



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia – CCET

Curso de Matemática – Licenciatura

Sergielly Monique Rego Ferreira

Alguns resultados da Análise Vetorial: Teoremas de Green, Gauss e Stokes

São Luís - MA

2022

Sergielly Monique Rego Ferreira

Alguns resultados da Análise Vetorial: Teoremas de Green, Gauss e Stokes

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia – CCET

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa

São Luís - MA

2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Ferreira, Sergielly Monique Rêgo.

Alguns resultados da Análise Vetorial : Teoremas de Green, Gauss e Stokes / Sergielly Monique Rêgo Ferreira. - 2022.

78 p.

Orientador(a): José Santana Campos Costa.

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática,
Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2022.

1. Cálculo. 2. Campos vetoriais. 3. Formas diferenciais. 4. Integrais. 5. Teorema de Stokes. I. Costa, José Santana Campos. II. Título.

Sergielly Monique Rego Ferreira

Alguns resultados da Análise Vetorial: Teoremas de Green, Gauss e Stokes

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 28/07/2022:

Prof. Dr. José Santana Campos Costa
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho
DEMAT/UFMA
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Ermerson Rocha Araújo
DEMAT/UFMA
Segundo Examinador

Aos meus pais, meu noivo, irmão e amigos pelos incentivos, apoio e conversas durante esse tempo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar saúde, força e capacidade para superar todas as dificuldades encontradas até hoje.

Agradeço aos meus pais, Sergionaldo Ferreira e Raquel Ferreira, que sempre me incentivaram a não desistir dos meus sonhos e me apoiaram em todas as minhas decisões.

Ao meu futuro marido, Abraão Guimarães, que esteve ao meu lado nas horas mais difíceis e mais felizes, oferecendo todo suporte e me incentivando continuamente à finalização desta monografia.

Ao meu irmão, David Lucas e demais familiares, pois sempre estiveram presentes, com palavras de motivação, superação, etc., por todo incentivo ao longo do curso.

Agradeço a todos os meus professores da graduação, pois eles foram muito importantes nesse processo de aquisição de conhecimento.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. José Santana, pela paciência, confiança e por sempre me incentivar, mesmo com as minhas crises de ansiedade, a concluir este trabalho.

Agradeço a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a produção deste trabalho.

“A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens”.

(René Descartes)

Resumo

Este trabalho consiste em um estudo sobre os Teoremas de Green, Gauss e Stokes, sendo este último apresentado tanto no $\mathbb{R}^3$ quanto em generalização para variedades, elaborado a partir de leituras e análises, com o objetivo de desenvolver, de forma clara e prática, o embasamento teórico matemático no que se refere aos campos vetoriais. A pesquisa insere-se no campo da Análise Vetorial e a metodologia deve-se à revisão bibliográfica. Sendo, a monografia, dividida em vários capítulos, onde os primeiros e seus subtópicos abordam conceitos que auxiliam o desenvolvimento da mesma, como integrais de linha e operadores vetoriais, posteriormente, campos conservativos, integrais de superfície, a demonstração dos três teoremas supracitados, e formas diferenciais e variedades, culminando no Teorema de Stokes generalizado.

Palavras-chave: cálculo; campos vetoriais; integrais; teorema de Stokes; formas diferenciais.

Abstract

This work consists of a study about Green's, Gauss's and Stokes' Theorems, the latter being presented both in the $\mathbb{R}^3$ and in generalization for manifolds, elaborated from readings and analysis, with the objective of developing, in a clear and practical way, the theoretical mathematical basis regarding vector fields. The research is in the field of Vector Analysis and the methodology is based on bibliographic review. The monograph is divided into several chapters, where the first and its subtopics address concepts that help its development, such as line integrals and vector operators, later, conservative fields, surface integrals, the demonstration of the three theorems mentioned above, and differential forms and manifolds, culminating in the generalized Stokes' Theorem.

Keywords: calculation; vector fields; integrals; Stokes' theorem; differential forms.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Curva hélice	15
Figura 2 – Curva com cúspide	16
Figura 3 – Ponto múltiplo de uma curva simples	17
Figura 4 – Curva fechada e simples	17
Figura 5 – Curva fechada não simples	18
Figura 6 – Aproximação área debaixo da curva	19
Figura 7 – Aproximação por poligonais	21
Figura 8 – Campo Radial	23
Figura 9 – Campo Velocidade	24
Figura 10 – Decomposição da curva	25
Figura 11 – Interpretação da Integral de Linha de função positiva como um área	27
Figura 12 – Círculo unitário	28
Figura 13 – Curva suave por partes	28
Figura 14 – Hélice circular	29
Figura 15 – Aproximação por linha poligonal	31
Figura 16 – Vetor normal ao plano tangente de uma superfície.	34
Figura 17 – Curva C fechada com duas curvas ligando os pontos A e B	39
Figura 18 – Segmento de reta que liga os pontos	40
Figura 19 – Normal gerada por dois vetores tangentes não nulos	44
Figura 20 – Aproximação para área de superfícies	46
Figura 21 – Orientação para cima	48
Figura 22 – Orientação para baixo	48
Figura 23 – Regra da mão direita	49
Figura 24 – Superfície cilíndrica orientada	50
Figura 25 – Faixa de Möbius	50
Figura 26 – Garrafa de Klein	51
Figura 27 – Ilustração da orientação da fronteira ∂D e da região limitada D	54
Figura 28 – Região limitada por duas curvas fechadas	55
Figura 29 – Região com pontos angulosos	56
Figura 30 – Região tipo I e tipo II	56
Figura 31 – Fronteira da região D com curvas ∂D_k por partes.	58
Figura 32 – Região limitada entre duas curvas	59
Figura 33 – Região ao aplicar o Teorema de Green	59
Figura 34 – Duas esferas com orientações da curva e vetor normal.	64
Figura 35 – Região limitada por superfícies	66
Figura 36 – Variedades diferenciáveis	74

Sumário

	INTRODUÇÃO	12
1	ESTUDO DE CURVAS	14
1.1	Curvas	14
1.2	Soma de Riemann	18
1.3	Comprimento de arco	20
2	INTEGRAIS DE LINHA	22
2.1	Campos Vetoriais	22
2.2	Integral de Linha	24
2.2.1	Integral de Linha de Campo Escalar	24
2.2.2	Propriedades	29
2.3	Integral de Linha de Campos Vetoriais	30
3	OPERADORES VETORIAIS	33
3.1	Nabla	33
3.2	Gradiente	33
3.3	Divergente	34
3.4	Rotacional	35
3.4.1	Rotacional de um Campo Vetorial no plano	35
3.4.2	Rotacional de um Campo Vetorial no espaço $\mathbb{R}^3$	35
3.5	Laplaciano	36
4	CAMPOS CONSERVATIVOS	37
4.1	Construção de uma função potencial usando integrais indefinidas	38
5	INTEGRAIS DE SUPERFÍCIES	42
5.1	Superfícies no $\mathbb{R}^3$	42
5.1.1	Superfície orientável	47
5.2	Integral de Superfície de Campo Escalar	50
5.3	Integral de Superfície de Campo Vetorial	51
6	OS CLÁSSICOS TEOREMAS DA ANÁLISE VETORIAL	54
6.1	Teorema de Green	54
6.1.1	Teorema de Green para regiões com "buracos".	58
6.1.2	Interpretação vetorial do Teorema de Green	60
6.2	Teorema de Stokes no espaço	61

6.2.1	Consequência sobre o Teorema de Stokes	63
6.3	Teorema da Divergência ou de Gauss	64
7	TEOREMA MAIS GERAL	68
7.1	Introdução a Formas Diferenciais	68
7.2	Formas diferenciais	69
7.2.1	1-forma diferencial	69
7.2.2	2-formas	71
7.2.3	k-formas	72
7.3	Derivada exterior (Generalização da derivada)	72
7.4	Variedades Diferenciáveis	73
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
	REFERÊNCIAS	78

Introdução

O início do estudo do Cálculo Vetorial se estabelece por volta de 1800 e traz consigo os resultados encontrados por diversos matemáticos importantes ao longo da história. A partir do desenvolvimento da teoria eletromagnética no século XIX, o conceito de campo surgiu e com isso, a necessidade de uma Análise Vetorial para lidar com as várias grandezas de maneira mais simples (CROWE, 1994).

A partir de então, matemáticos se reuniram para discutir possíveis formas de retratar grandezas vetoriais no espaço tridimensional. Mas, foram Willard Gibbs e Oliver Heaviside (HEAVISIDE, 1893) que defendiam a hipótese de que a melhor ferramenta era a Análise Vetorial. Eles receberam influência de James Clerk Maxwell, que usou o cálculo de coordenadas e quatérnios em sua publicação, *Treatise on electricity and magnetism*, de 1873 (MAXWELL, 1873). Maxwell teve um papel fundamental no desenvolvimento do cálculo vetorial, sendo o responsável por apresentar o símbolo ∇ , para gradiente, bem como os nomes divergente e rotacional, para serem utilizados, além da interpretação atual dessas operações vetoriais.

O Cálculo Vetorial – conteúdo base deste trabalho – é uma área da matemática extensivamente interdisciplinar, com aplicações na Física, Engenharia, Geometria Diferencial, entre outros. Como é construída a partir de vetores e grandezas vetoriais, possui uma ampla aplicação à vida cotidiana, tal como velocidade e aceleração, grandezas físicas que nos cercam. Daí, dá-se a importância do presente trabalho, haja visto que, vários cursos das ciências exatas e natureza o tem como base, enfatizando assim, a necessidade de domínio das relações que envolvem essas grandezas e suas implicações.

Além destas lacunas que geraram a oportunidade do trabalho, existe a motivação pessoal, que surgiu após a experiência adquirida no Ensino Superior, diante do término das disciplinas de Cálculo e apresentação dos teoremas abordados neste projeto, restava um interesse e curiosidade acerca de possíveis generalizações em superfícies abstratas de dimensões arbitrariamente grandes, assunto apresentado no último capítulo desta monografia, através das chamadas variedades. Por tais motivos, fez-se apropriado uma revisão bibliográfica que sintetizasse os argumentos principais dispostos nos livros que apresentam e desenvolvem a Análise Vetorial. Para tanto, buscou-se como aporte teórico alguns autores como James Stewart (2013), Diomara Pinto e Morgado (2009) e Guidorizzi (2002), para as seções iniciais e Manfredo Carmo (1998), Coutinho (2015) e Wesley Galvão (2016), para seções finais, além de artigos científicos neste contexto, visando difundir na comunidade acadêmica.

O objetivo deste trabalho consiste em desenvolver, de forma clara e objetiva, o embasamento teórico matemático no que se refere a Análise Vetorial, fundamentando o estudo dos principais Teoremas do Cálculo Vetorial. Isto posto, esta monografia está

estruturada da seguinte forma:

- O Capítulo 1 apresenta um estudo sobre curvas que serve de desenvolvimento para o cálculo das Integrais de Linha;
- O Capítulo 2 exhibe o conceito de Campo Vetorial e o cálculo das Integrais de Linha de Campo Escalar e Vetorial;
- O Capítulo 3 trata dos conceitos de Gradiente, Divergente e Rotacional, teoria matemática que auxiliará no entendimento dos Teoremas de Gauss, de Green, e de Stokes;
- O Capítulo 4 expõe as condições para um Campo Vetorial ser Conservativo;
- O Capítulo 5 trata sobre integrais de grandezas vetoriais, especificamente as Integrais de Superfície, recorrendo definições e conceitos necessários para sua compreensão;
- O Capítulo 6 e seus subtópicos são demonstrações dos três principais Teoremas do Cálculo Vetorial: Green, Gauss e Stokes, cálculo desenvolvido através dos conteúdos anteriores expostos ao longo da monografia;
- Por fim, o Capítulo 7 aborda as Formas Diferenciais com a finalidade de expor o Teorema de Stokes mais generalizado, pois nele, os teoremas supracitados são abrangidos.

1 Estudo de curvas

Para iniciarmos o conteúdo deste trabalho, optou-se por mencionar, resumidamente, alguns conceitos que possuem extrema relevância para a construção do cálculo das Integrais de Linha. Utilizando como sustentação teórica o livro *Cálculo Diferencial e Integral de funções de várias variáveis* de Diomara Pinto e Maria Morgado¹, além da dissertação de mestrado *Um estudo sobre curvas, superfícies e suas parametrizações*, de Esmeraldo Farias².

1.1 Curvas

Para abordarmos os conteúdos posteriores, precisamos fazer um estudo breve e objetivo sobre curvas, já que as Integrais de Linha (Capítulo 2) fazem referência a elas.

As curvas são objetos unidimensionais e podem ser apresentadas de diferentes formas:

- **Lugar geométrico** – conjunto de pontos que partilham uma determinada propriedade, seja no plano ou no espaço (FARIA, 2017).
- **Equação geral** – aqui, utilizamos a equação que expressa uma determinada propriedade.
No plano: $x^2 + y^2 = r^2$.
No espaço: intersecção de $ax + by + cz + d = 0$ e $ex + fy + gz + h = 0$.

As mesmas são vistas através da equação geral de elipse, de circunferência, etc. Elas também nos possibilitam o estudo de curvas.

- **Parametrizações ou Equações Paramétricas** – é a que se encaixa adequadamente, já que nos permite utilizar, de forma mais rápida, as técnicas do Cálculo Diferencial e Integral para a descrição do comportamento geométrico da curva.

Assim sendo, trabalharemos com curvas parametrizadas.

Definição 1 (Curva parametrizada). Chamamos curva parametrizada a uma função contínua³,

$$\begin{aligned}\gamma: I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (x(t), y(t), z(t)),\end{aligned}$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, as funções reais $(x(t), y(t), z(t))$ são denominadas por funções coordenadas e a variável t designada por parâmetro de γ . À função γ chamamos de parametrização.

¹ (PINTO; MORGADO, 2009)

² (FARIA, 2017)

³ Um curva γ é contínua em um ponto $t_0 \in I$, se e só se, todas as funções coordenadas $(x(t), y(t), z(t))$ são contínuas em t_0 .

Observação 1.1.1. *Assumamos que as funções coordenadas $x(t), y(t), z(t)$ são deriváveis até a ordem k .*

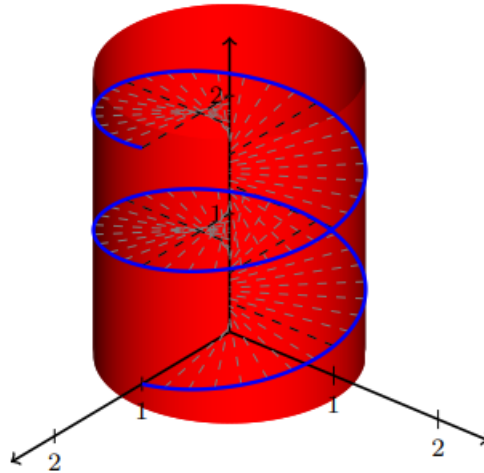
Exibiremos exemplos de algumas curvas, como a hélice circular, que posteriormente serão utilizadas ao longo deste trabalho.

Exemplo 1.1.1. *A hélice circular com $a, b \neq 0$, definida por*

$$\begin{aligned}\gamma : (0, 4\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (a \cos(2\pi t), a \sin(2\pi t), bt)\end{aligned}$$

Facilmente se mostra que esta curva está contida em um cilindro de equação $x^2 + y^2 = a^2$. Na Figura 1, representamos esta curva, assim como o respectivo cilindro, com $a = b = 1$. À medida que o parâmetro t aumenta, o ponto $\gamma(t)$ descreve um movimento de rotação em torno do eixo Oz e, ao mesmo tempo a curva sobe b unidades, no qual $|a|$ e $|b|$ são chamados de raio e passo da hélice circular, respectivamente.

Figura 1 – Curva hélice



Fonte: (FARIA, 2017)

Definição 2 (Traço de uma curva parametrizada). *Seja uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. O conjunto imagem $Im(\gamma) = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3; t \in I\}$ é chamado de traço de γ .*

Note que, no Exemplo (1.1.1) a projeção ortogonal do traço de γ sobre o plano $z = 0$ é uma circunferência.

Pretende-se que uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ possua uma reta tangente em γ , para todo $t \in I$. Como a existência da diferenciabilidade não é condição suficiente para garantir um vetor tangente não nulo, é introduzida uma condição adicional.

Definição 3 (Curva regular). Uma curva parametrizada diferenciável $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é regular, se $\gamma'(t) \neq \vec{0}$, ou, se $\|\gamma'(t)\| \neq 0, \forall t \in I$, onde as funções $x'(t), y'(t), z'(t)$ são contínuas, isto é, $\gamma(t)$ é de classe C^1 .

Definição 4 (Reta tangente). Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular. A reta tangente a γ em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\gamma(t_0)$ na direção de $\gamma'(t_0)$, isto é,

$$r(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda\gamma'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

As definições são importantes e devem ser adotadas, pois elas garantem que a derivada da parametrização não se anule no ponto e não se degenere. Visto que, se isso ocorrer, ou seja, caso a derivada seja zero, não poderemos ter reta tangente.

