



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Bacharelado

Irlan Maycon Pinto Nascimento

O Teorema de Arzelà-Ascoli e sua Aplicação em Equações Diferenciais Ordinárias

São Luís - MA
2025

Irlan Maycon Pinto Nascimento 

O Teorema de Arzelà-Ascoli e sua Aplicação em Equações Diferenciais Ordinárias

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Curso de Matemática – Bacharelado

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo

São Luís - MA

2025

Irlan Maycon Pinto Nascimento

O Teorema de Arzelà-Ascoli e sua Aplicação em Equações Diferenciais Ordinárias/
Irlan Maycon Pinto Nascimento. – São Luís - MA, 2025-
37 p.

Orientador: Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Matemática – Bacharelado
Universidade Federal do Maranhão, 2025.

1. Espaços Métricos. 2. O Teorema de Arzelá - Ascoli. 3. O Teorema de Arzelá - Ascoli e sua Aplicação em Equações Diferenciais ordinárias. I. Prof. Dr.Elivaldo Rodrigues Macedo. II. Universidade Federal do Maranhão. III. Curso de Matemática – Bacharelado. IV. O Teorema de Arzelá - Ascoli e sua Aplicação em Equações Diferenciais Ordinárias.

CDU XX:XXX:XXX.X

Irlan Maycon Pinto Nascimento

O Teorema de Arzelà-Ascoli e sua Aplicação em Equações Diferenciais Ordinárias

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Trabalho **SUBMETIDO**. São Luís - MA, ____/____/____

Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo
DEMAT/UFMA
Orientador

Primeiro Examinador

Segundo Examinador

Não me escreva versos sem vida!

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, fonte de sabedoria, força e inspiração, por me guiar em cada passo dessa jornada e por me conceder saúde e perseverança para concluir mais essa etapa em minha vida. Sem Sua presença, nada disso teria sido possível.

À minha família, meu porto seguro, expresso minha eterna gratidão. Em especial à minha mãe Maria das Graças dos Santos Pinto, pelo amor incondicional, pelas orações incessantes e pelo apoio inabalável em todos os momentos. Sua força e dedicação foram fundamentais para que eu chegasse até aqui.

Agradeço também ao meu orientador, o Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo, cuja paciência, competência e dedicação foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Suas orientações, sempre precisas, foram fundamentais para que eu pudesse superar desafios e expandir meu conhecimento.

Gostaria de expressar minha sincera gratidão aos professores que contribuíram de forma significativa para minha formação acadêmica ao longo desta jornada, em especial ao Professor e Coordenador Cléber Cavalcanti. Cada aula, orientação e conselho foram essenciais para o desenvolvimento do meu conhecimento e para o amadurecimento como estudante e como pessoa.

Aos amigos, que fiz durante a graduação, minha mais sincera gratidão, em especial a Rafael Vieira Sousa. Vocês foram uma parte indispensável dessa caminhada, trazendo apoio, companheirismo e leveza nos momentos mais desafiadores. As trocas de experiências, as risadas e as horas de estudo compartilhadas ficarão para sempre em minha memória.

A cada pessoa que, direta ou indiretamente, contribuiu para a realização deste trabalho, o meu muito obrigado. Cada palavra de incentivo e cada gesto de apoio fizeram toda a diferença.

“No tempo certo, Eu, o Senhor, farei isso acontecer!”

Isaías (60:22)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar o Teorema de Arzelà-Ascoli, um importante resultado de Análise amplamente utilizado em diversas áreas da matemática pura. O Teorema de Arzelà-Ascoli estabelece critérios necessários e suficientes para garantir que um conjunto de funções contínuas, definidas em um espaço compacto, seja relativamente compacto em relação à convergência uniforme.

Aplicou-se o teorema para garantir a existência de soluções de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). Para embasar essa pesquisa, abordamos conceitos fundamentais necessários ao desenvolvimento do tema. Inicialmente, revisamos definições elementares, seguidas pela apresentação e demonstração do Teorema de Arzelà-Ascoli. Então, concluímos a pesquisa aplicando o resultado ao Teorema de Peano.

Palavras-chave: Espaços Métricos, Teorema de Arzelà-Ascoli, Equações Diferenciais Ordinárias, Teorema de Peano.

Abstract

The objective of this monograph is to present the Arzelà-Ascoli Theorem, an important analysis result widely used in several areas of pure mathematics. The Arzelà-Ascoli Theorem establishes necessary and sufficient criteria to ensure that a set of continuous functions, defined in a compact space, is relatively compact with respect to uniform convergence.

The theorem was applied to guarantee the existence of solutions of an Ordinary Differential Equation (ODE). To support this research, we address fundamental concepts necessary for the development of the topic. Initially, we review elementary definitions, followed by the presentation and demonstration of the Arzelà-Ascoli Theorem. Then, we conclude the research by applying the result to Peano's Theorem.

Keywords: Metric Spaces, Arzelà-Ascoli Theorem, Ordinary Differential Equations, Peano Theorem.

Sumário

	INTRODUÇÃO	9
1	ESPAÇOS MÉTRICOS	10
1.1	Definições de métrica, distância e espaços métricos	10
1.1.1	Exemplos de Espaços Métricos	10
1.2	Bolas e esferas	13
1.3	Sequências de Cauchy	14
1.4	Espaços Métricos Completos	16
1.5	Teorema de Banach sobre Pontos Fixos de Contrações	19
1.6	Compacidade em Espaços Métricos	20
1.7	Teorema de Cantor - Tychonov	25
2	O TEOREMA DE ARZELÀ - ASCOLI	26
2.1	Preliminares	27
2.1.1	Conjuntos Relativamente Compactos	27
2.1.2	Equicontinuidade	27
2.2	Resultado Principal	29
3	O TEOREMA DE ARZELÀ - ASCOLI E SUA APLICAÇÃO EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	31
3.1	Um Pouco de História	31
3.2	Existência e Unicidade de Soluções de EDO's	31
3.3	Aplicação do Teorema de Arzelà-Ascoli: Teorema de Peano - Existência de Soluções de EDOs	34
	CONCLUSÃO	36
	REFERÊNCIAS	37

Introdução

O estudo de equações diferenciais ordinárias (EDOs) desempenha um papel central na modelagem de fenômenos em diversas áreas do conhecimento, como física, engenharia, biologia e economia. A análise do comportamento das soluções dessas equações é uma questão de interesse teórico e prático, envolvendo ferramentas matemáticas sofisticadas para garantir sua existência, unicidade e continuidade. Nesse contexto, o Teorema de Arzelà-Ascoli surge como um resultado fundamental na análise funcional, oferecendo critérios precisos para a compacidade de conjuntos de funções, o que é essencial em várias abordagens para o estudo de EDOs.

Este trabalho tem como objetivo explorar o Teorema de Arzelà-Ascoli em detalhe, destacando sua demonstração e aplicação no contexto de EDOs, particularmente em métodos para garantir a existência de soluções. Para isso, abordaremos conceitos relacionados à continuidade, equicontinuidade e compacidade, estabelecendo a conexão entre esses elementos e a teoria das equações diferenciais.

A relevância desse estudo reside no fato de que o Teorema de Arzelà-Ascoli fornece as bases teóricas para métodos como o de aproximações sucessivas de Picard e o Teorema de Peano, que garantem a existência de soluções de EDOs sob diferentes condições. Compreender esses fundamentos é essencial tanto para a aplicação prática quanto para a evolução da teoria.

Esta monografia teve como motivação principal ([ALMEIDA; PIMENTA, 2018](#)) e está estruturada em três capítulos principais. No primeiro, revisamos os conceitos fundamentais da teoria dos Espaços Métricos necessários à compreensão do Teorema de Arzelà-Ascoli. No segundo, apresentamos e demonstramos o teorema de Arzelà-Ascoli. Por fim, no terceiro capítulo, apresentamos a aplicação do Teorema de Arzelà-Ascoli no Teorema de Peano. Após o terceiro capítulo, apresentamos as considerações finais do trabalho e as bibliografias utilizadas nesta pesquisa.

1 Espaços Métricos

Neste capítulo apresentaremos os principais resultados dos espaços métricos, os quais utilizaremos nos capítulos seguintes. Os resultados não triviais são acompanhados de suas demonstrações. As referências bibliográficas utilizadas neste capítulo foram (LIMA, 1983), (LIMA, 2007) e (LIPSCHUTZ, 1970).

