



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO**

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

**Centro de Ciências Exatas e Tecnologia**  
**Curso de Matemática – Licenciatura Plena**

**Lailla Judith Fernandes Moura**

# **TEOREMA DE PITÁGORAS: História e aplicações**

São Luís - MA  
2023

Lailla Judith Fernandes Moura 

# TEOREMA DE PITÁGORAS: História e aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)  
apresentada à Coordenadoria dos cursos de  
Matemática, da Universidade Federal do Ma-  
ranhão, como requisito parcial para obtenção  
do grau de Licenciada em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo

São Luís - MA

2023

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Moura, Lailla Judith Fernandes.

TEOREMA DE PITÁGORAS: História e aplicações / Lailla  
Judith Fernandes Moura. - 2023.

38 p.

Orientador(a): Marcos Antonio Ferreira de Araújo.

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática,  
Universidade Federal do Maranhão, Universidade Federal do  
Maranhão - UFMA, 2023.

1. Aplicações. 2. História. 3. Matemática. 4.  
Pitágoras. I. Araújo, Marcos Antonio Ferreira de. II.  
Título.

## TEOREMA DE PITÁGORAS: História e aplicações

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)  
apresentada à Coordenadoria dos cursos de  
Matemática, da Universidade Federal do Ma-  
ranhão, como requisito parcial para obtenção  
do grau de Licenciada em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 20/12/2023

---

**Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo**  
Orientador  
DEMAT/UFMA

---

**Prof. Dr. Luís Fernando Coelho Amaral**  
Primeiro Examinador  
DEMAT/UFMA

---

**Prof<sup>a</sup>. Ma. Sônia Rocha Santos Sousa**  
Segunda Examinadora  
Colégio Universitário/UFMA

*Aos alicerces de amor e sabedoria, minhas avós.*

# Agradecimentos

A Deus, fonte de força e inspiração ao longo de toda esta jornada acadêmica. Agradeço pela saúde que me permitiu enfrentar os desafios, pela sabedoria que iluminou meu caminho, e pela graça que me sustentou nos momentos mais difíceis. Sua presença constante foi uma bênção que guiou cada passo deste percurso.

Aos meus pais, que sempre acreditaram em mim e foram uma fonte inesgotável de inspiração, agradeço por seus sacrifícios, paciência e encorajamento constante. Seus valores e ensinamentos orientaram minhas escolhas e me fortaleceram nos momentos desafiadores.

Aos meus irmãos, companheiros de risos e cúmplices nos altos e baixos da vida, agradeço pela amizade inabalável e por serem meu refúgio nos momentos difíceis.

Ao professor Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo pela orientação e pela paciência demonstrada em responder às minhas dúvidas, pela orientação perspicaz que contribuiu para o aprimoramento deste trabalho, e pela dedicação incansável ao compartilhar conhecimento.

A todos os meus colegas de curso, em especial, Gabriel Kawam e Juan Santos por todo apoio e ajuda, e também a todos os professores que fizeram parte da minha jornada acadêmica, em especial, ao professor Dr. Luís Fernando Coelho Amaral, por todos os "puxões de orelha" e por toda ajuda ao longo desse percurso.

*“Existe muito por completar neste trabalho, mas infelizmente como em algum momento tenho que encarar, então que seja agora”*

Evariste Galois

# Resumo

O Teorema de Pitágoras, atribuído ao matemático grego Pitágoras de Samos, é uma das descobertas fundamentais da geometria. Formulado no século VI a.C., o teorema estabelece uma relação entre os lados de um triângulo retângulo, afirmando que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Esta proposição simples, tem vastas aplicações em diversas áreas. O presente trabalho trata-se de uma pesquisa bibliográfica que tem por objetivo abordar sobre a vida de Pitágoras, sobre a Escola Pitagórica, por ele fundada, e sobre as suas contribuições para o desenvolvimento da matemática. Fizemos um resumo sobre a vida e trajetória de Pitágoras de Samos, enfatizando a contribuição significativa de Pitágoras e seus discípulos para o desenvolvimento deste teorema. Assim, o teorema de Pitágoras transcende sua origem histórica, permanecendo como um pilar fundamental no entendimento e solução de problemas matemáticos.

**Palavras-chave:** Matemática, História, Pitágoras, Aplicações.

# Abstract

The Pythagorean Theorem, attributed to the Greek mathematician Pythagoras Samos, is one of the fundamental discoveries in geometry. Formulated in the 6th century BC, the theorem establishes a relationship between the sides of a right-angled triangle, stating that the square of the hypotenuse is equal to the sum of the squares of the legs. This simple proposition, has wide applications in several areas. The present work is a bibliographical research that aims to address the life of Pythagoras, the Pythagorean School, founded by him, and his contributions to the development of mathematics. In this work, we made an overview of the life and trajectory of Pythagoras of Samos , emphasizing the significant contribution of Pythagoras and his disciples to the development of this theorem. Thus, Pythagoras' theorem transcends its historical origin, remaining a fundamental pillar in the understanding and solution of mathematical and applied problems.

**Keywords:** Mathematics, History, Pythagoras, Application.

# Lista de ilustrações

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1.1 – Pitágoras de Samos . . . . .                       | 11 |
| Figura 1.2 – Tábua Plimpton 322 . . . . .                       | 13 |
| Figura 2.1 – Projeção de um ponto . . . . .                     | 14 |
| Figura 2.2 – Projeção de um segmento . . . . .                  | 15 |
| Figura 2.3 – Projeção de um segmento paralelo . . . . .         | 15 |
| Figura 2.4 – Projeção de um segmento não-paralelo . . . . .     | 15 |
| Figura 2.5 – Triângulo retângulo . . . . .                      | 16 |
| Figura 2.6 – Altura de um triângulo equilátero . . . . .        | 18 |
| Figura 2.7 – Diagonal do quadrado . . . . .                     | 19 |
| Figura 3.1 – Triângulo qualquer . . . . .                       | 21 |
| Figura 3.2 – Triângulo obtusângulo . . . . .                    | 22 |
| Figura 3.3 – Triângulo qualquer . . . . .                       | 24 |
| Figura 3.4 – Triângulo obtusângulo qualquer . . . . .           | 25 |
| Figura 3.5 – Exemplo de aplicação da lei dos cossenos . . . . . | 26 |
| Figura 4.1 – Triângulo acutângulo qualquer . . . . .            | 27 |
| Figura 4.2 – Triângulo acutângulo . . . . .                     | 28 |
| Figura 4.3 – Triângulo acutângulo . . . . .                     | 29 |
| Figura 4.4 – Mediana de um triângulo . . . . .                  | 29 |
| Figura 4.5 – Altura de um triângulo . . . . .                   | 31 |
| Figura 4.6 – Bissetriz interna de um triângulo . . . . .        | 34 |

# Sumário

|          |                                                                     |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
|          | <b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>                                         | <b>10</b> |
| <b>1</b> | <b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .</b>                              | <b>11</b> |
| 1.1      | Contexto histórico . . . . .                                        | 11        |
| 1.2      | Escola Pitagórica . . . . .                                         | 12        |
| 1.3      | Teorema de Pitágoras . . . . .                                      | 13        |
| <b>2</b> | <b>RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO . . . . .</b>           | <b>14</b> |
| 2.1      | Relações métricas no triângulo retângulo . . . . .                  | 14        |
| 2.2      | Algumas aplicações imediatas do Teorema de Pitágoras . . . . .      | 18        |
| 2.3      | Triângulos Pitagóricos . . . . .                                    | 19        |
| <b>3</b> | <b>RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO QUALQUER . . . . .</b>           | <b>21</b> |
| 3.1      | Triângulos quaisquer . . . . .                                      | 21        |
| 3.2      | Consequências das relações métricas . . . . .                       | 23        |
| <b>4</b> | <b>OUTRAS RELAÇÕES MÉTRICAS . . . . .</b>                           | <b>27</b> |
| 4.1      | Relação de Stewart . . . . .                                        | 27        |
| 4.2      | Cálculo de medianas em triângulos quaisquer . . . . .               | 29        |
| 4.3      | Cálculo das alturas de um triângulo qualquer . . . . .              | 31        |
| 4.4      | Cálculo das bissetrizes internas de um triângulo qualquer . . . . . | 34        |
| <b>5</b> | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>                               | <b>37</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>                                        | <b>38</b> |

# Introdução

O Teorema de Pitágoras é uma das descobertas fundamentais da matemática e desempenhou um papel vital no desenvolvimento e compreensão da matemática ao longo dos séculos, e leva o nome de Pitágoras, um influente matemático e filósofo grego que nasceu na ilha de Samos por volta de 570 a.C. Os famosos pitagóricos, eram uma sociedade que estudavam filosofia, matemática e ciências naturais, eram estreitamente unidos através de ritos secretos. A simplicidade e abrangência do teorema fazem dele uma peça-chave para resolver o grande quebra-cabeça do conhecimento matemático.

