



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura

Gercyislan Pereira de Azevedo

Resolução de Problemas Matemáticos: O Método Pictórico e o Método de Polya aplicados em questões da OBMEP

São Luís - MA
2022

Gercyislan Pereira de Azevedo 

Resolução de Problemas Matemáticos: O Método Pictórico e o Método de Polya aplicados em questões da OBMEP

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva

São Luís - MA

2022

Gercyislan Pereira de Azevedo

Resolução de Problemas Matemáticos: O Método Pictórico e o Método de Polya aplicados em questões da OBMEP/ Gercyislan Pereira de Azevedo. – São Luís - MA, 2022-

36 p. : il.(alguma color.); 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Matemática – Licenciatura

Universidade Federal do Maranhão, 2022.

1. Método de Polya. 2. Método Pictórico. I. Orientador. II. Universidade Federal do Maranhão. III. Curso de Matemática – Licenciatura. IV. Título

CDU XX:XXX:XXX.X

Gercyislan Pereira de Azevedo

Resolução de Problemas Matemáticos: O Método Pictórico e o Método de Polya aplicados em questões da OBMEP

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 20/12/2022

Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof.^a Dr.^a Kayla Rocha Braga
DEMAT/UFMA
Primeira Examinadora

Prof. Dr. Antonio José da Silva
DEMAT/UFMA
Segundo Examinador

Resumo

Resolver problemas, independentemente da sua natureza, é de extrema importância na vida de qualquer pessoa e, para tanto, é necessário ter um raciocínio lógico desenvolvido. Em sala de aula, o aluno precisa exercitar o seu raciocínio lógico para entender os conteúdos que a Matemática propõe. Para muitos alunos, a Matemática é difícil, devido ao fato de o conhecimento não chegar a eles de forma que os mesmos entendam. Para tanto, é importante que o professor busque metodologias que facilitem o processo de ensino-aprendizagem dos alunos em sala de aula. Desta maneira, esta pesquisa bibliográfica tem como objetivo compreender como o Método de Polya e Método Pictórico são auxiliares na construção de soluções de problemas matemáticos. O Método de Polya foi criado por George Polya e o Método Pictórico, desenvolvido por Yuriko Baldin, ambos utilizados para resolver problemas matemáticos. Cada método tem suas características e cabe aqui neste trabalho entender como são executados nos problemas propostos. Como metodologia, serão aqui analisados algumas questões da OBMEP do ano de 2019, com o propósito de aplicar os métodos aqui descritos e entender como os mesmos funcionam e quais são os seus passos para chegar a uma possível solução.

Palavras-chave: Método de Polya, Método Pictórico, Resolução de Problemas, OBMEP

Abstract

Solving problems, regardless of their nature, is extremely important in anyone's life and, for that, it is necessary to have a developed logical reasoning. In the classroom, the student needs to exercise his logical reasoning to understand the contents that Mathematics proposes. For many students, Mathematics is difficult, due to the fact that knowledge does not reach them in a way that they understand. Therefore, it is important that the teacher seeks methodologies that facilitate the teaching-learning process of students in the classroom. In this way, this bibliographic research aims to understand how the Polya Method and the Pictorial Method are auxiliaries in the construction of solutions to mathematical problems. The Polya Method was created by George Polya and the Pictorial Method, developed by Yuriko Baldin, both used to solve mathematical problems. Each method has its characteristics and it is here in this work to understand how they were elaborated and executed. As a methodology, some questions from the OBMEP of the year 2019 will be analyzed here, with the purpose of applying the methods described here and understanding how they work and what are their steps to reach the possible solution.

Keywords: Polya method, Pictorial method, Problem solving, OBMEP

Sumário

1	INTRODUÇÃO	6
2	O ENSINO DA MATEMÁTICA	8
2.1	A BNCC E SUA CONTRIBUIÇÃO	12
2.2	As reflexões da prática docente	13
3	OS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	15
3.1	Método de Polya	15
3.1.1	Compreender o problema	17
3.1.2	Designar um plano	17
3.1.3	Executar o plano	17
3.1.4	Retrospecto do problema	17
3.1.5	Problemas abordados por Polya	18
3.2	Método Pictórico	21
4	A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A OBMEP	27
4.1	Resolvendo alguns problemas	28
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	34
	REFERÊNCIAS	35

1 INTRODUÇÃO

A Matemática surgiu como necessidade para o ser humano em diferentes sociedades e diferentes situações, onde os problemas de medições se mostravam cada vez mais, como representações de comprimento, áreas e volumes. O desenvolvimento de um sistema de contagem também se fazia presente, para que houvesse distribuição de terras, criação de animais em áreas demarcadas. Os egípcios desde cedo se interessavam por problemas. Um exemplo disso foram dois papiros - plantas muito comuns nas margens do rio Nilo, semelhantes a um papel, usados pelos egípcios para escrever -, chamados de Moscou e Rhind, onde continham 25 e 85 problemas matemáticos, respectivamente. Nestes papiros, os autores faziam uso das frações unitárias para solucionar problemas envolvendo áreas, além de problemas com distribuição de pão e cerveja, ração para gados e aves domésticas. Daí a inegável importância que os problemas matemáticos tinham para os egípcios, assim como é importante para todos nós.

Contudo, mesmo que os problemas fossem indispensáveis para o desenvolvimento da Matemática, somente no final do século XX, eles passaram a ser tratados como metodologia de ensino. George Polya foi um educador que contribuiu para tal desenvolvimento, com seu método, que seja descrito ao longo deste trabalho, assim como o Método Pictórico, criado e desenvolvido por Yuri Baldin. Com o passar dos anos, essas metodologias de resolução de problemas ganharam destaque para o Ensino da Matemática.

Quando se fala em solucionar problemas, logo nos vem à mente a ideia de resolver questões de Matemática, com foco em aplicar os conhecimentos e desenvolver habilidades, o que acaba trazendo erroneamente o seu significado no âmbito escolar. O maior desafio de um docente em Matemática é ensinar a disciplina da melhor forma possível e que seja agradável ao aluno. Cada vez mais o paradigma de que “a Matemática é difícil” deve ser quebrado. O ensino através da resolução de problemas tem como objetivo fazer com que o aluno aprenda a aprender, desenvolvendo nele a habilidade de criar suas próprias soluções, sejam questões escolares ou da vida cotidiana.

Na atualidade, muitos alunos têm grande dificuldade em interpretar problemas matemáticos propostos nos livros didáticos. Portanto há uma grande preocupação em tentar melhorar o ensino, de forma que esse nível de dificuldade diminua, tornando a Matemática uma área de melhor entendimento. Há pesquisas que abordam este mesmo tema e este trabalho aborda duas metodologias de ensino que podem auxiliar os alunos. Como as metodologias podem auxiliar em sala de aula? Como saber a metodologia que se encaixa em determinado público escolar? Os objetivos para esta pesquisa são: entender como metodologias aqui descritas de resolução de problemas podem ser aplicadas para facilitar o entendimento dos alunos em problemas matemáticos e também compreender o papel fundamental das metodologias de resolução de problemas na

vida do discente.

Dessa forma, essa pesquisa bibliográfica faz uma abordagem de como resolver problemas matemáticos utilizando o Método Pictórico, um modelo que será descrito ao longo do trabalho e o Método de Polya, ambos criados como forma de auxiliar no processo de ensino-aprendizagem dos alunos.

2 O ensino da Matemática

A Matemática, assim como muitas outras áreas do conhecimento, passaram por várias mudanças ao longo do tempo. Não é preciso um estudo aprofundado para saber que no passado, desde o período colonial, o ensino era predominantemente tradicional (marcado pelo autoritarismo na relação professor-aluno). De 1808, com a chegada da família real para o Brasil, até o século XX, foram criadas escolas e universidades em alguns estados do Brasil, como Bahia e São Paulo. De 1940 em diante o modelo adotado nas licenciaturas era de 3 anos em bacharel mais 1 ano com disciplinas pedagógicas. Já na década de 1960 um importante movimento surgiu e teve enorme importância na identificação de novas lideranças na educação matemática, que serviu para desmistificar muitas coisas que se faziam no ensino da matemática e mudar o estilo das aulas.

No século XX, a Matemática era trabalhada sob um tipo de tendência pedagógica chamada tradicional, que prioriza a memorização e reprodução de conteúdos. A avaliação era feita por meio de testes para saber se o aluno estava aprendendo, ou seja, o que era avaliado era o potencial de reprodução desse aluno. Anos mais tarde os alunos passaram a compreender melhor os conteúdos, buscando cada vez mais autonomia na construção do seu conhecimento, através das várias outras possibilidades de aprender Matemática, como a modelagem matemática, o uso de tecnologias digitais (Geogebra, por exemplo) e a metodologia de resolução de problemas. A resolução de problemas começava a conquistar espaço, de forma que o ensino da Matemática cada vez mais se modificava. Polya foi um grande precursor desse avanço, desenvolvendo um método que não necessariamente resolvia só problemas matemáticos, mas também aqueles cuja resposta para a solução não estivesse bem definida.