1.1 Definições de métrica, distância e espaços métricos

Seja M um conjunto qualquer e seja $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* de x a y , de modo que sejam satisfeitas os seguintes postulados para quaisquer $x, y, z \in M$:

- i) $d(x, x) = 0$;
- ii) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Observe que os postulados i) e ii) dizem que $d(x, y) \geq 0$ se, e somente se, $x = y$. o postulado iii) afirma que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y . já o postulado iv) chama-se **desigualdade triangular**, pois tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma das medidas dos outros dois lados.

Nessas condições cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de distância de x a y e um par (M, d) , onde d é uma métrica sobre M , é o que chamamos de **espaço métrico**.

1.1.1 Exemplos de Espaços Métricos

Exemplo 1.1. *Seja $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:*

- (a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (b) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y), \forall x, y, z \in M$.

Então, d é uma métrica.

Vamos mostrar que as condições (a) e (b) implicam nas quatro condições da definição.

i) $d(x, x) = 0$. De (a) temos que $x = y$ implica em $d(x, y) = d(x, x) = 0$.

ii) $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$.

Em (b), se $z = x$ temos:

$$d(x, x) < d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y).$$

Como $z = x$, então, concluímos de i) que $d(x, z) = 0$.

Logo,

$$2d(x, y) \geq 0 \Rightarrow d(x, y) \geq 0$$

Por (a), $d(x, y) \neq 0$. Então, $d(x, y) \geq 0$ se $x \neq y$.

iii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M$.

Em (b) se $y = x$ temos

$$d(x, z) \leq d(x, x) + d(z, x).$$

Por i),

$$d(x, x) = 0$$

então

$$d(x, z) \leq d(z, x), \forall x, z \in M.$$

Trocando x por z e z por x temos; $d(z, x) \leq d(x, z), \forall x, z \in M$.

Assim,

$$d(x, z) = d(z, x), \forall x, z \in M.$$

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$

Usando iii) na segunda parcela da soma em (b)

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y) = d(x, y) + d(y, z)$$

Portanto,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$$

.

Exemplo 1.2. A métrica "zero-um".

Sejam M um conjunto qualquer e $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ uma métrica definida por: $d(x, y) = 0$ se $x = y$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. Então, d é uma função e as condições i) a iv) são válidas.

- i) $d(x, y) = 0$ se $x = y$, por definição. Logo, $d(x, x) = 0$.
- ii) $d(x, y) = 1$ para $x \neq y$, por definição. Como $1 > 0$ temos que $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$.
- iii) Se $x = y$ então $d(x, x) = 0$. Se $x \neq y$ então $d(x, y) = 1$, por definição. Também, $y \neq x \Rightarrow d(y, x) = 1$. Logo, $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M$.
- iv) $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in M$.
 - a) Se $x = z$; $d(x, z) = 0 < d(x, y) + d(y, z)$.
 - b) Se $x \neq z$, então $d(x, z) = 1$.
 - b.1) Se $y = x$ então $y \neq z$. Neste caso $d(x, z) = 1, d(x, y) = 0$ e $d(y, z) = 1$, então $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$.
 - b.2) Se $y = z$ então $y \neq x$. Neste caso $d(x, z) = 1, d(x, y) = 1$ e $d(y, z) = 0$, então $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
 - b.3) Se $y \neq x$ e $y \neq z$ então $d(x, z) = 1, d(x, y) = 1$ e $d(y, z) = 1$, então $1 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = 2$. Assim, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in M$.

Portanto, d é métrica em M .

Exemplo 1.3. *Subespaço e métrica induzida.*

Se (M, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado, de modo natural, como espaço métrico.

Neste caso, basta considerar a restrição de d a $S \times S$, isto é, usar entre os elementos de S a mesma distância que eles possuíam como elementos de M . Quando isto é feito, S chama-se um subespaço de X e a métrica de S diz-se induzida pela de M .

Exemplo 1.4. *Produto cartesiano de espaços métricos.*

Sejam M e N espaços métricos, cujas métricas indicaremos com o mesmo símbolo d . O produto cartesiano $M \times N$ é o conjunto dos pares ordenados $z = (x, y)$, onde $x \in M$ e $y \in N$. Definindo a distância de $z = (x, y)$ a $z' = (x', y')$, onde $z, z' \in M \times N$ como sendo:

- $d(z, z') = \sqrt{d(x, x')^2 + d(y, y')^2}$;
- ou $d_1(z, z') = d(x, x') + d(y, y')$;
- ou $d_2(z, z') = \max\{d(x, x'), d(y, y')\}$.

Temos a métrica em $M \times N$.

De um modo geral, sejam $M_1, M_2, \dots, M_n$ espaços métricos. O produto cartesiano no $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, é o conjunto das n -uplas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n$. Então, M é um espaço métrico com qualquer uma das três métricas abaixo:

- a) $d(x, y) = \sqrt{d(x_1, y_1)^2 + \dots + d(x_n, y_n)^2}$;
- b) $d_1(x, y) = \{d(x_1, y_1)^2 + \dots + d(x_n, y_n)^2\}$
- c) $d_2(x, y) = \max\{d(x_1), \dots, d(x_n, y_n)\}$, onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Quando $M_1 = M_2 = \dots = M_n = \mathbb{R}$ obtemos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, como produto de n cópias do espaço métrico $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.5. *A Reta Real.*

A Reta, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é o exemplo mais importante de espaço métrico. A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$.

Mostraremos que d é uma métrica em $\mathbb{R}$, ou seja, que d satisfaz os postulados acima mencionados, que d é uma métrica em $\mathbb{R}$. Para isso usaremos as propriedades elementares do valor absoluto de números reais.

- i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- ii) $d(x, y) > 0 \Leftrightarrow |x - y| > 0 \Leftrightarrow x \neq y$;
- iii) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}$;
- iv) $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$.

Logo, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

1.2 Bolas e esferas

Segundo [LIMA](#), a noção de bola é fundamental no estudo dos espaços métricos. Seja a um ponto no espaço métrico M . Dado um número real $r > 0$, definimos:

Definição 1.6. *A bola aberta de centro a e raio r , é denotada por $B(a, r)$, como o conjunto dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r , ou seja,*

$$B(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

Definição 1.7. *A bola fechada de centro a e raio r , é denotada por $B[a, r]$, como o conjunto dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r , ou seja,*

$$B[a; r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

Definição 1.8. A esfera de centro a e raio r é o conjunto $S(a; r)$, formado pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x, a) = r$. Assim,

$$S(a; r) = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

Evidentemente, $B[a; r] = B(a; r) \cup S(a; r)$, reunião disjunta.

1.3 Sequências de Cauchy

Seja M um espaço métrico. Uma sequência (x_n) em X denomina-se **sequência de Cauchy** quando para todo $\varepsilon > 0$, dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Proposição 1.9. Toda sequência convergente é de Cauchy.

Demonstração: Se $\lim x_n = a$ no espaço métrico M , então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon/2$. Se tomarmos $m, n > n_0$ teremos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

.

Proposição 1.10. Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M .

Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1$.

Logo, o conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ é limitado e tem diâmetro $(diam(X)) \leq 1$.

Segue-se que

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\} = \{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$$

é limitado.

Proposição 1.11. Toda subsequência de uma sequência de Cauchy é, também, de Cauchy.

Demonstração: Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy e (x_{n_k}) uma subsequência qualquer de (x_n) . Se a sequência (x_n) é de Cauchy então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Se (x_{n_k}) é uma subsequência, então, $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$. Como o conjunto dos elementos n_k é infinito, existe $n_{k_0} > n_0$. Para todo $n_k, n_m > n_{k_0}$, $d(x_{n_k}, x_{n_m}) < \varepsilon$ pois, em particular, os elementos da subsequência são termos da sequência (x_n) e $(n_{k_0}) > n_0$.

Logo, (x_{n_k}) é de Cauchy.

Observação 1.12. *Nem toda sequência limitada é de Cauchy. Por exemplo, a sequência $(1, 0, 1, 0, \dots)$ em $\mathbb{R}$, que embora seja limitada não é de Cauchy.*

De fato, $d(x_m, x_n) = 1$ para todo n , logo é limitada. Por outro lado, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $d(1, 0) = 1 > \frac{1}{2}$.

Proposição 1.13. *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente (e tem o mesmo limite que a subsequência).*

Demonstração: Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subsequência que converge para o ponto $a \in M$. Afirmamos que $\lim x_n = a$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > p \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon/2$. Existe, também, $q \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > q \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$.