A escola desenvolveu muitos conceitos importantes, incluindo a relação entre os lados de um triângulo retângulo, que eventualmente se tornou o Teorema de Pitágoras. Segundo (EVES, 2011) estudos na área da história da matemática dizem que antes dos pitagóricos, já se conhecia o triângulo retângulo, povos antigos já estabeleciam relações entre os lados dos triângulos retângulos, no entanto, foram os pitagóricos, provavelmente, os primeiros a demonstrar esta relação. O contexto histórico do teorema remonta à Grécia antiga, período em que a matemática estava intrinsecamente ligada à filosofia e à busca de uma compreensão fundamental da natureza.

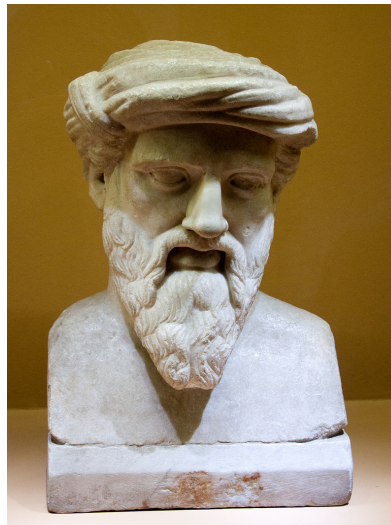
Neste trabalho, exploramos não apenas os aspectos teóricos deste teorema, mas também suas aplicações. Começamos falando sobre a trajetória de Pitágoras, do nascimento à fundação da escola pitagórica, em seguida sobre as relações métricas no triângulo retângulo onde iremos ver a demonstração do Teorema de Pitágoras, triângulos pitagóricos e algumas aplicações, veremos ainda relações métricas num triângulo qualquer, consequências das relações métricas, lei dos cossenos, por último outras relações métricas que vai de relação de Stewart à mediana, altura e bissetriz interna de um triângulo qualquer.

# 1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

## 1.1 Contexto histórico

Pouco sabemos sobre Pitágoras com grau de certeza, devido a distância histórica, e por não ter sido deixado nada escrito por ele, tudo que sabemos sobre ele hoje, foi escrito por antigos historiadores e filósofos. Pitágoras, nasceu na ilha grega de Samos (próximo a Mileto), por volta do século VI a.C. (vivendo aproximadamente de 570 a.C. até 500 a.C.) filho de Mnesarco, um comerciante que veio de Tiro (território hoje pertencente ao Líbano) que acabou virando cidadão de Samos depois de levar alimentos em uma época difícil na região, e sua mãe Pártenis, natural da ilha. Passou a infância em Samos, embora há registros em diversas biografias, que quando criança viajou muito a Itália acompanhando seu pai, teve uma boa educação, aprendeu a tocar lira e recitar poesias desde jovem.

Figura 1.1 – Pitágoras de Samos



Fonte: <https://facts.net/pythagoras-facts/>

Pitágoras teve três filósofos que o influenciaram, o primeiro foi Ferecídes que transmitia conhecimentos embasados na filosofia e na mitologia, e teria ainda discutido com ele sobre a possibilidade de encarnações. Os outros dois foram Tales e seu aluno Anaximandro que apresentaram às ideias matemáticas. Dizem que Pitágoras visitou Tales de Mileto quando tinha entre 18 e 20 anos. Nessa época, Tales já era um homem velho e, embora tenha impressionado Pitágoras, provavelmente não ensinou muito. Ele, no entanto, promoveu o interesse de Pitágoras pela matemática e pela astronomia e sugeriu que ele viajasse para o Egito. O aluno de Tales, Anaximandro, certamente estava interessado em geometria e cosmologia, e muitas de suas ideias influenciariam as opiniões do próprio

Pitágoras.

Por volta de 535 a.C., Pitágoras foi para o Egito, onde visitou muitos templos e participou de muitas discussões com os sacerdotes. A ida de Pitágoras para o Egito aconteceu alguns anos após Polícrates assumir o poder na cidade de Samos, há registros que digam que Pitágoras e Polícrates eram amigos, e que o mesmo viajou para o Egito com uma carta de apresentação feita por Polícrates, que na época tinha alianças com o Egito. Muitas das crenças de Pitágoras, que ele propagou na sociedade que ele montou na Itália, estão relacionadas aos costumes que ele se deparou no Egito, por exemplo, o sigilo dos sacerdotes, a sua recusa em usar qualquer coisa que tenha origem animal, e a luta pela pureza. Dizem que Pitágoras aprendeu a geometria dos egípcios, mas é bem provável que ele já tivesse aprendido geometria com os ensinamentos de Tales e Anaximandro.

Em 525 a.C., o rei da Pérsia, Cambises II, invadiu o Egito. Polícrates abandonou sua aliança com o Egito e enviou 40 navios para se juntarem à frota persa contra os egípcios. A resistência egípcia entrou em colapso depois que Cambises venceu a Batalha de Pelúcio, no Delta do Nilo, e conquistou Heliópolis e Mênfis (cidades). Pitágoras foi preso e levado para a Babilônia. Por volta de 520 a.C., Pitágoras deixou a Babilônia e voltou para Samos. Polícrates foi morto por volta de 522 a.C. e Cambises morreu no verão de 522 a.C. As mortes destes governantes podem ter sido um fator no regresso de Pitágoras a Samos que após a morte de Polícrates, e sobre o governo de Dario da Pérsia retornou a ilha. Pitágoras deixou Samos e foi para o sul da Itália por volta de 518 a.C., ele fundou uma escola de filosofia e religião em Crotona, no sul da Itália.

## 1.2 Escola Pitagórica

Pitágoras fundou a escola pitagórica na qual era uma sociedade com um círculo interno de seguidores, conhecidos como pitagóricos. Viviam permanentemente em sociedade (moravam todos juntos), não tinham posses pessoais e eram vegetarianos. Os pitagóricos foram ensinados por Pitágoras e seguiam as regras rígidas da escola. As crenças pregadas por Pitágoras eram: a matemática é a realidade na natureza; filosofia serve como elevação espiritual; a alma se une com o divino; os pitagóricos devem ser leais e manter sigilo absoluto. Segundo (EVES, 2011) os ensinamentos da escola eram inteiramente orais e como era costume da irmandade atribuir todas as descobertas ao reverenciado fundador, é difícil agora saber exatamente que descobertas matemáticas se devem ao próprio Pitágoras e quais se devem a outros membros da sociedade.

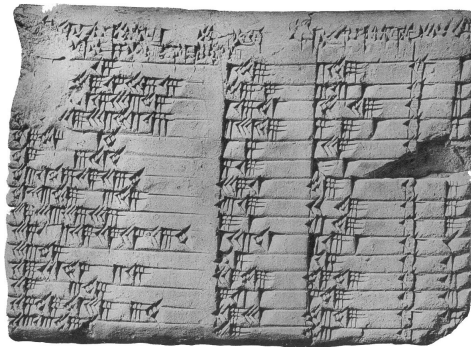
A escola desenvolveu muitos conceitos importantes, incluindo a relação entre os lados de um triângulo retângulo, que eventualmente se tornou o Teorema de Pitágoras. O Teorema, como conhecemos hoje, trata da relação fundamental entre os lados de um triângulo retângulo, onde o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Essa descoberta não apenas estabeleceu bases sólidas para a geometria, mas

também teve implicações práticas significativas em áreas como navegação, arquitetura e astronomia. O legado de Pitágoras e sua escola transcendeu sua própria era. A influência da Escola Pitagórica perdurou por séculos, influenciando matemáticos posteriores, como Euclides, que formalizou muitos dos resultados geométricos dos pitagóricos em sua obra "Elementos".

