um jogo, com base em seu histórico de desempenho. Ou pode ser usada para prever a probabilidade de que uma pessoa desenvolva uma determinada doença, com base em seus fatores de risco.

Existem diferentes tipos de probabilidades, como a probabilidade condicional, que leva em consideração a ocorrência de um evento prévio, e a probabilidade conjunta, que leva em consideração a ocorrência simultânea de dois ou mais eventos. O estudo da probabilidade é fundamental em muitas áreas, incluindo ciência, finanças, engenharia e economia. As principais fontes de referências utilizadas neste capítulo são os artigos de Lorí Viali ([VIALI, 2008](#)), Angelica Raiz Calabria Mariana Feiteiro Cavallari ([CALABRIA; CAVALARI, 2013](#)), Maria do Carmo Martins ([MARTINS, 2014](#)) o livro de Augusto César de Oliveira Morgado ([MORGADO et al., 1991](#)), Paul L Meyer ([MEYER, 1965](#)), e a tese de doutorado de Welson Nogueira da Silva ([SILVA, 2020](#)).

4.1 Consideração Históricas sobre Probabilidade

A probabilidade é um ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o “acaso” representa um papel preponderante. De acordo com Viali (2008) entender o “acaso” como “[...]um conjunto de forças, em geral, não determinadas ou controladas, que exercem individualmente ou coletivamente papel preponderante na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno.” Como o nome sugere, a teoria da probabilidade é o estudo de fenômenos que envolvem incerteza, originalmente como uma ferramenta para simular jogos de azar, como cartas e dados.

Diante da história da probabilidade, sabemos que as ideias intuitivas desta teoria surgiram em civilizações antigas através das brincadeiras, jogos de azar e adivinhações. Dessa maneira, passaram a ter um aspecto mais matemático somente a partir do século XVI com os estudiosos italianos, tendo como marco inicial a troca de correspondências entre os estudiosos franceses Pascal e Fermat, no século XVII.

A palavra probabilidade pode se referir ao estudo de eventos aleatórios e incertos. No entanto, em qualquer situação em que ocorram vários resultados, a teoria da probabilidade fornece uma maneira de quantificar a chance ou a probabilidade de ocorrência associada aos diferentes resultados.

Na era pré-cristã, os povos babilônios, egípcios, gregos e romanos utilizavam um osso chamado astrágalo para jogos e brincadeiras. Esse objeto era considerado o precursor do dado moderno, possuindo quatro lados: côncavo, convexo, plano e sinuoso. Cada lado tinha uma pontuação específica, sendo que o côncavo valia três pontos, o convexo valia quatro, e o plano e o sinuoso valiam um e seis pontos, respectivamente. Curiosamente, os números dois e cinco eram omitidos.

As primeiras manifestações probabilísticas na história surgiram através dos jogos de dados, notadamente o Tali, também conhecido como o jogo do osso. O Tali era praticado com astrálagos, que eram antecessores dos dados modernos, feitos a partir de ossos de animais, possivelmente de carneiros, e tinham um formato semelhante a um tetraedro irregular, ou seja, suas quatro faces não eram idênticas e não possuíam a mesma frequência de ocorrência.

No jogo do Tali, as faces maiores dos astrálagos eram numeradas com 3 e 4, enquanto as duas faces menores exibiam os números 1 e 6. Através de experimentos conduzidos na época, foi possível determinar as probabilidades de obter cada um dos lados em um lançamento. Devido à anatomia do osso e sua estabilidade, as frequências de ocorrência foram aproximadamente calculadas como 39%, 37%, 12% e 12%, respectivamente, para cada uma das quatro faces estáveis.

As práticas religiosas antigas também envolviam jogos que eram frequentemente realizados em templos religiosos. O conceito de "acaso" não era considerado um princípio natural, mas sim algo desejado pelos deuses. Portanto, a ideia de acaso estava associada a intervenções divinas ou sobrenaturais.

Por exemplo, um jogo que era comum em algumas cerimônias religiosas consistia em um vidente fazer um pedido e lançar quatro astrálagos em um tabuleiro. A resposta seria deduzida a partir dos lados que estavam voltados para cima. Se os quatro lados fossem diferentes, essa jogada era considerada a de maior valor e chamada de "jogada de Vênus". Caso os quatro lados fossem iguais, a jogada seria de menor valor e chamada de "os cães".

Outro jogo comum em cerimônias religiosas era o jogo de ímpar e par, que tinha como objetivo adivinhar o futuro. Grãos, pedras ou nozes eram usados neste jogo e os desejos eram concedidos dependendo do número de objetos lançados. Em algumas situações, se o número fosse ímpar, o desejo seria concedido, enquanto em outras, se o número fosse par.

No entanto, até esse momento, não havia a pretensão de usar a probabilidade como uma forma de determinar as possíveis chances de ganhar um jogo. Os jogos estavam relacionados a brincadeiras, previsão do futuro, apostas, etc. Os jogos de azar resumiam-se a uma mera enumeração das possibilidades de obter um determinado resultado no jogo, sem uma preocupação probabilista precisa. Dessa forma, a prática de jogos de azar não era pensada como uma forma de reduzi-los à forma matemática, como calcular os casos favoráveis de um jogo e estimar a regularidade dos eventos.

4.1.1 Escola Italiana

Nos séculos XV e XVI, surgiu na Itália matemáticos notáveis que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo probabilístico. Embora não tenham sido os italianos a formular conceitos teóricos, suas contribuições foram fundamentais para solucionar problemas práticos envolvendo comparação de frequências de ocorrências e ganhos em jogos de azar.

Um dos matemáticos expoentes da época foi Luca Pacioli (1445-1517), também conhecido como Luca di Borgo, após se unir à ordem franciscana. Sua obra mais notável, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*, publicada em Veneza em 1494, foi um compêndio abrangente do conhecimento matemático da época. Além de abordar aritmética, geometria e proporções, Pacioli dedicou-se ao estudo de jogos de azar e a investigar o problema dos pontos (divisão de apostas). Outro matemático que teve destaque foi Niccolò Fontana, conhecido como Tartaglia (1499-1557). Em sua obra *General Trattato*, publicada em 1556, Tartaglia dedicou uma seção ao estudo do problema dos pontos de Pacioli.

Girolamo Cardano (1501-1576), foi uma figura controversa na história da matemática, deixando um legado significativo. Autor de diversas obras abrangentes na área da medicina, matemática, ciências e filosofia, sua obra mais famosa foi *Ars Magna*, publicada em 1545. Nessa obra, Cardano apresentou métodos de resolução de equações de terceiro e quarto grau, sendo considerado um dos pioneiros no estudo dos jogos de azar, baseava-se na hipótese de que havia princípios científicos regendo as probabilidades de resultados nos jogos. Utilizou das técnicas de combinatória para calcular os casos possíveis de eventos e introduziu a ideia de eventos independentes e a regra da multiplicação entre eles.

Galileo Galilei (1564-1642), outro importante estudioso da teoria das probabilidades, contribuiu com a obra *Sopra le scoperte dei dadi* (Sobre o jogo de dados). Nesse estudo, Galileu fez observações sobre o lançamento de três dados, destacando que, embora existam seis somas possíveis que resultem em nove pontos, a soma de dez pontos é mais frequente do que a de nove, o que indicava um interesse na distribuição normal.

4.1.2 Pascal e a Teoria da Probabilidades

Blaise Pascal é conhecido, juntamente com Fermat, como "descobridores conjuntos" do Cálculo de Probabilidades. Pascal, como era conhecido, era Filho de Étienne Pascal. Desde de muito jovem ele revelou uma aptidão extraordinária para a matemática. Sua irmã, Madame Périer, descreveu-o como uma criança frágil, que era mantida em casa para evitar esforços excessivos devido à sua saúde delicada. Inicialmente, seu pai decidiu restringir sua educação ao estudo de línguas, excluindo a matemática. No entanto, a curiosidade de Pascal o levou a estudar geometria em segredo, descobrindo por conta própria várias propriedades das figuras geométricas.

Como já relatado, Pascal mostrou seu interesse pela matemática desde de muito jovem, fazendo com que aos seus 14 anos, já participava de reuniões com um grupo de matemáticos franceses, que posteriormente se tornaria a Academia Francesa, uma das mais antigas instituições francesas. Aos 16 anos, ele escreveu um trabalho sobre secções cônicas e, entre os 18 e 19 anos, inventou a primeira máquina de calcular para auxiliar seu pai em suas funções fiscais. Aos 21 anos, interessou-se por trabalhos sobre pressão de fluidos.

Devido ao seu estado de saúde, em 1650 Pascal decidiu abandonar suas pesquisas em matemática e ciências e dedicar-se à contemplação religiosa. No entanto, três anos depois, retornou brevemente à matemática. Nessa época, escreveu o "*Traité du Triangle Arithmétique*" e, em colaboração com Fermat, lançou os fundamentos da Teoria da Probabilidade moderna.

Uma das cartas trocadas entre Pascal e Fermat discutia um problema envolvendo um jogo de três pontos entre dois jogadores com habilidades equivalentes. Eles questionavam como dividir a aposta caso o jogo fosse interrompido antes do final. Pascal propôs uma solução analisando todas as possibilidades futuras do desenvolvimento do jogo, supondo que o primeiro jogador tivesse ganhado dois pontos e o segundo apenas um.

Durante esse período, Pascal também escreveu o *Traité du Triangle Arithmétique*, onde coletou diversas propriedades do triângulo aritmético e aplicou essas propriedades para resolver problemas de cálculo de chances em jogos de azar. Essa disciplina emergente ficou conhecida como "geometria do acaso" e, posteriormente, evoluiu para o cálculo de probabilidades. Devido à repercussão desse trabalho, o triângulo aritmético ficou conhecido no ocidente como Triângulo de Pascal. No entanto, historiadores apontam que esse padrão numérico triangular já era conhecido em culturas árabes e chinesas medievais, além de ter sido estudado nos contextos indianos e gregos.