Não é tão difícil você passar por uma escola, seja como um estagiário, seja como um convidado ou até mesmo como um professor e não se deparar com uma turma em que os alunos sentem bastante dificuldade em aprender Matemática. Alguns movimentos e métodos foram criados ao tempo, mas alguns foram sem sucesso, não atingindo o objetivo desejado, que é de diminuir o nível de dificuldade encontrada nos estudantes. Mas como pensar na metodologia mais adequada? Como garantir, de alguma forma, que os alunos entenderão os conteúdos abordados na disciplina?

Tudo que se propõe a fazer dentro do ambiente escolar é guiado por objetivos, sejam eles de âmbito mais geral ou mais específico. Então, ao pensar na metodologia, deve-se pensar no objetivo que a mesma precisa propor, considerando não apenas, um passo a passo que deve ser seguido, mas a cada passo dado é preciso que seja compreendido. É claro que o professor precisa trabalhar com situações-problemas que usem “dados da vida real, não empregando dados absurdos e apresentando linguagem clara, precisa e acessível” (NUNES et al., 2005).

O termo problema é tão comentado dentro da Matemática, como algo que deve ser resolvido, algo sem solução imediata e talvez soe até como algo negativo por parte dos alunos. Em nossa linguagem comum, o problema é interpretado como uma situação ruim, talvez desagradável e que ninguém gostaria de ter. Um carro com pneu furado, um celular roubado, uma televisão com tela queimada são exemplos de problemas relacionados à vida real. Agora trazendo para nosso contexto, o que vem a ser problema? Será que os problemas descritos dentro da Matemática recebem o mesmo significado que estes problemas citados anteriormente?

De acordo com [Vila e Callejo \(2009, p.27\)](#):

[...] o termo problema está muito desgastado no contexto escolar, pois vem sendo utilizado para se referir a uma ampla tipologia de atividades propostas aos alunos com finalidades muito díspares e, principalmente, com um aspecto comum: exige-se aplicar diferentes conhecimentos, habilidades e capacidades que normalmente fazem parte da programação de matemática.

Segundo [Echeverría e Pozo \(1998, p.1\)](#):

O termo problema pode fazer referência a situações muito diferentes, em função do contexto no qual ocorrem e das características e expectativas das pessoas que nelas se encontram envolvidas.

A avaliação clássica que é aplicada em várias escolas é a temida prova, composta basicamente por questões em que o aluno precisa acertar uma boa quantidade para garantir uma boa nota. Os problemas parecem ser trabalhados em sala de aula só para que o aluno garanta êxito nas provas e sua tarefa é memorizar a resolução dada pelo professor em sala de aula. Dessa forma, o aluno não encara o problema como um desafio, de forma a buscar a solução, pois ele simplesmente aceita a resolução do professor como verdade. “Os problemas matemáticos são trabalhados de forma desmotivadora, apenas como um conjunto de exercícios acadêmicos” ([TOLEDO; TOLEDO, 2009](#)). Por causa disso, nós vemos alunos cada vez mais desmotivados e sem vontade de aprender alguma coisa.

Para [Echeverría e Pozo \(1998, p.14\)](#):

Ensinar a resolver problemas não consiste somente em dotar o aluno de habilidades e estratégias eficazes, mas também criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta.

Naturalmente, o professor prepara a sua aula ministrando um certo conteúdo, e, após isso, ele trabalha com as primeiras questões da lista de atividades do livro didático, que envolve a fixação do conteúdo outrora ministrado. O que ocorre é que, em algumas situações, as questões trabalhadas são apenas essas, pulando as outras que envolvem uma problematização acerca do conteúdo daquele capítulo.

Portanto, trabalhar com a resolução de problemas não é, necessariamente, mostrar que o aluno tem domínio de conteúdo, mas sim, exercitar no mesmo a capacidade de interpretação. Para isso, a prática da leitura é de fundamental importância por parte dos alunos, de maneira que sua capacidade de entender assuntos das várias áreas do conhecimento seja aprimorada. Todas as disciplinas estudadas na educação básica têm esse propósito e na Matemática não é diferente, visto que os conteúdos abordados servem como base para solucionar problemas matemáticos, de preferência, do nosso cotidiano. Daí podemos perceber a grande importância que a interdisciplinaridade possui dentro do meio escolar.

Para uma pessoa, algo que não faz muito sentido ou não tem lógica, deixa de ser atraente. Por isso, na prática educativa, de forma a obtermos êxito, a Matemática deve ser atraente, chamativa, sem “risco de perda de sentido dos conteúdos, pois quando isso acontece, é um sinal de alerta”. (PAIS, 2018, p. 133)

Cada vez mais os alunos precisam estar familiarizados com a ideia que cada questão quer passar, devem ter uma intuição e noção do que o problema está pedindo. Às vezes a compreensão do problema fica comprometida, pois falta afinidade para criar hipóteses, estabelecer suas metas de solução, mesmo o aluno errando. Toledo e Toledo (2009, p. 84) afirmam que nessa situação o papel do professor é “mostrar possíveis estratégias de resolução para os problemas e, ao mesmo tempo, abrir espaço para que a sociedade discuta os vários métodos encontrados pelos próprios alunos”.

Ouvimos e comparamos, muitas das vezes, o termo exercício com o termo problema. Há uma distinção entre eles? Autores que abordam este tema da resolução de problemas afirmam que há uma distinção. Nas palavras de Echeverría e Pozo (1998, p. 16): “[...] Um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução”. Portanto, exercício é uma mera repetição de algum conteúdo já abordado. Por exemplo: digamos que o professor ministre uma aula de como encontrar as raízes de uma equação do segundo grau usando a fórmula de Bhaskara. De forma a exercitar e fixar o conteúdo estudado, outras equações são repassadas em forma de atividade para que o aluno aprenda a fazer os cálculos corretos. Já os problemas trabalhados seriam situações do cotidiano envolvendo estas equações, ou seja problemas que podem ser solucionados pelas equações estudadas. Contudo, os exercícios de forma alguma, não deixam de ser importantes no aprendizado do aluno, pois é através deles que o conteúdo é fixado na memória.

Há outro ponto que deve ser comentado: em algumas escolas, alguns professores têm uma certa preocupação em terminar os conteúdos no período correto, seja por causa do planejamento anual, seja por pressão da diretoria ou coordenação, optando pelo quantitativo em vez do qualitativo. Será que optar pela quantidade e não pela qualidade pode ser algo ruim? Os alunos conseguem ser autores do próprio conhecimento ou estão apenas reproduzindo o que é passado pelo professor? Não exigir do aluno um certo compromisso faz com que ele fique em um espaço

acomodado, apenas reproduzindo ou tentando reproduzir o que foi passado, sem saber o porquê. Os algoritmos usados nas quatro operações são ensinados mecanicamente para os alunos, mas muitos deles não entendem por que, por exemplo, na soma de $65 + 97$, somamos $5 + 7$, que dá 12, colocamos o 2 e “levando o 1” para a casa das dezenas. Na subtração os alunos não sabem (matematicamente falando) porque “pedimos emprestado” algumas vezes. Dessa forma, os nossos estudantes são apenas meros reprodutores do conhecimento.

Nessa linha de raciocínio, [Taxa e Fini \(2001, p. 176\)](#) afirmam que:

Com frequência, os professores tendem a solicitar tarefas de solução de problemas utilizando o recurso de “palavras-chave”, que, via de regra, conduz a uma produção rápida e fácil da resposta correta. Os alunos são ensinados a descobrir como solucionar problemas, reconhecendo, no enunciado dos mesmos, as palavras que indicariam se um deles poderia ser solucionado por adição, subtração, multiplicação ou divisão. No entanto, quando solucionam problemas unicamente por meio deste estilo de solução, estão sendo treinados e ensinados a usar estratégias superficiais.

Paulo Freire, um grande defensor da educação, argumenta que a educação deve ser transformadora. Ser reprodutor do conhecimento não faz do aluno um ser em transformação, não desperta no aluno a vontade de aprender mais, sem falar que apenas reproduzir, sem instigar, perguntar ou mesmo expressar uma opinião pode fazer com que o mesmo se desmotive. [Barreto \(1998, p. 61\)](#) afirma: “[...] a educação pode contribuir para que as pessoas se acomodem ao mundo em que vivem ou se envolvam na transformação dele.”

Agora surge uma outra reflexão: como obter êxito nas metodologias aplicadas em sala de aula? Como fazer o ensino de Matemática acessível a todos? De forma mais clara possível, podemos obter êxito “procurando colocar o assunto no nível do desenvolvimento do aluno”. ([NETO, 1994, p.16](#)). A Matemática estudada deve fazer sentido para o aluno, ou seja, o discente deve imaginar onde aquele assunto pode ser aplicado, de forma que não pense que tal assunto não é útil. [Neto \(1994, p.17\)](#) afirma que “a Matemática pode ser - e é - gostosa e fácil de ensinar ou de aprender, pois corresponde ao desenvolvimento normal do aluno. Nada é estranho, sem continuidade, sem significado”.