### 1.3 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras como conhecemos hoje já existia muito antes do próprio Pitágoras nascer, há registros na história de que o teorema já era usado há pelo menos 1000 anos a.C., pelos indianos, egípcios e babilônios. Mas só por volta de 1900-1600 a.C., foi que descobriram o teorema em uma pequena tábua babilônica, chamada Tábua de Plimpton 322, datada de 1700 a.C., a tábua contém uma tabela de ternas pitagóricas, ou seja, conjuntos de três números naturais que são medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Figura 1.2 – Tábua Plimpton 322



Fonte: <https://cojs.org/babylonian-tablet-plimpton-322-c-1800/>

Apesar de não ter sido descoberto por Pitágoras, o teorema leva seu nome pois ele foi o primeiro a demonstrar e formular a lei universal da relação dos lados de um triângulo retângulo. Embora já viesse sendo usado, a demonstração só foi feita por volta de 500 a.C.

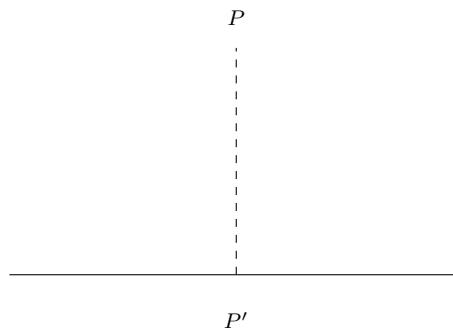
## 2 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Faremos aqui, uma breve abordagem de alguns assuntos necessários a uma exposição auto-suficiente do Teorema de Pitágoras. Obviamente, admitiremos que o leitor já conhece os axiomas básicos da teoria, bem como as noções de paralelismo, perpendicularismo, etc.

### 2.1 Relações métricas no triângulo retângulo

**Definição 2.1.** Chama-se **projeção ortogonal de um ponto  $P$  sobre uma reta** o pé da perpendicular conduzida desse ponto à reta.

Figura 2.1 –  $P'$  é a projeção ortogonal de  $P$

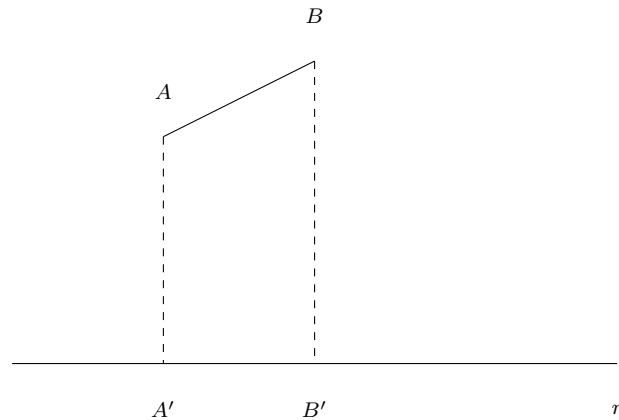


Fonte: autora

**Definição 2.2.** Denomina-se **projeção ortogonal de um segmento  $AB$  sobre uma reta** ao segmento de reta determinado pelas projeções dos extremos de  $AB$ .

Na figura abaixo,  $A'B'$  é a projeção do segmento  $AB$  sobre a reta  $r$ .

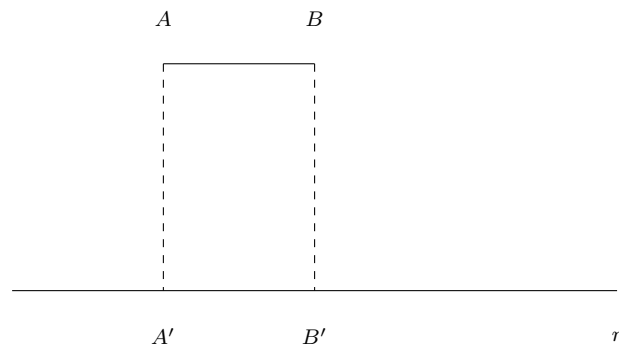
Figura 2.2 – o segmento  $A'B'$  é a projeção ortogonal do segmento  $AB$



Fonte: autora

Obviamente, quando o segmento é paralelo à reta, sua projeção  $A'B'$  tem o mesmo comprimento que  $AB$ , conforme a figura abaixo. Dizemos, nesse caso, que o segmento se projeta em *verdadeira grandeza*.

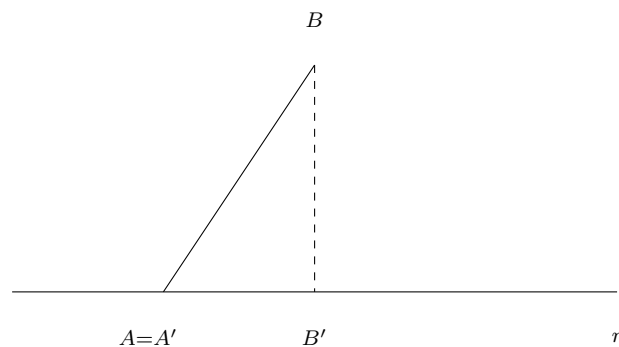
Figura 2.3 – o segmento  $A'B'$  tem o mesmo comprimento do que segmento  $AB$



Fonte: autora

Se o segmento  $AB$  não for paralelo à reta dada, então sua projeção terá comprimento menor que o do segmento  $AB$ . Isto pode ser visualizado na figura abaixo.

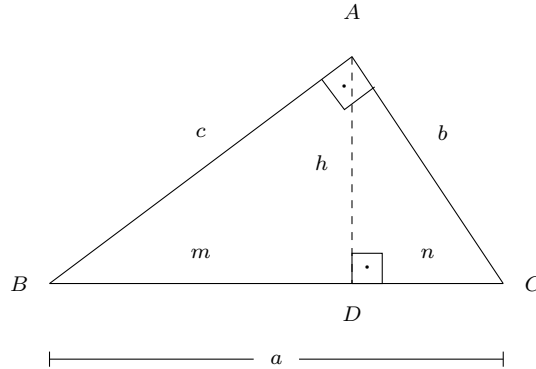
Figura 2.4 – o segmento  $A'B'$  tem comprimento menor do que segmento  $AB$



Fonte: autora

Nas próximas proposições usaremos o triângulo retângulo da figura abaixo como referência.