4.1.2.1 A aposta de Pascal

Pensamentos, livro escrito pelo matemático e filósofo francês Blaise Pascal, apresenta um argumento que une matemática e teologia para abordar a existência de Deus. A questão

central é que a existência ou inexistência de Deus não pode ser provada, o que leva o homem a fazer uma escolha: acreditar ou não acreditar em Deus. A escolha não precisa ser uma aposta no escuro, pode ser lógica. Pascal argumenta que é melhor apostar na existência de Deus do que na não existência. Se a aposta for perdida, não há nada ou pouco a perder.

Como é necessário fazer uma aposta, e sem o suporte da razão para fazer uma demonstração irrefutável sobre a existência de Deus, Pascal recorre à razão para avaliar o benefício de viver de uma ou de outra maneira. Essa escolha, no entanto, é mais uma questão ética do que teórica ou mesmo religiosa, visto que a conversão, em última instância, não depende de uma argumentação. Em vez de pensar em termos de interesses egoístas, é preciso pensar em termos de razoabilidade da conduta moral, o que, evidentemente, envolve uma legítima esperança de recompensa e uma inevitável parcela de perda. O que se ganha ao viver como se Deus existisse? Se for verdade que ele existe, ganha-se tudo. Se for mentira, não se perde nada. Já que a aposta é inevitável, não há por que hesitar.

Segundo Pascal, a lógica que justifica sua tese é a seguinte: [1] Se você acredita em Deus e acredita em sua existência, então, quando você morrer, seu ganho é ilimitado, ou seja, a vida eterna no céu; [2] Se você acredita em Deus, e quando você morre ele não existe, sua perda é limitada ao tempo que você perdeu acreditando em Deus; [3] Se você não acredita em Deus, então Ele realmente não existe quando você morre, o que você ganha é limitado, ou seja, você não tem vida a perder acreditando no engano; [4] Mas se você não acredita em Deus e em sua existência, então, quando você morrer, sua perda é infinita, ou seja, nada mais do que a condenação eterna no inferno.

A dicotomia entre os melhores e os piores resultados do jogo - lucro infinito versus perda infinita - não deixa alternativa senão apostar na existência de Deus. Portanto, mesmo as pessoas que não acreditam nisso precisam fingir que acreditam, só para garantir. Com o tempo, praticar a fé pode levar à fé verdadeira. Para os filósofos cristãos, a primeira vitória ainda é a aposta da vida, e somente a vitória da verdadeira fé pode levar um indivíduo à perfeita felicidade.

A Aposta de Pascal é um argumento pioneiro do século XVII, que ainda hoje é debatido. Ele marcou o primeiro uso formal da teoria da decisão, os fundamentos do pragmatismo moderno e se destacou no campo da teoria das probabilidades. A Aposta de Pascal também gerou muitas críticas e discussões ao longo dos anos. Algumas críticas sugerem que o argumento de Pascal é baseado em uma visão limitada de Deus e que a escolha de acreditar em Deus simplesmente por causa de um benefício pessoal é imoral e egoísta. Outros argumentam que a aposta de Pascal é baseada em uma falsa dicotomia entre crença e descrença, e que existem muitas outras possibilidades para se considerar, como diferentes concepções de Deus ou outras religiões.

Apesar das críticas, a Aposta de Pascal ainda é um argumento interessante e

relevante para discussões sobre a crença em Deus e a natureza da fé. Mesmo que não seja uma prova irrefutável da existência de Deus, a Aposta de Pascal oferece uma maneira de pensar sobre as consequências de nossas crenças e ações, e pode levar as pessoas a refletir sobre o papel da religião e da fé em suas vidas.

4.1.3 Fermat e a Teoria da Probabilidades

Pierre de Fermat, nascido em agosto de 1601 em Beaumont-de-Lomagne na França, foi um importante estudioso francês formado em Educação pela Universidade de Toulouse e em Direito Civil pela Universidade de Orleans. Tornando-se funcionário público posteriormente promovido a conselheiro do rei no Parlamento de Toulouse.

Muitos cientistas de sua época não o consideravam-o um matemático "profissional", Fermat fez importantes contribuições para o campo da matemática. Não se preocupando com a rigidez de seus argumentos e nem em publicar suas descobertas. Grande parte do seu trabalho foi registrado em correspondência com outros matemáticos contemporâneos, assim como em notas e margens de livros. Nos anos de 1620, Fermat produziu duas importantes obras. Uma delas tratava de conceitos de máximos e mínimos, enquanto a outra, intitulada "Introdução a Lugares Planos e Sólidos", e é considerada uma das primeiras importantes obras sobre a geometria analítica. Fermat é mais conhecido por suas contribuições à teoria dos números e à geometria analítica.

Fermat foi um dos primeiros matemáticos a fazer uso do método do cálculo diferencial para resolver problemas de máximos e mínimos. Ele trabalhou com curvas e equações algébricas, contribuindo posteriormente para o desenvolvimento da teoria dos números. Apesar da pouca divulgação do seu trabalho em comparação com outros matemáticos da época, Fermat é reconhecido como um dos principais matemáticos da história e suas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento da matemática como a conhecemos hoje.

Destacamos dois de seus resultados mais relevantes na área de teoria dos números, a saber: o pequeno Teorema de Fermat, se p é primo e a é primo com p , então $a^{p-1} - 1$ é divisível por p ; e o último Teorema de Fermat, não existem inteiros positivos x, y, z com $n > 2$, tal que $x^n + y^n = z^n$. Este resultado foi registrado, sem demonstração, nas margens de seu livro sobre Aritmética de Diofanto. A prova do ultimo teorema só foi encontrada mais de 350 anos depois, em 1995, pelo matemático britânico Andrew Wiles.

Em colaboração com Blaise Pascal, Pierre de Fermat é considerado um dos fundadores do cálculo das probabilidades. Entre suas várias contribuições importantes para o campo podemos destacar o desenvolvimento do método das diferenças finitas para calcular probabilidades, a introdução do conceito de variáveis aleatórias e a formulação do princípio de Fermat para a probabilidade.

O princípio de Fermat para a probabilidade estabelece que a probabilidade de um evento ocorrer é proporcional ao número de maneiras que o evento pode ocorrer, em relação ao número total de resultados possíveis. Embora essa ideia já existisse anteriormente, Fermat foi o primeiro a formalizá-la e aplicá-la em vários problemas.

O problema dos pontos, discutido na correspondência entre Fermat e Pascal em 1654, é um clássico problema de matemática recreativa e teoria das probabilidades. Ele envolve a questão de como dividir de forma justa uma aposta entre dois jogadores que decidem interromper um jogo antes de ser concluído. O "Problema dos Pontos" surgiu a partir de uma disputa com o matemático Blaise Pascal, se refere em como dividir o prêmio de um jogo de azar interrompido antes de ser concluído de forma justa entre os jogadores envolvidos, considerando as chances de cada um deles vencer naquele momento. Fermat propôs uma solução para o problema baseada em uma análise de probabilidades condicionais e o cálculo de combinações. Esse problema foi um precursor do desenvolvimento do cálculo de probabilidades e teve um papel importante na história da probabilidade e estatística.

Pascal propôs uma solução baseada no cálculo das chances de cada jogador vencer a aposta, considerando o número de pontos que faltavam para cada um. Ele fez uso do famoso triângulo de Pascal para calcular essas probabilidades e, em seguida, sugeriu uma divisão justa da aposta com base nessas chances. Fermat abordou o problema de forma diferente de Pascal, em uma carta para ele, usando considerações da análise combinatória. Um exemplo é o caso em que o jogador A venceu uma partida e o jogador B não venceu nenhuma. Nesse caso, após quatro partidas, o jogo estará encerrado, pois um dos jogadores terá atingido os três pontos necessários.

Além do problema dos pontos, Fermat também se interessou pelo problema da divisão equitativa, no qual um grupo de jogadores deve dividir um prêmio em dinheiro de maneira justa, levando em consideração suas chances de ganhar. Fermat propôs uma solução baseada em probabilidades, que foi posteriormente refinada por outros matemáticos, como Jacob Bernoulli. Fermat trabalhou em questões relacionadas à teoria da probabilidade, como a Lei dos Grandes Números. Ele acreditava que, em jogos justos, as frequências relativas dos resultados convergem para as probabilidades teóricas à medida que o número de jogadas aumenta. Este princípio foi posteriormente formalizado e generalizado por outros matemáticos, como Jakob Bernoulli e Pierre-Simon Laplace.

4.1.4 Huygens e a Teoria da Probabilidade

Christiaan Huygens (1629-1695), um matemático e cientista holandês, teve a oportunidade de se familiarizar com o tema que inspirou a troca de cartas entre Fermat e Pascal durante uma viagem a Paris, em 1655. Após retornar a sua terra natal, ele escreveu um pequeno trabalho sobre o cálculo de probabilidades, intitulado *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, que se tornou a primeira obra impressa sobre esse assunto. Em seu trabalho,

Huygens discutiu o problema dos pontos e apresentou a solução para o problema dos dados. Além disso, ele incluiu uma coleção de problemas de probabilidade que envolviam a retirada de bolas coloridas de uma urna.

Huygens é reconhecido como o autor da primeira publicação na Teoria da Probabilidade, onde sistematizou as novas proposições discutidas por Pascal e Fermat. Ele definiu as regras da probabilidade clássica e introduziu o conceito de esperança matemática. Outra contribuição importante de Huygens foi em 1669, quando ele desenvolveu uma curva de mortalidade com base em dados estatísticos coletados por John Graunt em sua obra *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality*. Essa curva definiu a noção de vida média e probabilidade de sobrevivência, fundamentando cálculos atuariais e sendo a primeira aplicação da probabilidade à estatística demográfica. O trabalho de Huygens influenciou vários matemáticos de sua época, especialmente Jakob Bernoulli, e desempenhou um papel fundamental, comparável ao de Pascal e Fermat, no desenvolvimento da teoria de probabilidade.