Seja $n_0 = \max\{p, q\}$. Para todo $n > n_0$ $\exists n_k > n_0$ e então,

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim x_n = a.$$

■

Corolário 1.14. *Se uma sequência (x_n) possui duas subsequências que convergem para limites distintos, então, ela não é de Cauchy.*

De fato, se a uma sequência fosse de Cauchy, convergiria para dois limites distintos, o que contradiz a unicidade do limite.

Proposição 1.15. *Uma sequência de pontos $z_n = c$ no produto cartesiano $M \times N$ de espaços métricos, converge para o ponto $c = (a, b) \in M \times N$ se, e somente se, $\lim x_n = a$ em M e $\lim y_n = b$ em N .*

Demonstração: Por hipótese, $\lim z_n = c$, isto é, $\lim (x_n, y_n) = (a, b)$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow d((x_n, y_n), (a, b)) < \varepsilon$.

E, como $d((x_n, y_n), (a, b)) = \sqrt{d(x_n, a)^2 + d(y_n, b)^2} < \varepsilon \Rightarrow d(x_n, a)^2 + d(y_n, b)^2 < \varepsilon^2$, ou seja, $d(x_n, a)^2 < \varepsilon^2$ e $d(y_n, b)^2 < \varepsilon^2$.

Como $d(x_n, a) \geq 0$ e $d(y_n, b) \geq 0$, então, $d(x_n, a) < \varepsilon$ e $d(y_n, b) < \varepsilon, \forall n > n_0$. Portanto, $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$.

Inversamente, se $\lim x_n = a$ então, para $\varepsilon > 0 \exists n_1$ tal que $n > n_1 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ e se $\lim y_n = b \exists n_2$ tal que $n > n_2 \Rightarrow d(y_n, b) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Para todo $n > n_0$, $d(x_n, a)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$ e $d(y_n, b)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Assim, $d(x_n, a)^2 + d(y_n, b)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{d(x_n, a)^2 + d(y_n, b)^2} < \varepsilon$.

Como $(x_n, y_n) = z_n$ e $(a, b) = c$, $d(z_n, c) < \varepsilon, \forall n > n_0$, concluímos que

$$\lim z_n = c = (a, b).$$

■

Corolário 1.16. *Uma sequência de pontos $z_n = (x_n, y_n) \in M \times N$ é de Cauchy se, e somente se, as sequências (x_n) em M e (y_n) em N são de Cauchy.*

Demonstração: Seja $z_n = (x_n, y_n) \in M \times N$ uma sequência de Cauchy em $M \times N$. Usando a métrica $d_1(z, z') = d(x, x') + d(y, y')$, onde $z = (x, y)$ e $z' = (x', y')$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_0 \Rightarrow d_1(z_n, z_m) < \varepsilon$, ou seja, $d_1((x_n, y_n), (x_m, y_m)) = d_1(z_n, z_m) = d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) < \varepsilon$. Observe que $d(x_n, x_m)$ e $d(y_n, y_m) > 0$. Portanto, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ e $d(y_n, y_m) < \varepsilon$. Logo as sequências (x_n) em M e (y_n) em N são de Cauchy.

Inversamente, sejam (x_n) uma sequência de Cauchy em M e (y_n) uma sequência de Cauchy em N . Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_1 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_2 \Rightarrow d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Para todo $n, m > n_0$ temos $d(z_n, z_m) = d_1((x_n, y_n), (x_m, y_m)) = d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Portanto, $z_n = (x_n, y_n)$ é uma sequência de Cauchy em $M \times N$.

■

1.4 Espaços Métricos Completos

Definição 1.17. *Um espaço métrico M é dito **completo** quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Exemplo 1.18. *Todo espaço M com a métrica zero-um é completo.*

De fato, qualquer sequência de Cauchy em M é constante a partir de um certo índice e portanto, convergente. Porém, nem todo espaço métrico discreto é completo. Seja $= \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, com a métrica zero-um. A sequência (x_n) com $x_n = \frac{1}{n}$ é uma sequência de Cauchy que não converge.

Exemplo 1.19. *Uma métrica d , em um espaço métrico M , é uniformemente discreta quando existir $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x, y \in X$, $d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow x = y$.*

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M . Então, existe n_0 tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \Rightarrow x_m = x_n$. Assim, toda sequência de Cauchy num espaço uniformemente discreto é constante a partir de um certo índice n_0 , e portanto, convergente. Tais espaços são, pois, completos.

Proposição 1.20. *A reta é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\},$$

temos

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots \supset X_n \dots$$

e os conjuntos X_n são limitados, pois toda sequência de Cauchy é limitada. Seja $a_n = \inf X_n$, para cada n , onde $n = 1, 2, 3, \dots$. Então $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b = \sup X_1$. Como toda sequência monótona limitada de números reais é convergente, existe o número $a = \lim a_n$. Assim, temos que $a = \lim x_n$. Para provar isto basta mostrar que a é limite de uma subsequência de (x_n) . De fato, Sendo $a = \lim a_n$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > n_0$, $d(a_m, a) < \varepsilon$, ou seja, $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$. Para cada m , como

$$a_m = \inf X_m,$$

existe $n \geq m$ in tal que $a_m < x_n < a + \varepsilon$, $x_n \in X_m$. Assim, temos (x_n) uma subsequência de (x_m) tal que $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, $\forall n > n_0$, ou seja, $\lim x_n = a$ e portanto,

$$\lim x_n = a.$$

Logo, $\mathbb{R}$ é completo. ■

Proposição 1.21. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração: Seja $F \subset M$ fechado com M completo. Dada uma sequência de Cauchy $x_n \in F$, existe $\lim x_n = a \in M$.

Como F é fechado em M , tem-se que $a \in F$. logo F é completo.

Por outro lado, se $M \subset N$ é um subespaço completo, dada a sequência de pontos $x_n \in M$, com $\lim x_n = a \in N$. Então, pela Proposição (1.9), a sequência (x_n) é de Cauchy. Assim, existe $b \in M$ tal que $\lim x_n = b$. Pela unicidade do limite, tem-se $a = b$ e, portanto, M é fechado em N . ■

Proposição 1.22. *O produto cartesiano $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Demonstração: Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy em M e (y_n) uma sequência de Cauchy em N . Então, pelo Corolário 1.16, (x_n, y_n) é uma sequência de Cauchy em $M \times N$. Por hipótese, $M \times N$ é completo, logo (x_n, y_n) é convergente e converge para $w = (a, b) \in M \times N$. Pela Proposição 1.15, (x_n) converge para $a \in M$ e (y_n) converge para $b \in N$. Logo, M e N são completos.

Inversamente, seja $z_n = (x_n, y_n) \in M \times N$ uma sequência de Cauchy. Então, pelo Corolário 1.16, (x_n) é uma sequência de Cauchy em M e (y_n) é uma sequência de Cauchy em N . Por hipótese, M e N são completos, logo (x_n) converge para $a \in M$ e (y_n) converge para $b \in N$. Pela Proposição 1.15, $z_n = (x_n, y_n)$ converge para $(a, b) \in M \times N$. Portanto, $M \times N$ é completo. ■

Corolário 1.23. $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ é completo se, e somente se, $M_1, M_2, \dots, M_n$ são completos.

De fato, aplicando a Proposição 1.22 $n - 1$ vezes, sucessivamente, chegar-se-à a conclusão de que $M_1 \times M_2, M_1 \times M_2 \times M_3, \dots, M_1 \times M_2 \times M_3 \times \dots \times M_n$ são completos se cada um dos fatores M_i , também, forem completos. Inversamente, se o produto é completo, cada fator M_i é completo.

Corolário 1.24. O Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo.

Proposição 1.25. Um espaço métrico M é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$ de subconjuntos fechados não vazios $F_n \subset M$, com $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} F_n = 0$, existe um ponto $a \in M$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.

Demonstração: Suponhamos que M seja completo e que nos seja dada uma sequência (F_n) como acima. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhamos um ponto $x_n \in F_n$. Isto define uma sequência (x_n) em M , tal que $m, n > n_0 \Rightarrow x_m, x_n \in F_{n_0}$. Ora, para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $\text{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Então, $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$, e portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy em M . Seja $\lim x_n = a \in M$. Dado qualquer $p \in \mathbb{N}$, temos $x_n \in F_p, \forall n \geq p$, tal que $a = \lim x_n \in F_p, \forall p \in \mathbb{N}$, ou seja, $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Evidentemente, não se pode extrair dois pontos $a \neq b$ nesta interseção porque isto obrigaria $d(a, b) \leq \text{diam} F_n, \forall n$. Logo, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$.