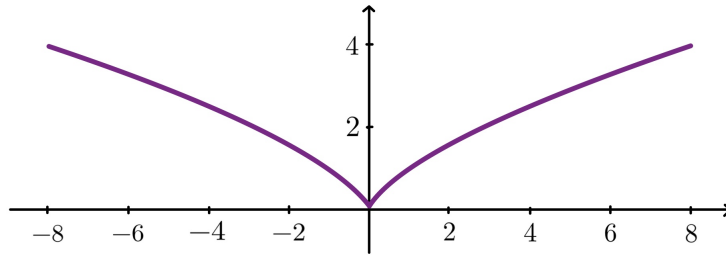
Então, como podemos saber que uma curva admite parametrização regular ou não? Basta observarmos se a mesma é lisa e tem reta tangente naquele ponto. Assim, se ela é regular, tem reta tangente e um comportamento adequado. Do mesmo modo, se ela tem um comportamento inadequado, não tem reta tangente, logo não é regular.

Exemplo 1.1.2 (Curva não regular). A curva com cúspide definida por

$$\begin{aligned} \gamma : (-2, 2) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^3, t^2) \end{aligned}$$

é uma curva parametrizada diferenciável, como apresenta a Figura 2.

Figura 2 – Curva com cúspide



Fonte: (FARIA, 2017)

Vejamos se ela é regular. O vetor tangente de γ é obtido pela derivada, que é

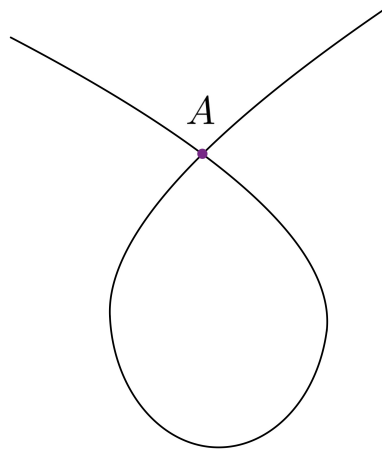
$$\gamma'(t) = (3t^2, 2t) \quad e \quad \|\gamma'(t)\| = |t|\sqrt{9t^2 + 4},$$

logo, em $t = 0$, verifica-se $\gamma(0) = (0, 0)$ e $\|\gamma'(0)\| = 0$. Portanto, a curva não é regular para todo $t \in I$.

Definição 5 (Curva parametrizada fechada). Uma curva parametrizada γ é fechada se γ é definida num intervalo fechado $I = [a, b]$, em que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definição 6 (Ponto múltiplo). Um ponto múltiplo de γ é um ponto A , tal que existam $t_1 \neq t_2$ e $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, isto é, tem auto-interseção, como podemos observar na figura abaixo.

Figura 3 – Ponto múltiplo de uma curva simples



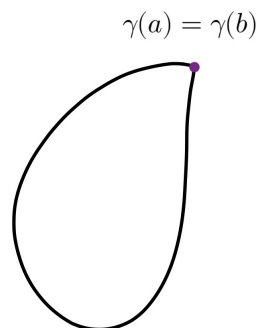
Fonte: acervo da autora.

Definição 7 (Curva simples). Uma curva parametrizada γ é simples se não possui pontos múltiplos, ou seja, $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, para todo $t_1, t_2 \in I$ exceto se o intervalo I for fechado $[a, b]$, no qual admite-se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Então, dizemos que γ não tem auto-interseção.

Note que no Exemplo (1.1.1) a curva é parametrizada diferenciável simples.

Definição 8 (Curva fechada e simples). Uma curva γ , definida em $[a, b]$, é dita fechada e simples, quando o único ponto múltiplo é $\gamma(a) = \gamma(b)$. (Ver Figura 4)

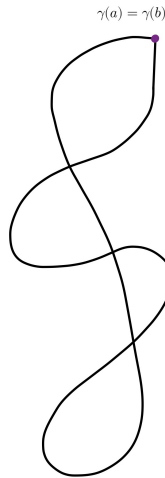
Figura 4 – Curva fechada e simples



Fonte: acervo da autora.

Já a Figura 5, é fechada, entretanto, não é simples, pois possui vários pontos múltiplos. Enquanto que a Figura 3 não é fechada e é simples, sem auto-interseções.

Figura 5 – Curva fechada não simples



Fonte: acervo da autora.

Um outro pré-requisito para apresentarmos o conceito de comprimento de arco e iniciarmos o estudo das Integrais de Linha, no capítulo seguinte, são as Somas de Riemann.

1.2 Soma de Riemann

O conceito de Soma de Riemann é extremamente importante, pois aborda as diversas definições apresentadas neste trabalho. Uma abordagem superficial da Soma de Riemann pode causar dificuldades à sua apreensão, dado que um construto mal fundamentado, que não tenha sido potencializado e abordado de uma maneira efetiva, não possibilita ao leitor entender e relacionar-se com as propriedades que subjazem a esse conceito.

Consideremos uma função f definida em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}^2$. Podemos dividir este intervalo em n subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$ (com $a_1 = a$ e $a_{n+1} = b$), que chamamos de *partição* e escolher um ponto arbitrário x_i em cada um destes subintervalos. Com isso, formamos a soma

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i, \quad (1.1)$$

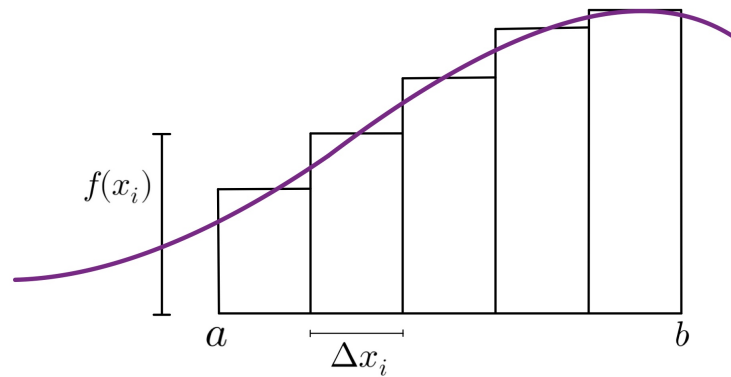
onde Δx_i é o comprimento do intervalo $[a_i, a_{i+1}]$.

Esta expressão 1.1 é conhecida como *Soma de Riemann*. No caso em que $f(x) \leq 0$, a soma de Riemann pode ser interpretada como a soma das áreas dos retângulos de base Δx_i e altura $f(x_i)$.

Tomando o limite desta soma, temos a seguinte definição:

Definição 9. *Seja a função f definida em um intervalo $[a, b]$. Chamamos integral definida da*

Figura 6 – Aproximação área debaixo da curva



Fonte: Acervo da autora

função f no intervalo $[a, b]$ o limite

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x,$$

onde $\Delta x = |x_{i+1} - x_i|$.

Por fim, entendemos que a Soma de Riemann funciona como aproximação para a área debaixo da curva, comprimento de curvas, etc. Por esse motivo, será extensivamente mencionada na construção das definições posteriores.

Com isso, podemos enunciar um dos grandes teoremas do cálculo:

Teorema 1.2.1 (Teorema Fundamental do Cálculo – TFC). *Seja f uma função integrável, definida em um intervalo $[a, b]$. A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, é derivável em todos os pontos de $]a, b[$ e sua derivada é dada por $\frac{dF}{dx} = f(x)$.*

Omitiremos a demonstração deste teorema, pois o conteúdo desta monografia não é este, o mesmo foi citado com fins de revisão. Entretanto, pode ser encontrada em qualquer livro de Cálculo.

Este teorema é de fundamental importância para toda a teoria do Cálculo, no entanto, daremos especial atenção a um de seus corolários, isto é, um dos resultados que surgem como consequência dele.

Corolário 1.2.1. *Se f é uma função integrável, definida em $[a, b]$ e F uma primitiva qualquer de f , então:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Este resultado nos permite afirmar que, para calcular a integral de f no intervalo $[a, b]$ basta calcularmos os valores que sua primitiva toma nos extremos desse intervalo, evitando assim o cálculo diretamente pela definição.

1.3 Comprimento de arco

Diante de todas as definições expostas, podemos mencionar alguns conceitos que têm relação com a integração. Dessa maneira, iniciamos com a definição de comprimento de arco.

Optamos pela representação no $\mathbb{R}^3$. Todavia, o argumento é exatamente o mesmo em qualquer dimensão.

O procedimento geométrico para calcular o comprimento de uma curva é o mesmo da definição de integral, visto nas disciplinas de Cálculo 1. (Vide livro *Cálculo – volume 1*)⁴.

Definição 10 (Comprimento de arco). *Seja C uma curva definida por uma função $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, de classe C^1 . O comprimento da curva C é definido por*

$$L(C) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (1.2)$$

Esta fórmula é válida se $\gamma'(t)$ é C^1 por partes.

Se C é uma curva em $\mathbb{R}^3$, a Equação (1.2) pode ser escrita na forma

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Quando C é uma curva em $\mathbb{R}^2$, temos:

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

A Equação (1.2) pode ser demonstrada a partir do método de aproximação por poligonais, descreveremos logo abaixo.

Método de aproximação por poligonais

Tomemos uma curva C no $\mathbb{R}^3$. Assim, é uma função que depende de um parâmetro t e as três coordenadas espaciais x, y, z dependentes de t . Seja P uma partição regular de ordem n do intervalo $[a, b]$ (constantemente fazemos partições no domínio para chegarmos em integrais), isto é,

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\},$$

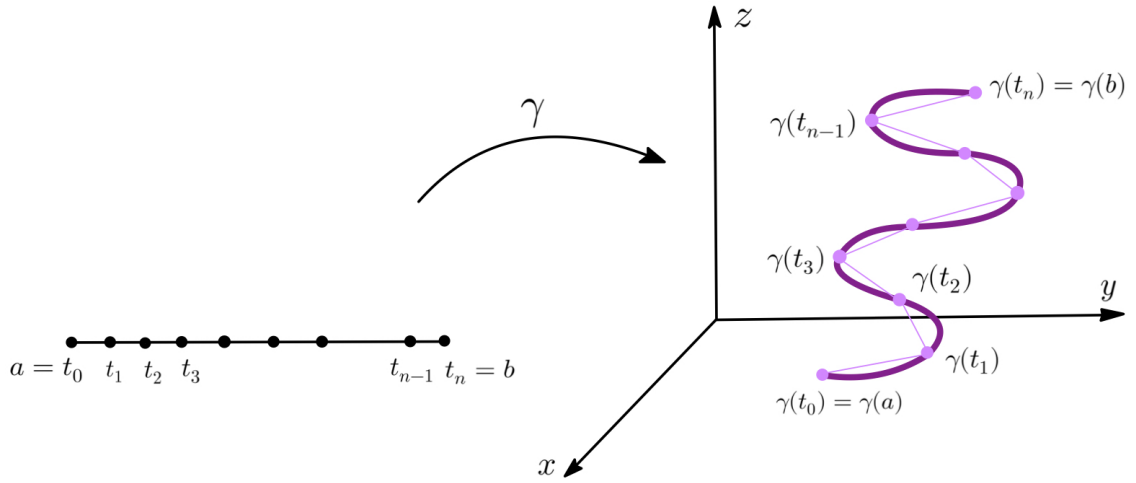
onde $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ e $\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}$, para $0 \leq i \leq n-1$.

Consideremos a linha poligonal obtida ligando-se os sucessivos pares de pontos $\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})$, $1 \leq i \leq n-1$.

Quando Δt é pequeno, o comprimento da linha poligonal é aproximadamente igual ao comprimento de C .

⁴ (STEWART, 2006)

Figura 7 – Aproximação por poligonais



Fonte: (PINTO; MORGADO, 2009)

Contudo, o comprimento do segmento de reta de $\gamma(t_i)$ até $\gamma(t_{i+1})$ é

$$\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2 + (z(t_{i+1}) - z(t_i))^2},$$

onde $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Aplicando o Teorema do Valor Médio (mais detalhes e demonstração, vide livro *Cálculo – vol. 2* de Guidorizzi)⁵ às funções $x(t), y(t), z(t)$ em $[t_i, t_{i+1}]$, obtemos $t_i^1, t_i^2, t_i^3 \in (t_i, t_{i+1})$ tais que

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) - x(t_i) &= x'(t_i^1)(t_{i+1} - t_i) \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= y'(t_i^2)(t_{i+1} - t_i) \\ z(t_{i+1}) - z(t_i) &= z'(t_i^3)(t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Se fizermos a soma sobre todos os elementos da partição, será um estimador para a curva inteira. Logo, o comprimento total da poligonal é

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(t_i^1))^2 + (y'(t_i^2))^2 + (z'(t_i^3))^2} (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento da curva C é o limite de S_n quando n tende para $+\infty$, se esse limite existir. Como $\gamma'(t)$ é contínua, tal limite existe e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Daí temos:

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

⁵ (GUIDORIZZI, 2001)

2 Integrais de Linha

Neste capítulo, apresentamos as Integrais Curvilíneas, também conhecidas como Integrais de Linha. Seu estudo tem início no começo do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de fluidos, forças, eletricidade e magnetismo. Ao longo do estudo, abordamos as Integrais de Linha de Campo Escalar e Campo Vetorial.

Assim sendo, é de extrema importância conceituar Campo Vetorial antes de exibirmos as Integrais de Linha. Nesta seção utilizou-se como sustentação teórica o livro *Cálculo III e IV* de Marcos Martins e Rosimary Pereira¹; *Cálculo B* de Mirian Gonçalves e Diva Marília²; *Cálculo- Vol. 2* de James Stewart³, além dos citados no capítulo anterior.

2.1 Campos Vetoriais

Os Campos Vetoriais no $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ não têm como serem desenhados. Pois, no $\mathbb{R}^2$, por exemplo, os gráficos demandam quatro dimensões (duas no domínio e duas na imagem) e consequentemente teríamos que estar em um espaço com quatro dimensões, o qual não conseguimos representar.

Então, já que não podemos obter o gráfico dessa forma, a estratégia que se usa é desenhar o domínio e imagem juntos, interpretando o primeiro como ponto e o segundo como vetor.

Assim, um Campo Vetorial, associa um vetor a um ponto no espaço, ou seja, interpreta o domínio como ponto e a imagem como vetor.

O Campo Vetorial em $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, isto é, uma aplicação

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

Em $\mathbb{R}^3$, temos a função F formada por valores vetoriais, que fornece a seguinte equação:

$$F(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$$

Outra notação usual seria:

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

Os Campos Vetoriais podem ser vistos como fluxo de fluidos, a passagem de sangue pela artéria, entre outros.

¹ (MARTINS; PEREIRA, 2020)

² (GONÇALVES; FLEMMING, 2007)

³ (STEWART, 2013)

Agora, vejamos um exemplo numérico:

Exemplo 2.1.1 (Campo Radial). O Campo Radial em $\mathbb{R}^2$ é dado por

$$F(x, y) = (x, y).$$

Notações usuais:

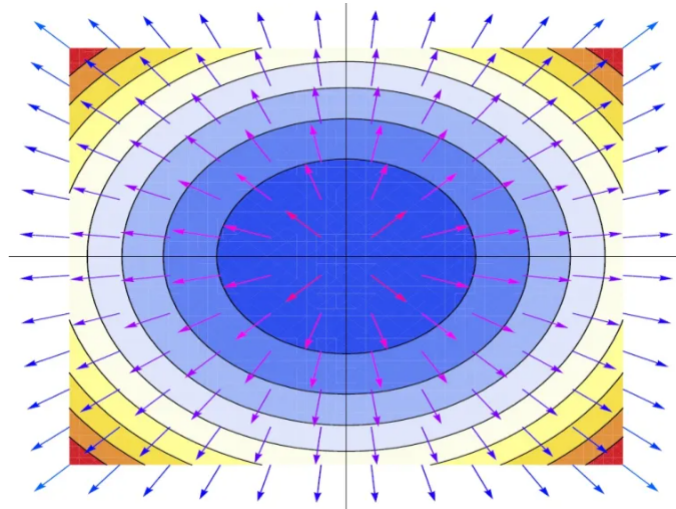
$$r(x, y) = (x, y)$$

$$\| r(x, y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

O Campo Radial no ponto $F(1, 2) = (1, 2)$. Entretanto, para representação, olhamos para $(1, 2)$ do domínio como sendo ponto e desenhamos no ponto $(1, 2)$ o vetor cuja a abscissa é 1 e a ordenada é 2. Então, o domínio vemos como ponto e a imagem como vetor.

Podemos notar, de igual modo, no ponto $F(3, -1) = (3, -1)$. Assim, concluímos que esse campo é chamado de radial, porque são vetores que se espalham, isto é, se afastam da origem, como raios (ver Figura 8).

Figura 8 – Campo Radial



Fonte:(VIEIRA, 2021)

Notação:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}.$$

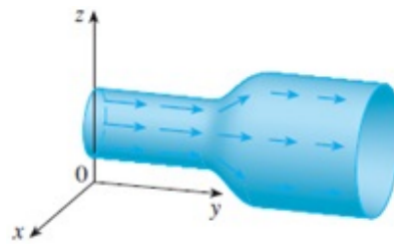
A ideia de se afastar radialmente da origem é mantida aqui. Em cada ponto, olhamos da origem até ele e colocamos o vetor aplicado no mesmo.