4.1.5 A Família Bernoulli e a Teoria da Probabilidade

De origem Suíça, a família Bernoulli, desempenhou um importante papel na história das ciências, destacando-os no campo da matemática. A chegada dos Bernoulli na Suíça, deu-se em virtude de perseguições religiosas promovidas pelo Duque de Alba. O patriarca da família, Nicolaus Bernoulli, após estabelecido como comerciante de especiarias, esteve acompanhado de sua esposa Margarete Schoenauer, que tinha conexões com uma família de banqueiros da região.

Dentre os membros proeminentes da família, destaca-se Jakob Bernoulli, filho de Nicolaus, que foi o pioneiro do grupo de estudiosos. Inicialmente destinado a seguir a carreira de ministro na Igreja Reformada, Jakob formou-se em teologia. Entretanto, ao deparar-se com uma cópia das obras de Euclides, despertou em si a paixão pela matemática.

A troca de correspondências com o, também matemático e filósofo, Leibniz e sua aplicação do cálculo diferencial infinitesimal a problemas matemáticos tomada como inovadora, marcaram o início dos seus estudos.

A partir de 1687, na Universidade de Basileia, na Suíça, Jakob assume a posição de professor de matemática, mantendo-se no cargo até o fim de sua vida. Durante sua carreira, ganhou destaque seu interesse pela teoria das probabilidades. Onde se dedicou ao estudo dos problemas relacionados aos jogos de azar, influenciado pelas contribuições de Huygens. Uma de suas contribuições mais marcantes no campo da teoria das probabilidades destaca-se *Ars Conjectandi*, trabalho que lhe deu visibilidade no campo da probabilidade. No entanto, a publicação deste manuscrito ficou pendente após sua morte. Nicolaus I, sobrinho de Jakob, assumiu a tarefa de editá-lo, dado seu próprio interesse matemático e

sua orientação anterior por parte de Jakob.

Nicolaus I completou seu doutorado em 1709 na Universidade de Basiléia, abordando a aplicação das ideias probabilísticas de seu tio ao campo do Direito. Sua correspondência ativa com Pierre Montmort entre 1710 e 1713 demonstrou sua competência como probabilista.

Existiam rumores da época da existência de rivalidades familiares, incluindo a inveja de Johann em relação a Jakob, continuaram a existir mesmo após a morte deste último. Somente em 1713, após pressões de colegas matemáticos, Nicolaus I finalmente publicou o *Ars Conjectandi*. Nesta obra, ele introduziu a abordagem frequentista da probabilidade e lançou as bases para o que hoje é conhecido como o Teorema de Bernoulli ou uma forma inicial da Lei dos Grandes Números.

4.2 Definições e Exemplos

Podemos dizer que um experimento é determinístico quando, ao ser repetido em condições semelhantes, produz resultados essencialmente idênticos. Por outro lado, experimentos aleatórios são aqueles que, quando repetidos sob as mesmas condições, geralmente produzem resultados diferentes. Fenômenos aleatórios são comuns em nossa vida diária e nos fazem perguntas como "Será que vai chover amanhã?", "Qual será a temperatura máxima no próximo domingo?" ou "Quantos ganhadores terá na loteria?".

Os termos "incerteza", "azar", "sorte", "risco", "acaso", "provável", "aleatoriedade" e outros, aparentam ter o mesmo significado em todos os meios de comunicação. Todos estão relacionados com fenômenos em que não podemos determinar os resultados com precisão. Experimentos repetidos sob as mesmas condições tendem a produzir resultados diferentes, chamados de aleatórios. Por exemplo, ao tirar uma carta do baralho, há uma chance de ser um curinga; ao comprar uma lâmpada, há uma chance de ela queimar antes de ser usada por 100 horas; ao jogar um dado, há uma chance de obter um seis e é preciso contar quantas vezes ele foi rolado.

Definição 4.1. *Experimentos aleatórios são aqueles que, quando realizados em condições idênticas, produzem resultados imprevisíveis. Embora não possamos prever com certeza qual resultado ocorrerá em um experimento específico, geralmente podemos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer.*

Exemplo 4.2. *Citaremos alguns exemplos de experimentos aleatório:*

- (i) E_1 : Lançar uma moeda honesta até aparecer coroa.
- (ii) E_2 : Retirar uma bola ao acaso de uma urna com 20 bolas numeradas de 1 a 20.
- (iii) E_3 : Lançar um dado e observar a face voltada para cima.

- (iv) E_4 : Em uma linha de produção, escolha uma peça ao “acaso” e verifique sua funcionalidade.
- (v) E_5 : De uma gaveta contendo cuecas de diversas cores retirar, sem enxergar, um par de cuecas e verificar se têm a mesma cor.
- (vi) E_6 : Um número ímpar é escolhido ao acaso.
- (vii) E_7 : Um número real é escolhido aleatoriamente no intervalo $(0, 2)$.

Cada um desses experimentos têm um conjunto de possíveis resultados. Esse conjunto é chamado: espaço amostral.

Definição 4.3. Chamaremos de espaço amostral o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. Representamos o espaço amostral por Ω e só vamos considerar aqui o caso de Ω ser finito ou infinito . Os subconjuntos de Ω serão chamados de eventos. Diremos que um evento ocorre quando o resultado da experiência pertence ao evento.

Denominamos espaço amostral associado a um experimento aleatório ao conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento. Ele será representado pela letra grega Ω (omega). Assim, seus respectivos subconjuntos são chamados de eventos e o conjunto vazio (conjunto com a ausência de elementos) é denotado por $\emptyset$.

O espaço amostral pode ser classificado em finito, infinito enumerável ou infinito não enumerável, essa classificação depende do experimento aleatório estudado.

Exemplo 4.4. Considerando os exemplos anteriores descreveremos os seus respectivos espaços amostrais. O espaço Ω_i corresponde ao exemplo E_i .

- (i) $\Omega_1 = \{C, KC, KKC, KKKC, \dots\}$; onde K = cara e C = coroa.
- (ii) $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.
- (iii) $\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- (iv) $\Omega_4 = \{\text{boa, defeituosa}\}$.
- (v) $\Omega_5 = \{\text{cores iguais, cores diferentes}\}$.
- (vi) $\Omega_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n + 1\}$.
- (vii) $\Omega_7 = (0, 2)$

Os espaços amostrais $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$ são espaços amostrais finitos, enquanto que o Ω_6 é um espaço amostral infinito enumerável e o Ω_7 é um espaço amostral infinito não enumerável, pois é um intervalo da reta real, logo existem infinitos números e como

contém os números irracionais, dizemos que é não enumerável. Agora, se um espaço infinito puder ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais, é dito infinito enumerável, do contrário é dito finito não enumerável. Um espaço amostral finito, ou infinito enumerável, é chamado frequentemente de espaço discreto, enquanto que um espaço infinito não enumerável é chamado de espaço contínuo.

Exemplo 4.5. *quando lançamos uma moeda, existem apenas duas possibilidades para o resultado: "cara" ou "coroa". Isso significa que o espaço amostral, ou seja, o conjunto de todos os resultados possíveis, é composto por apenas esses dois elementos. Podemos representar o espaço amostral como $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$.*

Definição 4.6. *Chamaremos de eventos todos os subconjuntos de um espaço amostral.*

Em geral são representados pelas letras latinas maiúsculas do alfabeto como $A, B, C, \dots, X, Y, Z$.

Eventos contendo apenas um único elemento do espaço amostral (Ω), ou seja, eventos representados por um conjunto unitário são denominados eventos simples ou eventos elementares.

Definição 4.7. *Seja A e B eventos, a união de A e B é o evento que ocorre se pelo menos um deles ocorre, isto é, A ou B (ambos) ocorrerem, denota-se $A \cup B$.*

Definição 4.8. *Seja A e B eventos, a interseção de A e B é o evento que ocorre se ambos ocorrerem, denota-se $A \cap B$.*

Definição 4.9. *Seja A um evento, o complementar do evento A ocorre se não ocorrer A , denota-se A^c .*

Definição 4.10. *Dois eventos são denominados mutuamente excludentes, se eles não puderem ocorrer simultaneamente juntos. Expressáramos isso escrevendo $A \cap B = \emptyset$, isto é, a interseção de A e B é o conjunto vazio.*

Exemplo 4.11. *Um dispositivo eletrônico é ensaiado e o tempo total de serviço t é registrado. Admitiremos que o espaço amostral seja $\{t \mid t \geq 0\}$. Sejam A , B e C três eventos definidos da seguinte maneira:*

$$A = \{t \mid t < 100\}; B = \{t \mid 50 \leq t \leq 200\}; C = \{t \mid t > 150\}.$$

Deste modo,

$$A \cup B = \{t \mid t \leq 200\}; A \cap B = \{t \mid 50 \leq t < 100\};$$

$$A \cup C = \{t \mid t \geq 50\}; A \cap C = \{t \mid 150 < t \leq 200\};$$

$$A \cap C = \emptyset; A \cup C = \{t \mid t < 100 \text{ ou } t > 150\};$$

$$A^c = \{t \mid t \geq 100\}; C^c = \{t \mid t \leq 150\}.$$

Teorema 4.12. *Sejam A , B e C eventos do espaço amostral Ω , temos que*

$$(i) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(ii) (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(iii) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(iv) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Demonstração:

(i) $x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow x \in C \text{ e } x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in C \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \in B) \Leftrightarrow (x \in C \text{ e } x \in A) \text{ ou } (x \in C \text{ e } x \in B) \Leftrightarrow (x \in A \cap C) \text{ ou } (x \in B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

(ii) $x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \text{ e } x \in (B \cup C)$.