De forma a complementar esse fato, [Echeverría e Pozo \(1998, p. 09\)](#) afirmam que:

A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes.

Dessa maneira, o desenvolvimento do aluno poderá ser notável ao longo dos alunos, sendo cada vez mais desafiado a pensar e raciocinar de forma mais rápida, construindo seu

próprio conhecimento e montando sua própria maneira de resolver problemas matemáticos. A BNCC é um documento de extrema importância, que embasa toda essa teoria comentada aqui.

2.1 A BNCC E SUA CONTRIBUIÇÃO

Ser professor não é fácil, pois exige um planejamento para ministrar suas aulas. Mas que documento pode orientar o professor em todo esse processo de planejamento? O documento que rege toda a Educação Básica, composta pela Educação Infantil, Educação Fundamental e Ensino Médio é chamado de Base Nacional Comum Curricular, cuja sigla é BNCC e cujo papel fundamental é de permitir que os alunos tenham “a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações.” (BRASIL, 2018, p. 263)

Ensinar a criança desde pequena a ler e escrever, bem como identificar todas as letras do alfabeto não são suficientes para prepará-las para a sociedade atual. É necessário que ela passe pelo letramento matemático, onde, aos poucos, a criança identifica os números e suas respectivas quantidades (o símbolo “3” representa três laranjas, por exemplo). No processo de letramento matemático, o aluno aprende a somar, subtrair, multiplicar e dividir para que ela possa utilizar aqueles cálculos em situações do cotidiano, ou seja, tudo o que é feito em sala de aula deve fazer sentido para ele, pois do contrário pode gerar falta de interesse.

Segundo a BNCC, o letramento matemático é definido como

as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (BRASIL, 2018, p. 266)

Daí podemos perceber o quanto a Resolução de problemas é de extrema importância na vida de um estudante e que desde cedo devemos despertar nos alunos a vontade argumentar, de trabalhar com hipóteses, indagar, de maneira que se chegue a alguma conclusão. Segundo Bicudo e Borba (2004, p. 251) “o processo de ensino-aprendizagem envolvendo o aluno, o professor e o saber matemático é visto como um dos principais projetos de investigação em Educação Matemática”. Na prática, materiais e recursos podem auxiliar no processo de ensino-aprendizagem em sala de aula, como por exemplo o ábaco, malhas quadriculadas, calculadora, jogos e até os *softwares*, de maneira que consiga trabalhar todas as unidades temática que a BNCC propõe: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e Estatística. Portanto, o processo de resolução de problemas jamais deve ser deixado de lado, pois para que

os alunos possam ser preparados para o mundo, é importante os mesmos passarem por esse processo de letramento matemático.

Existem diversas escolas em todo o país, com diferentes rotinas, horários e metodologias de ensino. De forma a ter um ano letivo com êxito, é necessário que a escola tenha um planejamento, pois não há objetivos que seja alcançados sem planos. Dentro do chamado currículo, devem estar contidas todas as atividades escolares que farão parte da composição das aulas, levando em consideração a rotina, o nível de conhecimento dos alunos, os espaços físicos, a disponibilização de recursos, dentre outras coisas. A BNCC é o documento que baseará esse currículo, observando cada competência e habilidade que a BNCC propõe.

E o que a BNCC quer buscar no aluno? O que este documento procura exaltar? Segundo [Jerônimo \(2021, p. 18\)](#):

a base preconiza a formação e o desenvolvimento humano assumindo uma visão plural e integral de todos na educação básica, em seus aspectos sociais, afetivos e biológicos. Dessa forma os alunos são estimulados a viver em sociedade agindo com responsabilidade e discernimento, aplicando seus conhecimentos no dia a dia, resolvendo os problemas oriundos da vida, além de agir proativamente nas atividades cotidianas, buscando conviver com as diferenças e a diversidade.

Diante disso, podemos ver que a proposta da BNCC difere daquele ensino tradicional, onde o professor é o centro e o aluno passivo. A proposta é que o discente seja dono do próprio conhecimento e ganhe cada vez mais autoridade para construí-lo. Entre outras palavras, o foco deve ser no desenvolvimento do aluno, de forma que os seus direitos de aprendizagem sejam privilegiados ([JERONIMO, 2021, p. 18](#)).

2.2 As reflexões da prática docente

Quando um discente em formação finaliza seu curso de licenciatura em Matemática, ele está disponível às oportunidades do mundo do trabalho. Cada vez mais o papel de um professor torna-se evidente e as responsabilidades da vida docente aparecem. Ser mediador do conhecimento não é uma tarefa fácil, pois para atender as necessidades que os alunos têm, é preciso bastante esforço e dedicação. Pensar em estratégias de ensino que facilitem a aprendizagem parece ser o caminho ideal para o êxito escolar, trazendo para a escola, mais especificamente para a sala de aula, materiais, livros, recursos didáticos em geral que mostrem o verdadeiro objetivo de se estudar Matemática.

O que se nota atualmente é como [Bicudo et al. \(2005, p. 251\)](#) afirma:

Na tentativa de motivar seus alunos, alguns professores começam utilizando recompensas, passando depois para a punição (na avaliação). Outros assumem uma atitude defensiva, dizendo que os alunos não estão interessados porque lhes faltam os pré-requisitos necessários para a compreensão e o consequente interesse pela matéria. Outros, ainda, atribuem o fracasso dos alunos à falta de

capacidade. No entanto, a falta de interesse para estudar Matemática pode ser resultante do método de ensino empregado pelo professor, que usa linguagem e simbolismo muito particular, além de alto grau de abstração.

Essas ações e atitudes acima mencionadas tiram todo o encanto que a Matemática possui e o impacto que essa área do conhecimento causa nas nossas vidas, positivamente falando. O professor deve ser sempre um pesquisador, buscando metodologias que visem a um olhar mais atraente por parte dos alunos. Perguntas como “o que preciso fazer para adaptar as aulas às demandas que os alunos têm” ou “como posso ministrar esse conteúdo” são um ponto de partida para o docente progredir na sua vida profissional. “Investigar sobre a sua própria prática de formação é uma condição para o progresso profissional.”(BICUDO et al., 2005, p. 251)

Há diversos padrões de professores. Pensar nesses padrões nos ajudam a perceber quem pode ou vai ter o melhor desempenho profissional. Ponte (1995) nos ajuda a entender esses perfis, classificando-os em três grupos:

os investidos, que vivem a sua profissão com entusiasmo e sentido de responsabilidade, remando muitas vezes contra ventos e marés;
os acomodados, que não têm esperança de ver ocorrer qualquer mudança significativa no ensino e se encaram a sua profissão fundamentalmente como um meio de sobrevivência;
os transitórios, que estão na profissão apenas de passagem, à espera de mudar para outra atividade que se sintam melhor.

Porém, por que o foco no desenvolvimento profissional? Sabemos que a sociedade vive em constante mudança em todos os aspectos, sejam eles a economia, a política ou até mesmo a educação. As metodologias aplicadas na atualidade das escolas são diferentes das aplicadas no século passado, pois a cada mudança, o ambiente escolar deve ser adaptado, tornando-o cada vez mais acessível. Ser um professor que não trabalha de acordo com a realidade do aluno fará com que estereótipos já existentes sobre a Matemática, como “odeio Matemática” ou “Matemática é difícil”. Contudo, uma visão mais “bem desenvolvida da Matemática poderá conduzir a diferentes estilos de ensino e aprendizagem.”(BICUDO et al., 2005, p. 260). A organização escolar, a disposição de recursos e a forma de trabalho dos professores contribuem nas atividades exercidas em sala de aula. Os métodos descritos ao longo deste trabalho visam a trazer uma melhor experiência com a resolução de problemas matemáticos.

3 Os Métodos de Resolução de Problemas

Solucionar um problema nem sempre é tarefa fácil para os alunos. Muitos ficam perdidos, sem saber o que fazer ou sem saber como utilizar os dados que a questão oferece. Sobre a resolução de problemas:

Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 1998, p.52)

De forma a ajudá-los nesse processo, existem dois métodos que podem auxiliar na busca por uma solução, cada um com suas particularidades e características: o método pictórico, que pode ser chamado de Método de barras e o Método de Polya.