Exemplo 2.1.2. Seja R uma região que representa a atmosfera terrestre. Então, a cada ponto $P \in R$, associamos um vetor $F(P)$ que expressa a velocidade do vento. Assim, F é um Campo Vetorial definido em R , chamado de **Campo de Velocidade**.

De igual modo, podemos imaginar a seguinte situação:

Exemplo 2.1.3 (Campo de Velocidade). *Imagine um líquido escoando uniformemente em um cano e seja $V(x, y, z)$ o vetor velocidade em um ponto (x, y, z) . Observe que V associa um vetor a cada ponto (x, y, z) de um certo domínio E , que representa o interior do cano. Dessa forma, V é um Campo Vetorial em $\mathbb{R}^3$, chamado Campo de Velocidade. A Figura 9 ilustra um Campo de Velocidade. A velocidade escalar é indicada pelo comprimento da seta.*

Figura 9 – Campo Velocidade



Fonte: (STEWART, 2013)

2.2 Integral de Linha

As Integrais de Linha em Campos Escalares são formadas por funções escalares, ou seja, da mesma maneira que uma Integral Unidimensional $\int_a^b f(x) dx$ soma determinadas quantidades ao longo do eixo x , assim também as Integrais de Linha se comportam. Entretanto, agora essa soma dependerá de uma função multivariável $f(x, y)$ que percorrerá uma curva no plano xy , resultando em $\int_C f(x, y) ds$, ou seja, ao invés de integrarmos sobre um intervalo $[a, b]$, integraremos sobre uma curva C . Entre as diversas aplicações desse conceito podemos citar o comprimento de curvas e a massa de um fio a partir da densidade linear.

2.2.1 Integral de Linha de Campo Escalar

Quando calculamos integrais de uma variável é comum utilizarmos a motivação do cálculo de área, já para as integrais de duas variáveis, cálculo de volume debaixo de uma superfície e vários outros contextos utilizam-se como ponto de partida o cálculo da massa de um objeto a partir de informações sobre a distribuição de massa, que chamamos de densidade em Física. No contexto em que estudaremos é a densidade linear.

Formularemos já no $\mathbb{R}^3$, mas de igual forma valeria para $\mathbb{R}^2$ com as adaptações naturais.

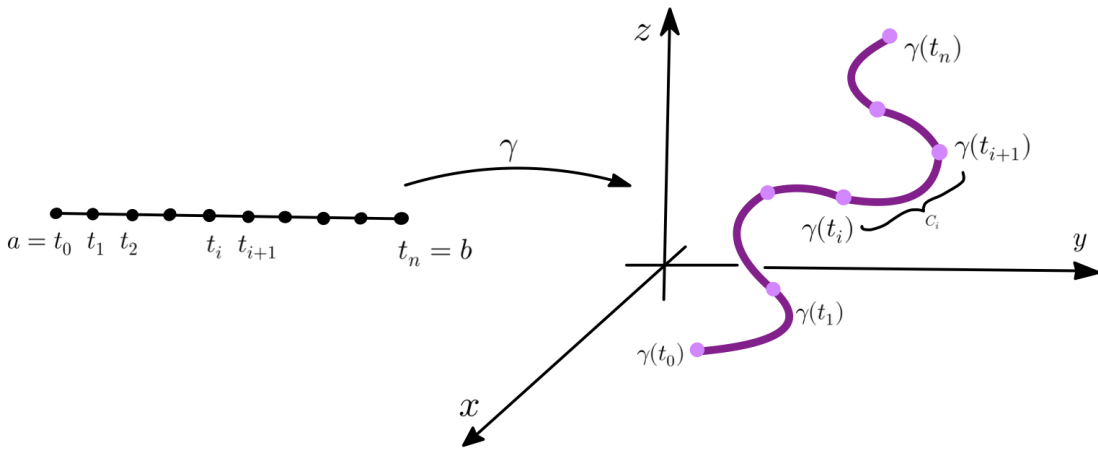
Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real e C uma curva em $\mathbb{R}^3$, definida pela função

$$\begin{aligned}\gamma : I = [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)).\end{aligned}$$

Para motivar a definição de Integral de Linha de f ao longo de C , vamos supor que C representa um arame e $f(x, y, z)$ a densidade (massa por unidade de comprimento) em cada ponto $(x, y, z) \in C$. Queremos calcular a massa total M do arame.

Para isto, dividamos o intervalo $I = [a, b]$ por meio da partição regular de ordem n , então $a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b$, obtendo assim uma decomposição de C em curvas C_i definidas em $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, como na Figura 10.

Figura 10 – Decomposição da curva



Fonte: (PINTO; MORGADO, 2009)

Supondo que $\gamma(t)$ é de classe C^1 e denotando por Δs_i o comprimento da curva C_i , tem-se

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe $c_i \in [t_i, t_{i+1}]$ tal que

$$\Delta s_i = \|\gamma'(c_i)\| (t_{i+1} - t_i) = \|\gamma'(c_i)\| \Delta t_i,$$

onde $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Quando n é grande, Δs_i é pequeno e $f(x, y, z)$ pode ser considerada constante em C_i e igual a $f(\gamma(c_i))$. Portanto, a massa total M é aproximada por

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(c_i)) \|\gamma'(c_i)\| \Delta t_i.$$

A soma S_n é uma Soma de Riemann (assunto abordado no Capítulo 1) da função $f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|$ no intervalo $[a, b]$. Logo, se considerarmos $f(x, y, z)$ contínua em C , então

$$M = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Temos então a seguinte definição:

Definição 11 (Integral de Linha de Campo Escalar). Consideremos uma curva C em $\mathbb{R}^3$, parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, onde γ é de classe C^1 e $f(x, y, z)$ uma função real contínua em C . Definimos a Integral de Linha de f ao longo de C por

$$\int_C f \, ds = \int_C f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt. \quad (2.1)$$

Essa fórmula ainda é válida se γ é C^1 por partes ou $f \circ \gamma$ é contínua por partes. Neste caso, a integral $\int_C f(x, y, z) \, ds$ é calculada dividindo-se o intervalo $[a, b]$ em um número finito de intervalos fechados, onde $f(\gamma'(t)) \|\gamma'(t)\|$ é contínua.

1º caso particular: Neste caso, em que $f(x, y, z) = 1$ se $(x, y, z) \in C$, obtemos, pela Equação 2.1,

$$\int_C ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \text{comprimento da curva } C.$$

Tal resultado é de extrema relevância, pois é uma definição geral para comprimento de curva, um conceito que serve para calcularmos o comprimento de qualquer curva. Para clarear melhor a definição, exibiremos um exemplo numérico.

Como anteriormente citamos exemplos usando hélice, exibiremos uma questão sobre comprimento de curva através da equação da Integral de Linha em Campo Escalar.

Exemplo 2.2.1. Calcule o comprimento da hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

Solução 2.2.1. Calculemos inicialmente o $\|\gamma'(t)\|$, assim:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \rightarrow \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

então,

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \\ &= \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (1)^2} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Apliquemos, por fim, na fórmula:

$$L(\gamma) = \int_C 1 \, ds = \int_0^{4\pi} 1 \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

$$\text{Assim, } L(\gamma) = \int_0^{4\pi} \sqrt{2} \, ds = 4\sqrt{2}\pi.$$

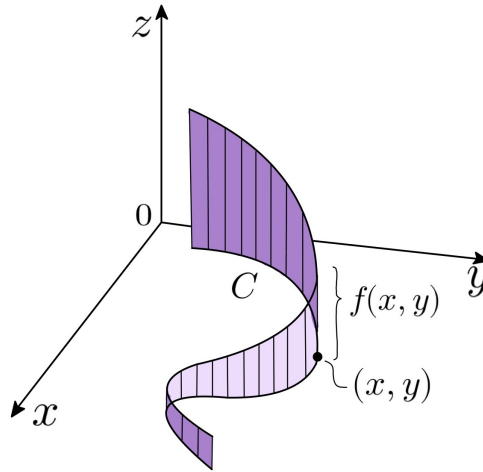
2º caso particular: Ocorre quando a curva C está no plano xy definida por uma função de classe C^1 , $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ e $f(x, y)$ é uma função real contínua definida em C .

Assim, a **Integral de Linha de f ao longo de C** é

$$\int_C f \, ds = \int_C f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Quando $f(x, y) \geq 0$ em C , a interpretação geométrica consiste na base, sendo a curva C e a altura $f(x, y)$ em cada $(x, y) \in C$. Como podemos observar na Figura 11.

Figura 11 – Interpretação da Integral de Linha de função positiva como um área



Fonte: (STEWART, 2013)

Vejamos exemplos numéricos.

Exemplo 2.2.2. Calcule $\int_C (2 + x^2 y) \, ds$ onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$

Solução 2.2.2. Para representar C através da Fórmula da Integral de Linha em Campo Escalar, precisamos das equações paramétricas.

O círculo unitário (Ver Figura 12) pode ser parametrizado pelas equações

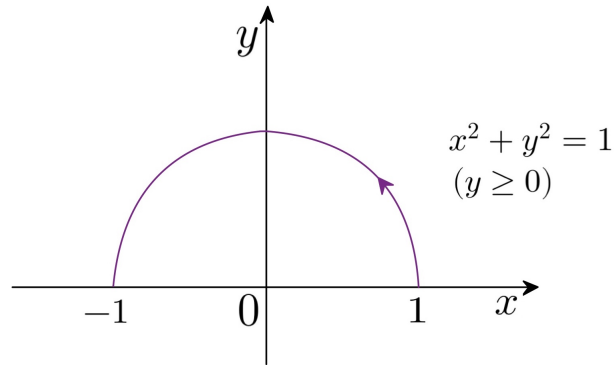
$$x = \cos(t); y = \sin(t),$$

sendo descrito pelo intervalo do parâmetro $0 \leq t \leq \pi$.

Então,

$$\begin{aligned} \int_C (2 + x^2 y) \, ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2(t) \cdot \sin(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2(t) \cdot \sin(t) \cdot \sqrt{\sin^2(t)^2 + \cos^2(t)^2} \, dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2(t) \cdot \sin(t)) \, dt \\ &= \left(2t - \frac{\cos^3(t)}{3} \right) \Big|_0^\pi = 2\pi + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Figura 12 – Círculo unitário



Fonte: (STEWART, 2013)

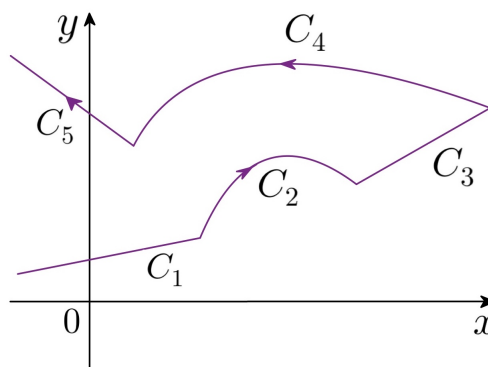
Observação 2.2.1. Suponha que C seja uma curva regular por partes (Visualizar Figura 13).

Podemos inferir, com isso, que essa curva possui um ponto terminal C_{i-1} e o ponto inicial C_i . A integral será, portanto, a soma das integrais de f ao longo de cada caminho regular de C .

Diante disso, temos:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y) ds.$$

Figura 13 – Curva suave por partes

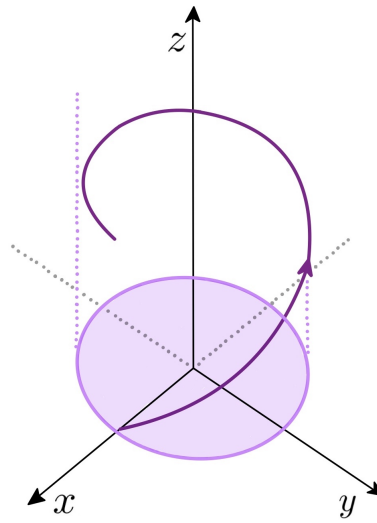


Fonte: (STEWART, 2013)

Exemplo 2.2.3. Calcule $\int_C y \sin(z) ds$, em que C é a hélice circular dada pelas equações: $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = t$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução 2.2.3. A hélice está ilustrada na Figura 14.

Figura 14 – Hélice circular



Fonte: Acervo da autora

Desenvolvendo o cálculo com base nas informações supracitadas, temos:

$$\begin{aligned}
 \int_C y \sin(z) \, ds &= \int_0^{2\pi} \sin(t) \sin(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \cdot \sqrt{(-\sin^2(t)) + (\cos^2(t)) + 1} \, dt \\
 &= \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \, dt \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(t - \frac{\sin(2t)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \sqrt{2}\pi.
 \end{aligned}$$

2.2.2 Propriedades

As Integrais de Linha possuem propriedades análogas às Integrais Definidas.

Diante disso, exibiremos suas propriedades a seguir, onde denotamos que C é uma curva regular ou regular por partes, então $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ são contínuas em C ((GONÇALVES; FLEMMING, 2007).

$$1. \int_C k f(x, y, z) \, ds = k \cdot \int_C f(x, y, z) \, ds.$$

Onde k é uma constante.

$$2. \int_C [f(x, y, z) + g(x, y, z)] \, ds = \int_C f(x, y, z) \, ds + \int_C g(x, y, z) \, ds.$$

3. Se C é suave por partes (como na Figura 13), então:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{C_1} f(x, y, z) ds + \int_{C_2} f(x, y, z) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y, z) ds$$

$$4. \int_{-C} f(x, y, z) ds = - \int_C f(x, y, z) ds.$$

Onde $-C$ é a curva orientada no sentido oposto.

2.3 Integral de Linha de Campos Vetoriais

Assim como utilizamos uma motivação para expor o cálculo das Integrais de Linha de Campos Escalares, faremos para o cálculo das Integrais de Linha de Campos Vetoriais. Dessa forma, uma motivação válida para o estudo dessas integrais é o cálculo do trabalho realizado por uma força atuando sobre uma partícula em movimento.

Sejam,

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightarrow F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \end{aligned}$$

um Campo Vetorial e C uma curva em $\mathbb{R}^3$, definida por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$.

F representa o campo de forças e calcularemos o trabalho realizado por ela para deslocar uma partícula ao longo de C .

Quando C é um segmento de reta de A em B , F uma força constante, obtemos o trabalho através da seguinte fórmula:

$$W = F \cdot AB$$

$$W = (\text{força na direção do deslocamento}) \times (\text{deslocamento}).$$

Quando a curva C não é segmento de reta, podemos aproximá-la por uma linha poligonal com vértices em C . Inicialmente, particionamos o intervalo $I = [a, b]$ em

$$a = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_n = b,$$

de ordem n . Gerando uma poligonal de vértices

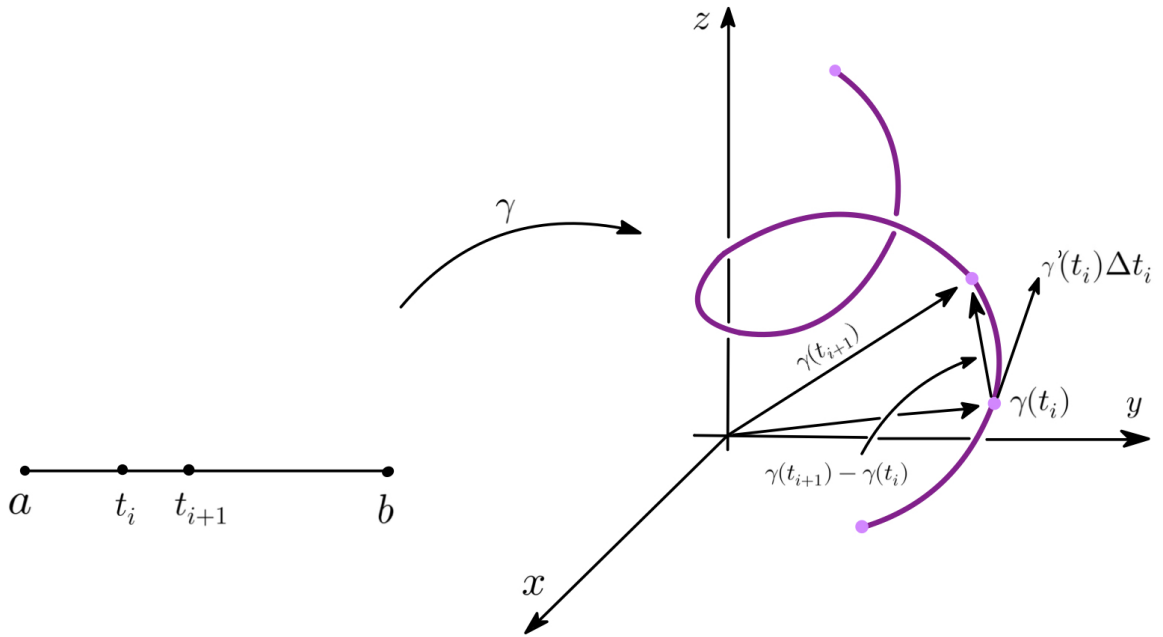
$$\gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i)), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Para n grande, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ é pequeno, o deslocamento da partícula de $\gamma(t_i)$ até $\gamma(t_{i+1})$ é aproximado pelo vetor $\Delta s_i = \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)$, e F pode ser considerada constante e igual a $F(\gamma(t_i))$ no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$.