• Se $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$.

• Se $x \notin C \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup C$.

(iii) Iremos demonstrar que (a) $(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$ e (b) $A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C$.

(a): Se $x \in (A \cup B)^C$, então $x \notin (A \cup B)$. Assim, $x \notin A$ e $x \notin B$. Portanto, $x \in A^C$ e $x \in B^C$. Disto segue que $x \in A^C \cap B^C$. Logo, $(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$.

(b): Se $y \in A^C \cap B^C$, então $y \in A^C$ e $y \in B^C$. Assim, $y \notin A$ e $y \notin B$. Disto segue que $y \notin (A \cup B)$, ou seja, $y \in (A \cup B)^C$. Logo, $A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C$.

Portanto, concluímos que $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

(iv) Iremos mostrar que (a) $(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$ e (b) $A^C \cup B^C \subseteq (A \cap B)^C$.

(a): Se $x \in (A \cap B)^C$, então $x \notin (A \cap B)$. Isso implica que $x \notin A$ ou $x \notin B$. Portanto, $x \in A^C$ ou $x \in B^C$. Assim, $x \in A^C \cup B^C$. Logo, $(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$.

(b): Se $y \in A^C \cup B^C$, então $y \in A^C$ ou $y \in B^C$. Isso significa que $y \notin A$ ou $y \notin B$. Segue que $y \notin (A \cap B)$, ou seja, $y \in (A \cap B)^C$. Logo, $A^C \cup B^C \subseteq (A \cap B)^C$.

Portanto, concluímos que $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.



Definição 4.13. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ocorre se ao menos um dos eventos A_i ocorre, para $i = 1, 2, 3, \dots$.

Definição 4.14. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ ocorre se todos os eventos A_i ocorrem, para $i = 1, 2, 3, \dots$.

Definição 4.15. Dados A e B dois eventos, são denominados mutuamente excludente quando não podem ocorrer juntos, isto é, $A \cap B = \emptyset$.

A primeira definição formal de probabilidade surgiu na obra *Liber de Ludo Aleae* de Jerônimo Cardano (1501-1576), na forma do quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

De acordo com Laplace, os elementos de A , que são os eventos elementares que compõem o espaço amostral, são considerados os casos favoráveis. Já os elementos do espaço amostral Ω , que representam todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, são chamados de casos possíveis.

Definição 4.16. *Seja A um evento qualquer, temos que:*

$$\text{Probabilidade de } A = P(A) = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número de casos possíveis}} \quad (4.1)$$

Exemplo 4.17. *João possui uma urna com 3 bolas brancas e 5 amarelas. Ela retira uma bola de cada vez, sem reposição. Qual é a probabilidade das 2 primeiras serem amarelas?*

Percebemos que o nosso espaço amostral é $\Omega = \{(B_1, B_2) : B_1 \neq B_2\}$ onde B_1 e B_2 representam a primeira e segunda bola a serem retiradas, respectivamente.

Ao retirarmos a primeira bola da urna, teremos $3+5 = 8$ possibilidades. Ao retirarmos a segunda bola, só restará 7 possibilidades, visto que já retiramos a primeira bola da urna, então:

$$\text{número de casos possíveis} = 8 \cdot 7 = 56$$

Como queremos que as duas primeiras bolas sejam amarela, temos que há 5 possibilidades para a primeira bola e 4 possibilidade para a segunda possibilidade, visto que já removemos uma bola amarela, então:

$$\text{número de casos favoráveis} = 5 \cdot 4 = 20$$

logo, teremos que:

$$P(A) = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}.$$

Exemplo 4.18. *Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual a probabilidade de obter 2 caras? Qual a probabilidade de obter pelo menos 2 caras?*

Indicaremo com C , Cara e com K coroa. O espaço amostral é então,

$$\Omega = \{(CCC), (CCK), (CKC), (CKK), (KCC), (KCK), (KKC), (KKK)\}.$$

Portanto, teremos 8 casos possíveis. Se A indica o evento "obter 2 caras" temos que:

$$A = \{(CCK), (CKC), (KCC)\}$$

assim,

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$

Se B o evento "obter pelo menos 2 caras" temos que:

$$B = \{(CCK), (CKC), (KCC), (CCC)\}$$

assim,

$$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

No entanto, a definição clássica de probabilidade tem suas limitações e não pode ser aplicada a todos os tipos de experimentos aleatórios, especialmente aqueles em que os resultados possíveis não têm a mesma probabilidade de ocorrência.

Exemplo 4.19. *Considerando o lançamento de um dado viciado, onde as faces não têm a mesma probabilidade de serem obtidas, não é possível determinar a probabilidade de um evento simplesmente pelo número de casos favoráveis e casos possíveis.*

Vamos então, introduzir a noção geral de probabilidade e verificar propriedades que são consequências da definição.

Definição 4.20. *Probabilidade é uma função que a cada evento A associa um número $P(A)$ de forma que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $0 \leq P(A) \leq 1$
- (ii) $P(\Omega) = 1$
- (iii) Se A e B são eventos mutuamente excludentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Teorema 4.21. *Se A e B são eventos, então:*

- (i) $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- (ii) $P(\emptyset) = 0$.
- (iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- (iv) Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração:

- (i) A e A^c são eventos mutuamente excludentes. Então sabemos que:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

desse modo,

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

(ii) Como Ω e $\emptyset$ são mutuamente excludentes, temos:

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

daí,

$$P(\emptyset) = 0.$$

(iii) Como $A \cup B$ pode ser escrito como a união de dois eventos mutuamente exclusivos: $A \cup (A^c \cap B)$. Temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B) \quad (4.2)$$

como $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \quad (4.3)$$

subtraindo (4.2) de (4.3), obtem-se

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(iv) Decompondo B em dois em dois eventos mutuamente excludente, teremos: $B = A \cup (B \cap A^c)$ consequentemente,

$$P(B) = P(A) + P(B \cap A^c) \geq P(A)$$

pois

$$P(B \cap A^c) \geq 0$$

pela propriedade 1 da definição 4.20.



Exemplo 4.22. Em um grupo composto por s pessoas, qual é a probabilidade de pelo menos duas delas compartilharem o mesmo dia de aniversário?

Inicialmente calcula-se a probabilidade de não ocorrer pelo menos duas pessoas compartilharem o mesmo dia de aniversário. O número total de casos possíveis para os aniversários das s pessoas é 365^s . O número de casos favoráveis em que todas as pessoas têm aniversários em dias diferentes é $365 \times 364 \times \cdots \times (365 - s)$, com s fatores nesse produto. Portanto, a probabilidade de não haver pelo menos duas pessoas com o mesmo dia de aniversário é dada por:

$$\frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - s)}{365^s}.$$

A probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que tenham o mesmo dia de aniversário é calculada como a probabilidade complementar de não ocorrer isso. Portanto,

a probabilidade de pelo menos duas pessoas compartilharem o mesmo dia de aniversário é igual a 1 menos a probabilidade de todas as pessoas terem aniversários em dias diferentes. Essa probabilidade pode ser calculada usando a fórmula:

$$1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - s)}{365^s}.$$

A tabela abaixo fornece a probabilidade de haver coincidência de aniversários para diferentes valores de s .

Tabela 4.1 – Distribuição de Probabilidade para a Variável s .

s	Probabilidade
5	0,03
10	0,12
15	0,25
20	0,41
23	0,51
25	0,57
30	0,71
40	0,89
45	0,94
50	0,97

Fonte: Autoria própria.

Portanto, em um grupo de 23 pessoas, é mais provável haver duas pessoas com o mesmo aniversário do que todas aniversariarem em dias diferentes.

4.3 Probabilidade Condicional

A probabilidade condicional é uma técnica importante em probabilidade que nos permite calcular a probabilidade de um evento A ocorrer, levando em consideração a ocorrência prévia de um evento B no mesmo espaço amostral. Essa técnica é usada quando temos informações privilegiadas sobre um evento e queremos determinar a probabilidade de outro evento com base nessa informação prévia.

Considere A e B como dois eventos relacionados ao experimento E . Vamos utilizar a notação $P(A | B)$ para representar a probabilidade do evento A acontecer, dado que o evento B já ocorreu.

Exemplo 4.23. Considere a seguinte experiência: lançar um dado não viciado e observar a face superior. Define-se o evento A como "o resultado é um número par". A probabilidade de A a priori, ou seja, antes de realizar a experiência, é $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$, pois existem três números pares possíveis em um total de seis resultados possíveis.

Agora, suponha que, após realizar a experiência, alguém informe que o resultado não foi o número 1, ou seja, o evento $B = \text{"o resultado é diferente de 1"}$ ocorreu. Nossa opinião sobre a ocorrência do evento A é modificada com essa informação, uma vez que agora temos apenas cinco casos possíveis, dos quais três são favoráveis à ocorrência de a . Essa mudança de opinião é quantificada através da introdução da probabilidade a posteriori, ou seja, a probabilidade de A dado B , denotada por $P(A | B)$, que é igual a $\frac{3}{5} = 0,6$.

Definição 4.24. A probabilidade condicional de B dado A é o número $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Este número está definido para o caso em que $P(A) > 0$, simbolicamente

$$P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad (4.4)$$

para $P(A) > 0$.

Usualmente escreve-se essa fórmula da seguinte maneira:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A). \quad (4.5)$$

Exemplo 4.25. Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa urna. Determine a probabilidade de ambas serem brancas.