3.1 Método de Polya

O Método de Polya foi desenvolvido para que nós, enquanto docentes ou discentes em formação, possamos reconhecer que a resolução de problemas nem sempre é fácil de ser entendida pelos alunos e que este método pode auxiliar nas aulas. Grandes autores desta área do ensino abordam este método como algo muito importante e que pode trazer êxito no processo de ensino-aprendizagem, quebrando paradigmas ou métodos ultrapassados do século passado. George Polya foi o grande colaborador na área da Educação, principalmente no ramo da Resolução de Problemas. Segundo Allevato (2014, p. 4): “George Polya (1944) colocou a prática de resolver problemas como inerente à natureza de qualquer atividade humana, além de considerá-la fundamental para o desenvolvimento da inteligência, que é um dos objetivos da Educação”. Sobre o método que será descrito, Onuchic (1999, p.7) faz uma seguinte reflexão, falando que:

O professor que ensina sobre Resolução de Problemas procura ressaltar o modelo de Polya ou alguma variação dele. Ao ensinar matemática para resolver problemas, o professor se concentra na maneira como a Matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada na resolução de problemas rotineiros e não rotineiros. Nessa visão, a proposta essencial para aprender Matemática era

a de ser capaz de usá-la. Acabando a década de oitenta, com todas essas recomendações de ação, os pesquisadores passaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos e, em 1989, começam a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da Resolução de Problemas. Ela passa a ser pensada, então, como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática. Essa forma de ensinar Matemática passa a ser vista como um modelo “Pós Polya”. Não se aboliam as heurísticas nem a exigência de os alunos “pensarem” de Polya. Mas, o ensino, que até então era centrado no professor, passava a ser centrado no aluno. A Resolução de Problemas, como uma metodologia de ensino, passa a ser o lema das pesquisas e estudos em Resolução de Problemas para os anos noventa.

Através dessa reflexão mencionada, podemos ver o quanto vários educadores e pesquisadores se empenharam em mudar a maneira de ensinar dentro das escolas, descentralizando o ensino no professor e centralizando no aluno. Assim, a pedagogia tradicional dava espaço a outras pedagogias, colocando o professor como mediador do conhecimento. Nesse sentido, [Polya \(1978, p.2\)](#) afirma que “o professor deve auxiliar nem demais, nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho”. Em outras palavras, o professor mostra o meio aos alunos e eles, por si só, chegam (ou tentam) chegar ao resultado. Dessa maneira, há de se imaginar que muitos problemas matemáticos podem ser resolvidos de diferentes formas e cabe ao aluno tentar encontrá-las. Uma prova real disto é quando o professor vai fazer correções da atividade que ele outrora tinha passado e em alguns momentos um determinado aluno pode afirmar: “professor, eu fiz de outro jeito”, o que é plausível, pois cada processo para chegar ao resultado deve ser levado em conta.

Nas palavras de [Meneghelli et al. \(2018, p.219\)](#):

Ressalta-se que durante a resolução do problema, ao ser questionado, é importante que o professor indique o caminho por meio de perguntas secundárias, sem fornecer respostas prontas, levando os estudantes a construir suas próprias estratégias e, também, avaliá-las conforme progride na resolução. Chama-se a atenção quanto ao nível de dificuldade do problema que será levado para a sala de aula, este deve ser adequado ao nível escolar dos estudantes, para que a averiguação seja coerente, não se tornando um problema trivial e nem mesmo um problema impossível.

E de que forma os discentes terão habilidade para resolver problemas matemáticos propostos pelo professor? Uma palavra bem simples resume: prática. Se, por exemplo, quisermos aprender a dirigir, é importante que observemos como uma pessoa habilitada dirige, como ela movimentar a marcha, como ela freia/acelera, dentre outras coisas. A prática leva o indivíduo a dominar alguma função. Dessa forma, “ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os” ([POLYA, 1978, p.3](#)).

Falando um pouco mais sobre a obra de base de todo esse estudo, segundo [Polya \(1978, p.3-4\)](#), existem quatro fases para resolver um problema de matemática de forma eficiente:

3.1.1 Compreender o problema

A compreensão do problema é o ponto de partida para o processo de resolução e requer do aluno força de vontade para interpretá-lo. Com a primeira etapa, o aluno deve ter o desejo de buscar as hipóteses que podem satisfazer o problema, mas para que isso aconteça, é importante que o enunciado do problema seja entendível, de forma que os alunos tenham condições de encontrar as incógnitas (POLYA, 1978, p. 4). Aqui perguntas serão feitas, como: o que é necessário para resolvê-lo? Quais suas variáveis e incógnitas? Quais suas condicionantes?

O termo *incógnita* utilizado por Polya não tem o mesmo sentido daquele utilizado em Álgebra. Aqui, a incógnita é justamente o que deve ser encontrado, descoberto, de forma que o problema possa ser resolvido.

3.1.2 Designar um plano

Após isso, o aprendiz designa (estabelece) um plano, contendo hipóteses e variáveis, de acordo com o que a questão propõe. Esta etapa pode ser a mais demorada, pois traçar um plano para resolver o problema exige tempo para pensar. Além disso, não deixa de ser importante, pois cada objetivo que elaboramos e executamos, precisamos de um planejamento. Perguntas como “esse problema é conhecido? Como as variáveis estão correlacionadas? Quais estratégias devemos usar para sua resolução?” devem ser feitas de modo a conseguir um planejamento. Aqui o aluno trabalhará com a sua bagagem de conhecimento, buscando a melhor forma de resolver.

3.1.3 Executar o plano

O próximo passo será a execução do plano, que só será eficaz se todo o planejamento desde a sua compreensão até as estratégias a seguir forem realizadas plenamente. De forma a conseguir isso, é preciso, além de conhecimentos anteriores, bons hábitos mentais e concentração no objetivo (POLYA, 1978, p. 4). Aqui perguntas como “é possível verificar cada passo da execução? É possível demonstrar que o plano está correto?” deve ser feitas e o aluno pode trabalhar com as operações matemáticas, tomando como referência o conjunto universo em questão, que podem ser os naturais, os inteiros, etc.

3.1.4 Retrospecto do problema

Por fim, fazer uma retrospectiva do problema executado é de total importância, pois o mesmo comprovará a verdade do resultado encontrado. “Se fizerem um retrospecto da resolução completa [...], eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problema” (POLYA, 1978, p. 10). Aqui a pergunta deve ser feita: “é possível verificar o resultado encontrado?”

3.1.5 Problemas abordados por Polya

Mas o que seriam problemas matemáticos para Polya? Qual seria o papel do professor e do aluno nesse processo? Segundo o livro dele *A arte de resolver problemas* (1978):

- Um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros.
- Ao resolver um problema matemático, partimos de conceitos muito claros, que estão razoavelmente ordenados em nossa mente.
- Em um problema matemático perfeitamente formulado, todos os dados e todas as cláusulas da condicionante são essenciais e têm de ser levadas em conta.
- Ao resolvermos um problema, sempre aproveitamos algum problema anteriormente resolvido, usando seu resultado, ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo.

Pelo que se nota, tem-se a impressão de que, para Polya, o problema matemático deveria ser trabalhado de forma hierarquizada. Sendo assim, para ele, o problema matemático só existiria se houvesse conhecimentos prévios acerca de um conteúdo relacionado. Além disso, se o problema for matemático, deve-se ter em mente teoremas, proposições e definições já trabalhados, pois a Matemática é estruturada em cima dos mesmos. Contudo, surge um questionamento: e se os alunos não conseguirem relacionar o problema com essas definições e teoremas? Polya mostra em seu livro problemas não-matemáticos, onde não se usa o conhecimento matemático para resolvê-los. Portanto acredita-se que ele faz essa comparação para mostrar que o problema só será matemático quando, para solucioná-lo, será necessário o uso desses conhecimentos matemáticos outrora trabalhados.

Vejamos um exemplo extraído do livro (questão 3, p. 165), com resolução feita no próprio livro:

Exemplo 3.1. *Roberto tem 10 bolsos e 44 moedas. Ele quer colocar as moedas nos bolsos, mas de tal maneira distribuídas que em cada bolso fique um número diferente de moedas. Será possível consegui-lo?*

Solução. Primeiro tentamos compreender o problema. A resposta deve ser “sim” ou “não” para a pergunta que a questão propõe. Para tentarmos responder, vamos atrás de um solução que explique nossa conclusão. Os números que representam a quantidade de moedas é um número natural. Portanto, a menor quantidade de moedas que podem ser colocadas em 1 bolso é zero. Assim, no próximo bolso é um, depois o dois e assim sucessivamente, até o décimo bolso, que terá 9 moedas. Logo:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Neste ponto, já temos uma certeza de qual será a resposta. Se ele tem 44 moedas e segundo a lógica deveria ter 45 moedas, então 2 bolsos terão 8 moedas cada, o que não pode acontecer. Portanto, não será possível obter sucesso na proposta dada por ele.

É de grande importância a interpretação matemática, buscando hipóteses que podem chegar a uma conclusão válida, assim como hipóteses que podem ser descartadas. O aluno deve ter liberdade para buscar a solução que achar melhor, contanto que seja matematicamente válida ou correta. Cada detalhe em uma resolução deve ser cautelosa, de forma que o aluno saiba o que está fazendo e que faça sentido para ele.