Supondo que $\gamma'(t)$ existe para todo $t \in [a, b]$, então, pela definição de derivada, extraímos que

$$\Delta s_i \approx \gamma'(t_i) \Delta(t_i).$$

Figura 15 – Aproximação por linha poligonal



Fonte: (PINTO; MORGADO, 2009)

Portanto, o trabalho realizado para deslocar uma partícula de $\gamma(t_i)$ até $\gamma(t_{i+1})$ é aproximadamente

$$F(\gamma(t_i)) \cdot \Delta s_i \approx (F(\gamma(t_i)) \cdot \gamma'(t_i)) \Delta t_i.$$

Assim, o trabalho W realizado pela força F para deslocar uma partícula ao longo de C é

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (F(\gamma(t_i)) \cdot \gamma'(t_i)) \Delta t_i \right).$$

Se γ' é contínua em $[a, b]$ e $F(x, y, z)$ é contínuo em C , o limite acima existe e é igual a

$$W = \int_a^b (F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) dt.$$

Agora, enunciemos sua definição:

Definição 12 (Integral de Linha de Campo Vetorial). Consideremos uma curva C em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, onde γ é de classe C^1 e

$$F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

um Campo Vetorial contínuo definido em C . Definimos a **Integral de Linha de F ao longo de C** por

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt. \quad (2.2)$$

Observação 2.3.1. Se a curva C é fechada, isto é, se $\gamma(a) = \gamma(b)$, a Integral de Linha é denotada por $\oint_C F \cdot dr$.

Quando usamos as componentes de F e de γ , a Equação (2.2) é escrita como

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F_1(\gamma(t))x'(t)dt + F_2(\gamma(t))y'(t)dt + F_3(\gamma(t))z'(t)dt.$$

Além disso, é usual denotarmos por

$$\int_C F \cdot dr = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Diante do exposto, apresentaremos um exemplo numérico envolvendo a aplicação do cálculo das Integrais de Linha de Campo Vetoriais.

Exemplo 2.3.1. Calcule o trabalho realizado pelo campo $F(x, y, z) = 2x \vec{i} + 3y \vec{j} + z \vec{k}$, (que é o mesmo que $(2x, 3y, z)$, em outra notação), sobre o deslocamento $r(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$

Solução 2.3.1. *1º passo:* Sabemos que o campo de forças precisa ser calculado com a curva. Assim,

$$F(r(t)) = (2 \cos(t), 3 \sin(t), t).$$

2º passo: Calcular a derivada no ponto. Dessa forma,

$$r'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1).$$

3º passo: Fazemos o produto escalar

$$\begin{aligned} F(r(t)) \cdot r'(t) &= (2 \cos(t), 3 \sin(t), t) \cdot (-\sin(t), \cos(t), 1) \\ &= (-2 \sin(t) \cos(t) + 3 \sin(t) \cos(t) + t) \\ &= (\sin(t) \cos(t) + t) \\ &= \frac{1}{2} \sin(2t) + t. \end{aligned}$$

4º passo: Substituímos na integral

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} \left(\frac{1}{2} \sin(2t) + t \right) dt &= \left. \frac{-1}{4} \cos(2t) + \frac{t^2}{2} \right|_0^{4\pi} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{16\pi^2}{2} + \frac{1}{4} - 0 \\ &= 8\pi^2. \end{aligned}$$

3 Operadores Vetoriais

Neste capítulo definiremos os operadores Gradiente, Divergente e Rotacional que são indispensáveis para o estudo dos Teoremas do Cálculo Vetorial. Antes, porém, apresentaremos o operador diferencial "Nabla", importante para o desenvolvimento dos posteriores. Utilizamos como sustentação teórica dessa seção a dissertação de mestrado *Cálculo Vetorial e Eletromagnetismo* de Luis Moreira¹ e demais citados anteriormente.

3.1 Nabla

Nabla, simbolizado por ∇ , é o operador diferencial com definição

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

A sua aplicação em campos escalares e vetoriais, produz ferramentas matemáticas indispensáveis para a quantificação e entendimento conceitual de diversos campos da ciência.

3.2 Gradiente

Gradiente é um vetor que determina a direção a partir de um ponto, na qual uma função varia mais. Está intimamente ligado à ideia de derivada direcional, que é a taxa de variação em relação à distância de uma função, medida em determinada direção a partir de um determinado ponto. Esse vetor não só determina a direção de maior crescimento de uma função, como também determina qual é esta taxa de variação máxima, seu módulo.

Definição 13. *Seja o campo escalar diferenciável $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, o gradiente de uma função, cujo símbolo é ∇f (ou $\text{grad } f$), é um vetor definido como*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Isto é, o operador nabla aplicado a uma função real f .

Agora, enunciaremos uma das propriedades do vetor gradiente:

Proposição 3.2.1. *A direção do vetor gradiente é sempre perpendicular à tangente a qualquer curva contida numa superfície de nível.*

Iremos provar essa proposição.

¹ (MOREIRA et al., 2020)

Demonstração 3.2.1. Suponha que a curva contida na superfície de nível definida pela função $f(x, y, z) = k$, seja definida pela equação paramétrica $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Como $\vec{r}(t)$ está contida em $f(x, y, z) = k$, então $f(x(t), y(t), z(t)) = k$. Derivando essa equação em função de t , temos, pela Regra da Cadeira:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0.$$

Reescrevendo a expressão em notação de produto escalar, temos:

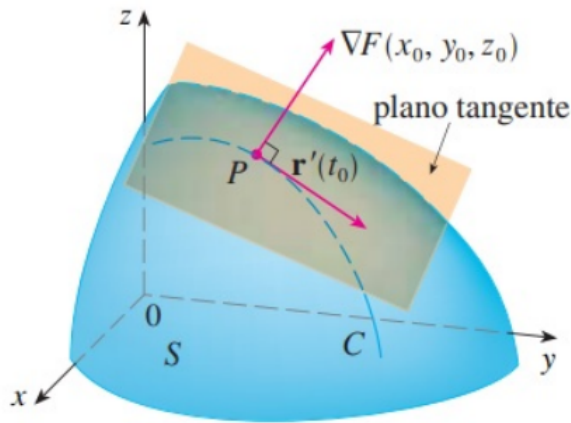
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = 0.$$

$$\nabla f \cdot \vec{r}'(t) = 0.$$

Sabe-se que, $\vec{r}'(t)$ é sempre tangente à curva $\vec{r}(t)$ em qualquer ponto dela. Como o produto escalar entre o vetor gradiente e o vetor $\vec{r}'(t)$ é zero, pode-se concluir que eles são perpendiculares. Logo, o vetor gradiente é sempre perpendicular à tangente a qualquer curva contida numa superfície de nível.

Logo, o vetor normal ao plano tangente à uma superfície S definida por $f(x, y, z)$ passando por $P(x_0, y_0, z_0)$, é o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, como na figura a seguir.

Figura 16 – Vetor normal ao plano tangente de uma superfície.



Fonte: (STEWART, 2013)

3.3 Divergente

A ideia do divergente está intimamente ligada ao conceito de fluxo, na medida que indica os pontos no espaço onde existe fluxo “nascendo” (ou divergindo). Geometricamente, divergente de um Campo Vetorial é a razão entre o saldo de fluxo de campo (diferença entre o fluxo que “entra” e que “sai”) em uma determinada superfície fechada e o volume desta

superfície fechada. Porém o divergente é uma informação local (pontual) e dessa forma é necessário considerar volumes elementares. Divergente é então uma densidade volumétrica elementar de saldo de fluxo.

Definição 14. Dado um Campo Vetorial $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ o **divergente** de F é o campo escalar

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z),$$

se as derivadas parciais existirem.

O divergente pode ser interpretado como a taxa de variação de área (ou volume) por unidade de tempo e unidade de área (ou volume) no ponto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

- Se $\operatorname{div} f = 0 \rightarrow$ o fluxo no ponto P é constante;
- Se $\operatorname{div} f > 0 \rightarrow$ o fluxo se expande ou é direcionado para fora do ponto P ;
- Se $\operatorname{div} f < 0 \rightarrow$ o fluxo se comprime ou é direcionado para dentro do ponto P .

3.4 Rotacional

3.4.1 Rotacional de um Campo Vetorial no plano

Definição 15. Sendo $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (F_1, F_2)$ denotamos o **rotacional** de F por

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

3.4.2 Rotacional de um Campo Vetorial no espaço $\mathbb{R}^3$

O rotacional é uma medida de circulação (Integral de Linha ao longo de uma curva contínua fechada) elementar de um Campo Vetorial em torno de um ponto. É um vetor, com origem neste ponto, ortogonal à área onde está a circulação elementar.

Definição 16. Sendo $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ um Campo Vetorial com derivadas parciais definidas num subconjunto aberto do $\mathbb{R}^3$, o rotacional de F é definido por

$$\operatorname{rot} F = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \operatorname{rot} F = \left(\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right).$$

Isto é, o rotacional é o operador nabla aplicado a um Campo Vetorial $F = (F_1, F_2, F_3)$, que resulta no produto vetorial $\nabla \times F$.

Teorema 3.4.1. *Seja $f = F(x, y)$ um Campo Escalar com todas as derivadas de ordem 2 contínuas. Então, o rotacional do gradiente de f é nulo, isto é,*

$$\text{rot}(\nabla f(x, y)) = 0.$$

Demonstração 3.4.1. *Como,*

$$\text{rot} \nabla f = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Segue que,

$$\text{rot} \nabla f = \left(\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} \right) \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = 0.$$

Observação 3.4.1. *O Teorema 3.4.1 supracitado, é válido para um campo tanto de duas, quanto de três variáveis.*

3.5 Laplaciano

Definição 17. *O operador laplaciano de uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujo símbolo pode ser Δ ou ∇^2 é definido por:*

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla \cdot f) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial z}}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Resumidamente, esse capítulo é base fundamental para os demais, tendo em visto que a demonstração do Teorema de Green necessita do conceito de gradiente, bem como o Teorema de Stokes necessita do rotacional e o Teorema de Gauss do conceito de divergente.

4 Campos Conservativos

Os Campos Conservativos possuem propriedades geométricas e físicas de grande relevância tanto para a Matemática, quanto para a Física, fazendo com que seu nível de aplicabilidade seja elevado; se constituem como um tipo especial de Campos Vetoriais, assunto abordado no Capítulo 2.

Em geral, o cálculo das Integrais de Linha de um Campo Vetorial F ao longo de uma curva C que liga os pontos A e B depende da curva C . No entanto, em alguns casos, para certos Campos Vetoriais, o cálculo da integral depende apenas dos pontos A e B e não da curva C . (PINTO; MORGADO, 2009)

Para esses casos, dizemos que a integral **independe do caminho** (abordaremos mais adiante). Agora, conheçamos quais os Campos Vetoriais que têm integrais de linha desse tipo.

Consideremos, a partir de então, o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), visto de forma breve no Capítulo 1,

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

válido para integrais unidimensionais, onde a F' é contínua no intervalo $[a, b]$ e ∇f como o vetor gradiente de uma função. Diante disso, o seguinte teorema pode ser enunciado, já que o mesmo é uma extensão do TFC.

Teorema 4.0.1. *Seja F um Campo Vetorial contínuo definido num subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ para o qual existe uma função real f tal que $\nabla f = F$ em U . Se C é uma curva em U com pontos inicial e final A e B , respectivamente, parametrizada por uma função $\gamma(t)$, C^1 por partes, então*

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A).$$

Demonstração 4.0.1. *Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$, então*

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Pondo $g(t) = f(\gamma(t))$, $a \leq t \leq b$, temos, pela regra da cadeia,

$$g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Portanto, pelo TFC,

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A).$$

O Campo Vetorial F do Teorema 4.0.1 é chamado **Campo Gradiente** ou **Campo Conservativo** e a função f , uma **função potencial**. As condições para um Campo Vetorial ser Gradiente será exibida mais adiante.

4.1 Construção de uma função potencial usando integrais indefinidas

Se $F = (F_1, F_2, F_3)$ é um Campo Vetorial Gradiente de uma função potencial f num aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = F_2, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = F_3. \quad (4.3)$$

Usando integrais indefinidas e integrando (4.1) em relação a x (mantendo y e z constantes), obtemos

$$f(x, y, z) = \int F_1(x, y, z) dx + A(y, z), \quad (4.4)$$

onde $A(y, z)$ é uma "constante de integração" a ser determinada. Analogamente, se integrarmos (4.2) em relação a y e (4.3) em relação a z , obtemos

$$f(x, y, z) = \int F_2(x, y, z) dy + B(x, y) \quad (4.5)$$

e

$$f(x, y, z) = \int F_3(x, y, z) dz + C(x, y) \quad (4.6)$$

onde $B(x, z)$ e $C(x, y)$ são funções a serem determinadas. Para encontrar f devemos determinar $A(y, z)$, $B(x, z)$ e $C(x, y)$ de modo que as equações (4.4), (4.5) e (4.6) tenham o mesmo lado direito.

Agora, vamos caracterizar os Campos Vetoriais do plano que são Campos Gradientes.

Teorema 4.1.1. *Seja $F = (F_1, F_2)$ um Campo Vetorial de classe C^1 definido num domínio simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $\oint_C F \cdot dr = 0$, qualquer que seja a curva fechada C, C^1 por partes contida em U ;
2. A integral de linha de F do ponto A até o ponto B independe da curva C^1 por partes contida em U , que liga A até B ;
3. F é um Campo Gradiente de alguma função potencial f em U ;
4. $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ em U .

Demonstração 4.1.1. Vamos provar que

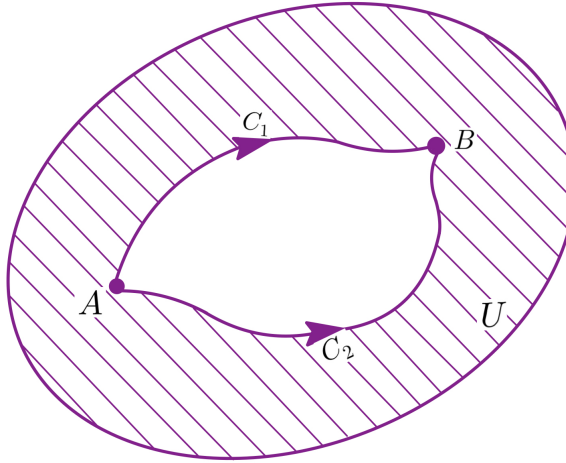
$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i).$$

o que estabelecerá o teorema.

1º passo: Provando que $(i) \Rightarrow (ii)$:

Sejam C_1 e C_2 duas curvas C^1 por partes contidas em U , ligando o ponto A ao ponto B .

Figura 17 – Curva C fechada com duas curvas ligando os pontos A e B



Fonte: (PINTO; MORGADO, 2009)

Como a curva $C = C_1 \cup C_2^-$ é fechada e C^1 por partes, então, por (i), segue que

$$0 = \oint_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr - \int_{C_2} F \cdot dr,$$

chegando a prova (ii).

2º passo: Provando que $(ii) \Rightarrow (iii)$:

Fixemos (x_0, y_0) em U e, para cada $(X, Y) \in U$, definamos

$$f(X, Y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} F_1 dx + F_2 dy.$$

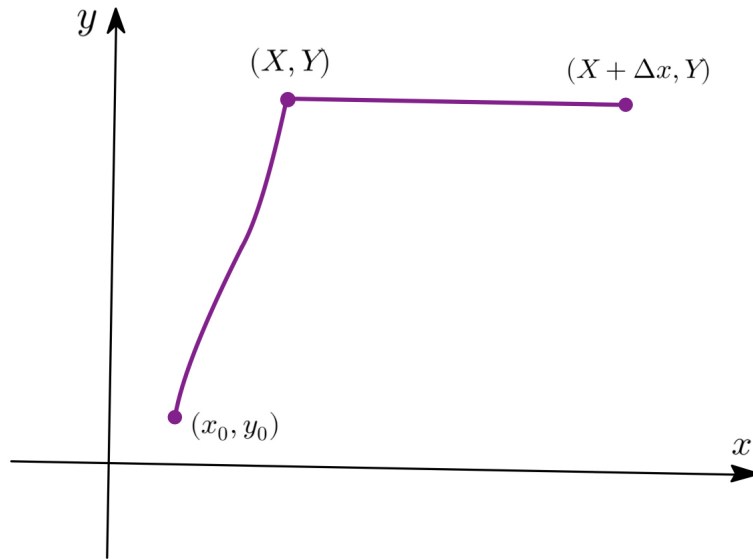
Esta função está bem definida, pois a integral independe do caminho que liga (x_0, y_0) a (X, Y) .

Para Δx suficientemente pequeno temos que:

$$\begin{aligned} f(X + \Delta x, Y) - f(X, Y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(X + \Delta x, Y)} F_1 dx + F_2 dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} F_1 dx + F_2 dy = \\ &= \int_{(X, Y)}^{(X + \Delta x, Y)} F_1 dx + F_2 dy. \end{aligned}$$

Como esta última integral independe do caminho entre (X, Y) e $(X + \Delta x, Y)$, podemos tomá-lo como sendo o segmento de reta que liga estes pontos.