Inversamente, se a interseção de toda sequência decrescente de fechados não-vazios cujos diâmetros tendem a zero é um ponto de M , provaremos que M é completo. Com efeito, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M . Para todo $n \in \mathbb{N}$, ponhamos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Então, $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \dots$ e, por conseguinte, $(\overline{X})$ é uma sequência decrescente de fechados não-vazios. Além disso, temos $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} \overline{X_n}$.

Logo, existe $a \in M$ tal que $\bigcap \overline{X_n} = \{a\}$. Como $a \in \overline{X_n}$ para to n , segue-se que qualquer bola aberta de centro a contém ponto de x_n com índices arbitrariamente grandes, ou seja, a é limite de uma subsequência de (x_n) . Como esta sequência é de Cauchy, concluímos que $a = \lim x_n$. ■

1.5 Teorema de Banach sobre Pontos Fixos de Contrações

Definição 1.26. Um **ponto fixo** de uma aplicação $f : M \rightarrow M$ é um ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$.

Exemplo 1.27. A origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é o único ponto fixo da aplicação $x \mapsto -x$ de $\mathbb{R}^n$ em si mesmo. A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ tem dois pontos fixos, a saber 0 e 1. Os pontos fixos de uma função real de variável real f são as abscissas dos pontos do plano em que o gráfico de f intersecta a diagonal $y = x$. Se $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$, então a translação $x \mapsto x + a$ de $\mathbb{R}^n$ em si mesmo, não tem ponto fixo.

Definição 1.28. Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ chama-se uma **contração** quando existe uma constante c , com $0 \leq c < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$.

Teorema 1.29 (Teorema de Banach, sobre Pontos Fixos de Contrações). *Se M é um espaço métrico completo, toda contração $f : M \rightarrow M$ possui um único ponto fixo em M . Mais precisamente, se escolhermos um ponto qualquer $x_0 \in M$ e pusermos $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$ a sequência (x_n) converge em M e $a = \lim x_n$ é o único ponto fixo de f .*

Demonstração: Admitamos, por enquanto, que a sequência (x_n) convirja para um ponto $a \in M$. Então, como f é contínua, temos $f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$, logo a é ponto fixo de f . Mostremos agora que f não admite dois pontos distintos. De fato, se $f(a) = a, f(b) = b$, e vale $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, com $0 \leq c < 1$, para $x, y \in M$ quaisquer, então $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq c \cdot d(a, b)$, donde $(1 - c) \cdot d(a, b) \leq 0$. Como $1 - c > 0$, concluímos que $d(a, b) = 0$, ou seja, $a = b$.

Agora só nos resta, portanto, mostrar que (x_n) é uma sequência de Cauchy em M . Ora,

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(f(x_0), f(x_1)) \leq c \cdot d(x_0, x_1), \\ d(x_2, x_3) &= d(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2) \leq c^2 \cdot d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

e, em geral, temos

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue-se que, para $n, p \in \mathbb{N}$ quaisquer:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq [c^n + c^{n+1} + \dots + c^{n+p-1}] \cdot d(x_0, x_1) = \\ &c^n [1 + c + \dots + c^{p-1}] \cdot d(x_0, x_1) \leq \frac{c^n}{1 - c} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$, concluímos que (x_n) é uma sequência de Cauchy em M , o que completa a demonstração. ■

1.6 Compacidade em Espaços Métricos

Os conjuntos compactos são fundamentais, pois neles sequências possuem subsequências convergentes, que é uma propriedade importante em muitas aplicações.

Recordemos, inicialmente, de alguns resultados de Análise Real, os quais são de grande importância para a compreensão deste assunto.

Teorema 1.30 (Bolzano - Weierstrass). *Em $\mathbb{R}$, toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Seja $\alpha \leq x_n \leq \beta$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pondo $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ vemos que $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$ e $X_n \subset [\alpha, \beta]$. Seja $a_n = \inf X_n$. Então, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq \beta$. Existe, portanto, $a = \lim a_n$.

Para provarmos que a é limite de alguma subsequência de (x_n) , mostraremos que para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, existe $n > n_1$ tal que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Com efeito, existe $n_0 > n_1$, tal que $(a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a < a + \varepsilon)$, pois $a = \lim a_n$. Como $a_{n_0} = \inf X_{n_0}$, existe $n \geq n_0$ tal que $a_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$. Temos, então, $n_0 > n_1$ e $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. ■

Teorema 1.31 (Teorema de aproximação de Weierstrass). *Dada uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma sequência de polinômios P_n tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = f$ uniformemente em $[a, b]$.*

Teorema 1.32 (Borel - Lebesgue). *Seja $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, onde $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de subconjuntos abertos da reta. Então, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in L$, tais que $[a, b] \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$.*

Demonstração: A hipótese significa que para cada $t \in [a, b]$ existe algum, índice de $\lambda \in L$ tal que $t \in A_\lambda$. Seja X o conjunto dos pontos $x \in [a, b]$ tais que o intervalo $[a, x]$ está contido em alguma reunião finita $A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$. Temos,

$$X = \{x \in [a, b]; \quad \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in L\}$$

tais que

$$[a, x] \subset \{A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}\}.$$

X é subconjunto não vazio de $[a, b]$. De fato, para algum $\lambda \in L$ temos $a \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $a + \delta < b$ e $[a, a + \delta) \subset A_\lambda$. Então, $[a, a + \delta) \subset X$. é evidente, que se $x \in X$ e $a \leq y < x \Rightarrow y \in X$.

Logo, X é um intervalo da forma $[a, c]$ ou da forma $[a, c)$, onde $c = \sup X$. Afirmamos que $c \in X$. Com efeito, existe $\lambda_0 \in L$ tal que $c \in A_{\lambda_0}$. como A_{λ_0} é aberto, existe $\varepsilon > 0$

tal que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset A_{\lambda_0}$. Pela definição de $\sup$, podemos encontrar $x \in X$, com $c - \varepsilon < x \leq c$. Ora, temos

$$[a, x] \subset \{A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}\}.$$

Logo,

$$[a, c] \subset \{A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_n} \cup A_{\lambda_0}\}.$$

Portanto, $c \in X$. Finalmente, devemos ter $c = b$, porque se tivéssemos $c < b$ poderíamos, neste último raciocínio, ter tomado ε tal que $c + \varepsilon < b \Rightarrow [a, c + \varepsilon) \subset X$ contrariando o fato de que $c = \sup X$. Assim, $X = [a, b]$, o que demonstra o teorema. ■

Teorema 1.33 (Forma geral do Teorema de Borel - Lebesgue). *Seja F um subconjunto fechado e limitado da reta. De toda família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de abertos tais que $F \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, pode-se extrair uma sufamília finita $(A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_n} \cup A_{\lambda_0})$ cuja reunião ainda contém F .*

Demonstração: Existe um intervalo $[a, b]$ tal que $F \subset [a, b]$. Seja $A_{\lambda_0} = \mathbb{R} - F$. Então, A_{λ_0} é aberto e $[a, b] \subset (\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda) \cup A_{\lambda_0}$. Por 1.32, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in L$ tais que

$$[a, c] \subset \{A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_n} \cup A_{\lambda_0}\}.$$

Como A_{λ_0} não contém ponto de F . Concluimos daí, que $F \subset \{A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}\}$. ■

Definição 1.34. *Um conjunto é **compacto** quando é fechado e limitado.*

Exemplo 1.35. *Todo conjunto finito e todo conjunto da forma $X = [a, b]$ são exemplos de conjuntos compactos.*

Teorema 1.36. *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em K possui uma subsequência que converge para um ponto em K .*

Demonstração: Sejam K compacto e (x_n) uma sequência de termos em K . Como K é limitado, (x_n) é limitada. Então, aplicando o teorema de Bolzano-Weierstrass concluimos que a sequência (x_n) possui uma subsequência convergente. Como K é fechado isso implica que o limite dessa subsequência pertence a K .

Inversamente, suponhamos que toda sequência de pontos $(x_n) \in K$ possui uma subsequência que converge para um ponto de K . Vamos mostrar que K é compacto. De fato, K é limitado pois se não fosse, para cada $n \in \mathbb{N}$ poderíamos obter $x_n \in K$ tal que $|x_n| > n$. Assim, toda subsequência da sequência (x_n) , assim obtida, seria ilimitada e, portanto, divergente.