Vejamos, agora, um exemplo tirado do mesmo livro, porém com uma resolução mais elaborada extraída da obra em questão:

Exemplo 3.2. *O comprimento do perímetro de um triângulo retângulo é de 60 centímetros e a altura relativa à hipotenusa é 12 centímetros. Calcular os lados desse triângulo.*

Solução. Primeiro vamos tentar entender o problema. Há várias informações a serem pontuadas e esclarecidas: perímetro, que é a soma dos lados de um triângulo, é 60 centímetros, ou seja, a soma dos três lados é 60 centímetros; o triângulo considerado é retângulo e, portanto, vale o teorema de Pitágoras; a altura relativa à hipotenusa, que é o segmento de reta que sai do vértice oposto à hipotenusa e chega à ela mesma formando um ângulo reto, é 12 centímetros. Mas como podemos fazer uma associação dessa altura com os lados do triângulo? As relações métricas no triângulo retângulo são uma resposta. Quais são as variáveis da questão? São os lados desse triângulo, no qual queremos encontrar. Chamemos, então, de a , b , c . Agora vamos traçar nosso plano. Lembrando que o aluno deve ter uma bagagem de conhecimento matemático, pois caso contrário fica difícil a resolução do problema. Após compreendida a questão, podemos criar as equações

$$a + b + c = 60 \quad (3.1)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (3.2)$$

e

$$a \cdot b = 12c \quad (3.3)$$

Além disso, o produto notável

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad (3.4)$$

vai ser de grande utilidade. Lembrando que o plano precisa resolver e interligar as equações de forma que alguma incógnita seja encontrada. Agora que criamos um plano, envolvendo as variáveis, vamos executá-lo. Da equação (3.1), temos que

$$a + b = 60 - c$$

Relacionando com a equação (3.4), temos

$$(60 - c)^2 = c^2 + 24c.$$

Resolvendo, temos

$$3600 - 120c + c^2 = c^2 + 24c \Rightarrow -144c = -3600 \Rightarrow c = 25$$

Então nossa hipotenusa é 25.

Veja que o valor da hipotenusa é um número positivo, o que nos dá um sinal verde para continuar. Agora nosso próximo é encontrar os outros lados do triângulo, lembrando que os dois valores encontrados necessariamente devem ser menores que o valor da hipotenusa (pois a hipotenusa é o maior lado em um triângulo retângulo). De $a + b = 60 - c$, temos que: $a + b = 60 - 25 = 35$ e da equação (3.3) temos que: $ab = 12 \cdot 25 = 300$. Agora temos duas equações que se relacionam as incógnitas a e b . Encontraremos uma incógnita e depois a outra. Logo o sistema de equações fica dessa forma:

$$\begin{cases} a \cdot b = 300 & (*) \\ a + b = 35 & (**) \end{cases}$$

Vamos usar o método da substituição para resolver. De (**), temos $a = 35 - b$. Substituindo em (*), temos que:

$$(35 - b) \cdot b = 300 \Rightarrow -b^2 - 35b - 300 = 0 \Rightarrow b^2 + 35b + 300 = 0$$

cujas raízes são 20 e 15, podendo resolver usando a soma e o produto das raízes. Os catetos desse triângulo têm valores menores que a hipotenusa. Portanto matematicamente faz sentido. A última etapa é a retrospectiva do problema, substituindo os valores nessas equações e verificando se realmente satisfazem todas as equações.

Pode-se perceber o quanto detalhada uma resolução pode ser e que é importante cada análise, de maneira que o aluno compreenda cada passo e absorva todas as informações que um problema matemático pode proporcionar. O professor pode apropriar-se desse método em sala de aula, focando em uma maneira de ensinar que desperte no aluno o interesse pela Matemática.

Há conteúdos em Matemática que podem ser um pouco complicados para os alunos entenderem. Um desses conteúdos é o de frações, tipos de números que fazem parte do conjunto dos racionais. Diferente do conjunto dos naturais, que geralmente são abordados do 1º ao 5º ano, os inteiros e os racionais, que são estudados de forma mais aprofundada no 6º e 7º ano, precisam de uma abordagem bem mais detalhada por ser um conjunto de muitas propriedades e características. Os números negativos e as frações são exemplos de números que fazem parte desse conjuntos, respectivamente. Portanto há uma metodologia que visa a trabalhar, de forma mais concreta, problemas envolvendo frações. Este método é chamado de Pictórico.

3.2 Método Pictórico

Também conhecido como Matemática de Singapura, o Método Pictórico é aplicado em vários países como os Estados Unidos e o Japão e foi desenvolvido pela pesquisadora Yuriko Baldin. O método consiste em representar dados dos problemas em forma de barras, que facilitam a visualização e a compreensão das informações dadas. Além disso, o método faz uso de modelos visuais para representar, de forma abstrata, dados numéricos, com a finalidade de interpretar corretamente os dados do problema e traçar estratégias de operações algébricas. Além do mais, permite o desenvolvimento do raciocínio lógico algébrico de acordo com uma linguagem simbólica.

A Matemática de Singapura trabalha com focos nas ideias das relações de:

- Parte - Todo, onde, como o próprio nome sugere, trabalhamos com questões que dão essa ideia de parte do total, uma porcentagem do total. Alguns exemplos são: parcelas em uma adição em relação ao resultado do total; uma unidade fracionária em relação a uma unidade de referência dividida em partes iguais, etc.
- Comparação, como, por exemplo, o quociente de uma divisão, onde faz-se uma relação de grandezas, porcentagem, fração decimal, etc.

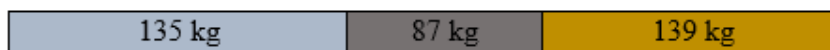
Qual a sua importância dentro da Educação Matemática? Como trabalhar a resolução de problemas nos anos finais? O método Pictórico faz a ponte entre o concreto (trabalhado nos anos iniciais do ensino fundamental) e o abstrato (mais trabalhado nos anos finais do ensino fundamental). Nos anos iniciais, professores trabalham com variáveis e incógnitas, utilizando figuras, frutas, objetos, ou seja, tudo o que faz parte do universo da criança. Através disso, ela tem o contato com a simbologia dos números. Materiais concretos são o suporte para que as crianças fixem os números em sua memória e comecem a trabalhar com as operações básicas ou até mesmo problemas um pouco além disso. Um exemplo é a associação do símbolo “2” com duas laranjas, assim como duas laranjas mais quatro laranjas formam seis laranjas, representado matematicamente por $2 + 4 = 6$.

Vejamos um exemplo criado por um professor do 2º ano da Escola Primária Telok Kurou, Singapura:

Exemplo 3.3. *Um leão pesa 135 kg. Uma vaca pesa 87 kg a mais que o leão. Um elefante pesa 139 kg a mais que uma vaca. Quanto pesa o elefante? (Qual a massa do elefante?)*

Solução. Aqui nós vamos representar a massa de cada animal por barras. O aluno vai perceber que uma barra perto da outra indica uma adição de partes para se chegar ao todo (a massa do elefante). Com isso a massa da vaca é: $135 + 87 = 222$ kg (barra azul+roxa). Já a massa do elefante seria: $222 + 139 = 361$ kg ou $135 + 87 + 139 = 361$ kg (as três barras).

Figura 3.1 – Barras representando as massas dos animais em questão



Fonte: o autor.

Na Matemática a que estamos habituados há uma modificação na maneira de ministrar as aulas, onde o professor deixa o concreto e parte para o abstrato de maneira gradual. Isso ocorre de forma natural e o aluno, a partir do 6º/7º ano já se habitua com as variáveis e incógnitas, que representam os dados e/ou aquilo que se quer encontrar dentro da situação-problema. Na Matemática de Singapura, a passagem do concreto para o abstrato se dá por meio do método Pictórico, dando um salto suavizado, fazendo com que o aluno se familiarize aos poucos com o abstrato, que é, por muita das vezes, algo difícil para eles. Dentro do método Pictórico, as barras também desempenham função de representar os dados que são disponibilizados e ajudam a desenvolver melhor o raciocínio do aluno.

Existem, por exemplo, questões de situações-problema com resoluções envolvendo variáveis e que também podem ser resolvidos pelo método com barras. Um exemplo será ilustrado abaixo.

Exemplo 3.4. *João já andou 600 metros da distância de sua casa até o trabalho. Essa distância corresponde a quatro quintos do total que ele deve percorrer. Quantos metros faltam para ele completar o percurso?*

Solução 1. De maneira abstrata, faríamos:

$$\frac{4}{5} \cdot x = 600 \Rightarrow x = (600 \div 4) \cdot 5 = 750 \text{ m}.$$

Este valor representa todo o percurso. Mas como são 600 metros já foram percorridos, faltariam: $750 - 600 = 150$ metros. Porém essa análise não pode ficar muito clara para os alunos, de forma a se questionarem: por que eu devo multiplicar e dividir? Não poderia somar? Agora vamos ver como funciona pelo método Pictórico.

Solução 2. O aluno é induzido pelo professor a lembrar da noção inicial de frações, em que o denominador representa quantas partes congruentes o objeto é dividido e o numerador, que representa quantas partes foram tomadas. Portanto vamos representar o percurso por uma barra e essa barra será dividida em 5 partes, que representam o total. O percurso já feito vamos representar pela parte azul.

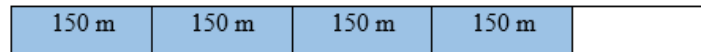
Como sabemos que 4 partes representam 600 metros, então o aluno vai entender que a operação correta é a divisão. Então $600 \div 4 = 150$. Isso significa que 1 pedaço do caminho representa 150 metros.