Figura 18 – Segmento de reta que liga os pontos



Fonte: (PINTO; MORGADO, 2009)

Neste segmento, y é constante e, portanto, $dy = 0$. Assim,

$$\int_{(X,Y)}^{(X+\Delta x,Y)} F_1 dx + F_2 dy = \int_{(X,Y)}^{(X+\Delta x,Y)} F_1 dx.$$

Usando o Teorema do Valor Médio para integrais, obtemos

$$\int_{(X,Y)}^{(X+\Delta x,Y)} F_1 dx = \Delta x F_1(X + t\Delta x, Y),$$

para algum $0 \leq t \leq 1$.

Logo,

$$\frac{f(X + \Delta x, Y) - f(X, Y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{(X,Y)}^{(X+\Delta x,Y)} F_1 dx + F_2 dy = F_1(X + t\Delta x, Y).$$

Tomando o limite quando Δx tende a zero, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) = F_1(X, Y).$$

Analogamente, prova-se que $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$.

3º passo: Provando que (iii) $\Rightarrow$ (iv) :

Se $F = \nabla f$ em U , então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2.$$

Como F é de classe C^1 , então f é de classe C^2 e, considerando suas derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

obtemos a igualdade $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

Por fim, deixamos a prova $(iv) \Rightarrow (i)$ como exercício para o leitor.

Exemplo 4.1.1. Se F for um Campo Vetorial definido por $F(x, y) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\right)$ prove que F é Conservativo e ache uma função potencial para F .

Solução 4.1.1. Seja

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{1}{y} & Q(x, y) &= -\frac{x}{y^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{1}{y^2} & \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

Para que seja um Campo Conservativo, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, como as derivadas parciais são iguais, segue que F é um gradiente, logo, um Campo Vetorial Conservativo.

Agora, basta sabermos qual é a função potencial que satisfaz a equação $F(x, y) = \nabla f(x, y)$.

Temos que: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}$ (i) e $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$ (ii), porque é o gradiente da função potencial.

Então, se integrarmos ambos os membros da (i) em relação à x , obtemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f}{\partial x} dx &\Rightarrow f = \int \frac{1}{y} dx \\ &= \frac{1}{y} \int dx \\ &= \frac{x}{y} + g(y) \end{aligned}$$

Derivando parcialmente ambos os membros da equação encontrada em relação à y , temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{\partial g(y)}{\partial y} \quad (4.7)$$

Comparando a equação (ii) com a equação (4.7), concluímos que:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial g(y)}{\partial y} &= 0 \\ \Rightarrow g(y) &= C \end{aligned}$$

Assim, encontramos a função potencial $f(x, y) = \frac{x}{y} + C$.

5 Integrais de Superfícies

Neste capítulo, apresentamos a definição de Integral de Superfície de Campo Escalar e Campo Vetorial, que possui importantes aplicações à Geometria e Física.

O conceito de superfícies no espaço possui aplicações importantes para o estudo das Integrais de Superfície, que será ponte para entendermos os Teoremas de Gauss e Stokes.

5.1 Superfícies no $\mathbb{R}^3$

Há várias maneiras de apresentarmos o conceito de superfície:

- **Lugar geométrico:** Essa maneira remonta tradições geométricas gregas. Lugar geométrico já apareceu no Capítulo 1 quando comentamos sobre curvas, pois as mesmas também podem ser apresentadas como lugar geométrico, que é a tradição da matemática e geometria grega. Por exemplo, podemos dizer que a esfera é o lugar geométrico de todos os pontos do espaço que equidistam de um ponto fixo. Observe que isso está expresso em língua cotidiana e não tem fórmula, nada mais matemático envolvido que nos dá uma maneira de abordar equações;
- **Equação geral:** Podemos pensar na equação da esfera, por exemplo: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, bem como da superfície de nível ou superfície a valores constantes de uma função de três variáveis, como $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Isso é útil no ponto de vista do cálculo, pois o vetor gradiente dessa função é perpendicular ou normal à superfície de nível, ou seja, $\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$, que é um vetor a três componentes e é perpendicular a superfícies de nível da função. Logo, podemos obter o plano tangente, que é o vetor perpendicular ao plano perpendicular e a partir daí, utilizar os instrumentos do cálculo para trabalhar geometricamente.
- **Gráfico de uma função:**

$$z = f(x, y).$$

Não é toda superfície que pode ser vista dessa forma, só aquelas que são gráficos de função. Podemos também obter o plano tangente, que será:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y - y_0).$$

- **Superfícies parametrizadas:** Nesse contexto, iremos trabalhar com cinco variáveis, sendo duas no domínio $\gamma(u, v)$, então (u, v) vai percorrer um domínio no plano e x, y, z

vão ser as três variáveis do espaço dependentes das duas variáveis do plano. Obteremos, fazendo as derivadas parciais dos componentes x, y, z em relação à (u, v) , dois vetores tangentes. Então, com dois vetores tangentes, fazemos o produto vetorial, obtendo o vetor normal (perpendicular) à superfície.

A partir de então daremos ênfase a esse estudo. Por esse motivo, iremos destrinchar esse conteúdo a seguir.

Definição 18 (Superfície parametrizada). *Consideremos uma função $\gamma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida num subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$. A imagem de D por γ , $\gamma(D)$, é dita uma superfície parametrizada e sua representação paramétrica é*

$$\gamma(u, v) = (x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad e \quad (u, v) \in D.$$

A função γ é diferenciável se $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ são funções diferenciáveis.

Intuitivamente, a ideia de superfície parametrizada é iniciada em um plano (u, v) , ou seja, de duas variáveis, que será o domínio D onde a superfície estará definida (Ver Figura 19), a parametrização com componentes (x, y, z) levará essa informação para o espaço tridimensional, de forma que a região anteriormente plana será projetada no espaço, formando uma superfície no espaço, uma região bidimensional.

Para compreendermos esse conceito precisamos entender Derivadas Parciais. Não precisamos mencionar a definição formal de Derivadas Parciais, pois foge do escopo deste trabalho. Mas é importante entendermos como se dá o processo do cálculo e da geometria. Quando calculamos uma derivada parcial em relação a uma determinada variável " u ", por exemplo, fixamos a variável " v " e fazemos variar " u ". Entretanto, o que acontece com a função quando fazemos isso?

Observe a Figura 19, perceba que na imagem à esquerda temos o domínio D no plano com duas linhas uma em relação a " u " e uma em relação a " v ". Quando obtemos a parametrização essa região se projeta em uma superfície, antes uma linha no plano, agora uma curva no espaço. Então, quando calculamos a derivada parcial, na verdade derivamos a curva. Posteriormente, obtemos um vetor, que é tangente à curva. Como desenvolveremos o cálculo em duas variáveis, obteremos dois vetores tangentes.

Depois da ideia intuitiva, entendamos o processo mais formal:

Suponhamos que uma superfície S com representação paramétrica

$$\gamma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

seja diferenciável em $(u_0, v_0) \in D$. Fixando $u = u_0$, obtemos uma função

$$\begin{aligned} I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\rightarrow \gamma(u_0, v), \end{aligned}$$

que define uma curva (chamada curva v) na superfície (Figura 19). Se o vetor

$$\frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

é não nulo, então $\frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0)$ é um **vetor tangente** a esta curva no ponto $\gamma(u_0, v_0)$.

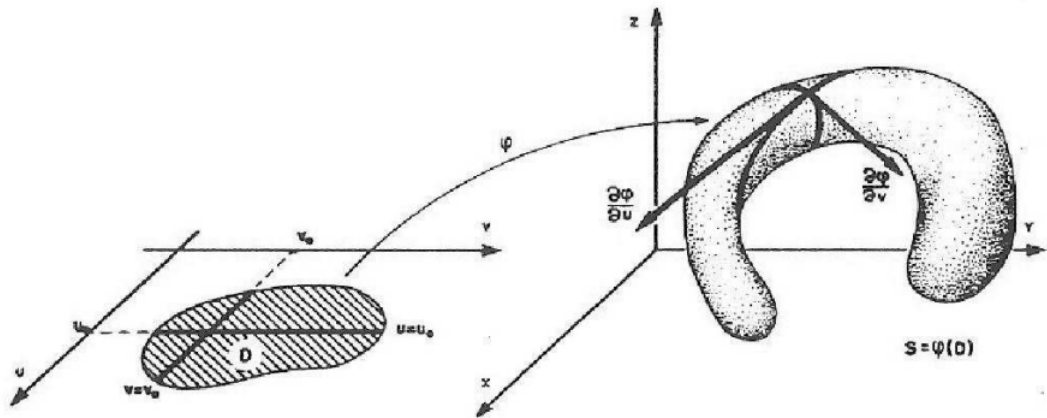
Analogamente, fixado $v = v_0$, podemos considerar a curva definida pela função $u \rightarrow \gamma(u, v_0)$ (chamada curva u) na superfície. Se o vetor

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

é não nulo, então ele é **tangente** a esta curva em $\gamma(u_0, v_0)$.

Quando $N(u_0, v_0) = \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0)$ é não nulo, temos que $N(u_0, v_0)$ é **normal** ao plano gerado pelos vetores $\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0)$.

Figura 19 – Normal gerada por dois vetores tangentes não nulos



Fonte: (PINTO; MORGADO, 2009)

Definição 19. Seja S uma superfície parametrizada por $\gamma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Suponhamos que $\frac{\partial \gamma}{\partial u}$ e $\frac{\partial \gamma}{\partial v}$ sejam contínuas em $(u_0, v_0) \in D$. Se $N(u_0, v_0) = \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0)$ é não nulo, dizemos que S é **regular** em $\gamma(u_0, v_0) \in S$. Neste caso, definimos o **plano tangente** a S em $\gamma(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ como sendo o plano gerado pelos vetores $\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0)$, cuja equação é dada por

$$N(u_0, v_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Uma superfície $S = \gamma(D)$ é regular se é regular em todos os pontos. Intuitivamente, uma superfície regular não tem "bicos".

A ideia de superfície regular é pegarmos o produto vetorial contido na definição supracitada e este ser não nulo, ou seja, são linearmente independentes e estão apontando

para direções diferentes, efetivamente teremos dois vetores independentes que garantem a existência de um plano tangente. Se esse princípio se anular a superfície degenera.

O plano tangente é construído a partir do vetor normal, da variável e de um ponto, como vemos na definição 19.

Agora, iremos exibir um dos conteúdos de extrema importância no estudo das integrais de superfícies, amplamente aplicado a demais ciências e responsável pelo avanço do cálculo de varias superfícies.

Definição 20 (Área da superfície). *Seja S uma superfície parametrizada por $\gamma(u, v)$, $(u, v) \in D$. Definimos a **área** $A(S)$ de S pela fórmula*

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\| du dv, \quad (5.1)$$

onde $\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\|$ é a norma do vetor $N = \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v)$.

Observação 5.1.1. *Se S é decomposta como união finita de superfícies S_i , sua área é a soma das áreas das S_i .*

Observação 5.1.2. *Quando S é definida explicitamente pela equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, a superfície S pode ser parametrizada por $\gamma(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in D$ e $\|N\| = \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial x} \times \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}$. Logo, a fórmula 5.1 é escrita na forma*

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2 + 1} dx dy. \quad (5.2)$$

Podemos justificar a Definição 20 analisando a integral

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\| du dv.$$

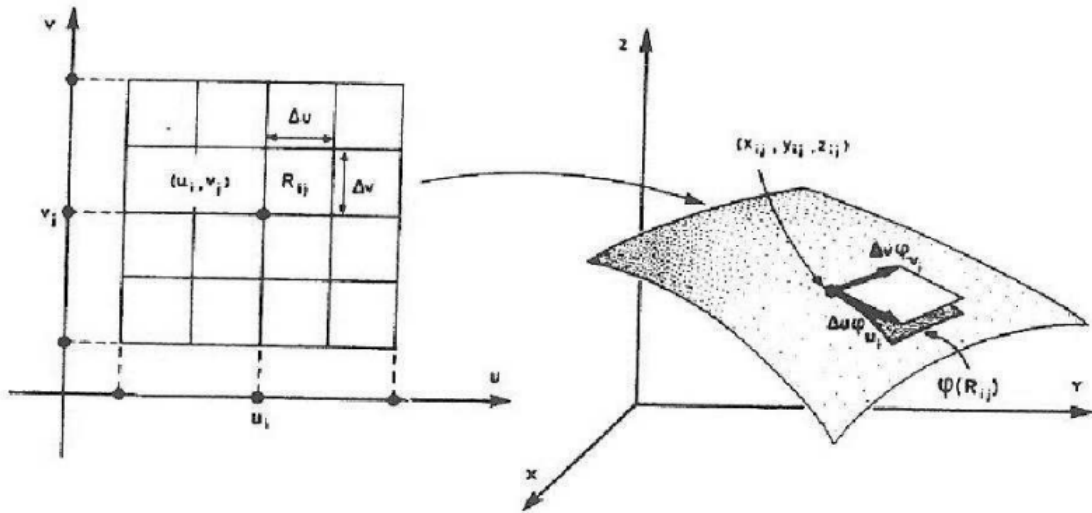
Para isso, suponhamos D uma região fechada em $\mathbb{R}^2$ e a superfície S_1 definida por uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que é parametrizada por $\gamma(u, v)$, sendo $\gamma: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\gamma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)); (u, v) \in D.$$

Essa parametrização $\gamma(u, v)$ levará os retângulos de lados Δu e Δv no domínio D para a superfície $ABCD$ contida na imagem de S_1 , como podemos ver na Figura 20.

Os vetores $\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v)\Delta u$ e $\frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v)\Delta v$ são tangentes à superfície, se fizermos o módulo do produto vetorial dos vetores tangentes encontraremos a área de um paralelogramo formado pelos dois vetores, que é $\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\|$, ao multiplicarmos por Δu e Δv encontramos $\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\| \cdot \Delta u \Delta v$, que é o **elemento de área** em cima da superfície.

Figura 20 – Aproximação para área de superfícies



Fonte: (GUIDORIZZI, 2001)

Este paralelogramo é tangente à superfície no ponto A, e sua área é uma aproximação para a área da superfície $ABCD$.

Se tomarmos Δu e Δv suficientemente pequenos, du e dv respectivamente, de modo que a área da nova superfície $ABCD$ seja igual a área do paralelogramo tangente

$$\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\| du dv = dS.$$

A área total (S) da superfície S_1 será a soma de todas essas áreas infinitesimais tomando todos os retângulos de lados du e dv existentes na região D . Logo, é razoável definir a área de S pela fórmula:

$$S = \iint_{S_1} dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\| du dv.$$

Exemplo 5.1.1. Calcular a área do parabolóide de revolução $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 4$.

Solução 5.1.1. Quando colocamos $x^2 + y^2 = 4$ embora estejamos pensando no espaço, é importante observar a curva de nível 4 no domínio, na base do parabolóide. A mesma é $x^2 + y^2 = 4$, que é uma circunferência de centro na origem e raio 2. Esse sólido sai do $(0,0)$ (origem), segue e para no nível 4, estagnado por uma circunferência de raio 2.

Para calcularmos a área precisamos da equação da superfície parametrizada.

Assim, fazendo

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= u^2 + v^2 \end{aligned}$$

com $u^2 + v^2 \leq 4$, sendo o domínio disco de centro $(0,0)$ e raio 2.

Então, calculando $\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v)$, temos:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) = (1, 0, 2u) \quad e \quad \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) = (0, 1, 2v),$$

Com isso, podemos encontrar o produto vetorial, que é dado por

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \gamma}{\partial v} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{bmatrix} = (-2u, -2v, 1)$$

Entretanto, como precisamos da área da superfície, é necessário extrair o módulo:

$$\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

Substituindo na Fórmula da área 5.1, temos:

$$\iint_{u^2+v^2 \leq 4} \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} \, du \, dv$$

Para esse cálculo, usaremos a conversão para coordenadas polares.

$$u = r \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$v = r \sin \theta, \quad 0 \leq r \leq 2,$$

$$\text{Jacobiano} = r.$$

Dessa forma, teremos $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} \cdot r \cdot dr \, d\theta$. Para calcularmos essa integral aplicaremos a técnica de mudança de variável em uma variável.

$$4r^2 + 1 = t, \quad dt = 8r \, dr$$

$$r = 0 \rightarrow t = 1 \quad r = 2 \rightarrow t = 17.$$

Aplicando à integral,

$$\int_0^{2\pi} \int_1^{17} \sqrt{t} \cdot \frac{dt}{8} = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{17} = \frac{\pi}{6} (\sqrt{17^3} - 1).$$

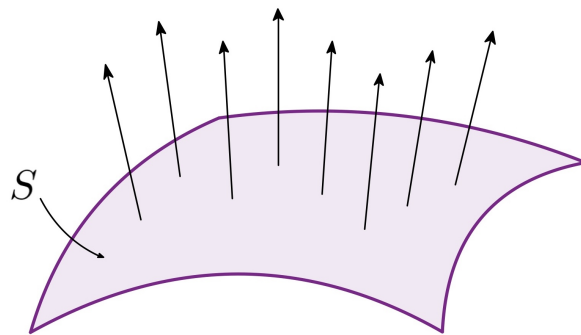
5.1.1 Superfície orientável

Quando calculamos a Integral de Linha de um Campo Vetorial ao longo de uma curva C^1 por partes é natural orientarmos as partes de classe C^1 de modo que o ponto final de cada parte coincida com o ponto inicial daquela que a segue.