Figura 2.5 – Triângulo retângulo



Fonte: autora

**Proposição 2.3.** *A medida de cada cateto é a média geométrica entre as medidas de sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa, isto é*

$$b^2 = an \quad e \quad c^2 = am.$$

**Demonstração:** Os triângulos retângulos  $\triangle ACD$  e  $\triangle ABC$  são semelhantes visto que têm o ângulo  $\hat{C}$  em comum. Desse modo, seus lados homólogos são proporcionais, isto é

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n}.$$

Daí, segue que

$$b^2 = an.$$

Do mesmo modo, os triângulos retângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle ABC$  são semelhantes, pois têm o ângulo  $\hat{B}$  em comum. Assim, esses triângulos têm seus lados homólogos proporcionais, isto é

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m}.$$

Logo, temos

$$c^2 = am,$$

como queríamos demonstrar. ■

**Proposição 2.4.** *A medida da altura relativa à hipotenusa é igual à média geométrica das medidas dos dois segmentos que ela determina sobre a hipotenusa, ou seja*

$$h^2 = mn.$$

**Demonstração:** De fato, os triângulos retângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle ACD$  são semelhantes pois ambos são semelhantes ao triângulo  $\triangle ABC$  (propriedade transitiva da semelhança de triângulos). Desse modo, os lados homólogos são proporcionais, isto é

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}.$$

Daí, tem-se

$$h^2 = mn,$$

como queríamos demonstrar. ■

**Proposição 2.5.** *O produto da medidas da hipotenusa e da altura relativa à mesma é igual ao produto das medidas dos dois catetos, isto é*

$$bc = ah.$$

**Demonstração:** Pela proposição (2.3), temos

$$\begin{cases} b^2 = an, \\ c^2 = am. \end{cases}$$

Multiplicando-se, membro a membro essas duas relações, obtemos

$$b^2c^2 = a^2mn,$$

porém, pela proposição (2.4), tem-se  $h^2 = mn$  e, portanto, substituindo-se este valor na expressão acima, obtemos

$$b^2c^2 = a^2h^2$$

o que, após a extração da raiz quadrada, nos dá

$$bc = ah,$$

como queríamos demonstrar. ■

**Proposição 2.6 (Teorema de Pitágoras).** *O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos, ou seja*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

**Demonstração:** De fato, pela proposição (2.3), temos que

$$\begin{cases} b^2 = an, \\ c^2 = am. \end{cases}$$

Somando-se essas duas expressões, membro a membro, segue-se que

$$b^2 + c^2 = an + am = a(n + m).$$

Acontece que  $n + m = a$ . Assim, substituindo-se esse resultado na expressão acima, obtemos  $b^2 + c^2 = a^2$ , ou seja

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

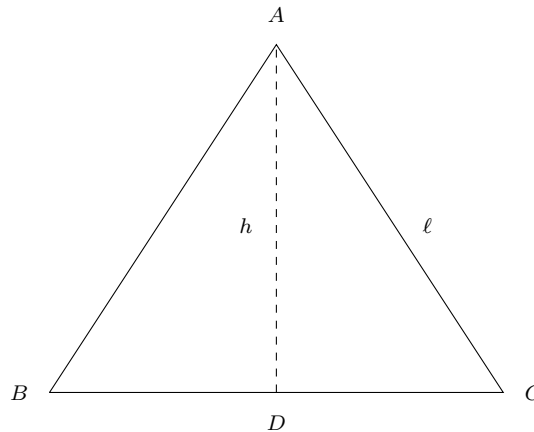
como queríamos demonstrar. ■

## 2.2 Algumas aplicações imediatas do Teorema de Pitágoras

Vejamos algumas aplicações imediatas do Teorema de Pitágoras.

**Exemplo 2.7 (Altura de um triângulo equilátero).** *Consideremos um triângulo equilátero  $\triangle ABC$  cujo lado mede  $\ell$  e altura  $h$  unidades de comprimento, conforme a figura abaixo*

Figura 2.6 – Altura de um triângulo equilátero



Fonte: autora

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $\triangle ABD$ , obtemos

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AD})^2 + (\overline{BD})^2.$$

Acontece que  $\overline{AD} = h$ ,  $\overline{AB} = \ell$  e  $\overline{BD} = \frac{\ell}{2}$ . Substituindo-se esses valores na expressão acima obtemos

$$\ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4},$$

isolando no primeiro membro o valor de  $h$ , obtemos

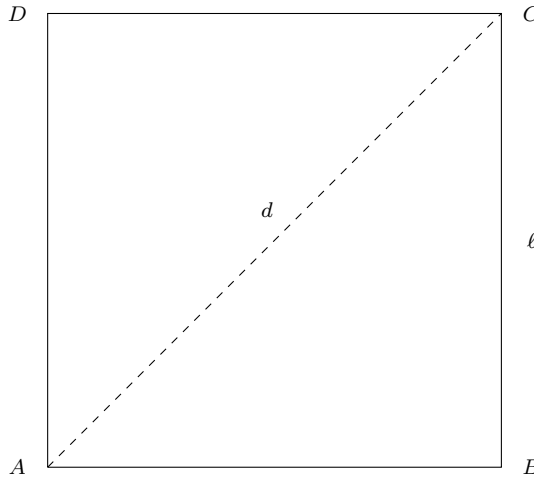
$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{4\ell^2 - \ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4},$$

extraíndo a raiz quadrada, obtemos

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

**Exemplo 2.8 (Diagonal de um quadrado).** Consideremos um quadrado  $ABCD$  de lado  $\ell$  e diagonal  $d$ , como na figura abaixo.

Figura 2.7 – Diagonal do quadrado



Fonte: autora

Temos que o triângulo  $\triangle ABC$  é retângulo em  $\hat{B}$ . Logo, aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2$$

e, daí, obtemos

$$d = \ell\sqrt{2}.$$

## 2.3 Triângulos Pitagóricos

**Definição 2.9.** Chamam-se **triângulos pitagóricos** aqueles triângulos retângulos cujas medidas dos lados são expressas por números inteiros positivos, que satisfaçam o Teorema de Pitágoras.

Assim, por exemplo, é um triângulo pitagórico o triângulo cujos lados são:

$$a = 10m$$

$$b = 6m$$

$$c = 8m$$

visto que,

$$10^2 = 6^2 + 8^2.$$

Entre os triângulos pitagóricos, o mais notável, conhecido desde os egípcios, é o que tem as medidas dos lados expressas pelos três números inteiros e consecutivos 3, 4 e 5. Por semelhança de triângulos, qualquer triângulo que tenha as medidas dos lados proporcionais

a 3, 4 e 5 são também pitagóricos. De um modo geral, os grupos de números pitagóricos podem ser encontrados pelas seguintes fórmulas empíricas:

$$2n, \quad n^2 - 1, \quad n^2 + 1 \quad \text{para } n > 1$$

e

$$n, \quad \frac{n^2-1}{2}, \quad \frac{n^2+1}{2} \quad \text{para } n > 1 \text{ e ímpar.}$$

**Exemplo 2.10.** Se  $b = 2k + 1, c = 2k^2 + 2k, a = 2k^2 + 2k + 1$ , onde  $k$  é um inteiro positivo, mostre que  $(b, c, a)$  é um terno pitagórico.

Veja que,  $a > b$  e  $a > c$ , pois

$$a = 2k^2 + 2k + 1 = 2k^2 + b > b$$

e

$$a = 2k^2 + 2k + 1 = c + 1 > c.$$

Então,

$$a^2 = 4k^2(k+1)^2 + 4k(k+1) + 1 = b^2 + c^2,$$

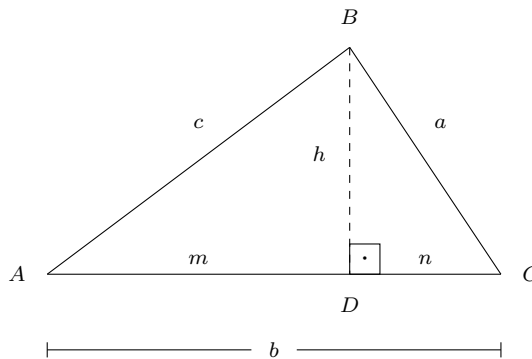
como queríamos.

## 3 RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO QUALQUER

### 3.1 Triângulos quaisquer

Nesse capítulo usaremos o Teorema de Pitágoras para obter algumas relações métricas em um triângulo qualquer. Portanto, assumiremos que estamos nos referindo à figura abaixo, quando nos referirmos a um triângulo acutângulo qualquer, ou seja, um triângulo cujo todos os ângulos internos são agudos.