Temos, ainda, que K é fechado porque, do contrário, existiria uma sequência de pontos $x_n \in K$ tal que $x = \lim (x_n)$ e $x \notin K$. Então, não existiria nenhuma subsequência

de (x_n) convergindo para um ponto de K , pois todas convergem para x , contradição. Portanto, K é compacto. ■

Definição 1.37. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Uma **cobertura** de X é uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Isso significa que, para cada $x \in X$, existe pelo menos um índice $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.*

Se existe um subconjunto $L' \subset L$ tal que, para cada $x \in X$, ainda se pode obter $\lambda \in L'$ com $x \in C_\lambda$, isto é, $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$, então a subfamília $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, chama-se uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$. quando L' é um conjunto próprio de L , $\mathcal{C}'$ diz-se uma *subcobertura própria* de $\mathcal{C}$.

Uma cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ diz-se *aberta* quando cada conjunto A_λ , $\lambda \in L$, é um aberto em M . A cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ diz-se *finita* quando L é um conjunto um finito. Neste caso, temos $L = \{\lambda, \dots, \lambda_n\}$ e escrevemos $X \subset C_{\lambda_1} \cup \dots \cup C_{\lambda_n}$.

Agora, vamos definir o que é o um espaço métrico compacto.

Definição 1.38. *Um espaço métrico M chama-se **compacto** quando toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita.*

Isto é, M compacto significa que se $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, onde cada A_λ é aberto em M , então existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in L$ tais que $M = A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$.

Teorema 1.39. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

- 1) M é compacto;
- 2) Todo subconjunto infinito de M possui um ponto de acumulação;
- 3) Toda sequência em M possui uma subsequência convergente;
- 4) M é completo e totalmente limitado.

Demonstração: Provaremos que $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$. Mas antes, apresentaremos as seguintes definições que nos ajudarão a entender a demonstração do teorema:

Definição 1.40. *Diz-se que $a \in M$ é **ponto de acumulação** do conjunto $X \subset M$ quando toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do próprio a , isto é, $V \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Equivalentemente, para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Indica-se por X' o conjunto dos pontos de acumulação de X , então $a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$. Entretanto, se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X , diz-se que a é **ponto isolado** de X , ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que a é o único ponto de X no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Quando todos os pontos do conjunto X são isolados, diz-se que X é um **conjunto discreto**.*

Definição 1.41. Um espaço métrico M chama-se **totalmente limitado**, quando para todo $\varepsilon > 0$, pode-se obter uma decomposição $M = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$, de M como a reunião de um número finito de subconjuntos, cada um dos quais tem diâmetro menor do que ε .

A fim de que M seja totalmente limitado, é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$, se possa escrever $M = B(x_1; \varepsilon) \cup B(x_2; \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n; \varepsilon)$ como reunião de um número finito de bolas abertas de raio ε . Com efeito, se $\text{diam} X_i < \varepsilon$, então X_i está contido numa bola de raio ε e centro num ponto qualquer de X_i . Reciprocamente, toda bola $B(x_i, \frac{\varepsilon}{3})$ tem diâmetro menor que ε .

1) $\Rightarrow$ 2). Suponhamos M compacto, e seja $X \subset M$ um subconjunto sem ponto de acumulação, isto é, $X' = \emptyset$. Então, $\overline{X} = X \cup X' = X$, isto é, X é fechado em M , tal que M é compacto. Além disso, como nenhum $x \in X$ é ponto de acumulação, então, X é discreto.

Como X é discreto e, por hipótese, compacto isso implica que X é finito. Logo, isso é uma contradição.

2) $\Rightarrow$ 3). Dada uma sequência (x_n) em M se o conjunto dos valores x_n é finito, então existe algum valor $a = x_{n_1} = x_{n_2} = \dots = x_{n_k} = \dots$ que se repete infinitas vezes e, portanto, a subsequência (x_{n_k}) , trivialmente, converge para a . Se, porém, o conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ é infinito, então possui um ponto de acumulação a . Toda bola de centro a contém termos x_n com índices arbitrariamente grandes, logo a é limite de alguma subsequência de (x_n) .

3) $\Rightarrow$ 4). Suponha que toda sequência em M possui uma subsequência convergente, então toda sequência de Cauchy em M possui uma subsequência convergente, logo é convergente. Assim, M é completo. Mostremos agora que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, podemos exprimir M como reunião de um número finito de bolas de raio ε . Assim, dado $\varepsilon > 0$, escolhamos um ponto $x_1 \in M$. Se for $M = B(x_1; \varepsilon)$, o resultado está provado. Caso contrário, existe $x_2 \in M$ tal que $d(x_2, x_1) \geq \varepsilon$. Se for $M = B(x_1; \varepsilon) \cup B(x_2; \varepsilon)$, acabou. Caso contrário, existe $x_3 \in M$, com $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon, d(x_3, x_1) \geq \varepsilon$. Prosseguindo assim, ou chegamos a um n tal que $M = B(x_1; \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n; \varepsilon)$ ou, então, obtemos uma sequência (x_n) tal que $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ para $m \neq n$ quaisquer. Neste caso, nenhuma subsequência de (x_n) seria de Cauchy, e muito menos convergente. Logo isso não ocorre, e M é totalmente limitado.

4) $\Rightarrow$ 1). Seja M completo e totalmente limitado. Por absurdo, suponhamos que exista uma cobertura aberta $M = \bigcup A_\lambda$, a qual não possui subcobertura finita. Escrevamos M como a reunião de um número finito de subconjuntos fechados, cada um com diâmetro < 1 . Pelo menos um deles, que chamaremos de X_1 , é tal que $X_1 \subset \bigcup A_\lambda$ não admite subcobertura finita. X_1 também é totalmente limitado, logo pode ser expresso como a reunião de subconjuntos fechados, cada um com diâmetro $< \frac{1}{2}$. Ao menos um desses

conjuntos, digamos X_2 , não pode ser coberto por um número finito de A_λ . Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma sequência $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$ de conjunto fechados de M , tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\text{diam} X_n < \frac{1}{n}$ e X_n não está contido em numa reunião finita dos A'_λ s. Em particular, nenhum X_n é vazio. Pela Proposição (1.25), existe $a \in M$ tal que $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Para algum λ , tem-se $a \in A_\lambda$. Sendo A_λ aberto, deve-se ter $B(a; \frac{1}{n})$, para algum n . Como, $a \in X_n$ e $\text{diam} X_n < \frac{1}{n}$, concluímos que $X_n \subset B(a, \frac{1}{n})$, no qual $X_n \subset A_\lambda$, o que é uma contradição. ■

Corolário 1.42. *Um espaço métrico é totalmente limitado se, e somente se, seu completamento é compacto.*

De fato, M totalmente limitado $\Leftrightarrow \widehat{M}$ totalmente limitado e completo $\Leftrightarrow \widehat{M}$ compacto.

Corolário 1.43. *um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é limitado e fechado.*

De fato, $K \subset \mathbb{R}^n$ limitado e fechado $\Leftrightarrow K$ totalmente limitado $\Leftrightarrow K$ compacto.

Corolário 1.44. *Todo espaço métrico compacto M contém um subconjunto enumerável denso.*

Isto decorre do fato de M ser totalmente limitado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um subconjunto finito $F_n \subset M$ tal que $d(x, F_n) < \frac{1}{n}$, para todo $x \in M$. Seja $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Então, F é enumerável e, para todo $x \in M$, temos $d(x, F) = 0$. Logo, F é denso em M .

Ainda sobre espaços métricos compactos, no que se refere ao produto de dois fatores, sendo um deles compactos, temos:

Lema 1.45. *Sejam K, M espaços métricos, K compacto, $a \in M$, $(a \times K) \subset V \subset (M \times K)$, onde V é aberto. Existe um aberto U em M tal que $(a \times K) \subset (U \times K) \subset V$.*

Demonstração: O conjunto $a \times K$ é homeomorfo a K e, portanto, é compacto. Existe, portanto, $r > 0$ tal que $z \in (M \times K) - V, t \in K \Rightarrow d(z, (a, t)) \geq r$. Tomemos $U = B(a; r)$ em M . Assim, $(x, t) \in (U \times K) \Rightarrow d(x, a) < r \Rightarrow (x, t) \in V$. Logo, $(U \times K) \subset V$, como queríamos demonstrar. ■

Proposição 1.46. *Seja $f : M \times K \rightarrow N$ contínua, K compacto. Dados $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em $M \Rightarrow d(f(x, t), f(a, t)) < \varepsilon$ e qualquer que seja $t \in K$.*

Demonstração: Seja $V = \{(x, t) \in M \times K; d(f(x, t), f(a, t)) < \varepsilon\}$. É óbvio que $a \times K \subset V$ e, como f é contínua, V é aberto em $M \times K$. Pelo Lema (1.45), existe uma bola $B = B(a; \delta)$ em M tal que $B \times K \subset V$, o que demonstra a proposição. ■

O próximo resultado será de suma importância na demonstração do resultado principal, apresentada na seção 2.2, capítulo 2.