Para definir Integral de Superfície de Campos Vetoriais que é a união finita de superfícies coladas pelos bordos¹ comuns, precisamos de um conceito de orientação para a superfície a partir da orientação de cada uma de suas partes. Então, precisamos definir superfícies orientáveis para poder descartar superfícies não orientáveis.

Uma superfície S é orientável quando possui os dois lados. Como podemos ver na Figura 21, ela é orientável, pois todos os vetores normais unitários estão direcionados para cima, ou seja, tem componentes k positivos.

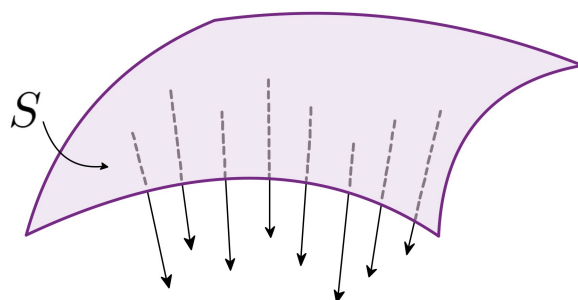
Figura 21 – Orientação para cima



Fonte: (GONÇALVES; FLEMMING, 2007)

Já, a Figura 22, tem orientação para baixo pois, todos os seus vetores normais unitários estão para baixo, tem componentes k negativos.

Figura 22 – Orientação para baixo



Fonte: (GONÇALVES; FLEMMING, 2007)

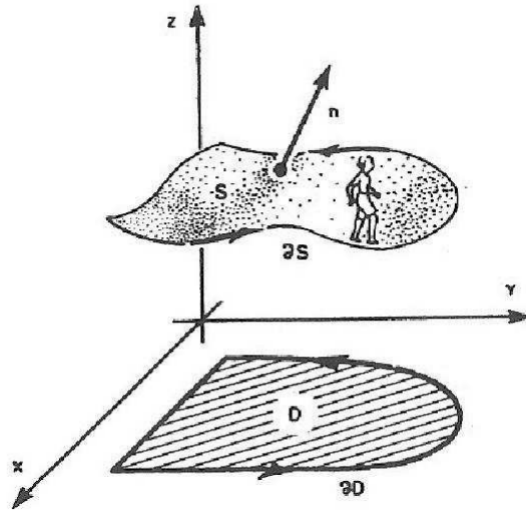
Se a superfície S for fechada, sua orientação pode ser para dentro ou para fora.

¹ Seja S uma superfície parametrizada por $\gamma(u, v)$, $(u, v) \in D$. O **bordo** ∂S de S é a curva de S correspondente por γ à fronteira de D .

Assim, enunciemos sua definição:

Definição 21. Se S é uma superfície orientada por um campo de vetores normais unitários n , dizemos que o bordo ∂S de S está orientado positivamente se a superfície S está à esquerda de uma pessoa que caminha ao longo de ∂S com o vetor n representando sua posição vertical, como na Figura 23.

Figura 23 – Regra da mão direita



Fonte: (PINTO; MORGADO, 2009)

Uma superfície S que é união finita de superfícies S_i coladas pelos bordos comuns está orientada, se é possível orientar cada parte S_i , de modo que, quando os bordos de suas partes estão orientados positivamente, tenhamos bordos comuns a duas partes sendo percorridos em sentido contrário. A Figura 24 mostra uma superfície cilíndrica orientada fechada². Neste caso, se F é um Campo Vetorial contínuo sobre cada S_i , então

$$\iint_S (F \cdot n) ds = \sum \iint_{S_i} (F \cdot n) ds. \quad (5.3)$$

Resumidamente, uma superfície é dita orientável se é possível escolher um vetor normal em cada um de seus pontos, separando-a em lados (dentro e fora, ou acima e abaixo), de modo que este vetor varie continuamente sobre a superfície.

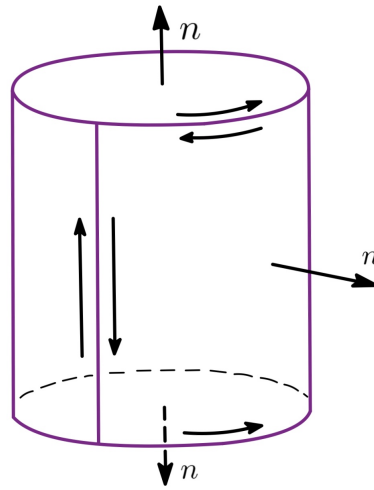
Quando não for possível orientar cada parte S_i de modo que isto ocorra, dizemos que a superfície S **não é uma superfície orientável**.

Um exemplo canônico de uma superfície não orientável é a garrafa de Klein (Ver Figura 26 e a faixa de Möbius, obtida pela junção de duas faixas retangulares, uma delas com uma torção).

De posse dos conteúdos expostos, iniciemos o assunto de Integrais de Superfícies.

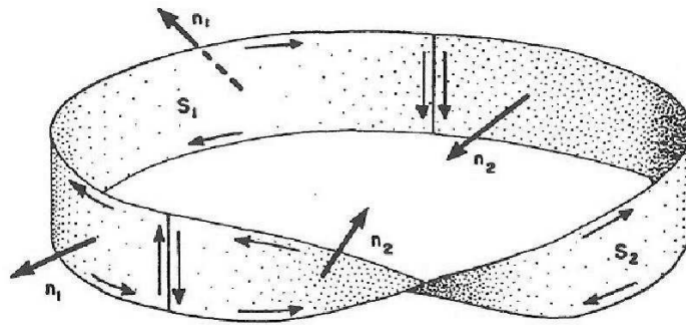
² Uma superfície S é dita **fechada** se S é a fronteira de uma região limitada do $\mathbb{R}^3$.

Figura 24 – Superfície cilíndrica orientada



Fonte: (PINTO; MORGADO, 2009)

Figura 25 – Faixa de Möbius



Fonte: (PINTO; MORGADO, 2009)

5.2 Integral de Superfície de Campo Escalar

A definição de Integral de Superfície de uma função escalar tem uma estreita analogia com a de Integral de Linha, apesar da situação geométrica ser diferente.

Definição 22 (Integral de Superfície). *Sejam S uma superfície parametrizada por $\gamma(u, v)$, $(u, v) \in D$, e $f(x, y, z)$ uma função real contínua definida em S . Definimos a Integral de Superfície de f sobre S por*

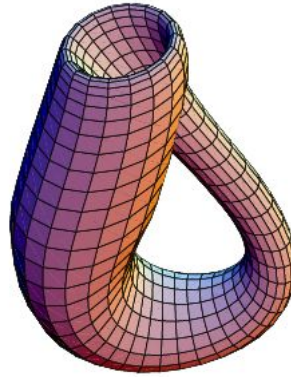
$$\iint_S f ds = \iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f(\gamma(u, v)) \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \gamma}{\partial v} \right\| du dv, \quad (5.4)$$

onde $\frac{\partial \gamma}{\partial u}$ e $\frac{\partial \gamma}{\partial v}$ são definidos como no início deste capítulo.

Se S é decomposta como união finita de superfícies S_i , $i = 1, \dots, n$, então

$$\iint_S f ds = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} f ds.$$

Figura 26 – Garrafa de Klein



Fonte: (WOLFRAM, 2021)

Quando S é definida explicitamente pela equação $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, um raciocínio análogo àquele feito após a definição 20 fornece

$$\iint_S f \, ds = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)^2} \, dx \, dy. \quad (5.5)$$

Se $f(x, y, z) = 1$ sobre S , a equação da Definição 20 se reduz a

$$\iint_S ds = \iint_D \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\| \, du \, dv = \text{área } S.$$

Por esta razão, o símbolo ds pode ser interpretado como "**Elemento de área de superfície**", e a Integral de Superfície $\iint_S f \, ds$ é chamada a integral de f com respeito ao elemento de área ds , estendida sobre a superfície S .

5.3 Integral de Superfície de Campo Vetorial

A motivação deste estudo será o cálculo de fluxos de Campos Vetoriais através de membranas permeáveis, não abordaremos questões extremamente físicas porque esse não é o foco deste trabalho, mas usaremos tais conceitos porque abrangem aplicações à geometria, uma área da matemática que nos ajuda a entender determinadas questões visualmente.

Diante disso, podemos imaginar uma superfície de um fluido escoando – estamos utilizando essa suposição em mecânica dos fluidos, entretanto, poderia ser facilmente aplicada ao contexto do eletromagnetismo também – e uma membrana, uma superfície que é permeável a esse fluido, em outras palavras, pode "passar". Nossa intenção ao expor essa situação é questionar quanto a quantidade de fluido que está atravessando a superfície, esse é o nosso objetivo.

Do ponto de vista geométrico e levando em consideração a situação exibida anteriormente, o fluido que atravessa tem a ver com a componente normal do campo, isto é, vetor normal.

Então, tomamos a superfície parametrizada, regular, e traçamos o vetor normal unitário a esta superfície. O cálculo do fluxo será a Integral de Superfície da componente normal do campo F . Mas, como obtemos essa componente de um campo em uma determinada direção?

Para responder essa pergunta, precisamos da medida do escoamento (componente do campo F) na direção normal. Então, fazemos o produto escalar entre o escoamento e o vetor normal unitário. Posteriormente, integrando isso sobre toda a superfície.

Matematicamente, temos:

Seja S uma superfície parametrizada por $\gamma(u, v)$, $(u, v) \in D$. A esta superfície estão associados dois campos contínuos de vetores normais unitários, a saber:

$$n_1(\gamma(u, v)) = \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

e

$$n_2(\gamma(u, v)) = -n_1(\gamma(u, v)).$$

Dizemos que S está **orientada** se fixarmos sobre S um tal campo de vetores.

Se $F : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um Campo Vetorial contínuo e n um dos campos n_1 ou n_2 definidos anteriormente, denotamos por $F_n = F \cdot n$ a função escalar que a cada ponto de S associa a componente do campo F na direção do vetor n .

Definição 23 (Integral de Superfície em Campo Vetorial). *Seja F um Campo Vetorial contínuo definido numa superfície orientada S parametrizada por $\gamma(u, v)$, $(u, v) \in D$. Definimos a Integral de Superfície de F sobre S por*

$$\iint_S F \cdot ds = \iint_S (F \cdot n) ds = \iint_S F_n ds.$$

Segue da definição da Integral de Superfície que

$$\iint_S (F \cdot n) ds = \iint_D [F(\gamma(u, v)) \cdot n(\gamma(u, v))] \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\| du dv \quad (5.6)$$

$$= \iint_D F(\gamma(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\|} \cdot \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right\| \quad (5.7)$$

$$= \iint_D [F(\gamma(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u, v) \right)] du dv. \quad (5.8)$$

se $n = n_1$.

Observe que esta integral muda de sinal se considerarmos $n = n_2$.

Quando S é definida explicitamente pela equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, temos

$$n_1 = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1}}.$$

Neste caso,

$$\iint_S (F \cdot n) ds = \iint_D [F(x, y, f(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right)] dx dy, \quad (5.9)$$

se $n = n_1$.

6 Os clássicos Teoremas da Análise Vetorial

6.1 Teorema de Green

Enunciaremos agora um dos teoremas de extrema relevância na Análise Vetorial, ele fornece a relação entre uma Integral de Linha em torno de uma curva fechada simples, suave por partes, a uma integral dupla sobre a região de um plano R delimitada pela curva C .

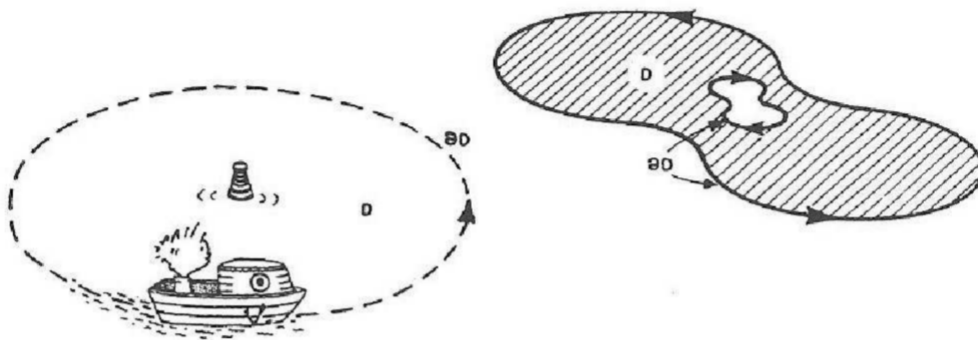
O Teorema de Green, é assim denotado em homenagem ao matemático e físico inglês George Green (1793-1841), o Teorema foi desenvolvido a partir de um trabalho escrito sobre aplicações de Matemática à eletricidade e magnetismo.

Para um melhor entendimento, alguns termos sobre curvas precisam ser revisados, então, visite o Capítulo 1 se necessário.

Antes de enunciar e provar o Teorema de Green, faz-se necessário revisar o conceito de curva simples e introduzir a seguinte definição:

Definição 24. Dizemos que a fronteira ∂D de uma região limitada D do plano xy está **orientada positivamente**, se a região D fica à esquerda, ao percorrermos a fronteira ∂D .

Figura 27 – Ilustração da orientação da fronteira ∂D e da região limitada D .



Fonte: (PINTO; MORGADO, 2009)

Teorema 6.1.1 (Teorema de Green). Seja D uma região fechada e limitada do plano xy , cuja fronteira ∂D está orientada positivamente e é parametrizada por uma função C^1 por partes, de modo que ∂D seja percorrida apenas uma vez. Se $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ é um Campo Vetorial de classe C^1 num subconjunto aberto que contém D , então

$$\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Esse teorema estabelece uma igualdade, de um lado integral dupla e do outro Integral de Linha. Uma das condições para se utilizar o teorema é a curva ser de classe C^1 , isto é, ter derivada e esta ser contínua, porque supor que o integrando é de classe C^1 garante a continuidade das derivadas e sua integrabilidade.

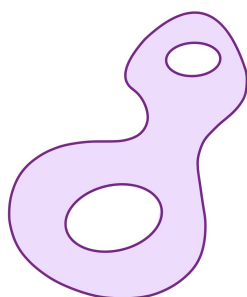
Anteriormente, quando abordamos Integral de Linha de Campo Escalar, podemos notar que, se percorrermos a curva em um sentido positivo ou negativo o resultado será o mesmo, porque no desenvolvimento do cálculo encontramos o módulo do vetor tangente. Já na Integral de Linha de Campo Vetorial é o produto escalar do campo pelo vetor tangente. Assim sendo, se percorrermos em sentido diferentes, o vetor tangente se altera, logo, altera-se o sinal do produto escalar.

Como a Integral de Green utiliza a Integral de Linha de Campo Vetorial a componente externa deve estar no sentido anti-horário e a componente interna no sentido horário.

Observação 6.1.1. *A região R pode ter várias curvas fechadas simples, como podemos ver na Figura 28.*

Essa região é fechada, limitada, cuja fronteira é formada por três curvas fechadas simples disjuntas. Sendo assim, uma região possível para o Teorema de Green.

Figura 28 – Região limitada por duas curvas fechadas



Fonte: Acervo da autora

Porém, se tivéssemos uma região como a descrita na Figura 29, que em alguns pontos isolados possui uma situação angulosa (como um retângulo, por exemplo), ainda assim pode ser estar satisfazendo as características para o Teorema de Green, pois ela é fechada, limitada por uma curva fechada simples suave por partes (Tem quatro pontos onde ela deixa de ser regular, sem reta tangente).

Observação 6.1.2. *Um dos pré-requisitos para o Teorema de Green é a orientação positiva. Esta, é a região R que fica à esquerda quando percorrermos o bordo, que é a curva C . Na Figura 28, a componente externa está no sentido anti-horário e a componente interna está no sentido horário.*

Figura 29 – Região com pontos angulosos



Fonte: Acervo da autora

Demonstração 6.1.1. Vamos considerar D uma região simples, ou seja, vamos supor que D pode ser descrita simultaneamente por

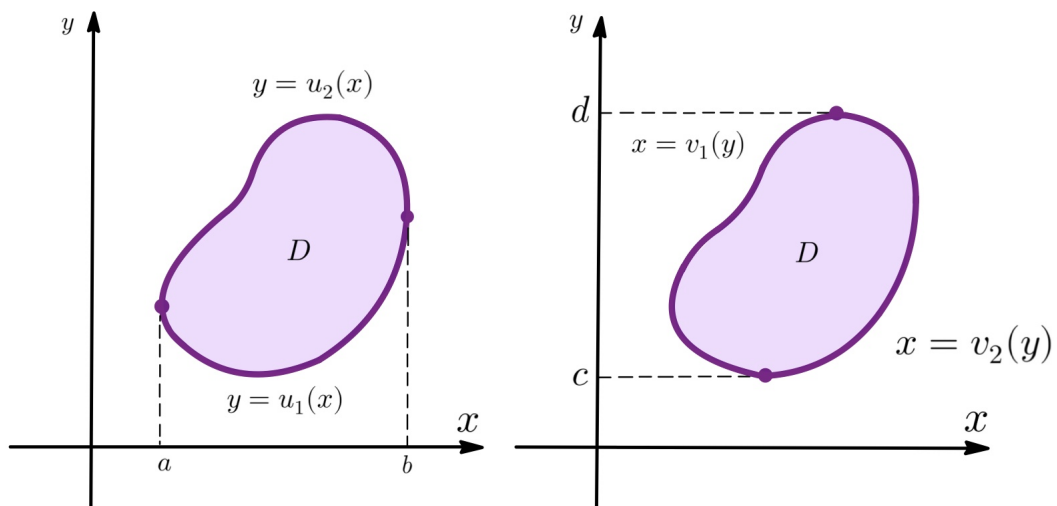
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\} \quad (6.1)$$

e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1(y) \leq x \leq u_2(y), \quad c \leq y \leq d\}, \quad (6.2)$$

como mostra a Figura 30.