Solução: Sejam $B_1 = \{a \text{ primeira bola é branca}\}$ e $B_2 = \{a \text{ segunda bola é branca}\}$. Temos

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}.$$

Exemplo 4.26. João e Paulo estão em uma lanchonete. Sobre a mesa há duas travessas. Na primeira travessa há 4 corinhas e 6 esfirras, e na segunda há 3 risoles e 5 corinhas. Se ao acaso alguém escolher uma destas travessas e também ao acaso pegar um dos salgados, qual é a probabilidade de se ter pegado uma corinha?

Solução: Sejam I_1 o evento que corresponde a escolher a primeira travessa, I_2 o evento que corresponde a escolher a segunda, e C o evento que corresponde a pegar uma corinha. Queremos calcular quanto vale $P(C)$. Para isso, note que

$$P(C) = P((C \cap I_1) \cup (C \cap I_2)) = P((C \cap I_1) + (C \cap I_2)). \quad (4.6)$$

Sabemos que

$$P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(B | A) \cdot P(A), \quad (4.7)$$

obtemos que:

$$P(C \cap I_1) = P(C | I_1) \cdot P(I_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \quad (4.8)$$

$$P(C \cap I_2) = P(C | I_2) \cdot P(I_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}. \quad (4.9)$$

$$\text{Portanto, } P(C) = \frac{1}{5} + \frac{5}{16} = \frac{41}{80}.$$

5 PROBABILIDADE COM ESPAÇO AMOSTRAL INFINITO

A teoria da probabilidade é uma ferramenta fundamental para a análise de eventos aleatórios e incertos em diversas áreas do conhecimento, desde a física e a engenharia até a economia e as ciências sociais. Ela permite quantificar a incerteza associada a esses eventos e fornecer uma base sólida para a tomada de decisões informadas.

Um dos elementos essenciais da teoria da probabilidade é o espaço amostral, que representa o conjunto de todos os resultados possíveis de um determinado experimento aleatório. Geralmente, o espaço amostral é finito ou contável, o que significa que a quantidade de resultados possíveis é limitada e pode ser enumerada. No entanto, em certos casos, lidamos com espaços amostrais infinitos, onde a quantidade de resultados possíveis é infinita e, muitas vezes, não pode ser completamente enumerada.

A consideração de espaços amostrais infinitos apresenta desafios adicionais e exige uma abordagem diferenciada em relação aos espaços finitos ou contáveis. A análise probabilística em espaços amostrais infinitos requer o uso de ferramentas matemáticas mais avançadas, como a teoria dos conjuntos, a teoria da medida e a análise matemática. A seguir trabalharemos alguns exemplos de probabilidade. As referências utilizadas nesse capítulo são os livros de Vitor Amorim e Grazielle Mozer ([AMORIM; MOZER, 2020](#)), Carlos Alberto Barbosa Dantas ([DANTAS, 2013](#)), os artigos de Marcel Thadeu de Abreu e Souza Vitor Emanuel Gulisz ([ABREU; GULISZ, s.d](#)), Fernanda Vital de Paula ([PAULA, 2020](#)) e a dissertação de Hellen Fernandes Gondim ([GONDIM, 2013](#)).

5.1 Definições e Exemplos

Em estatística, é comum atribuir probabilidade a um evento E de um espaço amostral Ω analisando a frequência relativa desse evento, após n repetições desse evento associado a espaço amostral Ω . A noção de usar a frequência relativa como probabilidade surge de maneira orgânica a partir de aplicações na prática.

Quando o evento E é observado n_E vezes com n repetições independentes de experimento, utilizamos a frequência relativa do evento E ocorrer como uma aproximação para a probabilidade de ocorrência do evento E . A frequência relativa de E é dada por:

$$f_n(E) = \frac{n_E}{n} \simeq P(E). \quad (5.1)$$

Ao repetirmos o experimento n vezes nas mesmas condições, de modo que as

sucessivas repetições não dependa das repetições anteriores e observamos que a frequência relativa de um evento E tende a uma constante p .

Há situações que podemos modelar problemas por mais de uma definição de probabilidade. A abordagem frequentista frequentemente se aproxima mais da realidade nesses casos. No entanto, é importante tomar cuidado ao fazer uso dessa abordagem, sendo fundamental ter uma compreensão acerca da definição frequentista para evitar equívocos.

Exemplo 5.1. *Uma empresa de crédito pessoal depende, entre outros fatores, da avaliação do risco de inadimplência para garantir que sua atividade seja sustentável. Quando se analisa o perfil de um cliente, como é possível estimar a probabilidade de que ele venha a ficar inadimplente?*

Analizando o problema sobre o olhar da Definição Clássica de probabilidade, teremos que o espaço amostral Ω consiste em dois eventos equiprováveis, ou seja, "fica inadimplente" e "não fica inadimplente", então a probabilidade de um cliente ficar inadimplente seria de 50%. No entanto, essa abordagem pode não fazer sentido em muitas situações reais de análise de risco de inadimplência em uma empresa de crédito pessoal.

A probabilidade clássica assume que todos os eventos no espaço amostral têm a mesma chance de ocorrer, o que raramente é o caso na prática. A probabilidade de inadimplência de um cliente é influenciada por uma série de fatores individuais, como histórico de crédito, renda, histórico de pagamentos passados e outros dados financeiros e pessoais.

Logo, em uma abordagem mais realista, a probabilidade de inadimplência seria estimada com base em uma análise mais completa desses fatores e usando técnicas estatísticas ou modelos de risco personalizados que consideram a singularidade de cada cliente. A probabilidade de 50% da Definição Clássica pode ser um ponto de partida simplificado, mas raramente refletirá com precisão a probabilidade real de inadimplência em situações do mundo real.

Exemplo 5.2. *Uma rede de locadora de automóveis possui um total de 250 filiais na região da Grande São Paulo, das quais 180 estão localizadas na capital. Os clientes que alugam um veículo em qualquer uma dessas filiais têm a opção de devolvê-lo em qualquer outra filial dentro da mesma região.*

a) Qual é a probabilidade de que um carro alugado nessa rede seja devolvido em uma loja da capital?

b) Há mais de uma abordagem possível para esse problema?

Se todas as lojas tiverem a mesma probabilidade de receber o carro, estaríamos modelando a situação de acordo com a Definição Clássica de probabilidade. Nesse cenário, cada loja teria a mesma probabilidade de ser escolhida para a devolução do carro, e

essa probabilidade seria igualmente distribuída entre as 250 lojas na Grande São Paulo. Portanto, estamos usando a abordagem da Definição Clássica para modelar esse problema, logo:

$$P(E) = \frac{180}{250} = 75\%.$$

b) As lojas no centro ou próximas aos aeroportos não aceitarão carros? Ou existem outros fatores que influenciam a escolha de onde voltar? O que realmente acontece se o gestor da rede responsável pelo planejamento do espaço das lojas e da frota assumir que todas as lojas recebem os carros da mesma forma? É justo dizer que as lojas não terão devoluções semelhantes, o que significa que algumas precisarão de mais espaço e equipamentos para lidar com as devoluções e a necessidade de movimentar suas frotas. Neste caso, a frequência relativa como medida de probabilidade para cada loja, bem como para a loja de capital, permite-nos obter uma imagem mais precisa da dinâmica real dos retornos. Portanto, se E é o evento de um carro alugado nesta rede ser devolvido à loja de capital, então, dados os dados de n retornos anteriores e o número de retornos de capital n_E , o valor mais próximo da situação real será:

$$f_n(E) = \frac{n_E}{n} \simeq P(E).$$

Definição 5.3 (Definição Frequentista). Dado um evento $E \subset \Omega$, e para todo $n \geq 1$, teremos uma sequência de n repetições independentes do experimento em questão. Portanto, se n_E é o número de ocorrências de E , definimos:

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_E}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(E). \quad (5.2)$$

se o limite existir.

Lema 5.4. A frequência relativa $f_n(E) \subset \Omega$ satisfaz as seguintes propriedades:

- a) Para todo evento E , $0 \leq f_n(E) \leq 1$;
- b) Se E e F são dois eventos de Ω , mutuamente exclusivos, temos:

$$f_n(E \cup F) = f_n(E) + f_n(F);$$

- c) $f_n(\Omega) = 1$.

Demonstração: O item a) decorre do fato que $n_E \geq 0$. No item b), como os eventos E e F são mutuamente exclusivos, isto é, toda vez que um deles ocorre o outro não ocorre e portanto o número de ocorrências de $(E \cup F)$ é dada como a soma do número das ocorrências de E com o número de ocorrências de F . Como em toda divisão por n obtemos b ; em toda realização de um experimento algum ponto de Ω ocorre, então concluímos que o item c) é verdade. ■

Na abordagem frequentista, o cálculo da probabilidade de um evento é permitido por meio de experimentos. Neste contexto, probabilidade refere-se à frequência de sucessos observados durante uma quantidade finita de tentativa. Aqui, a probabilidade é dada como uma aproximação que depende do número de repetições do experimento e é baseada em um importante teorema chamado lei dos grandes números.

Já fizemos a discussão sobre calcular a probabilidade do evento A de interesse usando a abordagem clássica. Para esse cálculo, incluem a necessidade de o espaço amostral seja um conjunto finito. Ao utilizarmos a definição frequentista superamos este desafio, mas encontramos um novas limitações, como a necessidade de um número grande de repetições nas mesmas condições. Na prática, esta necessidade de um elevado número de repetições muitas vezes torna-se impossível.

Uma definição geral de probabilidades deve ser ampla o suficiente para abordar uma variedade de diferentes espaços amostrais, sejam igualmente prováveis ou não, finitos ou infinitos. Esta definição deve incluir algumas características importantes para desenvolver um modelo matemático adequado para ensaios randomizados. Além disso, é importante que as propriedades probabilísticas definidas no caso tradicional sejam preservadas neste modelo mais geral.