1.7 Teorema de Cantor - Tychonov

Teorema 1.47. *O produto cartesiano $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ é compacto se, e somente se, cada fato $M_i (i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots)$ é compacto.*

Demonstração: Dada uma sequência arbitrária (x_n) em M , provaremos que ela possui uma subsequência convergente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{ni}, \dots)$. Obteremos um subconjunto infinito $N^* \subset N$ tal que, para cada $i = 1, 2, 3, \dots$ existe $\lim_{n \in N^*} x_{ni} = a_i \in M_i$. Então, pondo $a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in M$, teremos $\lim_{n \in N^*} x = a$.

De fato, sendo M_1 compacto, a sequência $(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}, \dots)$ em M_1 possui subsequência convergente. Isto é, existem $N_1 \subset \mathbb{N}$ em M_1 infinito e $a_1 \in M_1$ tais que $\lim_{n \in N_1} x_{n1} = a_1$. Por sua vez, sendo M_2 compacto, a sequência $(x_{n2})_{n \in N_1}$ possui uma subsequência convergente, ou seja: existem $N_2 \subset N_1$ infinito e $a_2 \in M_2$ tais que $\lim_{n \in N_2} x_{n2} = a_2$. Prosseguindo assim, obtemos uma sequência de conjuntos infinitos $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \dots \supset N_i \supset \dots$ e um ponto $a = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots) \in M$, com $\lim_{n \in N_i} x_{ni} = a_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Definimos o conjunto $N^* \subset \mathbb{N}$ estipulando que seu i -ésimo elemento (na ordem crescente dos números naturais) seja o i -ésimo elemento N_i . Assim sendo, para cada $i \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_{ni})_{n \in N^*}$ é, a partir do seu i -ésimo elemento, uma subsequência de $(x_{ni})_{n \in N_i}$. Logo, $\lim_{n \in N^*} x_{ni} = a_i$ para cada i , o que completa a demonstração. ■

Observação 1.48. *O método de demonstração logo acima, devido a Cantor, chama-se "método da diagonal".*

2 O TEOREMA DE ARZELÀ - ASCOLI

O teorema de Arzelà - Ascoli é um importante resultado, com aplicações na análise real, análise funcional e em áreas afins tais como a teoria das equações diferenciais. Provém dos matemáticos italianos Césare Arzelà e Giulio Ascoli.

Figura 2.1 – Cesare Arzelà



Figura 2.2 – Giulio Ascoli



Fonte: ([SILVA, 2016](#))

Ascoli nasceu em 20 de janeiro de 1843 em Trieste e faleceu em 12 de julho de 1896 em Milão. Suas contribuições para a teoria das funções de uma variável real, foram muito significativas, entre elas destaca-se a forma mais fraca, provada em 1884, do teorema, denominado hoje, de Arzelà-Ascoli. Por sua vez, foi Cezare Arzelà quem provou um resultado mais forte deste teorema.

Arzelà nasceu em 6 de março de 1847, em Santo de Magra, La Spezia, Itália e faleceu em 15 de março de 1912 em sua terra natal. Em 1895, estabeleceu a condição necessária do teorema de Arzelà-Ascoli. Ele provou o resultado que garante a existência de subsequência uniformemente convergente em sequências de funções reais.

O Teorema de Arzelà - Ascoli caracteriza os conjuntos compactos de funções contínuas. Essa caracterização é importante na demonstração da existência de soluções de equações diferenciais, bem como em muitos problemas da Análise Matemática. As referências utilizadas neste capítulo foram: ([HONIG, 1976](#)), ([LIMA, 1983](#)) e ([SILVA, 2016](#)).

Inicialmente, iremos enunciar e apresentar conceitos e definições importantes presentes neste teorema.

2.1 Preliminares

2.1.1 Conjuntos Relativamente Compactos

Definição 2.1 (Conjunto relativamente compacto). *Um conjunto X é dito relativamente compacto quando o seu fecho $\overline{X}$ é compacto.*

Isso significa que toda sequência de pontos $x_n \in X$ possui uma subsequência convergente em M , podendo ocorrer que o limite dessa subsequência não pertença a X .

Se X é relativamente compacto e $f : M \rightarrow N$ é contínua, então $f(X) \subset N$ é relativamente compacto. De fato, sendo X compacto, $f(\overline{X})$ é compacto. Em particular, $f(\overline{X})$ é fechado em N . Como $f(X) \subset f(\overline{X})$, segue-se que $\overline{f(X)} \subset f(\overline{X})$ e, portanto, $\overline{f(X)}$ é compacto.

Exemplo 2.2. *O conjunto $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ é relativamente compacto em $\mathbb{R}$. Seu fecho é o intervalo $[0, 1]$, que é compacto em $\mathbb{R}$, então A é relativamente compacto, mesmo não sendo fechado.*

Exemplo 2.3. *Em $\mathbb{R}^2$, considere a bola aberta $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Embora B não seja compacto (pois não é fechado), se fecho $\overline{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ é compacto, tornando B relativamente compacto em $\mathbb{R}^2$.*

2.1.2 Equicontinuidade

Definição 2.4 (Equicontinuidade). *Sejam M, N espaços métricos e E um conjunto de aplicações $f : M \rightarrow N$. O conjunto E diz-se **equicontínuo** no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em M implique $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ seja qual for $f \in E$.*

Assim, dizer que E não é equicontínuo no ponto $a \in M$ significa dizer que existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$ existem $x \in M$ e $f \in E$ tais que $|x - a| < \delta$, mas $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Exemplo 2.5. *Seja E um conjunto de funções $f : M \rightarrow N$ definidas num conjunto M discreto. Afirmamos que E é equicontínuo. De fato, toda função definida num conjunto discreto é contínua. Seja $a \in M$. Dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta > 0$ tal que $M \cap (a - \delta, a + \delta) = \{a\}$. Então, $|x - a| < \delta$, com $x \in M$, implica $x = a$, pois a é um ponto isolado. Portanto, $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$, para qualquer $f \in E$.*

Conforme nos lembra [LIMA](#), a essência da definição acima reside no fato de que a escolha de δ a partir do ε dado é a mesma para todas as funções f pertencentes ao

conjunto E . Evidentemente, se E é equicontínuo no ponto a , então todas as aplicações $f \in E$ são contínuas nesse ponto.

Definição 2.6. Um conjunto E de aplicações $f : M \rightarrow N$ chama-se **equicontínuo** quando é equicontínuo em todos os pontos de M . Uma sequência de aplicações $f_n : M \rightarrow N$ diz-se **equicontínua** no ponto $a \in M$ (respectivamente, equicontínua) quando o conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ o for.

Exemplo 2.7. Considere a sequência de aplicações constantes $f_n(x) = c$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante fixa, definida em um intervalo fechado $I = [a, b]$. Como $f_n(x)$ é constante para todos os n , a diferença $|f_n(x) - f_n(y)| = 0$ para quaisquer $x, y \in [a, b]$. Isso significa que $\{f_n\}$ é trivialmente equicontínua, pois não depende de x, y ou n .

Exemplo 2.8. Considere a sequência de funções $g_n(x) = \frac{x}{n}$ definida em $[0, 1]$. Para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta = \varepsilon$ e, para quaisquer $x, y \in [0, 1]$ com $0 < |x - y| < \delta$, temos:

$$|g_n(x) - g_n(y)| = \left| \frac{x - y}{n} \right| \leq \frac{|x - y|}{n} < \varepsilon.$$

Portanto, $\{g_n\}$ é uma sequência equicontínua, pois as diferenças $|g_n(x) - g_n(y)|$ podem ser controladas para todo n e qualquer x, y .

Observação 2.9. Se uma sequência equicontínua de aplicações $f_n : M \rightarrow N$ converge simplesmente para $f : M \rightarrow N$. Então, o conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ é equicontínuo. com efeito, dado $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$. Em particular, f é contínua.

Lema 2.10. Se uma sequência equicontínuas de aplicações $f_n : M \rightarrow N$ converge simplesmente em M , então a convergência é uniforme em cada parte compacta $K \subset M$.