Figura 3.1 – Triângulo qualquer



Fonte: autora

**Proposição 3.1.** *Num triângulo acutângulo qualquer (figura acima), o quadrado da medida de um lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma das medidas dos quadrados dos outros dois, menos o dobro do produto da medida de um desses dois lados pela medida da projeção do outro sobre ele, isto é*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm.$$

**Demonstração:** Considerando o triângulo qualquer da figura acima e aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $\triangle BCD$ , obtemos

$$a^2 = h^2 + n^2. \quad (3.1)$$

Da mesma forma, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $\triangle BAD$ , obtemos

$$c^2 = h^2 + m^2. \quad (3.2)$$

Isolando-se  $h^2$ , obtemos

$$h^2 = c^2 - m^2.$$

Substituindo-se esse último resultado em (3.1), obtemos

$$a^2 = c^2 - m^2 + n^2. \quad (3.3)$$

Agora, observemos que  $n = b - m$ , o que elevando ambos os membros ao quadrado nos leva a

$$n^2 = (b - m)^2 = b^2 - 2bm + m^2.$$

Substituindo-se este último resultado em (3.3), obtemos

$$a^2 = c^2 - m^2 + b^2 - 2bm + m^2,$$

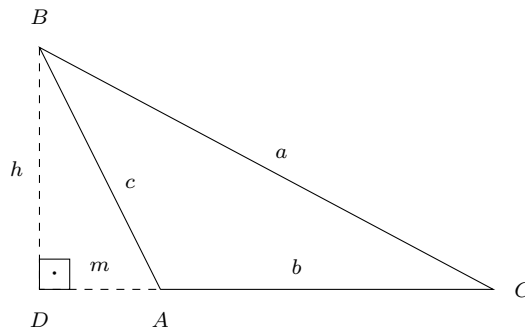
ou seja

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm,$$

como queríamos demonstrar. ■

O próximo resultado diz respeito a um triângulo obtusângulo  $\triangle ABC$ , ou seja, um triângulo que possui um ângulo obtuso, cuja figura mostramos abaixo.

Figura 3.2 – Triângulo obtusângulo



Fonte: autora

**Proposição 3.2.** *Num triângulo obtusângulo qualquer, o quadrado da medida do lado oposto ao ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois mais duas vezes o produto da medida de um destes dois lados pela projeção do outro sobre ele, ou seja,*

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm.$$

**Demonstração:** Consideremos um triângulo obtusângulo como o da figura acima. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $\triangle BCD$ , obtemos

$$a^2 = h^2 + (b + m)^2. \quad (3.4)$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo  $\triangle ABD$ , obtemos

$$c^2 = h^2 + m^2,$$

ou seja,

$$h^2 = c^2 - m^2.$$

Substituindo-se esse valor de  $h^2$  em (3), obtemos

$$a^2 = c^2 - m^2 + (b + m)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado na expressão entre parênteses, obtemos

$$a^2 = c^2 - m^2 + b^2 + 2bm + m^2,$$

de onde obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm,$$

como queríamos demonstrar. ■

## 3.2 Consequências das relações métricas

Os seguintes fatos são decorrências das relações métricas:

i) Se  $\hat{A} < 90^\circ$ : Nesse caso, tem-se  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$  e, daí, segue-se que

$$a^2 < b^2 + c^2.$$

ii) Se  $\hat{A} > 90^\circ$ : Neste caso  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$  e, portanto, tem-se

$$a^2 > b^2 + c^2.$$

iii) Se  $\hat{A} = 90^\circ$ : Neste caso, vale o teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Ora, como todas as hipóteses possíveis estão consideradas, podemos afirmar que as recíprocas dessas afirmações são também verdadeiras, ou seja:

i) Se  $a^2 < b^2 + c^2$ , então teremos  $\hat{A} < 90^\circ$ .

ii) Se  $a^2 > b^2 + c^2$ , então teremos  $\hat{A} > 90^\circ$ .

iii) Se  $a^2 = b^2 + c^2$ , teremos que  $\hat{A} = 90^\circ$ .

Vamos reconhecer a natureza do triângulo cujos lados medem 6m, 10m e 15m. Ora, visto que

$$15^2 > 6^2 + 10^2,$$

segue que o triângulo em questão é obtusângulo.

**Exemplo 3.3.** Iremos determinar para quais valores de  $x$  um triângulo com medidas de 3, 4 e  $x$  é obtusângulo.

Notemos que, para a existência do triângulo devemos ter  $1 < x < 7$ . Se o triângulo é obtusângulo e  $x$  é o maior lado, devemos ter  $x^2 > 3^2 + 4^2 \implies x > 5$ . Se o lado que mede 4 é o maior, devemos ter  $4^2 > x^2 + 3^2 \implies x < \sqrt{7}$ . Portanto, esse triângulo é obtusângulo para  $1 < x < \sqrt{7}$  ou  $5 < x < \sqrt{7}$ .

**Proposição 3.4** (Lei dos Cossenos). *O quadrado da medida de um lado de um triângulo (qualquer) é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos o dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formado, ou seja,*

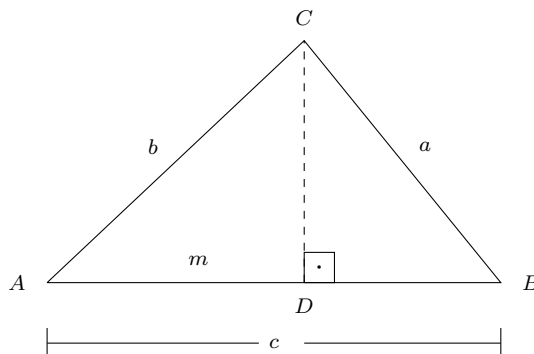
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A};$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\hat{B};$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\hat{C}.$$

**Demonstração:** Suponhamos, inicialmente, que o triângulo em questão seja acutângulo, como na figura abaixo, e  $\hat{A}$  o ângulo que usaremos para provar a primeira relação,

Figura 3.3 – Triângulo qualquer



Fonte: autora

nesse caso, pela proposição (3.1), tem-se

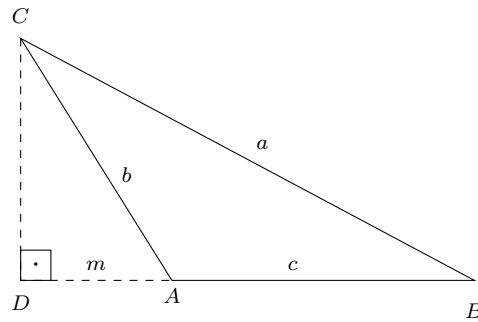
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm. \quad (3.5)$$

Visto que  $m = bcos\hat{A}$ , segue que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\hat{A}.$$

Por outro lado, se o triângulo qualquer for obtusângulo, como na figura abaixo,

Figura 3.4 – Triângulo obtusângulo qualquer



Fonte: autora

então a medida do lado oposto ao ângulo obtuso  $\hat{A}$  satisfaz a condição

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm. \quad (3.6)$$

Visto que, no triângulo retângulo  $ACD$ , temos:

$$\cos(180^\circ - \hat{A}) = \frac{m}{b}.$$

E como,

$$\cos \hat{A} = -\cos(180^\circ - \hat{A}),$$

ou seja,

$$\cos(180^\circ - \hat{A}) = -\cos \hat{A}.$$

Logo,

$$-\cos \hat{A} = \frac{m}{b} \implies m = -b \cdot \cos \hat{A}$$

Substituindo essa última relação em (3.6), obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A},$$

como queríamos demonstrar.

De modo análogo se mostra que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

e

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}.$$

■

Vejamos que, ao considerarmos um triângulo  $\triangle ABC$  retângulo em  $\hat{A}$ . Note que, como  $\hat{A}$  é o ângulo reto e  $\cos 90^\circ = 0$ , temos,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ,$$

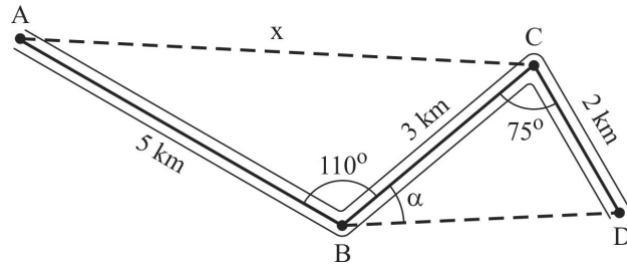
portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

logo, em relação ao ângulo reto, a lei dos cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras.