Figura 3.2 – Representação do percurso total



Fonte: o autor.

Figura 3.3 – Representação de cada pedaço do percurso



Fonte: o autor.

Como ainda falta 1 parte para ele completar o percurso, logo faltam 150 metros para ele completar o percurso, que é justamente a parte branca na barra acima.

Pode-se perceber que nesta interpretação, apenas algumas noções de frações e as operações básicas foram utilizadas. Isso auxiliar no entendimento de problemas matemáticos, pois dessa forma, os alunos verão os motivos pelos quais devemos fazer determinada operação. Vejamos outro exemplo extraído do artigo Resolução de problemas pelo Método Pictórico, dos autores Gláucia Helena Malta e Sérgio Augusto Lopes (questão 11):

Exemplo 3.5. *Em uma prova de atletismo, um prêmio de R\$ 1.000,00 foi dividido entre os dois primeiros colocados na razão de 5 para 3. A partir dessas informações, determine o prêmio de cada competidor.*

Solução 1. De acordo com Polya, devemos compreender o problema e traçar uma estratégia. Sabemos que o jogador do 1º lugar ganhou um valor maior do que o segundo e esses valores estão em uma razão, que é de 5 para 3, ou seja, $\frac{5}{3}$ (cinco terços). Nesse momento, o aluno deve lembrar do que estudou em razões e proporções. Além disso, sabemos que a soma dos valores é 1000 reais. As nossas incógnitas são os valores que os atletas do 1º e 2º lugar receberam e que vamos chamar de x e y , respectivamente. Dessa forma, temos duas equações e montamos um sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 1000 & (1) \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} & (2) \end{cases}$$

Resolvendo temos

$$5y = 3x \Rightarrow y = \frac{3x}{5}$$

Substituindo na equação 1, temos

$$x + \frac{3x}{5} = 1000 \Rightarrow 8x = 5000 \Rightarrow x = 625 \text{ reais}$$

Para saber quanto o atleta y recebeu, basta fazer

$$y = 1000 - x = 1000 - 625 = 375 \text{ reais}$$

Agora vejamos a resolução pelo método pictórico, proposta pelo próprio artigo, com a finalidade de analisar ambas as soluções.

Solução 2. Vamos representar o prêmio de 1000 reais, já que o valor total.

Figura 3.4 – Barra que representa o valor de 1000 reais



Fonte: o autor.

A questão afirma que o valor total foi dividido na razão de 5 para 3. Então o primeiro colocado ficou com 5 partes do prêmio e a outra pessoa com 3 partes do prêmio, totalizando 8 partes no total. Significa, então, que o prêmio foi dividido em 8 partes congruentes. Na barra a seguir, a parte vermelha corresponde ao valor do primeiro colocado e a parte laranja, do segundo colocado.

Figura 3.5 – Barra dividida em 5 e 3 partes



Fonte: o autor.

Dessa forma o aluno vai perceber que o valor de R\$ 1000 foi repartido em 8 partes congruentes e que existe um valor que representa cada parte. Então ele fará: $1000 \div 8 = 125$. Portanto cada pedaço representa 125 reais. Como o primeiro colocado ficou com 5 partes, então ele ficou com: $125 \cdot 5 = 625$ reais. Já o segundo colocado, por ter ficado com 3 partes, o aluno fará: $125 \cdot 3 = 375$ reais, exatamente os mesmos valores que encontramos na solução 1.

Através da análise das duas soluções foi possível perceber que, pelo método Pictórico, a solução ficou mais fácil de se resolver, pois visualmente o aluno pode compreender melhor e saber o que está fazendo.

Outros conteúdos podem ser abordados em resolução de problemas utilizando o método pictórico. No exemplo anterior, vimos que um sistema de equações pode resolver o problema. Agora, no exemplo a seguir, será mostrado duas soluções, uma utilizando um produto de frações e no outro, utilizando o método em questão, através de frações equivalentes e uma soma de frações. A questão foi elaborada pelo autor.

Exemplo 3.6. *Pedro se desloca de casa à escola em uma distância de 6000 m. Ele sempre combina em um trecho ir de ônibus, um trecho de metrô e o restante à pé. Certo dia ele andou $\frac{2}{3}$*

do percurso total de metrô, $\frac{3}{5}$ do restante de ônibus e o trecho final do percurso à pé. Nesse dia, quantos metros ele caminhou para chegar à escola?

Solução 1. Analisando os dados, vemos que $\frac{2}{3}$ do percurso total ele foi de metrô. Portanto faremos:

$$\frac{2}{3} \text{ de } 6000 \text{ m} = \frac{2}{3} \cdot 6000 = \frac{12000}{3} = 4000 \text{ m}$$

Então foram 4000 m percorridos de metrô. Ainda faltam 2000 m, pois $6000 \text{ m} - 4000 \text{ m} = 2000 \text{ m}$. Agora vejamos: $\frac{3}{5}$ do restante foi percorrido de ônibus. Logo:

$$\frac{3}{5} \text{ de } 2000 \text{ m} = \frac{3}{5} \cdot 2000 = \frac{6000}{5} = 1200 \text{ m}$$

Logo o percurso a pé é de $6000 - 4000 - 1200 = 800 \text{ m}$. Agora vamos entender como, pelo método pictórico, esta questão poderia ser resolvida.

Solução 2. Vamos agora analisar este mesmo problema com o método pictórico. Representemos o percurso total por uma barra, como na vista abaixo.

Figura 3.6 – Barra que representa o percurso total



Fonte: o autor.

O primeiro dado afirma que $\frac{2}{3}$ do percurso total ele foi de metrô. Portanto o percurso foi dividido em 3 partes congruentes, sendo 2 partes dessas representando o percurso do meio de transporte em questão. Portanto, vamos usar a barra em questão e dividi-la em 3 partes, como mostrado na figura abaixo.

Figura 3.7 – Barra, cuja parte azul representa o percurso de metrô



Fonte: o autor.

Daí o aluno pode perceber: se são 6000 m, que foram divididos em 3 partes congruentes, então cada parte vale $6000 \div 3 = 2000 \text{ m}$. Como foram tomados 2 partes, então: $2000 \cdot 2 = 4000 \text{ m}$. Portanto foram 4000 m percorridos de metrô. A partir daí, o aluno perceberá que o percurso restante é 2000 m, pois $6000 - 4000 = 2000 \text{ m}$.

Como a outra informação nos diz que o percurso feito de ônibus é $\frac{3}{5}$ do restante $\left(\frac{1}{3}\right)$, então será dividido em 3 partes de 5, como mostrado abaixo. A parte alaranjada é o percurso feito de ônibus e azul é do metrô, outrora mencionado.

Figura 3.8 – Barra que representa o percurso de metrô e de ônibus



Fonte: o autor.

Como o percurso restante equivale a 2000 m, que foram divididos em 5 partes congruentes, então o aluno fará: $2000 \div 5 = 400$ m. Então cada quadradinho equivale a 400 m. Como foram tomados 3 desses quadradinhos, teremos então: $400 \cdot 3 = 1200$ m. Como antes eram 2000 m que faltavam e foram percorridos 1200 m de ônibus, agora sobraram $2000 - 1200 = 800$ m, que é justamente a distância que ele fez à pé.

A seguir, será apresentado uma terceira solução, usando operações com frações.

Solução 3. Uma outra maneira de resolver essa mesma questão é a seguinte (ainda usando o método em questão): poderemos somar as frações que representam o percurso de metrô e de ônibus. Pela Figura 3.8 temos que a parte azul é o percurso de metrô $\left(\frac{2}{3}\right)$. Já $\frac{3}{5}$ do restante $\left(\frac{1}{3}\right)$ é de ônibus. Aqui o nosso propósito é trabalhar com frações equivalentes às trabalhadas na questão. Dessa forma, obteremos uma terceira fração que representa a parte percorrida dos dois meios de transporte. Como a parte laranja (Figura 3.8) é $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3}$, então faremos

$$\frac{3}{5} \text{ de } \frac{1}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

Agora vejamos: temos $\frac{2}{3}$ mais $\frac{1}{5}$, que representa $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3}$. Vamos agora encontrar a fração que representa o percurso dos meios de transporte em questão.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$$

Esse resultado nos mostra que podemos redividir nossa barra em 15 partes congruentes, tomando 13 partes, que representa o trajeto em questão.

Figura 3.9 – Barra que representa o trajeto total dividido em 15 partes congruentes



Fonte: o autor.

Agora vejamos que o total (6000 m) foi dividido em 15 partes congruentes. Então significa que cada parte vale: $6000 \div 15 = 400$ m. Como 2 partes correspondem ao trajeto feito à pé, que é justamente o que a questão pergunta, então faremos: $400 \cdot 2 = 800$ m.