Demonstração: Supondo $f_n \rightarrow f$ simplesmente, seja dado $\varepsilon > 0$. para cada $x \in M$ existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_x \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Pela observação (2.9), $\{f, f_1, \dots, f_n, \dots\}$ é equicontínuo.

Logo, cada $x \in M$ pertence a uma bola aberta B_x tal que $y \in B_x \Rightarrow d(f_n(y), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ e $d(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Da cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x \in K} B_x$ extraímos a subcobertura finita $K \subset B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_p}$.

Seja $n_0 = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_p}\}$, afirmamos que $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, para todo $x \in K$. Com efeito, se $n > n_0$ e $x \in K$, então, existe i , com $1 \leq i \leq p$, tal que $x \in B_{x_i}$. Logo, temos

$$d(f_n(x), f_n(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim,

$$d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) < \varepsilon.$$

Proposição 2.11. *Dada uma sequência equicontínua de aplicações $f_n : M \rightarrow N$, suponhamos que, para cada $x \in M$, o conjunto $\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\}$ tenha fecho completo em N . Se (f_n) converge simplesmente num subconjunto denso $D \subset M$, então, (f_n) converge uniformemente em cada parte compacta de M .*

Demonstração: Mostraremos, primeiramente, que (f_n) converge simplesmente em todo o espaço. Para isso, basta verificar que, tomado arbitrariamente $x \in M$, a sequência $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em N . Ora, dado $\varepsilon > 0$ existe, pela equicontinuidade, uma bola $B = B(x; r)$ tal que, $y \in B \Rightarrow d(f_n(y), f_N(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escolhamos um $y \in B$. Como existe $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(y), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Então,

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) \leq d(f_m(x), f_m(y)) + d(f_m(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f_n(x))\varepsilon.$$

Segue-se do Lema (2.10) que $f_n(x)$ converge uniformemente em cada parte compacta de M .

2.2 Resultado Principal

Teorema 2.12 (Teorema de Arzelà - Ascoli). *Seja E um conjunto de aplicações contínuas $f : K \rightarrow N$, tal que K seja compacto. A fim de que $E \subset \mathcal{C}(K; N)$ seja relativamente compacto, é necessário e suficiente, que:*

- i) E seja equicontínuo;
- ii) Para cada $x \in K$, o conjunto $E(x)$ seja relativamente compacto em N .

Demonstração: Suponhamos, primeiramente, que $E \subset \mathcal{C}(K; N)$ seja relativamente compacto. Fixado $x \in M$, a aplicação $v_x : \mathcal{C}(K; N) \rightarrow N$, dada por $v_x(f) = f(x)$, é uma contração e, portanto, é contínua. Como $E(x) = v_x(E)$, segue-se que $E(x)$ é relativamente compacto.

Sejam, agora, $a \in K$ e $\varepsilon > 0$. A função $\varphi : \overline{E} \times K \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(f, x) = d(f(x), f(a))$, também é contínua. Usando, apenas, a compacidade de $\overline{E}$, a Proposição (1.46) nos permite obter $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ para toda $f \in \overline{E}$. Logo, $\overline{E}$ (e, portanto, E) é equicontínuo em qualquer ponto $a \in K$. Isto mostra que as condições i) e ii) acima, são necessárias para a compacidade de $\overline{E}$.

Inversamente, supondo satisfeitas essas condições, seguindo o Corolário (1.44), tomemos um subconjunto enumerável $D = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ denso em K . Para cada $i \in \mathbb{N}$,

seja $L_i = \overline{E(x_i)} \subset N$. Pelo Teorema de Cantor - Tychonov (1.47) sabemos que $\prod_{i=1}^{\infty} L_i$ é compacto. Para cada $f \in E$, chamemos de f' o ponto de $\prod L_i$ cuja i -ésima coordenada é $f(x_i)$. Uma seqüência de aplicações $f_n \in E$ converge simplesmente em D se, e somente se, (f'_n) converge em $\prod L_i$.

A compacidade de $\prod L_i$, garante, então, que toda seqüência de aplicações $f_n \in E$ possui uma subsequência que converge simplesmente em D e pela Proposição (2.11) converge uniformemente em K .

Logo, $E \subset \mathcal{C}(K; N)$ é relativamente compacto. ■

3 O Teorema de Arzelà - Ascoli e sua Aplicação em Equações Diferenciais Ordinárias

As referências utilizadas neste capítulo foram: (HONIG, 1976), (MEDEIROS; OLIVEIRA, 2017), (LIMA, 1983).

3.1 Um Pouco de História

Uma equação da forma

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}) = 0$$

onde x é a incógnita e função de uma variável, chama-se **Equação Diferencial Ordinária (EDO)**.

Aplica-se tais equações às leis gerais da Física, Biologia, Economia. Também inúmeras questões da própria Matemática são formuladas por equações diferenciais ordinárias, como por exemplo, questões de Topologia, Geometria Diferencial e Cálculo Variacional.

O estudo das equações diferenciais ordinárias iniciou-se com os métodos do Cálculo Diferencial e Integral, desenvolvidos por Newton e Leibniz no final do século XVII. Esses métodos conduziram à consolidação das Equações Diferenciais como um novo ramo da Matemática, que se transformou em disciplina independente no início do século XVIII.

No fim do século XVIII a Teoria das Equações Diferenciais se transformou numa das disciplinas matemáticas mais importantes e o método mais efetivo para a pesquisa científica. As contribuições de Euler, Lagrange, Laplace e outros expandiram de maneira notável o conhecimento dentro dos cálculos das Variações, Mecânica Celeste, Teoria das Oscilações, Elasticidade, Dinâmica dos Flúidos, etc..

No século XIX passou-se a considerar como questão prévia em cada problema a existência e unicidade de soluções satisfazendo dados iniciais. Este é conhecido como o Problema de Cauchy. Em 1881, Poincaré publica um trabalho em que são lançadas as bases da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais.

3.2 Existência e Unicidade de Soluções de EDO's

Nesta seção iremos tratar de alguns resultados importantes no estudo das equações diferenciais ordinárias, onde o principal resultado é o Teorema de Existência e Unicidade para o problema de valor inicial:

Exemplo 3.1. *O exemplo bem simples de equação diferencial que pode ser encontrado é o de cálculo de integrais. De fato, pelo Teorema Fundamental do Cálculo sabemos que se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^1 tal que $F'(t) = f(t)$, para todo $t \in (a, b)$, então*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Isso significa que se desejarmos calcular a integral $\int_a^b f(t)dt$, então uma possibilidade é resolver a equação diferencial

$$x'(t) = f(t, x).$$

Considere o problema de valor inicial

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

A seguir iremos mostrar um Lema que transfere o problema de valor inicial (3.1) para um problema de resolução de uma integral.

Lema 3.2. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Então, uma função diferenciável $\varphi : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução do PVI. (3.1) se, e somente se, for uma solução da equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds, \quad t \in I_\alpha. \quad (3.2)$$

Demonstração: $\Rightarrow$) Se φ é uma solução do PVI. (3.1), então pelo Teorema Fundamental do Cálculo, φ é solução da equação integral (3.2).

$\Leftarrow$) Inversamente, se $\varphi : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua que é solução da equação integral (3.2), então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, φ é diferenciável e é também solução d PVI. (3.1). ■

Teorema 3.3 (Teorema de Picard). *Seja f uma função contínua e lipschitziana com relação à segunda variável, isto é, existe uma constante K tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|, \quad (3.3)$$

para todo $(t, x), (t, y) \in \Omega = I_a \times B_b$, na qual $I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| \leq b\}$. Se $\|f\| \leq M$ em Ω , existe uma única função diferenciável $\varphi : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, na qual $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, que é solução do PVI.(3.1).