**Exemplo 3.5** (Portal da Matemática). *Vejamos que a figura abaixo mostra uma estrada que passa pelos pontos A, B, C e D. Iremos calcular a distância x entre A e C, bem como a distância entre B e D como mostra a figura, a fim de sabermos qual a menor distância entre A e D.*

Figura 3.5 – Exemplo de aplicação da lei dos cossenos



Fonte: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/>

*Fazendo a aplicação direta da lei dos cossenos no  $\triangle ABC$ , obtemos o seguinte resultado,*

$$\begin{aligned} x^2 &= 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos(\hat{A}) \\ &= 25 + 9 - 30 \cdot \cos 110^\circ \\ &= 44,3 \end{aligned}$$

*o que implica,*

$$x = 6,65 \text{ km}$$

*Usando novamente a lei dos cossenos, agora no  $\triangle BCD$ , seja  $\overline{BD} = y$ , logo:*

$$\begin{aligned} y^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 75^\circ \\ &= 4 + 9 - 12 \cdot \cos 75^\circ \\ &= 9,89 \end{aligned}$$

*o que implica,*

$$y = 3,14 \text{ km}$$

*Com  $x = 6,65 \text{ km}$  e  $\overline{BD} = 3,14 \text{ km}$  podemos calcular a distância, veja que indo pelas estradas  $\overline{AB}$  e  $\overline{BD}$ , temos  $5 + 3,14 = 8,14 \text{ km}$ , pelas estradas  $\overline{AC}$  e  $\overline{CD}$ , temos  $6,65 + 2 = 8,65 \text{ km}$ . Portanto, concluímos que a menor distância a ser percorrida pelo motorista é indo pelas estradas  $\overline{AB}$  e  $\overline{BD}$ .*

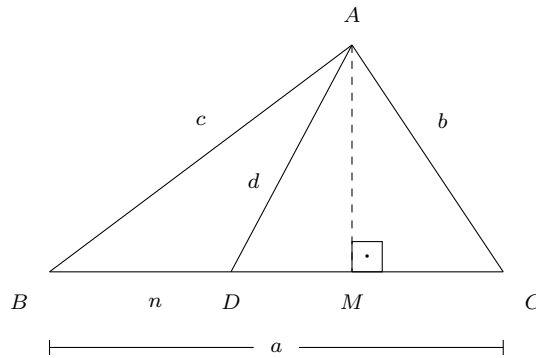
## 4 OUTRAS RELAÇÕES MÉTRICAS

### 4.1 Relação de Stewart

**Definição 4.1.** Denomina-se **ceviana** a toda reta do plano que passa por um de seus vértices. Usualmente emprega-se também com essa acepção o **segmento de ceviana** limitado por um dos vértices do triângulo e um ponto do lado oposto e seu prolongamento.

Consideremos um triângulo  $\triangle ABC$ , de natureza arbitrária, como na figura abaixo.

Figura 4.1 – Triângulo acutângulo qualquer



Fonte: autora

Vale a seguinte proposição:

**Proposição 4.2** (Relação de Stewart). Se  $D$  é um ponto interior ao segmento  $\overline{BC}$  de um triângulo  $\triangle ABC$  arbitrário, conforme a figura acima, então

$$b^2 \cdot n + c^2 \cdot m - d^2 \cdot a = a \cdot n \cdot m.$$

**Demonstração:** Aplicando a proposição (3.1) ao triângulo  $\triangle ACD$  e a proposição (3.2) ao triângulo  $\triangle ABD$ , obteremos, respectivamente

$$b^2 = d^2 + m^2 - 2 \cdot m \cdot \overline{DM} \quad (4.1)$$

e

$$c^2 = d^2 + n^2 + 2 \cdot n \cdot \overline{DM}. \quad (4.2)$$

Agora, multiplicando-se a equação (4.1) por  $n$  e a equação (4.2) por  $m$ , obtemos

$$\begin{cases} b^2 \cdot n = d^2 \cdot n + m^2 \cdot n - 2 \cdot n \cdot m \cdot \overline{DM}, \\ c^2 \cdot m = d^2 \cdot m + n^2 \cdot m + 2 \cdot n \cdot m \cdot \overline{DM}. \end{cases}$$

Somando, membro a membro, esses dois últimos resultados, obtemos

$$b^2 \cdot n + c^2 \cdot m = d^2 \cdot n + d^2 \cdot m + m^2 \cdot n + n^2 \cdot m.$$

Fatorando-se o segundo membro, obtemos

$$b^2 \cdot n + c^2 \cdot m = d^2 \cdot (n + m) + m \cdot n(n + m).$$

Visto que

$$a = n + m,$$

então, substituindo-se esse valor na relação anterior, obtemos

$$b^2 \cdot n + c^2 \cdot m = d^2 \cdot a + m \cdot n \cdot a$$

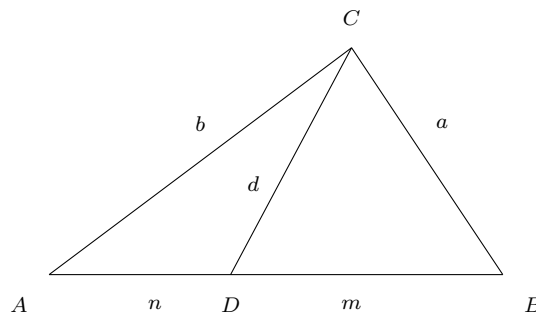
ou

$$b^2 \cdot n + c^2 \cdot m - d^2 \cdot a = a \cdot n \cdot m$$

como queríamos demonstrar. ■

**Exemplo 4.3** (Portal da Matemática). Na figura, a medida do segmento  $CD$ , sendo  $AD = 4$ ,  $BD = 6$ ,  $BC = 7$  e  $AC = 8$ , é:

Figura 4.2 – Triângulo acutângulo



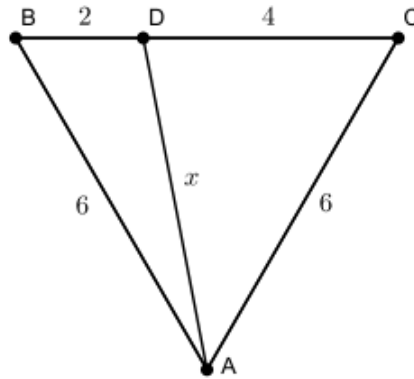
Fonte: autora

Aplicando a relação de Stewart no triângulo  $\triangle ABC$ , temos

$$\begin{aligned} b^2 \cdot m + a^2 \cdot n &= d^2 \cdot c + c \cdot m \cdot n \\ 8^2 \cdot 6 + 7^2 \cdot 4 &= d^2 \cdot 10 + 10 \cdot 6 \cdot 4 \\ 384 + 196 &= 10d^2 + 240 \\ 10d^2 &= 340 \\ d &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

**Exemplo 4.4** (Portal da Matemática). Determine a medida  $\overline{AD}$  de um triângulo equilátero  $\triangle ABC$ , cuja medida do lado é 6cm, sendo  $D$  um ponto do lado  $\triangle BC$ , tal que  $\overline{BD} = 2\text{cm}$ .

Figura 4.3 – Triângulo acutângulo



Fonte: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/>

Aplicando a relação de Stewart, com  $\overline{AD} = x$ , em centímetros, chegamos a:

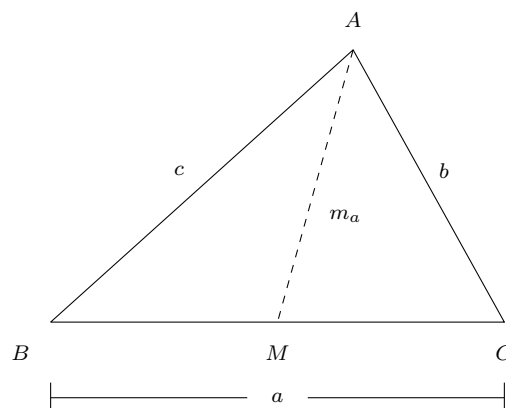
$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} &= \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BC} \\ 6^2 \cdot 4 + 6^2 \cdot 2 &= x^2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 \cdot 6 \\ 144 + 72 &= 6x^2 + 48 \\ 6x^2 &= 168 \\ x &= 2\sqrt{7}cm.\end{aligned}$$

## 4.2 Cálculo de medianas em triângulos quaisquer

É comum dizermos que as principais cevianas de um triângulo são: medianas, alturas e bissetrizes internas e externas.