4 A resolução de problemas e a OBMEP

A seguir vamos fazer uma análise de como a metodologia pictórica e a de Polya está intrinsecamente ligada às questões abordadas na OBMEP e sua origem, com a finalidade de entender como o métodos mencionados pode auxiliar nesse processo. Para tanto, vamos fazer algumas referências de questões da OBMEP escolhidas para tal análise, com foco em todo o processo de resolução.

A OBMEP é a sigla para Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, um programa aplicado em escolas públicas e composto por provas de diferentes níveis de interpretação matemática, que exigem conhecimento prévio, improvisação e criatividade para serem resolvidos. Entre outras palavras, os alunos são instigados a buscar possíveis soluções para um problema matemático, problema esse que pode possuir mais de uma solução, como outrora foi mencionado.

O programa tem como objetivos:

1. Estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas;
2. Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica;
3. Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas;
4. Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
5. Contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas;
6. Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento (BIONDI; VASCONCELLOS; MENEZES-FILHO, 2009, p. 16).

Através da leitura destes objetivos, pode-se perceber que os alunos não são somente os beneficiados. Os professores também aprendem com o programa, interagem com outras escolas e ainda trabalham a habilidade do aluno na resolução de problemas.

Sobre as provas da OBMEP, geralmente são divididas dessa forma:

- Nível A - 4º e 5º anos do Ensino Fundamental
- Nível 1 - 6º e 7º anos do Ensino Fundamental
- Nível 2 - 8º e 9º anos do Ensino Fundamental
- Nível 3 - Ensino Médio

O site da OBMEP disponibiliza todas as provas e suas respectivas soluções. Porém, como outrora foi mencionado, há diversas questões que podem ser resolvidas de várias maneiras. Os

problemas apresentados a seguir foram tirados do banco de questões da OBMEP no ano de 2019, com diferentes níveis de compreensão, de forma a entendermos como os métodos são aplicados. Lembrando que o intuito não é resolver as questões por si só, pois as soluções estão disponíveis no site da OBMEP, mas analisar como é feito cada passo, de forma a buscar a solução que atenda a esses problemas, além de perceber quantos e quais são as diferentes estratégias que podemos tomar.

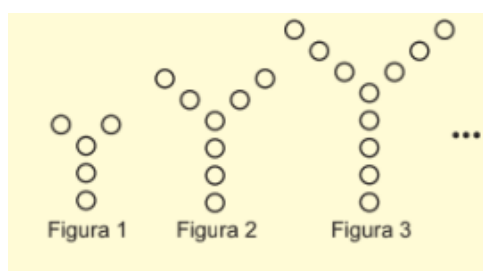
4.1 Resolvendo alguns problemas

Problema 1: Banco de Questões da OBMEP-2019: nível 1, questão 15

Observe a sequência de figuras abaixo, todas elas com a forma da letra Y. Seguindo este padrão, quantas bolinhas terá a 15ª figura? As alternativas são:

a) 35 b) 47 c) 50 d) 52 e) 60

Figura 4.1 – Desenho referente ao problema 1



Fonte: Banco de Questões da OBMEP-2019

Solução. Vamos resolver o problema segundo os quatro passos de Polya.

Compreender o problema.

Qual a incógnita? Este problema não é tão difícil de ser resolvido e o aluno precisa entender onde ele quer chegar. Então a incógnita nesse caso é o número de bolinhas da 15ª figura.

Quais os dados? A questão nos mostra que a 1ª figura tem 5 bolinhas, a segunda figura tem 8 bolinhas e a terceira tem 11 bolinhas.

Estabeleça um plano:

A partir das informações pode-se traçar uma estratégia para resolver um problema. Uma possível solução pode ser a seguinte: o aluno pode observar a figura e tentar separar em bolas na vertical e bolas na diagonal. Na figura 1, há 3 bolas verticais e 2 na diagonal, formando $3 + 2 = 5$ bolas. Já na figura 2, há 4 bolas na vertical e 4 na diagonal, formando $4 + 4 = 8$ bolas. Agora na figura 3, há 5 bolas verticais e 6 diagonais, totalizando $5 + 6 = 11$ bolas. Com essa análise, percebe-se que a cada figura, as bolas verticais aumentam em uma unidade e as bolas diagonais aumentam em 2 unidades. Com isso, temos o seguinte:

Tabela 4.1 – Dados do número de bolas em cada figura

Número da figura	Número de bolas na vertical	Número de bolas na diagonal	Total de bolas da figura
1	3	2	5
2	4	4	8
3	5	6	11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	17	30	47

Fonte: o autor

Observando a Tabela 4.1, vemos que o número de bolas na vertical é igual ao número da figura mais 2 e o número de bolas na diagonal é igual ao dobro do número da figura. Portanto, na 15ª figura, teremos 17 bolas na vertical e 30 bolas na diagonal, totalizando 47 bolas, ou seja, letra B.

Retrospecto

Toda essa análise pode parecer complexa, mas na cabeça de um aluno esta solução pode funcionar perfeitamente. Além disso, é provável que o aluno busque outras maneiras de resolver este problema. Um exemplo disso é observando que o total de bolas em cada figura aumenta em 3 unidades, como mostrado na Tabela 4.1. Matematicamente, isso forma uma progressão aritmética de razão igual a 3. Portanto, o aluno pode somar e encontrar os resultados (5, 8, 11, 14 ...) até chegar no 15º número, onde representará o total de bolas que a questão nos pede. Agora vejamos uma questão da OBMEP onde podemos resolver usando o método pictórico.

Problema 2: Banco de Questões da OBMEP-2019: nível 3, questão 1

Os estudantes de uma escola foram divididos em equipes de 8 meninas e 5 meninos cada uma. Se nessa escola há 60 meninas a mais do que meninos, qual é o número total de estudantes? As opções da questão são:

a) 130 b) 260 c) 390 d) 520 e) 650

Solução. Aqui vamos utilizar o método de barras outrora mencionado, mas sem deixar de usar o método de Polya.

Compreender o problema.

Qual a incógnita? O que se quer encontrar é o número total de alunos dessa escola.

Quais os dados? A questão nos fala que são equipes de 8 meninas e 5 meninos. Daí tiramos duas coisas: cada equipe são 13 alunos e em cada equipe sempre há 3 meninas a mais que meninos.

Estabeleça um plano: Neste ponto, o aluno pode escolher qual plano ele deseja seguir, mas aqui nesta questão vamos utilizar o método de barras. As equipes podem ser representadas pela barra abaixo, onde nessa barra temos a parte vermelha que representa a quantidade de meninas em uma equipe e a parte verde, que representa o número de meninos.

Figura 4.2



Fonte: o autor

O aluno pode perceber também que em que cada equipe, serão sempre 3 meninas a mais que meninos, como visto na barra abaixo.

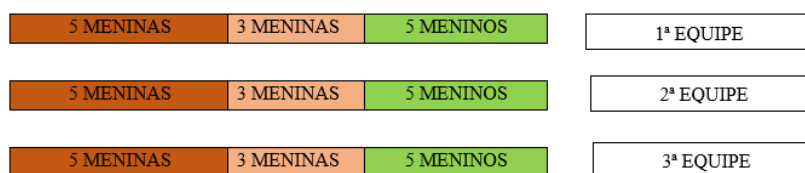
Figura 4.3



Fonte: o autor

A questão fala que na escola há 60 meninas a mais que meninos. Então podemos analisar da seguinte forma:

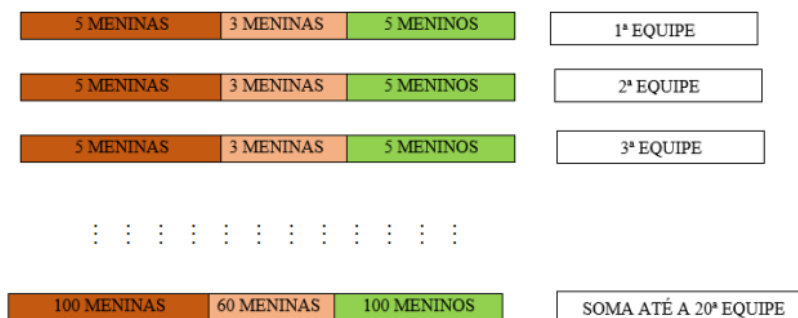
Figura 4.4



Fonte: o autor

Fazendo a soma de alunos em cada equipe (1ª, 2ª, 3ª, etc...), vai chegar um momento em que a soma terá 60 meninas a mais que meninos. A diferença entre meninas e meninos é sempre 3. Então faremos $60 \div 3 = 20$. Isso quer dizer que na soma até a 20ª equipe terão 60 meninas a mais que meninos, como mostram as barras abaixo.

Figura 4.5



Fonte: o autor

A última barra é a soma de cada barra, da 1ª até a 20ª equipe. Então, somando cada pedacinho marrom, bege e verde, teremos uma barra onde há 60 meninas a mais que meninos,

como queríamos. Ainda pela barra, há 160 meninas e 100 meninos. Portanto para saber o total de alunos faremos $160 + 100 = 260$ alunos, ou seja, letra B.