Demonstração: Usando o Lema (3.2), concentramo-nos na resolução da equação integral (3.2). Seja $X = \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$ o espaço métrico completo das funções contínuas $g : I_\alpha \rightarrow B_b$, com a métrica da convergência uniforme

$$d(g_1, g_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |g_1(t) - g_2(t)|.$$

Para $g \in X$, seja $\varphi(g) : I_\alpha \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$\varphi(g)(t) = g(t_0) + \int_{t_0}^t f((s, g(s)))ds, \quad t \in I_\alpha. \quad (3.4)$$

Note que $\varphi(X) \subseteq X$. De fato, para todo $t \in I_\alpha$

$$\|\varphi(g)(t) - g(t_0)\| = \left\| \int_{t_0}^t f((s, g(s)))ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f((s, g(s)))\|ds \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b.$$

Assim, a equação (3.2) pode se escrita na forma funcional

$$x = \varphi(x).$$

Portanto, a solução da equação (3.2) são os pontos fixos de φ . A ideia, agora, é usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Então, para finalizar a demonstração precisamos mostrar que φ é uma contração.

$$\begin{aligned} \|\varphi(g_1)(t) - \varphi(g_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f((s, g_1(s))) - f((s, g_2(s)))]ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f_x(\xi)\| \cdot \|g_1(s) - g_2(s)\|ds, \end{aligned}$$

onde ξ está entre g_1 e g_2 . Então,

$$\|\varphi(g_1)(t) - \varphi(g_2)(t)\| \leq K|t - t_0|d(g_1, g_2),$$

no qual K é a constante de lipschitz de f , e daí

$$d(\varphi(g_1), \varphi(g_2)) \leq K\alpha d(g_1, g_2).$$

Concluimos que φ é uma contração se $K\alpha < 1$. Logo, basta tomar $\alpha < \frac{1}{K}$. ■

Exemplo 3.4. Consideremos o seguinte o seguinte PVI.

$$x' = -2t^2 \cos x \sin x + \sin t^2, \quad x(0) = 0. \quad (3.5)$$

Note que α depende da função f e da distância do ponto (t_0, x_0) à fronteira $\partial\Omega$ de Ω , o seguinte resultado é de grande importância:

Lema 3.5. Se $K \subset \Omega$ é compacto, então, um mesmo α pode ser escolhido de modo a servir para todas as condições iniciais $(t_0, x_0 \in K)$

Demonstração: Considere uma δ -vizinhança K_δ de K tal que

$$K \subset K_\delta \subset \overline{K_\delta} \subset \Omega,$$

então podemos escolher a e b tais que o retângulo $B(a, b, t_0, x_0) = B(a, b) = \{(t, x); t \in I_a, x \in B_b\}$ esteja contido em $\overline{K_\delta}$ para todos os pontos $(t_0, x_0) \in K$. Portanto, basta tomar

$$M = \max \{|f(t, x)|; (t, x) \in \overline{K_\delta}\}$$

e α satisfazendo

$$\alpha < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\}.$$



Exemplo 3.6. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = |x|^{\frac{1}{2}} \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

A função $x(t) \equiv 0$ é solução do problema de valor inicial. Porém, encontramos outra solução usando o método das equações separáveis e considerando os casos $x > 0$ e $x < 0$; essa outra solução é:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2, & t \neq 0 \\ -\frac{1}{4}t^2, & t \leq 0 \end{cases}.$$

Esse fato, porém, não contradiz o Teorema de Picard (1.47), pois temos que a função $f(t, x) = |x|^{\frac{1}{2}}$ não é lipschitziana, como no exemplo (3.4). Portanto, a solução existe, mas não é única.

Tendo em vista o exemplo anterior, veremos um resultado que nos garante que, se retirarmos a hipótese de f ser lipschitziana, perdemos a unicidade, mas ainda temos a existência de soluções.

3.3 Aplicação do Teorema de Arzelà-Ascoli: Teorema de Peano - Existência de Soluções de EDOs

Finalmente, apresentaremos uma das aplicações do Teorema de Arzelà-Ascoli. Tal aplicação, o Teorema de Peano, é um importante resultado da teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, o qual, sob hipóteses mais fracas do que às enunciadas no Teorema de Picard, garante a existência de soluções para Problemas de Valor Inicial (ou Problema de Cauchy) sem preocupar-se com a unicidade.

Teorema 3.7 (Teorema de Peano). *Seja $f : \Omega = I_a \times B_b \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua. Se $\|f\| \leq M$ em Ω , o PVI. (3.1) tem pelo menos uma solução em I_α onde $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.*

Demonstração: Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, existe uma sequência f_n de funções, cujas componentes são polinômios, que convergem para f , uniformemente em Ω . Para n grande, f_n satisfaz as hipóteses do Teorema de Picard (3.3). Seja φ_n solução de

$$\begin{cases} x' = f_n(t, x) \\ x(0) = 0, \quad \text{em } I_\alpha \end{cases}$$

cuja existência e unicidade decorrem do Teorema de Picard. A família $\{\varphi_n\}$ é equicontínua e uniformemente limitada, pois:

$$\|\varphi_n(t) - \varphi_n(t')\| = \left\| \int_t^{t'} f_n(s, \varphi_n(s)) ds \right\| \leq M|t - t'|$$

e $\|\varphi_n - x_0\| \leq b$, para todo n suficientemente grande. Então, pelo Teorema de Arzelà - Ascoli (2.12) existe uma subsequência, que denotaremos, também, por φ_n , tal que φ_n converge uniformemente em I_α para uma função φ .

Afirmção: $f_n(s, \varphi(s))$ converge uniformemente em I_α para $f(s, \varphi(s))$. De fato,

$$\begin{aligned} \|f_n(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi(s))\| &\leq \|f_n(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi(s))\| + \|f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi(s))\| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \quad \forall s. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $n \rightarrow \infty$ em ambos os membros de $\varphi_n(t) = \int_{t_0}^t f_n(s, \varphi(s)) ds$, temos, para todo $t \in I_\alpha$, $\varphi(t) = \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$. ■

Portanto, O Teorema de Peano garante que se $f(t, x)$ for contínua, então existe pelo menos uma solução. No entanto, ele não garante a unicidade.

O Teorema de Arzelà-Ascoli é um passo essencial na demonstração do Teorema de Peano, pois garante que a sequência de aproximações de soluções tem uma subsequência convergente. Dessa forma, ele fornece a base para provar a existência de soluções para EDOs quando a função $f(t, x)$ é apenas contínua..

Conclusão

O Teorema de Arzelà-Ascoli é um dos pilares da análise funcional, oferecendo critérios fundamentais para a compacidade de conjuntos de funções. Essa característica o torna indispensável em várias áreas da matemática, incluindo a teoria de equações diferenciais ordinárias (EDOs), onde desempenha um papel central em métodos que garantem a existência de soluções. No entanto, compreender plenamente suas aplicações requer um conhecimento aprofundado de conceitos relacionados, como continuidade, equicontinuidade e compacidade em espaços métricos.

O objetivo desta pesquisa foi abordar o Teorema de Arzelà-Ascoli e aplicá-lo em um resultado que fornece garantias suficientes para a existência de soluções de uma EDO. Para alcançar tal objetivo, foi necessário um estudo detalhado de conceitos fundamentais da teoria dos espaços métricos, incluindo métricas, compacidade e convergência. Esses conceitos servem como base teórica para as demonstrações apresentadas e para a aplicação do teorema no contexto das EDOs.

Preocupamo-nos em organizar este trabalho de forma clara e estruturada, com o intuito de facilitar a compreensão do leitor. Assim, a monografia foi dividida em capítulos que evoluem gradativamente em complexidade. Iniciamos com uma revisão teórica dos conceitos necessários, seguida da demonstração do Teorema de Arzelà-Ascoli, e concluímos com sua aplicação prática em um resultado que assegura a existência de soluções de uma EDO.

Esperamos que este trabalho sirva como um recurso útil para estudantes e pesquisadores interessados em análise funcional e teoria das EDOs, ao apresentar os fundamentos e aplicações do Teorema de Arzelà-Ascoli de forma acessível e didática.

Referências

- ALMEIDA, W. F.; PIMENTA, M. T. de O. **O Teorema de Arzelá-Ascoli e Sua aplicação em Equações Diferenciais Ordinárias**. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 2, p. 1–2, 2018. ISSN 2359-0793. Citado na página 9.
- HONIG, C. S. ***Aplicação da Topologia à Análise***. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 31.
- LIMA, E. L. ***Espaços métricos***. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq - Rio de Janeiro, 1983. v. 1. Citado 5 vezes nas páginas 10, 13, 26, 27 e 31.
- LIMA, E. L. ***Análise real: funções de uma variável***. [S.l.: s.n.], 2007. v. 1. Citado na página 10.
- LIPSCHUTZ, S. ***Topologia Geral***. [S.l.]: McGraw - Hill do Brasil, São Paulo, 1970. Citado na página 10.
- MEDEIROS, A. A.; OLIVEIRA, M. d. L. ***Equações Diferenciais Ordinárias***. 2017. Citado na página 31.
- SILVA, J. M. d. **Equicontinuidade e o teorema de Arzelá-Ascoli**. UFAL Campus Arapiraca, 2016. Citado na página 26.