Agora consideremos o triângulo qualquer da figura abaixo:

Figura 4.4 – Mediana de um triângulo



Fonte: autora

Lembremos que a *mediana* relativa a um lado de um triângulo é um segmento que

liga um vértice ao ponto médio do lado oposto. Assim, na figura acima,  $m_a$  é a medida da mediana relativa ao lado de comprimento  $a$ . Desejamos calcular a medida  $m_a$ . Aplicando a relação de Stewart a esse triângulo, obtemos

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{CM} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BM} - \overline{AM}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BM} \cdot \overline{CM}. \quad (4.3)$$

Ocorre que:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= c, \\ \overline{AC} &= b, \\ \overline{BM} &= \overline{CM} = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Substituindo-se esses valores na expressão (4.3), obtemos

$$c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} - m_a^2 \cdot a = a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}.$$

Dividindo ambos os membros por  $a$ , obtemos

$$\frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - m_a^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Isolando o valor da mediana, tem-se

$$m_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$

ou seja,

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4},$$

ou ainda,

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2},$$

que é o valor da mediana desejada.

Por meio de um raciocínio análogo, segue as medianas relativas aos lados “b” e “c” são dadas, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$m_b = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2}$$

e

$$m_c = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2}.$$

**Exemplo 4.5.** Dado um triângulo de lados  $a = 5$ ,  $b = 7$  e  $c = 8$ , calcular as três medianas:  $m_a$ ,  $m_b$  e  $m_c$ :

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2} = \frac{\sqrt{2(7^2 + 8^2) - 5^2}}{2} = \frac{\sqrt{2(49 + 64) - 25}}{2} = \frac{\sqrt{201}}{2};$$

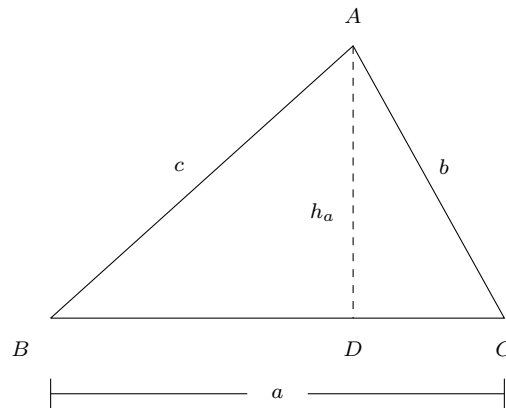
$$m_b = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2} = \frac{\sqrt{2(5^2 + 8^2) - 7^2}}{2} = \frac{\sqrt{2(25 + 64) - 49}}{2} = \frac{\sqrt{129}}{2};$$

$$m_c = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2} = \frac{\sqrt{2(5^2 + 7^2) - 8^2}}{2} = \frac{\sqrt{2(25 + 49) - 64}}{2} = \frac{\sqrt{84}}{2}.$$

### 4.3 Cálculo das alturas de um triângulo qualquer

Consideremos um triângulo  $\triangle ABC$ , conforme a figura abaixo, e seja  $h_a$  a altura relativa ao lado de medida  $a$ . Lembremos que, por definição, a altura de um triângulo relativa a um de seus lados é o segmento perpendicular que vai desse lado até o vértice oposto a esse lado.

Figura 4.5 – Altura de um triângulo



Fonte: autora

Aplicando, a esse triângulo, a relação de Stewart, obtemos

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} - \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CD},$$

ou seja

$$c^2 \cdot \overline{CD} + b^2 \cdot \overline{BD} - h_a^2 \cdot a = a \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CD}. \quad (4.4)$$

Acontece que

$$\overline{CD} = a - \overline{BD}.$$

Substituindo esse resultado na equação (4.4), obtemos

$$a c^2 - c^2 \cdot \overline{BD} + b^2 \cdot \overline{BD} - h_a^2 \cdot a = a \cdot \overline{BD} \cdot (a - \overline{BD}).$$

Eliminando os parênteses na expressão acima, obtemos

$$a c^2 - c^2 \cdot \overline{BD} + b^2 \cdot \overline{BD} - h_a^2 \cdot a = a^2 \cdot \overline{BD} - a \cdot \overline{BD}^2.$$

Escrevendo a expressão acima na forma de um polinômio ordenado na variável  $\overline{BD}$ , obtemos

$$a \cdot \overline{BD}^2 + b^2 \cdot \overline{BD} - c^2 \cdot \overline{BD} - a^2 \cdot \overline{BD} + ac^2 - h_a^2 \cdot a = 0,$$

ou ainda

$$a \cdot \overline{BD}^2 + (b^2 - c^2 - a^2)\overline{BD} + a(c^2 - h_a^2) = 0.$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $\triangle ABD$ , obtemos que

$$c^2 - h_a^2 = \overline{BD}^2. \quad (4.5)$$

Substituindo esse valor na expressão anterior, segue que

$$a \cdot \overline{BD}^2 + (b^2 - c^2 - a^2)\overline{BD} + a\overline{BD}^2 = 0,$$

ou seja

$$2a\overline{BD}^2 + (b^2 - c^2 - a^2)\overline{BD} = 0. \quad (4.6)$$

A expressão acima é uma equação do segundo grau em  $\overline{BD}$ , a qual admite uma *raiz nula* e outra *não-nula*.

Consideraremos os dois casos separadamente.

**Primeiro caso:**  $\overline{BD} = 0$ .

Se  $\overline{BD} = 0$  então, pela expressão (4.5), teremos

$$c = h_a.$$

Nesse caso, o triângulo  $\triangle ABC$  será retângulo e a altura será um dos catetos.

**Segundo caso:**  $\overline{BD} \neq 0$ .

Se  $\overline{BD} \neq 0$ , então segue-se que

$$2a \cdot \overline{BD} + b^2 - c^2 - a^2 = 0$$

e, assim,

$$\overline{BD} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \quad (4.7)$$

Mas, pela expressão (4.5), teremos

$$\overline{BD} = \sqrt{c^2 - h_a^2}. \quad (4.8)$$

Igualando os resultados em (4.7) e (4.8), vem que

$$\sqrt{c^2 - h_a^2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a},$$

ou ainda,

$$c^2 - h_a^2 = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

e, daí,

$$h_a^2 = c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}.$$

Assim,

$$h_a^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}.$$

Fatorando a diferença de quadrados do numerador, obtemos

$$h_a^2 = \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2}.$$

Essa última igualdade é equivalente a

$$h_a^2 = \frac{[(a^2 + 2ac + c^2) - b^2][b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)]}{4a^2},$$

ou ainda

$$h_a^2 = \frac{[(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2]}{4a^2}.$$

Novamente, fatorando os denominadores por diferença de quadrados, obtemos

$$h_a^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)}{4a^2}. \quad (4.9)$$

Agora, consideremos a expressão

$$a + b + c = 2p.$$

- i) Subtraindo  $2a$  dessa expressão, obtemos:  $b + c - a = 2(p - a)$ ;
- ii) Subtraindo  $2b$  da mesma expressão, obtemos:  $a + c - b = 2(p - b)$ ;
- iii) Subtraindo  $2c$  da mesma expressão, obtemos:  $a + b - c = 2(p - c)$ .

Substituindo-se esse valores em (4.9), obtemos

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)},$$

que é o valor da altura  $h_a$  desejada.

Por um raciocínio análogo as alturas  $h_b$  e  $h_c$  relativas aos lados  $b$  e  $c$ , respectivamente são dadas por:

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)},$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

**Exemplo 4.6.** Dado um triângulo de lados  $a = 5, b = 7$  e  $c = 8$ , calcular as três alturas:  $h_a, h_b$  e  $h_c$ .