Vejamos agora uma outra questão onde os dados envolvem frações. Será mostrado duas soluções, uma envolvendo as operações com as frações e outra solução pelo método Pictórico.

Problema 3: Banco de Questões da OBMEP-2019: nível 1, questão 17

Janaína tem três canecas, uma pequena, uma média e uma grande. Com a caneca pequena cheia, ela enche $\frac{3}{5}$ da caneca média. Com a caneca média cheia, ela enche $\frac{5}{8}$ da caneca grande. Janaína enche as canecas pequena e média e despeja tudo na caneca grande. O que vai acontecer com a caneca grande? As opções da questão são:

- a) Ela ficará preenchida em $\frac{7}{8}$ de sua capacidade.
- b) Ela ficará preenchida em $\frac{8}{13}$ de sua capacidade.
- c) Ela ficará preenchida em $\frac{5}{8}$ de sua capacidade.
- d) Ela ficará totalmente cheia, sem transbordar.
- e) Ela vai transbordar.

Primeiro passo que o aluno deve fazer é analisar as informações. São três canecas, com capacidades diferentes e uma caneca enche uma parte de outra caneca.

Quais os dados? A caneca pequena cheia enche $\frac{3}{5}$ da caneca média e a caneca média cheia enche $\frac{5}{8}$ da caneca grande.

Qual a incógnita? O que se quer saber é o resultado da combinação das canecas pequena e média com a grande. Aqui o aluno precisa encontrar uma resposta plausível, através de alguma argumento matemático.

Solução 1. Precisamos descobrir o que acontece com a capacidade da caneca grande. Para isso temos o seguinte: capacidade da caneca pequena + capacidade da caneca média = capacidade da caneca grande. Sabemos que a caneca pequena é $\frac{3}{5}$ da média e essa, por sua vez, $\frac{5}{8}$ da grande, ou seja, $\frac{3}{5}$ de $\frac{5}{8}$. Então faremos:

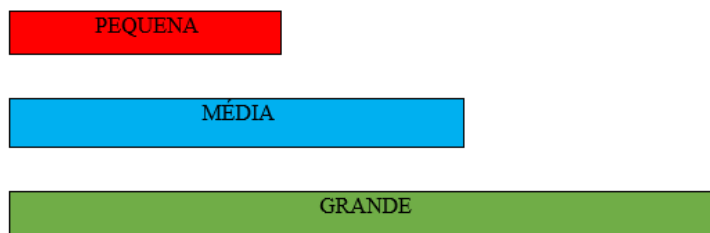
$$\text{Capacidade da caneca pequena} + \text{Capacidade da caneca média} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{8} = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$$

Significa que ambas as capacidades darão exatamente a capacidade da caneca grande. Para que o aluno chegue a essa possível solução, ele deve ter em mente os conhecimentos acerca das operações com frações.

Agora veremos o mesmo problema segundo o método Pictórico, caso o aluno não tenha uma boa visualização da primeira solução.

Solução 2. Seguindo o raciocínio da solução 1, vamos representar as capacidades das canecas por barras. Na figura, representaremos por vermelho a caneca pequena, azul, a média e a verde, a grande.

Figura 4.6 – Barras que representam as capacidades das canecas



Fonte: o autor

Nessa questão, as frações dão de ideia de parte do todo. Então vamos sobrepor as barras umas sobre as outras. Aqui, o aluno já tem que ter a ideia de que o denominador representa quantas partes a barra é dividida e o numerador representa quantas partes são tomadas.

De acordo com a questão, a caneca pequena é $\frac{3}{5}$ da média. Então temos

Figura 4.7 – Barra que representa o conteúdo da pequena na média



Fonte: o autor

Por conseguinte, a caneca média é $\frac{5}{8}$ da grande. Então teremos a barra azul sobre a verde.

Figura 4.8 – Barra que representa o conteúdo da média na grande



Fonte: o autor

Na Figura 4.8, temos uma outra representação da capacidade da caneca média, que se sobrepormos à verde, teremos:

Figura 4.9 – Barra que representa o conteúdo da média na grande, contendo a pequena



Fonte: o autor

Podemos ver, pela Figura 4.10, que há 2 partes da caneca média na grande. Porém a questão nos informa que são 5 partes. Portanto, podemos substituir as 3 partes verdes da caneca grande (verde) pelas 3 partes que faltam da caneca média (azul), tendo agora essa seguinte barra:

Figura 4.10 – Barra que representa o conteúdo da caneca pequena e média na grande



Fonte: o autor

Agora podemos ver que o conteúdo da caneca pequena e da média estão contidas na grande e, além disso, esse conteúdo é exatamente igual ao conteúdo da caneca grande. Portanto o conteúdo ficará totalmente cheio, sem transbordar.

5 Considerações Finais

A metodologia de resolução de problemas como atividade em sala de aula permite que os professores aprendam a avaliar com mais precisão os níveis e tipos de dificuldade de cada aluno e o modelo pictórico serve para alcançar esse objetivo. Ser um profissional da educação não é nada fácil e devemos buscar, a todo momento, metodologias que atendam a uma determinada turma, determinado nível de conhecimento, de forma a facilitar, sempre, a conexão entre o aluno e o conhecimento. Foi mostrado aqui dois tipos de metodologias, o método pictórico e o método de Polya, que podem ser aplicados pelo professor em sala de aula, de maneira a trabalhar a habilidade dos alunos em interpretação matemática, muito cobrado em vestibulares e concursos. OBMEP é um programa que traz questões de raciocínio lógico para os alunos. Para que eles possam tirar uma boa pontuação ou fazer uma prova bem-sucedida, é importante que os mesmos já adquiram essa competência em resolução de problemas. As duas questões mencionadas e resolvidas ao longo deste trabalho são apenas um dos muitos exemplos onde podemos usar os métodos aqui descritos.

Ensinar a Resolução de Problemas aos nossos alunos é o grande passo para que os mesmos tenham o prazer pela Matemática, ou seja, de fazer com que essa área do conhecimento faça sentido na vida deles. Nós, enquanto professores, temos esse papel fundamental de proporcionar boas experiências aos nossos alunos, mediando o conhecimento e fazendo com que este seja acessível a todos. Sendo assim, podemos melhorar o processo de ensino-aprendizagem e alcançar o êxito escolar.

Referências

- ALLEVATO, N. S. G. Trabalhar através da resolução de problemas: possibilidades em dois diferentes contextos. *VIDYA*, v. 34, n. 1, p. 23, 2014. Citado na página 15.
- BARRETO, V. *Paulo Freire para educadores*. [S.l.]: Arte & Ciência, 1998. Citado na página 11.
- BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. [S.l.]: Cortez Editora, 2004. 250–263 p. Citado na página 12.
- BICUDO, M. A. V. et al. *Educação matemática*. [S.l.]: Moraes, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- BIONDI, R. L.; VASCONCELLOS, L.; MENEZES-FILHO, N. d. Avaliando o impacto da olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas (obmep) no desempenho de matemática nas avaliações educacionais. *São Paulo: Fundação Getúlio Vargas, Escola de Economia de São Paulo*, 2009. Citado na página 27.
- BRASIL, M. Parâmetros Curriculares nacionais/ensino fundamental. *Brasília: MEC/SEF*, 1998. Citado na página 15.
- BRASIL, M. Ministério da Educação, Secretaria Executiva, Secretaria de Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular. *Brasília: MEC*, 2018. Citado na página 12.
- ECHEVERRÍA, M. d. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed*, p. 13–42, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 9, 10 e 11.
- JERONIMO, E. *Os desafios de ensinar Matemática no ensino médio na perspectiva da base nacional comum curricular*. Dissertação (Mestrado), 2021. Citado na página 13.
- MENEGHELLI, J. et al. Metodologia de resolução de problemas: concepções e estratégias de ensino. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia, Ponta Grossa*, v. 11, n. 3, p. 211–231, 2018. Citado na página 16.
- NETO, E. R. *Didática da Matemática*. [S.l.]: Editora Atica, 1994. Citado na página 11.
- NUNES, T. et al. Educação matemática: números e operações numéricas. *São Paulo*, 2005. Citado na página 8.
- ONUCHIC, L. d. I. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP*, p. 199–218, 1999. Citado na página 15.
- PAIS, L. C. *Ensinar e aprender matemática*. [S.l.]: Autêntica, 2018. Citado na página 10.
- POLYA, G. A arte de resolver problemas. *Rio de Janeiro: Interciência*, v. 2, p. 12, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- PONTE, J. P. d. Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *Desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Que formação*, p. 193–211, 1995. Citado na página 14.

TAXA, F. d. O. S.; FINI, L. D. T. Estudo sobre a solução de problemas aritméticos de multiplicação do tipo isomorfismo de medidas. *Psicologia da educação matemática*. Florianópolis: Insular, p. 167–200, 2001. Citado na página 11.

TOLEDO, M. B. d. A.; TOLEDO, M. d. A. Teoria e prática de Matemática: como dois e dois. São Paulo: FTD, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. *Matemática para aprender a pensar*. [S.l.]: Artmed Editora, 2009. Citado na página 9.