Figura 30 – Região tipo I e tipo II



Fonte: (PINTO; MORGADO, 2009)

Como,

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy + \iint_D -\frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy,$$

podemos calcular cada integral do segundo membro desta equação separadamente.

Usando (6.1), obtemos

$$\begin{aligned}
 \iint_D -\frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \int_{y=u_1(x)}^{y=u_2(x)} -\frac{F_1}{\partial y} dy dx \\
 &= \int_a^b [F_1(x, u_1(x)) - F_1(x, u_2(x))] dx \\
 &= \int_a^b F_1(x, u_1(x)) dx - \int_a^b F_1(x, u_2(x)) dx \\
 &= \oint_{\partial D} F_1 dx.
 \end{aligned}$$

Analogamente, usando (6.2), mostramos que

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} F_2 dy.$$

Se D não é simples, a decompomos como união finita de regiões simples, digamos $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$, onde cada região simples D_k tem fronteira ∂D_k , C^1 por partes ($k = 1, \dots, n$), aplicamos o Teorema de Green a cada região D_k , obtendo

$$\int_{D_k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D_k} F_1 dx + F_2 dy.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 &\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \\
 &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy + \dots + \iint_{D_n} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \\
 &= \oint_{\partial D_1} F_1 dx + F_2 dy + \dots + \oint_{\partial D_n} F_1 dx + F_2 dy.
 \end{aligned}$$

A fronteira de D é formada por partes das curvas ∂D_k . As partes de ∂D_k que não constituem a fronteira de D agem como fronteira comum a duas regiões simples. Este fato está ilustrado na Figura 31. Suponhamos que a curva C é suave e a região R é representada da seguinte forma:

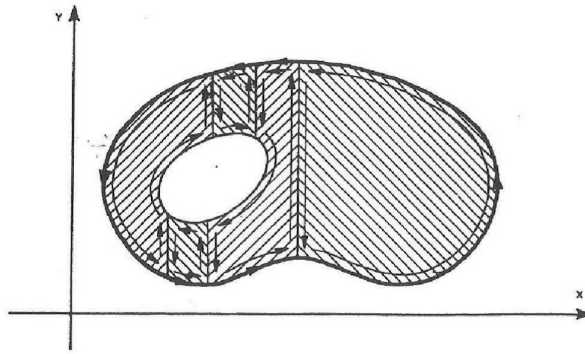
Uma parte δ de ∂D_k que é fronteira comum a duas regiões simples será percorrida duas vezes em sentidos opostos. Assim,

$$\int_{\delta} F_1 dx + F_2 dy + \int_{\delta} F_1 dx + F_2 dy = 0$$

Portanto, enquanto as partes das curvas ∂D_k que formam a fronteira de D contribuem para $\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy$, as outras partes se cancelam, fornecendo assim

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy.$$

Isto conclui a demonstração do teorema.

Figura 31 – Fronteira da região D com curvas ∂D_k por partes.

Fonte: (PINTO; MORGADO, 2009)

Exemplo 6.1.1. Dada uma fronteira C que limita a região R pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4x$, calcule a área da região R através do Teorema de Green.

Solução 6.1.1. A curva C é formada por C_1 e C_2 definida por $y = x^2$ e $y = 4x$, respectivamente.

Então,

$$A = \oint_C -y dx = \int_{C_1} -y dx + \int_{C_2} -y dx = \int_{C_1} -y dx + \int_{C_2} -y dx$$

Substituindo os dados da curva C_1 , temos:

$$\int_{C_1} -y dx = \int_0^4 -x^2 dx = \left. -\frac{x^3}{3} \right|_0^4 = -\frac{64}{3}$$

Substituindo os dados da curva C_2 , temos:

$$\int_{C_2} -y dx = \int_0^4 -4x dx = \left. -2x^2 \right|_0^4 = -32$$

$$\text{Então, } A = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}.$$

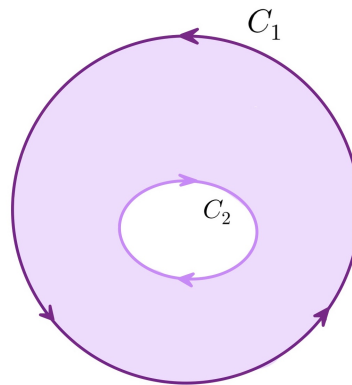
6.1.1 Teorema de Green para regiões com "buracos".

Podemos observar que o Teorema de Green também se estende a regiões com "buracos", ou seja, são limitadas por duas ou mais curvas fechadas simples, suave por partes, como podemos ver na Figura 32 abaixo.

Note que, a região R está limitada por $C = C_1 \cup C_2$. Onde a orientação de C_1 está no sentido anti-horário e C_2 no sentido horário.

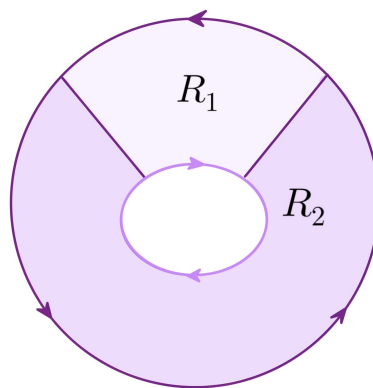
Ao aplicar o Teorema de Green na região, temos:

Figura 32 – Região limitada entre duas curvas



Fonte: Acervo da autora

Figura 33 – Região ao aplicar o Teorema de Green



Fonte: Acervo da autora

$$\begin{aligned}
 \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA &= \iint_{R_1} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA \\
 &= \oint_{C_1} f_1 dx + f_2 dy + \oint_{C_2} f_1 dx + f_2 dy \\
 &= \oint_C f_1 dx + f_2 dy.
 \end{aligned}$$

Vejamos um exemplo que mostra o auxílio do Teorema de Green no desenvolvimento dos cálculos.

Exemplo 6.1.2. Calcule $\int_C e^{x^2} dx + (3x + \operatorname{sen} y^5) dy$ sendo C a elipse $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y-1^2}{4} = 1$ com orientação no sentido horário.

Solução 6.1.2. 1. Pela definição: Uma rápida análise nos mostra que o caminho é trabalhoso;

2. Usando a teoria de Campos Conservativos: Teremos que provar que o campo

$$F(x, y) = (e^{x^2}, (3x + \operatorname{sen} y^5))$$

é Conservativo. Ao calcular o $\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}, -\frac{\partial P}{\partial y} \right)$, verificamos que o mesmo resulta em $(3, -0) = 3 \neq 0$. Logo, F não é um Campo Conservativo e não podemos usar tal teoria;

3. Usando o Teorema de Green:

Importante: o rotacional é mais simples que o campo.

Atenção: o sentido do percurso não é coerente. Assim sendo, o sinal será alterado. Então, resolvendo por esse teorema, encontramos:

$$\int_C f_1 dx + f_2 dy = - \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dA = \iint_R 3 dA = 3 \operatorname{area}(D) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \pi = -18\pi$$

Observação 6.1.3. Quando algum intervalo do interior não pertence ao domínio do campo, não podemos aplicar o Teorema de Green. Desse modo, convém utilizar a técnica que isola a singularidade, tomando, por exemplo, uma circunferência com raio convergindo para zero, para que assim a região esteja apta para a devida execução do teorema.

6.1.2 Interpretação vetorial do Teorema de Green

Suponhamos que D é uma região fechada e limitada do plano xy cuja fronteira ∂D é uma curva orientada no sentido anti-horário. Se ∂D tem uma parametrização

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b$$

de classe C^1 , cujo vetor tangente é não nulo em cada ponto de ∂D , então denotamos os vetores tangente e normal unitário por

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \left(\frac{x'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \frac{y'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right)$$

e

$$n(t) = \left(\frac{y'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, -\frac{x'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right),$$

respectivamente.

Se $F = (F_1, F_2)$ é um Campo Vetorial de classe C^1 definido num subconjunto aberto que contém D , então a Integral de Linha de F ao longo de ∂D pode ser escrita em termos do vetor $T(t)$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b (F(\gamma(t)) \cdot T(t) \|\gamma'(t)\|) dt = \oint_{\partial D} (F \cdot T) ds. \end{aligned}$$

Neste caso, o Teorema de Green assume a forma

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} (F \cdot T) ds.$$

Este resultado é um caso particular do Teorema de Stokes, que veremos mais tarde.

Agora, usando o vetor normal unitário $n(t)$, a Integral de Linha do Campo Vetorial $G = (-F_2, F_1)$ ao longo de ∂D é dada por

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} -F_2 dx + F_1 dy &= \int_a^b G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (F(\gamma(t)) \cdot n(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \oint_{\partial D} (F \cdot n) ds. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Green ao campo G , obtemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} (F \cdot n) ds.$$

Este resultado é a versão em duas dimensões do Teorema de Gauss, que veremos posteriormente.

A partir dos próximos subtópicos, verificaremos o Teorema de Stokes no espaço e o Teorema da Divergência para alguns conjuntos.

6.2 Teorema de Stokes no espaço

O Teorema de Stokes pode ser visto como uma forma mais geral do Teorema de Green, pois enquanto este envolve uma integral dupla sobre uma região plana com uma Integral de Linha em torno de uma curva plana, o Teorema de Stokes relaciona a Integral de Superfície do Rotacional de um Campo Vetorial à Integral de Linha desse mesmo Campo Vetorial em torno da fronteira da superfície, isto é, o cálculo do Teorema de Green a uma curva no espaço.

Teorema 6.2.1 (Teorema de Stokes). *Sejam S uma superfície orientada, parametrizada por $\gamma(u, v)$, $(u, v) \in D$, onde D é uma região fechada do plano uv , limitada por uma curva C^1 por partes e γ uma função de classe C^2 num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo D . Se $F = (F_1, F_2, F_3)$ é um Campo Vetorial de classe C^1 definido num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$ que contém S cujo bordo ∂D está orientado positivamente, então*

$$\iint_S (\text{rot } F \cdot n) ds = \int_{\partial S} F \cdot dr. \quad (6.3)$$

Demonstração: Consideremos S parametrizada por

$$\gamma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

e orientada com campo de vetores normais $n = \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \gamma}{\partial v} \right\|}$, onde

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \gamma}{\partial v} = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right).$$

Por (5.8), temos que

$$\begin{aligned} & \iint_S (\text{rot } F \cdot n) ds = \\ &= \iint_D \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] dudv, \end{aligned}$$

onde o integrando desta integral dupla é calculado em $\gamma(u, v)$.

Para completar a demonstração basta verificar que

$$\int_{\partial S} F_1 dx = \iint_D \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] dudv, \quad (6.4)$$

$$\int_{\partial S} F_2 dy = \iint_D \left[-\frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] dudv \quad (6.5)$$

e

$$\int_{\partial S} F_3 dz = \iint_D \left[-\frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right] dudv \quad (6.6)$$

pois somando estas três equações obtemos a Equação (6.3) do Teorema de Stokes. Como as três equações são análogas, provaremos apenas (6.4).

Suponhamos que $h(t) = (u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$, é uma parametrização da fronteira de D , orientada de modo que $\gamma(h(t))$ seja uma parametrização do bordo ∂S de S , orientado positivamente. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F_1 dx &= \int_a^b \left[F_1(\gamma(h(t))) \frac{d}{dt}(x(h(t))) \right] dt \\ &= \int_a^b \left[F_1(\gamma(h(t))) \left(\frac{\partial x}{\partial u}(h(t)) u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}(h(t)) v'(t) \right) \right] dt \\ &= \int_{\partial D} F_1(\gamma(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) du + \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) dv \right) \\ &= \int_{\partial D} F_1(\gamma(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) du + F_1(\gamma(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) dv. \end{aligned}$$

Como γ é de classe C^2 , podemos aplicar o Teorema de Green a esta última integral, obtendo

$$\int_{\partial S} F_1 dx = \iint_F \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(F_1(\gamma(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(F_1(\gamma(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \right) \right] dudv.$$

Mas,

$$\frac{\partial}{\partial u} \left((F_1 \circ \gamma) \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left((F_1 \circ \gamma) \frac{\partial x}{\partial u} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial u}(F_1 \circ \gamma) \frac{\partial x}{\partial v} + (F_1 \circ \gamma) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial v}(F_1 \circ \gamma) \frac{\partial x}{\partial u} - (F_1 \circ \gamma) \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \\
&= \frac{\partial}{\partial u}(F_1 \circ \gamma) \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}(F_1 \circ \gamma) \frac{\partial x}{\partial u} \\
&= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} \\
&= -\frac{\partial F_1}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\partial F_1}{\partial z} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\
&= -\frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\partial S} F_1 dx = \iint_D \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv,$$

o que prova (6.4).

Observação 6.2.1. No caso particular em que S é uma região no plano xy e $n = (0, 0, 1)$, a Equação (6.4) fornece

$$\int_{\partial S} F_1 dx + F_2 dy = \int_{\partial S} F \cdot r = \iint_S (\text{rot} F \cdot n) ds = \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Isto prova que o Teorema de Stokes é uma extensão do Teorema de Green.

Exemplo 6.2.1. Calcule $\iint_S (\text{rot} F) \cdot n dS$, onde $F(x, y, z) = (y, x + y)$, $\sigma(u, v) = (u, v, 2 - u^2 - v^2)$ com $u^2 + v^2 \leq 1$, sendo n a normal apontado para cima.

Solução 6.2.1. Pelo Teorema de Stokes, temos:

$$\oint_C F d\gamma = \iint_S \text{rot} F \cdot n dS$$

Com parametrização da superfície,

$$\gamma(t) = \sigma(\cos t, \sin t, 1) = (\cos t, \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Substituindo, temos:

$$\int_C F d\gamma = \int_0^{2\pi} [\sin t, (\cos t + \sin t)] [-\sin t, \cos t] dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t dt.$$

Então,

$$\int_0^{2\pi} -\sin^2 t dt = -\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right] dt = -\pi.$$

6.2.1 Consequência sobre o Teorema de Stokes

1 - Se S_1 e S_2 são duas superfícies com a mesma curva de bordo orientada C ambas satisfazendo as hipóteses do teorema em questão, então,

$$\iint_{S_1} F dS = \oint_C F \cdot d\gamma = \iint_{S_2} F dS.$$

2 - No capítulo sobre Campos Conservativos foi abordado que se F é conservativo, então $\int_C F \cdot d\gamma = 0$ para todo caminho fechado C . Agora, consideremos uma superfície orientada S cujo o bordo é a curva C . Pelo Teorema de Stokes podemos concluir que,

$$\int_C F \cdot d\gamma = \iint_S \text{rot} F \cdot dS = \iint_S 0 \cdot dS = 0.$$

6.3 Teorema da Divergência ou de Gauss

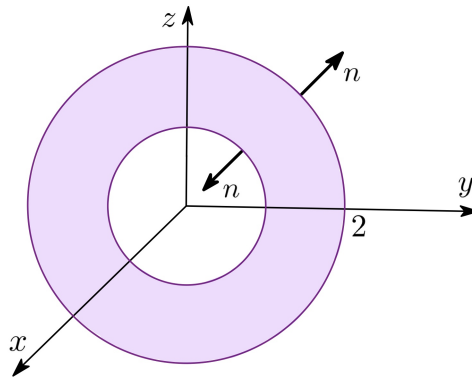
O Teorema do Divergente, também chamado como Teorema de Gauss, estabelece uma relação entre a integral sobre uma superfície e a Integral de Linha sobre a curva (que é o bordo desta superfície). O Teorema de Gauss que passamos a expor, relaciona uma integral tripla num sólido de $\mathbb{R}^3$ com a integral sobre a superfície que é fronteira deste sólido.

Seja W uma região limitada de $\mathbb{R}^3$, tendo como fronteira uma superfície ∂W . Dizemos que ∂W está **orientada positivamente** se o vetor normal em cada ponto de ∂W aponta para fora de W . Por exemplo, se W é a região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\},$$

sua fronteira ∂W é formada por duas esferas centradas na origem. Do qual, está orientada positivamente se os vetores normais à esfera exterior apontarem no sentido contrário à origem, e os vetores normais à esfera interior apontarem para a origem, como mostra a Figura 34.

Figura 34 – Duas esferas com orientações da curva e vetor normal.



Fonte: (PINTO; MORGADO, 2009)

Teorema 6.3.1 (Teorema de Gauss). *Seja W uma região fechada e limitada de $\mathbb{R}^3$ cuja fronteira ∂W é uma superfície orientada positivamente. Se F é um Campo Vetorial de classe C^1 num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$ que contém W , então*

$$\iint_{\partial W} (F \cdot n) ds = \iiint_W \text{div} F dx dy dz \quad (6.7)$$

Demonstração: Suponhamos primeiramente, que W é uma região simples, isto é, W é uma região do tipo I, II e III simultaneamente.