Sabemos que,

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2p \\ 5 + 7 + 8 &= 20 \\ 2p &= 20 \Rightarrow p = 10 \end{aligned}$$

E também,

$$(p - a) = 5; (p - b) = 3; (p - c) = 2.$$

Logo,

$$\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} = 10\sqrt{3}.$$

E portanto,

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \frac{2}{5} 10\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow h_a = 4\sqrt{3};$$

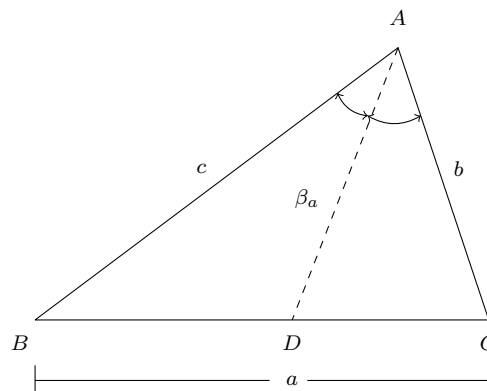
$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \frac{2}{7} 10\sqrt{3} = \frac{20\sqrt{3}}{7} \Rightarrow h_b = \frac{20\sqrt{3}}{7};$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \frac{2}{8} 10\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h_c = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

## 4.4 Cálculo das bissetrizes internas de um triângulo qualquer

Lembremos que a bissetriz de um ângulo é um segmento de reta que o divide em dois ângulos congruentes. Nessa seção estaremos interessados em determinar as medidas das bissetrizes internas de um triângulo. Sendo assim, consideremos um triângulo qualquer  $\triangle ABC$  e seja  $\overline{AD}$  a bissetriz interna relativa ao ângulo  $\hat{A}$ , conforme a figura abaixo.

Figura 4.6 – Bissetriz interna de um triângulo



Fonte: autora

Aplicando a relação de Stewart ao triângulo  $\triangle ABC$ , obtemos

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} - \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CD}$$

ou

$$c^2 \cdot \overline{CD} + b^2 \cdot \overline{BD} - \beta_a^2 \cdot a = a \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CD}. \quad (4.10)$$

Para eliminar  $\overline{BD}$  e  $\overline{CD}$  desta última relação, empregamos o teorema da bissetriz interna, segundo o qual

$$\frac{\overline{BD}}{c} = \frac{\overline{CD}}{b}.$$

Aplicando propriedades de proporções, obtemos

$$\frac{\overline{BD} + \overline{CD}}{b + c} = \frac{\overline{BD}}{c} = \frac{\overline{CD}}{b}$$

ou seja

$$\frac{a}{b + c} = \frac{\overline{BD}}{c} = \frac{\overline{CD}}{b}.$$

Da igualdade da primeira razão e da segunda, e da primeira com a terceira, segue que

$$\overline{BD} = \frac{ac}{b + c}$$

e

$$\overline{CD} = \frac{ab}{b + c}.$$

Substituindo-se estes valores de  $\overline{BD}$  e  $\overline{CD}$  na relação (4.10), obtemos

$$\frac{abc^2}{b + c} + \frac{ab^2c}{b + c} - \overline{AD}^2 \cdot a = \frac{a^3bc}{(b + c)^2}.$$

Dividindo ambos os membros da expressão acima por “ $a$ ”, obtemos

$$\frac{bc^2}{b + c} + \frac{b^2c}{b + c} - \overline{AD}^2 = \frac{a^2bc}{(b + c)^2},$$

ou seja,

$$\overline{AD}^2 = \frac{bc^2}{b + c} + \frac{b^2c}{b + c} - \frac{a^2bc}{(b + c)^2},$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \frac{bc^2 + b^2c}{b + c} - \frac{a^2bc}{(b + c)^2} \\ &= \frac{bc(b + c)}{b + c} - \frac{a^2bc}{(b + c)^2} \\ &= bc - \frac{a^2bc}{(b + c)^2} \\ &= bc \left[ 1 - \frac{a^2}{(b + c)^2} \right] \\ &= bc \left[ \frac{(b + c - a)(b + c + a)}{(b + c)^2} \right]. \end{aligned}$$

Ocorre que,

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2p \\ b + c - a &= 2(p - a). \end{aligned}$$

Substituindo-se estes valores na expressão anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= bc \left[ \frac{4p(p-a)}{(b+c)^2} \right], \\ &= \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2} \end{aligned}$$

Extraindo-se a raiz quadrada em ambos os membros e designando a bissetriz  $\overline{AD}$  por  $\beta_a$ , segue-se que,

$$\beta_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)},$$

por um raciocínio análogo, segue que as medidas das bissetrizes internas relativas aos ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  são, respectivamente:

$$\beta_b = \frac{2}{a+c} \sqrt{acp(p-b)}.$$

e

$$\beta_c = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}.$$

**Exemplo 4.7.** Dado um triângulo de lados  $a = 5, b = 7$  e  $c = 8$ , calcular as três bissetrizes internas:  $\beta_a, \beta_b$  e  $\beta_c$ .

Do exemplo anterior, temos que  $p = 10$ . Logo,

$$\beta_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)} = \frac{2}{15} \sqrt{7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 5} = \frac{8\sqrt{7}}{3};$$

$$\beta_b = \frac{2}{a+c} \sqrt{acp(p-b)} = \frac{2}{13} \sqrt{5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 3} = \frac{40\sqrt{3}}{13};$$

$$\beta_c = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)} = \frac{2}{12} \sqrt{5 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 2} = \frac{5\sqrt{7}}{3}.$$

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, fizemos um resumo sobre a vida e trajetória de Pitágoras de Samos, para isso foram feitas diversas pesquisas bibliográficas, nas quais estão listadas nas referências. Começamos revisando as origens da geometria grega antiga e enfatizando a contribuição significativa de Pitágoras e seus discípulos para o desenvolvimento deste Teorema. A vida do matemático grego e suas principais obras encontram-se em meio a lendas e mitos, e apesar de não sabermos com certeza o que é real e o que é fictício, Pitágoras se tornou um dos matemáticos mais conhecidos da história, bem como o seu teorema o mais demonstrado, e um dos mais utilizados e estudados dentro da geometria.

A sua intemporalidade e relevância continuam a influenciar o desenvolvimento da ciência e da tecnologia e continuam a ser uma parte central do conhecimento matemático. Esta monografia, portanto, não só tenta apresentar uma abordagem histórica do Teorema de Pitágoras, mas também enfatizar a sua importância e o seu papel contínuo na promoção da compreensão e do avanço em todas as áreas do conhecimento.

## Referências

- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019. Nenhuma citação no texto.
- CAVALCANTI, L.; ARIMATÉA, C. de. Demonstrações e generalizações do teorema de pitágoras. *Práxis & Saber*, v. 2, n. 3, p. 103–118, 2011. Nenhuma citação no texto.
- CRUZ, A. M. Uma agordagem didática para o teorema de pitágoras. 2015. Nenhuma citação no texto.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana*. São Paulo: Atual, 1993. Nenhuma citação no texto.
- EVES, H. Introdução à história da matemática. campinas: Editora unicamp. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 12.
- GIOVANNI, J. R.; BONJORNIO, J. R.; JUNIOR, J. R. G. *Matemática: geometria e trigonometria*. São Paulo: FTD, 2020. Nenhuma citação no texto.
- MARQUES, S. C. A descoberta do teorema de pitágoras/sofia cardoso marques. *São Paulo: Livraria da física*, 2011. Nenhuma citação no texto.
- NETO, A. C. M. Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana. *Rio de Janeiro: SBM*, v. 2, 2012. Nenhuma citação no texto.
- RIBEIRO, V. V. S. M. Revisitando o teorema de pitágoras. Universidade Federal de Viçosa, 2013. Nenhuma citação no texto.
- ROQUE, T. *História da matemática*. Rio de Janeiro: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012. Nenhuma citação no texto.
- SILVA, D. E. B. O teorema de pitágoras: abordagem no cotidiano da educação matemática e suas diversas demonstrações. 2014. Nenhuma citação no texto.