Definição 5.5 (Definição Axiomática). *Dado um espaço amostral finito Ω . Considere uma função $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\mathcal{P}(\Omega)$ é o conjunto das partes de Ω . Portanto, para cada $A \subset \Omega$ a função P associa a um real $P(A)$. Logo, essa função será uma probabilidade se:*

- (i) $0 \leq P(A) \leq 1$;
- (ii) $P(\Omega) = 1$;
- (iii) Se $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

As definições clássica e frequentista de probabilidade satisfazem os axiomas da Definição 5.5 e, podem ser consideradas casos particulares da definição axiomática de probabilidade. Não nos preocuparemos em dar uma demonstração formal para esse caso, mas precisamos analisar os casos particulares (4.20) e (5.3), isto é, o caso clássico e frequentista, respectivamente, como já mencionado anteriormente.

Teorema 5.6. *Seja Ω um espaço amostral finito, de modo que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$. Sejam $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$ números reais positivos tais que $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_n = 1$. Desse modo, a função $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$P(\{\omega_i\}) = \rho_i, \forall_i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.3)$$

e

$$\forall B \subset \Omega, P(B) = \sum_{\omega_i \in B} P(\{\omega_i\}) \quad (5.4)$$

Demonstração: Como, por definição, $p_i \geq 0$, tem-se $P(\{\omega_i\}) = p_i \geq 0$, para qualquer i tal que $0 \leq i \leq n$. Como dado $B \subset \Omega$, tem-se:

$$0 \leq P(B) = \sum_{\omega_i \in B} P(\{\omega_i\}) \leq \rho_1 + \cdots + \rho_n = 1.$$

Toma-se,

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) + \cdots P(\{\omega_n\}) = \\ &= \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_n = 1. \end{aligned}$$

Dados B_1 e B_2 , tais que $B_1, B_2 \subset \Omega$, em que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Concluimos, este passo, que $B_1 \cup B_2 \subset \Omega$ e que:

$$\begin{aligned} P(B_1 \cup B_2) &= \sum_{\omega_i \in B_1 \cup B_2} P(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega_j \in B_1} P(\{\omega_j\}) + \sum_{\omega_k \in B_2} P(\{\omega_k\}) = \\ &= (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_j) + (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_k) = P(B_1) + P(B_2). \end{aligned}$$

Por fim, se

$$p_1 = \cdots = p_n = p,$$

tem-se que

$$\begin{aligned} 1 &= \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_n = np \Rightarrow p = \frac{1}{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall B \subset \Omega, P(B) = \sum_{\omega_i \in B} P(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega_i \in B} \frac{1}{n} = n_B \cdot \frac{1}{n} = \frac{n(B)}{n(\Omega)}. \end{aligned}$$

Chega-se na definição clássica de probabilidade e concluimos a demonstração. ■

5.2 Espaço Amostral Infinito

Até o presente momento, consideramos apenas situações em que o espaço amostral do experimento aleatório trabalhado fosse finito. O conjunto de ferramentas desenvolvido pode ser aplicado igualmente em cenários nos quais o espaço amostral é infinito e, até mesmo, não enumerável.

Em várias circunstâncias, necessitamos escolher um ponto ao acaso em uma determinada parte do plano ou de um segmento. Quando tomamos ao acaso esse ponto, é aceitável supor que o ponto selecionado pertença a uma determinada região seja proporcional a esta região.

Figura 5.1 – Probabilidade envolvendo comprimento.



Fonte: Autoria própria.

Consideremos que a probabilidade de um ponto contido no segmento AB pertença ao segmento XY , contido no segmento AB , é proporcional ao segmento XY , não dependendo das respectivas posições dos pontos X e Y sobre o segmento AB . Toda via, podemos dizer que a probabilidade do ponto pertencer a XY será:

$$P(XY) = \frac{\text{medida do comprimento de } XY}{\text{medida do comprimento de } AB}.$$

Definição 5.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto com medida definida e finita $\mu(\Omega)$. Então, dado um conjunto mensurável $A \subset \Omega$, com medida $\mu(A)$, definimos a probabilidade de ocorrer A como*

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Quando é usada a definição de probabilidade $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$, podemos interpretar essa razão como a relação entre dois comprimentos, áreas ou volumes, dependendo da dimensão do espaço. Essa abordagem visa mensurar o tamanho do evento A em relação ao espaço amostral Ω .

Podemos pensar na escolha aleatória de um ponto em Ω e calcular a probabilidade de que esse ponto esteja em A como sendo determinada por essa razão. Essa perspectiva é análoga à definição clássica de probabilidades, onde a probabilidade de um evento é calculada considerando a razão entre o número de resultados favoráveis ao evento e o número total de resultados possíveis.

Exemplo 5.8. *Em um segmento de comprimento 1, são escolhidos aleatoriamente dois pontos, dividindo-o em três partes. Determine a probabilidade para que se possa formar um triângulo com essas três partes.*

Dados dois pontos $a \in [0, 1]$ e $b \in [0, 1]$, com $a \leq b$.

Figura 5.2 – Segmento $[0,1]$.



Fonte: Autoria própria.

selecionar dois pontos a e b pertencentes ao intervalo $[0, 1]$, com $a \leq b$ equivale escolher um ponto (a, b) no triângulo A da figura a seguir:

Para a existência de um triângulo de lados $a, b - a$ e $1 - b$ devemos ter as seguintes desigualdades:

$$a < b - a + 1 - b. \quad (5.5)$$

$$b - a < a + 1 - b. \quad (5.6)$$

$$1 - b < a + b - a. \quad (5.7)$$

Das inequações 5.5 , 5.6 e 5.7 podemos afirmar que:

$$a < b - a + 1 - b \Rightarrow a < -a + 1 \Rightarrow 2a < 1 \Rightarrow a < \frac{1}{2} = 0,5. \quad (5.8)$$

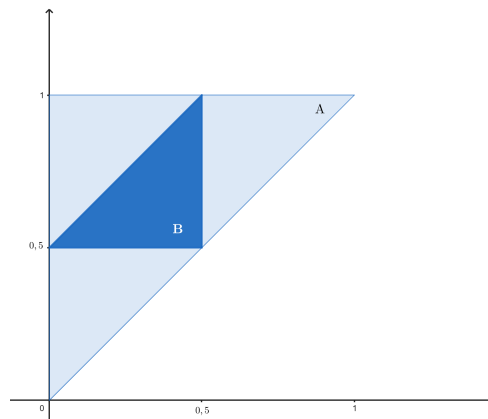
$$b - a < a + 1 - b \Rightarrow 2b - 2a < 1 \Rightarrow 2(b - a) < 1 \Rightarrow b - a < \frac{1}{2} \Rightarrow b < a + 0,5. \quad (5.9)$$

$$1 - b < a + b - a \Rightarrow 1 < a + b - a + b \Rightarrow 1 < 2b \Rightarrow \frac{1}{2} < b \Rightarrow b > 0,5. \quad (5.10)$$

Em suma, $a < \frac{1}{2} = 0,5$, $b < a + 0,5$ e $b > 0,5$. Logo o triângulo só existirá se pertencer a região sombreada do triângulo A, que chamaremos de B. Assim a região de pontos que queremos calcular a probabilidade é dada por:

$$B = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; 0 < a < 0,5; 0 < b > 0,5; 0 < b - a < 0,5\}. \quad (5.11)$$

Figura 5.3 – Como escolher os pontos a e b.



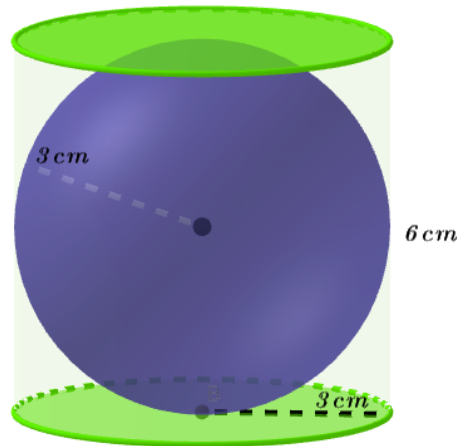
Fonte: Autoria própria.

Portanto, a probabilidade que buscamos é dada como:

$$P(A) = \frac{\text{Área de } B}{\text{Área de } A} = \frac{\frac{0,25}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{0,25}{1} = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 5.9. Em um cilindro reto de 6 centímetros altura e 3 centímetros de raio, está inscrito uma esfera cujo seu raio é de 3 centímetros.

Figura 5.4 – Representação da situação do exemplo 5.9.



Fonte: Autoria própria.

Qual a probabilidade de, ao pegarmos um ponto ao caso no interior do cilindro reto, este ponto pertencer a esfera?

Para resolvermos este problema, precisamos saber como calcular o volume do cilindro e da esfera.

- *O volume do cilindro é dado em função da área de sua base e da altura h , de acordo com a fórmula abaixo:*

$$V = A_b \cdot h \quad (5.12)$$

em que

- V é o volume.
- $A_b = \pi r^2$ (área da base do cilindro).
- h é a altura do cilindro.
- *O volume da esfera é dado em função do raio r , de acordo com a fórmula abaixo:*

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad (5.13)$$

em que

- V é o volume da esfera.
- r é o raio da esfera.

Assim, o volume do cilindro dado no exemplo é:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 3^2 \cdot 6 = 169,56. \quad (5.14)$$

E o volume da esfera dado no exemplo é:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 3^3 = 113,04 \text{ cm}^3. \quad (5.15)$$

Logo, a probabilidade pedida é:

$$P(A) = \frac{\text{Volume da esfera}}{\text{Volume do Cilindro}} = \frac{113,04}{169,56} = \frac{2}{3} = 0,667. \quad (5.16)$$

Portanto, a chance de escolher um ponto ao acaso no cilindro e ele pertencer a esfera é de 66,7%.

Definição 5.10. Dado Ω um espaço amostral enumerável e considere uma função $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre o conjunto das partes de Ω . Ou seja, a função P associa a cada evento $A \subset \Omega$ a um número real $P(A)$. Essa função P é uma probabilidade se satisfizer as seguintes condições:

- (i) $0 \leq P(A) \leq 1$;
- (ii) $P(\Omega) = 1$;
- (iii) (σ -aditividade) Seja $\{A_1, A_2, A_3, \dots\} = \{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, onde $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \geq 1; i \neq j$, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad (5.17)$$

É importante observarmos que a definição 5.10 é muito semelhante à definição 5.5 e que o único ponto que as diferem está em (iii) que lida com a união de somas infinitas. Isso ocorre porque quando usamos espaços amostrais finitos enumeráveis não precisamos considerar essa fazer uso dessa união de somas infinitas. Em essência, a definição mais geral trata de problema de probabilidade em que o espaços amostrais é infinitos, onde conjuntos potencialmente infinitos de eventos devem ser tratados. A definição de espaços finitos pode ser considerada uma aplicação direta desta definição mais geral.

Exemplo 5.11. *A e B lançam um par de dados em sequência até que um deles alcance uma soma total de 7 pontos. Nesse momento, o jogo se encerra, e o jogador que conseguiu essa soma 7 é declarado o vencedor. Considerando que A começa o jogo, qual é a probabilidade de A sair como o vencedor?*

Solução: Existem 6 maneiras de obter uma soma de 7 nos lançamentos iniciais (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1). Assim, a probabilidade de obter a soma 7 é:

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad (5.18)$$

A probabilidade de não obter a soma 7 é calculada de acordo com o item (i) do Teorema 4.21, isto é:

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}. \quad (5.19)$$

Para calcular a probabilidade de A ser o vencedor, vamos dividir o problema em possíveis cenários de jogadas. A primeira possibilidade é A ganhar imediatamente na primeira jogada, o que acontece com uma probabilidade de $\frac{1}{6}$, pois existem seis combinações possíveis que somam 7 ao lançar dois dados. Se A e B não ganharem na primeira jogada, a probabilidade de A vencer na segunda jogada pode ser calculada. Para que isso ocorra, A não pode obter uma soma de 7 na primeira jogada, e B também não pode obtê-la. Então, A deve conseguir uma soma de 7 na segunda jogada, o que ocorre com uma probabilidade de:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}. \quad (5.20)$$

Para que A vença na terceira mão, é necessário que A não obtenha uma soma de 7 nas duas primeiras mãos, B também não obtenha uma soma de 7 nas duas primeiras mãos, e A obtenha uma soma de 7 na terceira mão. A probabilidade de A vencer na terceira mão é,

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}. \quad (5.21)$$

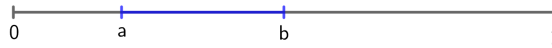
Esse processo se repete para jogadas subsequentes, formando uma série geométrica infinita de probabilidades. A probabilidade total de A ser o vencedor é, portanto, uma soma infinita dessas probabilidades. Logo, obtemos que a probabilidade de A sair ganhador é calculada da seguinte maneira:

$$\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \cdots = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11}. \quad (5.22)$$

Exemplo 5.12. Suponha que um número real pertencente ao intervalo $[0, 1]$ seja escolhido ao acaso. Qual a probabilidade desse número ser:

- (a) maior que 0,5?
- (b) o primeiro número após virgula ser 3, isto é, $0,3 \dots$?
- (c) o primeiro número após a virgula ser ímpar?
- (d) o primeiro número após a virgula ser 23, isto é, $0,23 \dots$?
- (e) exatamente 0,1?
- (f) ser um número racional?
- (g) ser um número irracional?

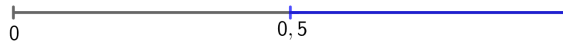
Seja $\Omega = [0, 1]$ e $[a, b] \subset [0, 1]$ é razoável que:

Figura 5.5 – Intervalo $[a, b]$.

Fonte: Autoria própria.

$$P([a, b]) = \frac{|[a, b]|}{|[0, 1]|} = \frac{b - a}{1 - 0} = b - a. \quad (5.23)$$

No item (a), para calcular a probabilidade de ao escolher um número ao acaso, este seja maior que 0.5.

Figura 5.6 – Intervalo $[0.5, 1]$.

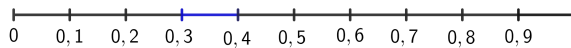
Fonte: Autoria própria.

Utiliza-se 5.23, tem-se que a probabilidade será:

$$P([0.5, 1]) = \frac{|[0.5, 1]|}{|[0, 1]|} = \frac{1 - 0.5}{1 - 0} = 0.5 = 50\%.$$

Logo, a probabilidade de se escolher um número dentro desse intervalo e o mesmo ser maior que 0.5 é de 50%. Observe que nos números decimais trocamos a ", "por "." para não haver confusões em relação à notação.

No item (b), para calcular a probabilidade de ao escolher um número ao acaso, o primeiro número após virgula ser 3, ou seja, $0,3 \dots$,

Figura 5.7 – Intervalo $[0.3, 0.4]$.

Fonte: Autoria própria.

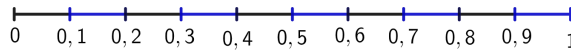
Utiliza-se 5.23, tem-se que a probabilidade é:

$$P([0.3, 0.4]) = \frac{|[0.3, 0.4]|}{|[0, 1]|} = \frac{0.4 - 0.3}{1 - 0} = 0.1 = 10\%.$$

Logo, a probabilidade de escolhermos um número dentro desse intervalo e o primeiro número após virgula ser 3 é de 10%.

No item (c), para calcular a probabilidade de ao escolher um número ao acaso, o primeiro número após virgula seja ímpar, ou seja, $0,1 \dots; 0,3 \dots; 0,5 \dots; 0,7 \dots; 0,9 \dots$,

Figura 5.8 – Intervalos em que o primeiro número após a virgula é ímpar.



Fonte: Autoria própria.

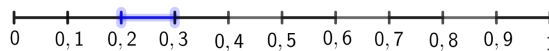
Utiliza-se 5.23, tem-se que a probabilidade é:

$$|[0.1, 0.2]| \cup |[0.3, 0.4]| \cup |[0.5, 0.6]| \cup |[0.7, 0.8]| \cup |[0.9, 1]| = 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.5 = 50\%.$$

Logo, a probabilidade de escolhermos um número dentro desse intervalo e o primeiro número após virgula ser ímpar é de 50%.

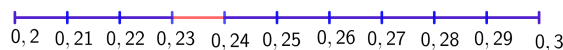
No item (d), para calcular a probabilidade de ao escolher um número ao acaso, o primeiro número após virgula ser 23, ou seja, $0,23 \dots$,

Figura 5.9 – Intervalo $[0.2, 0.3]$.



Fonte: Autoria própria.

Figura 5.10 – Intervalo $[0.23, 0.24]$.



Fonte: Autoria própria.

Utiliza-se 5.23, tem-se que a probabilidade é:

$$P([0.23, 0.24]) = \frac{|[0.23, 0.24]|}{|[0, 1]|} = \frac{0.24 - 0.23}{1 - 0} = 0.01 = 1\%.$$

Logo, a probabilidade de escolher um número dentro desse intervalo e o primeiro número após a virgula ser 23 é de 1%.

No item (e), para calcular a probabilidade de ao escolher um número ao acaso e o número seja exatamente 0.1. Utiliza-se 5.23, tem-se que a probabilidade é:

$$P([0.1, 0.1]) = \frac{|[0.1, 0.1]|}{|[0, 1]|} = \frac{0.1 - 0.1}{1 - 0} = 0.0 = 0\%.$$

Logo, a probabilidade do número escolhido desse intervalo e o número ser exatamente 0,1 é 0%. Todavia, neste caso, probabilidade 0 não significa ser impossível.

No item (f), deseja-se calcular a probabilidade de ao escolher um número ao acaso, este número ser racional. Como o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável, então $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ também é enumerável. Seja $[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$ uma enumeração. Pelo item (iii) da Definição 5.10, teremos:

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{q_1\} \cup \{q_2\} \cup \{q_3\} \cup \dots$$

Logo, a probabilidade de q_i é dada por;

$$P(q_i) = \frac{|[q_i, q_i]|}{|[0, 1]|} = \frac{q_i - q_i}{1 - 0} = 0.0 = 0\%.$$

Assim,

$$P([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{q_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0\%.$$

No item (g), desejamos calcular a probabilidade de ao escolhermos um número ao acaso, este número ser irracional. Tomaremos que $[0, 1] \setminus \mathbb{Q} = ([0, 1] \cap \mathbb{Q})^c$. Assim,

$$P([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = P([0, 1] \cap \mathbb{Q})^c = P([0, 1]) - P([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 1 - 0 = 100\%.$$

Exemplo 5.13. Suponha que uma pessoa tenha uma vida infinita e que a partir de um certo momento comece a jogar na Mega-Sena, e a partir daí nunca mais pare, fazendo um jogo de cada vez. Qual a probabilidade:

- (a) dessa pessoa ganhar todos o jogos?
- (b) dessa pessoa nunca ganhar?

No jogo da Mega-Sena ocorre o sorteio de seis números (dezenas) de um total de 60. O modo de jogar consiste em o participante selecionar entre 6 e 15 dezenas em um único bilhete, também chamado de volante. O valor da aposta varia conforme a quantidade de dezenas escolhidas.

Suponha que uma pessoa joga sempre 6 números (dezenas) em um único jogo por semana. Logo, para ganhar é necessário acertar os 6 números. Assim, calcula-se o número de possibilidades usando a combinação de 60 números tomados 6 a 6, isto é,

$$\binom{60}{6} = \frac{60!}{6!(60-6)!} = \frac{60!}{6!54!} = 50.063.860. \quad (5.24)$$

Seja P a probabilidade dessa pessoa ganhar, logo a probabilidade dela ganhar na primeira vez é:

$$P = \frac{1}{50.063.860} = 0.000002\%. \quad (5.25)$$

Como os eventos são independentes, a probabilidade dessa pessoa ganhar nas duas primeiras vezes é:

$$P = \frac{1}{50.063.860} \cdot \frac{1}{50.063.860} = \frac{1}{50.063.860^2}.$$

Supondo que essa pessoa ganhe nas n primeiras vezes é:

$$P = \frac{1}{50.063.860^n}. \quad (5.26)$$

Para calcular a probabilidade dessa pessoa ganhar em todas as vezes devemos aplicar o limite de n tendendo ao infinito em 5.26, ou seja,

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{50.063.860^n} = 0 = 0\%. \quad (5.27)$$

Analisando a probabilidade dessa pessoa nunca ganhar. A probabilidade dessa pessoa não ganhar na primeira vez é:

$$P = \frac{50.063.859}{50.063.860} < 1. \quad (5.28)$$

Como são eventos independentes, a probabilidade dessa pessoa não ganhar nas duas primeiras vezes é:

$$P = \frac{50.063.859}{50.063.860} \cdot \frac{50.063.859}{50.063.860} = \left(\frac{50.063.859}{50.063.860} \right)^2.$$

Supondo que essa pessoa não ganhe nas n primeiras vezes, ou seja,

$$P = \left(\frac{50.063.859}{50.063.860} \right)^n. \quad (5.29)$$

Portanto, a probabilidade de nunca ganhar é dada por:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{50.063.859}{50.063.860} \right)^n = 0 = 0\%. \quad (5.30)$$

Observa-se que se a probabilidade de um evento é de 0%, isso geralmente implica que, de acordo com a teoria da probabilidade, a ocorrência desse evento é considerada impossível. No entanto, o termo "0%" pode indicar uma probabilidade extremamente baixa, mas não totalmente impossível.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conceito de conjunto desempenha um papel fundamental na matemática, servindo como uma ferramenta essencial para agrupar elementos que compartilham propriedades comuns. Nos primeiros capítulos deste trabalho, destacam-se a importância dos conjuntos e função na matemática, ressaltando sua evolução ao longo do tempo. Esses conceitos são fundamentais para a compreensão e o desenvolvimento de diversas áreas da matemática, desempenhando um papel essencial na resolução de problemas e na formulação de teorias matemáticas.

Conclui-se que o conceito do infinito tem sido uma questão intrigante ao longo da história, cativando filósofos e matemáticos desde o período pré-socrático até o século XIX. Na filosofia, figuras notáveis, como Aristóteles, categorizaram o infinito em duas formas distintas: o infinito potencial e o infinito atual. Essa distinção gerou debates filosóficos ao longo de séculos, moldando perspectivas sobre a natureza do universo e da realidade.

Na matemática, por muito tempo, o infinito foi evitado como objeto de estudo formal. No entanto, Georg Cantor desempenhou um papel revolucionário ao introduzir o conceito de cardinalidade e demonstrar que existem infinitos de diferentes tamanhos. Sua pesquisa abriu novas perspectivas para o desenvolvimento matemático, embora tenha enfrentado controvérsias e resistência inicial por parte da comunidade matemática.

A abordagem inovadora de Cantor, que permitiu a comparação de conjuntos finitos e infinitos, estabeleceu o conceito de números infinitos e a compreensão de que alguns conjuntos infinitos têm a mesma quantidade de elementos que seus subconjuntos. Isso desafiou a intuição humana e levou a novas maneiras de compreender o universo e sua complexidade. Além disso, vale destacar a influência de pensadores como Aristóteles, Pitágoras, Platão e Giordano Bruno na evolução do pensamento sobre o infinito.

A história da teoria da probabilidade é rica em contribuições de diversos matemáticos notáveis que moldaram e desenvolveram esse campo ao longo dos séculos. No início, os jogos de azar eram o ponto de partida para a exploração das probabilidades, e a ideia de calcular as chances nos jogos era um desafio intrigante. Os matemáticos italianos como Luca Pacioli, Niccolò Fontana (Tartaglia) e Girolamo Cardano começaram a abordar problemas de jogos de azar e conceberam as primeiras noções de probabilidade, embora sem a rigorosa formalização que viria posteriormente.

No entanto, foi Blaise Pascal que deu um salto significativo ao formalizar a teoria da probabilidade em sua correspondência com Pierre de Fermat. A famosa "Aposta de Pascal" ilustra sua abordagem pragmática para a fé e a probabilidade, demonstrando como a teoria das decisões pode ser aplicada à crença em Deus. Essas ideias foram posteriormente

sistematizadas e estendidas por outros matemáticos notáveis.

A história da teoria da probabilidade é uma narrativa fascinante de como as mentes brilhantes ao longo da história contribuíram para o desenvolvimento e formalização de um campo matemático crucial. Os matemáticos mencionados desempenharam papéis fundamentais no estabelecimento das bases da teoria da probabilidade.

O espaço amostral, que representa todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, é um conceito essencial na teoria da probabilidade. Normalmente, esse espaço amostral é finito ou contável, o que significa que podemos listar todos os resultados possíveis. No entanto, em certas situações, nos deparamos com espaços amostrais infinitos, o que apresenta desafios adicionais e requer abordagens matemáticas avançadas.

Quando se trata de espaços amostrais infinitos, técnicas matemáticas mais sofisticadas, como a teoria dos conjuntos, a teoria da medida e a análise matemática, tornam-se cruciais para a análise probabilística. A probabilidade é atribuída a um evento E dentro do espaço amostral Ω examinando a frequência relativa desse evento após n repetições do experimento associado a Ω . A noção de probabilidade como frequência relativa emerge organicamente a partir de aplicações práticas.

Nesse contexto, foram explorados principalmente espaços amostrais infinitos e demonstramos como as técnicas probabilísticas podem ser aplicadas a esses cenários. A escolha aleatória de pontos em regiões específicas do plano ou de segmentos exemplifica como a probabilidade pode ser usada para modelar eventos e situações do mundo real, permitindo-nos tomar decisões bem fundamentadas com base na incerteza inerente a esses processos. A teoria da probabilidade continua a desempenhar um papel crucial na ciência, na estatística e em muitas outras áreas, permitindo-nos entender e lidar com o imprevisível e o aleatório em nossas vidas.

Referências

- ABREU, M. T. de; GULISZ, S. V. E. Polo olimpico de treinamento intensivo ufpr curso de combinatória, nível 3. s.d. Citado na página 50.
- AMORIM, V.; MOZER, G. *Probabilidade além da combinatória: Tópicos e problemas reais com foco no raciocínio probabilístico*. [S.l.]: Rio de Janeiro: ANPMat, 2020. Citado na página 50.
- ÁVILA, G. *Análise matemática para licenciatura*. [S.l.]: Editora Blucher, 2001. Citado na página 11.
- BARBOSA, H. H. d. J. Sentido de número na infância: uma interconexão dinâmica entre conceitos e procedimentos. *Paidéia (Ribeirão Preto)*, SciELO Brasil, v. 17, p. 181–194, 2007. Citado na página 23.
- CALABRIA, A. R.; CAVALARI, M. F. Um passeio histórico pelo início da teoria das probabilidades. *X Seminário Nacional de História da Matemática. Campinas*, 2013. Citado na página 33.
- CINDRA, J. L. Algumas considerações sobre o infinito. *Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia*, v. 13, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- DANTAS, C. A. B. *Probabilidade: Um Curso Introductório Vol. 10*. [S.l.]: Edusp, 2013. Citado na página 50.
- GONDIM, H. F. Probabilidade e probabilidade geométrica: conceitos e exemplos aplicáveis no ensino básico. 2013. Citado na página 50.
- IEZZI, G. et al. *Fundamentos de matemática elementar*. [S.l.]: Atual, 1995. Citado na página 11.
- JÚNIOR, R. J. d. M. et al. Enumerabilidade e não enumerabilidade de conjuntos: uma abordagem para o ensino básico. Universidade Federal do Amazonas, 2015. Citado na página 20.
- LIMA, E. L. Análise real volume 1: Funções de uma variável real. *Coleção Matemática Universitária. IMPA, Rio de Janeiro*, 2006. Citado na página 16.
- MARTINS, M. d. C. Matemática em família: os bernoulli. *Correio dos Açores*, Gráfica Açoreana, Lda., p. 17–17, 2014. Citado na página 33.
- MEYER, P. L. Probabilidade: aplicações à estatística. *2ª Edição—Tradução de Ruy de CB Lourenço Filho*, 1965. Citado na página 33.
- MORGADO, A. C. d. O. Ma 12—unidade 02: Números e cardinalidade. SBM, 2012. Citado na página 16.
- MORGADO, A. C. de O. et al. Análise combinatória e probabilidade. *Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro*, 1991. Citado na página 33.

MORRIS, R. *Uma breve história do infinito*. [S.l.]: Zahar, 1998. Citado na página 20.

OLIVEIRA. Conjuntos infinitos. 2004. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 16.

PAULA, F. V. de. O cálculo de probabilidades sob as abordagens clássica e frequentista. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, v. 5, n. 2, p. 398–406, 2020. Citado na página 50.

SILVA, W. N. d. *Um resumo sobre a história da probabilidade e alguns problemas curiosos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Oeste do Pará, 2020. Citado na página 33.

THOME, J. A. F. L.; SILVA, F. de A. Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis. s.d. Citado na página 20.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 8, n. 16, p. 143–153, 2008. Citado na página 33.