Se $F = (F_1, F_2, F_3)$, podemos escrever o lado direito de (6.7) na forma

$$\iiint_W \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iiint_W \frac{\partial F_1}{\partial x} \, dx \, dy \, dz + \iiint_W \frac{\partial F_2}{\partial y} \, dx \, dy \, dz + \iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx \, dy \, dz.$$

Por outro lado, a Integral de Superfície da Equação (6.7) é dada por:

$$\begin{aligned} &= \iint_{\partial W} (F \cdot n) \, ds = \iint_{\partial W} [(F_1, F_2, F_3) \cdot n] \, ds \\ &= \iint_{\partial W} [(F_1, 0, 0) \cdot n] \, ds + \iint_{\partial W} [(0, F_2, 0) \cdot n] \, ds + \iint_{\partial W} [(0, 0, F_3) \cdot n] \, ds. \end{aligned}$$

A demonstração estará concluída se provarmos as identidades

$$\iiint_W \frac{\partial F_1}{\partial x} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial W} [(F_1, 0, 0) \cdot n] \, ds \quad (6.8)$$

$$\iiint_W \frac{\partial F_2}{\partial y} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial W} [(0, F_2, 0) \cdot n] \, ds \quad (6.9)$$

$$\iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial W} [(0, 0, F_3) \cdot n] \, ds. \quad (6.10)$$

Para provar (6.10), descrevemos W como uma região de tipo I, ou seja,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y), \quad (x, y) \in D\}.$$

Esta região é limitada inferiormente por uma superfície S_1 de equação

$$z = f_1(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

limitada superiormente por uma superfície S_2 de equação $z = f_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, e (possivelmente) por uma superfície S_3 que é uma porção de cilindro gerada por uma reta paralela ao eixo z ao longo da fronteira de D , como mostra a figura abaixo.

Temos

$$\begin{aligned} \iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx \, dy \, dz &= \iint_D \left[\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dz \right] \, dx \, dy \\ &= \iint_D [F_3(x, y, f_2(x, y)) - F_3(x, y, f_1(x, y))] \, dx \, dy. \end{aligned}$$

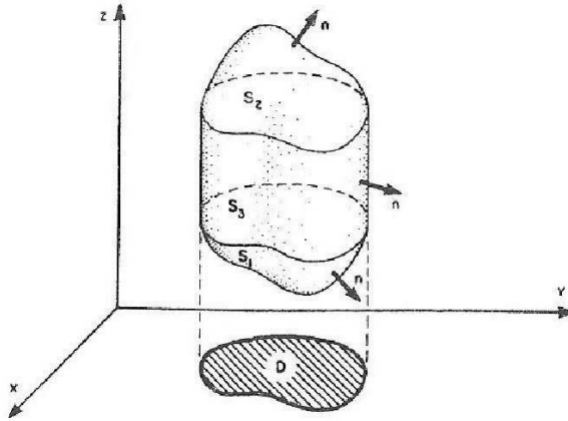
Por outro lado,

$$\begin{aligned} &\iint_{\partial W} [(0, 0, F_3) \cdot n] \, ds = \\ &\iint_{S_1} [(0, 0, F_3) \cdot n] \, ds + \iint_{S_2} [(0, 0, F_3) \cdot n] \, ds + \iint_{S_3} [(0, 0, F_3) \cdot n] \, ds. \end{aligned}$$

Em S_3 , o campo de vetores normais unitários é paralelo ao plano xy . Logo,

$$(0, 0, F_3) \cdot n = 0$$

Figura 35 – Região limitada por superfícies



Fonte: (PINTO; MORGADO, 2009)

e, portanto,

$$\iint_{S_3} [(0, 0, F_3) \cdot n] ds = 0.$$

Em S_2 , o campo de vetores normais apontados para fora de W é dado por

$$N_2 = \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right).$$

Então, por (5.9),

$$\begin{aligned} &= \iint_{S_2} [(0, 0, F_3) \cdot n] ds \\ &= \iint_D \left[(0, 0, F_3(x, y, f_2(x, y))) \cdot \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right) \right] dx dy \\ &= \iint_D F_3(x, y, f_2(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Em S_1 , o campo de vetores normais que aponta para fora de W é dado por

$$N_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, 1 \right).$$

Logo, por (5.9),

$$\begin{aligned} &\iint_{S_1} [(0, 0, F_3) \cdot n] dx dy \\ &= \iint_D \left[(0, 0, F_3(x, y, f_1(x, y))) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right) \right] dx dy \\ &= \iint_D -F_3(x, y, f_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Assim,

$$\iint_{\partial W} [(0, 0, F_3) \cdot n] ds = \iint_D [F_3(x, y, f_2(x, y)) - F_3(x, y, f_1(x, y))] dx dy,$$

o que prova (6.10). A demonstração de (6.9) e (6.10) são análogas.

Quando W não é simples, podemos decompô-la como uma união finita de regiões simples, isto é, $W = W_1 \cup \dots \cup W_n$ (a região da Figura (34) é uma região de oito regiões simples, uma em cada octante). Usando a Fórmula 6.7 do Teorema de Gauss em cada região simples, obtemos

$$\iiint_W \operatorname{div} F dx dy dz = \iint_{\partial W_1} (F \cdot n) ds + \dots + \iint_{\partial W_n} (F \cdot n) ds.$$

Observando que os vetores normais exteriores à fronteira comum de duas regiões simples são opostos, concluímos que as integrais de superfície correspondentes são simétricas e, portanto, se cancelam. Assim,

$$\iint_{\partial W_1} (F \cdot n) ds + \dots + \iint_{\partial W_1} (F \cdot n) ds = \iint_{\partial W} (F \cdot n) ds,$$

o que completa a demonstração.

Exemplo 6.3.1. Calcule $\iint_S F \cdot dS$ em que

$$F(x, y, z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \operatorname{sen}(xy))$$

e S é a superfície da região B limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0, y = 0$ e $y + z = 2$

Solução 6.3.1. Pelo Teorema de Gauss, temos:

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint_B \operatorname{div} F dV = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z^2} 3y dy dz dx = \frac{184}{35}$$

7 Teorema mais geral

No último capítulo desta monografia, optamos por apresentar uma versão mais geral do Teorema Stokes – base para a conceituação dos demais teoremas clássicos da Análise Vetorial – pouco discutido nos trabalhos de cálculo vetorial, já que boa parte dos artigos e livros sobre o assunto em questão findam após a exposição dos teoremas supracitados. Entretanto, questões surgem acerca de possíveis generalizações desses teoremas e um dos grandes avanços na matemática foi esse estudo mais avançado da Análise Vetorial, formulado em termos de Formas Diferenciais.

Para tanto, utilizou-se como sustentação teórica o artigo de conclusão de curso *Formas diferenciais* de André Fabiano¹ e o livro *Cálculo vetorial com formas diferenciais* de Coutinho.²

7.1 Introdução a Formas Diferenciais

O conceito de Forma Diferencial, estende-se a uma generalização de ferramentas, tais como o gradiente, divergente e rotacional. Este conceito moderno e notação utilizada em aplicações físicas atuais, se devem a Elie Cartan. O Cálculo de Cartan leva a uma notável unificação de conceitos e Teoremas de Análise Vetorial, mostrando que a utilização das formas diferenciais está amplamente disseminada em Geometria Diferencial e Análise avançada.

Para Cartan, a noção é que o vetor se baseia na correspondência de um-para-um entre os espaços lineares de vetores de deslocamentos e operadores diferenciais direcionais (PERUCCHI, 2013).

A Análise Vetorial oferece uma maneira mais conveniente para tratar os problemas em física e o cálculo tensorial tornam ainda mais concisas e gerais as equações empregadas nestes problemas.

Uma grande vantagem do tratamento dos problemas físicos com Formas Diferenciais, é que elas generalizam como tensores, porém com a simplicidade dos vetores.

A Forma Diferencial Exterior no espaço tridimensional com coordenadas x, y, z é uma expressão obtida através da combinação linear de funções lineares dx, dy, dz das coordenadas. As operações de adição e multiplicação obedecem às leis associativa e distributiva comuns; entretanto, no caso da multiplicação, ela obedece à lei anticomutativa, já que não é comutativa.

Por esta razão, representamos esta multiplicação de formas por uma wedge $\wedge$.

¹ (GALVÃO, 2016)

² (COUTINHO, 2015)

Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano, denotamos $(\mathbb{R}^n)^* = \{T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; T \text{ é linear}\}$ – que é o conjunto de todas as transformações lineares de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – como o espaço dual (para mais informações veja o livro *Álgebra Linear*– Elon Lages Lima)³. Importante notar que, existe uma relação direta de $\mathbb{R}^n$ com $(\mathbb{R}^n)^*$, pois assim como o primeiro, o segundo também é um espaço vetorial, além de terem a mesma dimensão. Verifiquemos de maneira simples o exposto:

Dada uma base de $\mathbb{R}^n$, por exemplo a canônica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre a base do $\mathbb{R}^n$, que é $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, e uma base do espaço dual $(\mathbb{R}^n)^*$ dada por $\{dx_1, dx_2, \dots, dx_n\}$, definimos da seguinte maneira:

$$dx_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Isto é, dx_i é a transformação linear que manda o i -ésimo eixo de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, como uma identidade, pois manda o vetor unitário no vetor unitário e estendemos por linearidade.

7.2 Formas diferenciais

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^1 . Para todo $p \in U$, a diferencial $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é linear (essa diferencial é o gradiente ou as coordenadas do gradiente). Como a diferencial tem esse comportamento, podemos escrever na base do dual, ou seja, $df_p \in (\mathbb{R}^n)^*$. Assim, teremos

$$df_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx_i(p), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = df_p(e_i).$$

Assim, df é uma aplicação que associa cada p em U no espaço dual $(\mathbb{R}^n)^*$, ou seja, $df : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$.

Posterior aos conceitos apresentados, podemos definir a 1-forma diferencial.

7.2.1 1-forma diferencial

Definição 25. É uma aplicação $\omega : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ dada por

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) dx_i(p)$$

onde $a_i(p)$ são funções de U em $\mathbb{R}$. Então,

$$\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n.$$

Essa é a representação mais comum para as 1-formas, com ela se torna mais fácil definirmos duas operações no conjunto das formas diferenciais, a **adição** e o **produto por escalar** (neste caso, funções reais).

³ (LIMA, 2006)

Definição 26 (Adição de 1-formas). *Seja $\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$ e $\mu = b_1 dx_1 + \cdots + b_n dx_n$ duas 1-formas, definidas em um subconjunto de $B \times \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$. A 1-forma $\omega + \mu$ é definida como*

$$\omega + \mu = (a_1 + b_1) dx_1 + \cdots + (a_n + b_n) dx_n.$$

Definição 27 (Produto por escalar). *Seja $\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$ uma 1-forma definida em um subconjunto de $B \times \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ e $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real. A 1-forma $f \cdot \omega$ é definida como*

$$f \cdot \omega = (f a_1) dx_1 + \cdots + (f a_n) dx_n,$$

onde $f a_i$ denota a multiplicação usual entre funções.

Observação 7.2.1. *O conjunto das 1-formas diferenciais munido destas duas operações forma um espaço vetorial.*

Um aspecto relevante nesse estudo, é entendermos que nem toda 1-forma é diferencial de uma função, existem 1-formas que não vem de derivadas de funções (temos o contra-exemplo 7.2.1 logo abaixo). Entretanto, quando há casos de ocorrência $\omega = df$, então ω é chamada de **1-forma exata**.

Definição 28 (1-forma exata). *Uma 1-forma ω é exata, se é a derivada de uma função e pode ser escrita como*

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx_i(p),$$

isto é, as funções $a_i(p)$ são as derivadas parciais de f .

Uma condição necessária para que ω seja exata é que satisfaça a condição de Schwartz, onde as derivadas mistas devem ser iguais,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

$$\text{isto é, } \frac{\partial a_i(p)}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j(p)}{\partial x_i}.$$

Se uma 1-forma ω satisfaz a condição supracitada, ou seja, $\frac{\partial a_i(p)}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j(p)}{\partial x_i}$ dizemos que ω é uma **1-forma fechada**.

Importante salientar que, nem toda forma fechada é exata. A seguir, exibiremos um contra-exemplo que demonstra esse fato.

Exemplo 7.2.1 (1-forma fechada não exata). *Seja $\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ dada por*

$$\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Observação 7.2.2. Vimos anteriormente esse exemplo, todavia no $\mathbb{R}^2$, agora o mesmo se encontra no espaço dual.

Solução 7.2.1. Façamos $a = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ e $b = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Ao verificarmos a regra de Schwartz, obtemos uma forma fechada, pois,

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{\partial a}{\partial y},$$

mas, o vetor $v = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ não satisfaz as condições de um Campo Gradiente porque não está definido no ponto $(0, 0)$ então, o conjunto não é simplesmente conexo. Logo, a forma não é exata.

7.2.2 2-formas

Antes de enunciarmos a definição de uma 2-forma, faz-se necessário conhecermos o significado das aplicações bilineares e alternadas.

Definição 29. Seja $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que ϕ é **bilinear** se:

1. $\phi(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda \phi(u_1, v) + \phi(u_2, v)$;
2. $\phi(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda \phi(u, v_1) + \phi(u, v_2)$.

Definição 30. Seja $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que ϕ é **alternada** ou (anti-simétrica) se $\phi(v_1, v_2) = -\phi(v_2, v_1)$, ou seja, troca a ordem dos vetores e o sinal é alterado.

Seja $\wedge^2(\mathbb{R}^n)^*$ o conjunto das aplicações $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, bilineares e alternadas. Façamos $\wedge^2(\mathbb{R}^n)^*$ a partir do conjunto $(\mathbb{R}^n)^* = \wedge^1(\mathbb{R}^n)^*$. da seguinte forma: Seja $\phi_1, \phi_2 \in (\mathbb{R}^n)^*$, duas aplicações do espaço dual, definimos $\phi_1 \wedge \phi_2$ (produto exterior ou produto wedge) por

$$\phi_1 \wedge \phi_2(v_1, v_2) = \det(\phi_i(v_j)) = \begin{vmatrix} \phi_1(v_1) & \phi_1(v_2) \\ \phi_2(v_1) & \phi_2(v_2) \end{vmatrix}.$$

Note que $\phi_1 \wedge \phi_2$ é bilinear e anti-simétrica.

Denotaremos $(dx_i \wedge dx_j)_p$ como $(dx_i \wedge dx_j)_p$ e $\wedge^0(\mathbb{R}^n)^* = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\} \approx \mathbb{R}$.

Sendo que $(dx_i \wedge dx_j)_p = -(dx_j \wedge dx_i)_p$ e $(dx_i \wedge dx_i)_p = 0$. O conjunto

$$\{(dx_i \wedge dx_j)_p; i < j\}$$

nos fornece uma base do espaço de $\wedge^2(\mathbb{R}^n)^*$.

Definição 31 (2-forma). Uma 2-forma (ou forma de grau 2) é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$ em um elemento $\omega(p) \in \wedge^2(\mathbb{R}^n)^*$. Podemos escrever

$$\omega = \sum_{i < j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

7.2.3 k-formas

Em geral, $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)^*$ é o conjunto das aplicações k-lineares e alternadas

$$\phi: \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

onde, k-linear significa ser linear em cada entrada, ao passo que, alternada (anti-simétrica) significa que, se trocarmos dois vetores de posição o sinal se altera.

Da mesma maneira vamos criar o conjunto $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)^*$ a partir do conjunto $(\mathbb{R}^n)^*$. Para isso, tomemos $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k \in (\mathbb{R}^n)^*$ e obtemos o elemento

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k(v_1, v_2, \dots, v_k) = \det(\phi(v_j))$$

pelos mesmos motivos $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k$ é k-bilinear e alternada.

Definição 32. Uma k-forma (ou forma de grau k) em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação

$$\begin{aligned} \omega: \mathbb{R}^n &\rightarrow \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)^* \\ p &\rightarrow \omega(p). \end{aligned}$$

Podemos escrever $\omega(p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k=1}^n a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ ou de forma mais simples com multi-índice $\omega(p) = \sum_I a_I dx_I$ onde $I = \{i_1 < \cdots < i_k = 1\}$.

7.3 Derivada exterior (Generalização da derivada)

Iremos denotar por $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as k-formas de $\mathbb{R}^n$.

A diferencial exterior é uma função $d: \Omega^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ que manda uma k-forma $\omega = \sum a_I dx_I \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ em

$$d\omega = \sum da_I \wedge dx_I.$$

Tudo que vimos anteriormente como Divergente, Rotacional e Gradiente são, em certo sentido, derivadas exteriores.

Exemplo 7.3.1. Seja $\omega = xyz dx + yz dy + (x + y) dz$ uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$. Aplique a derivada exterior.

Solução 7.3.1. Primeiro calculamos a derivada e depois o produto edge com cada base. Assim,

$$\begin{aligned} d\omega &= d(xyz) \wedge dx + d(yz) \wedge dy + d(x + y) \wedge dz \\ &= (yz dx + xz dy + xy dz) \wedge dx + (z dy + y dz) \wedge dy + (dx + dz) \wedge dz. \end{aligned}$$

Obtido pela distributividade em relação a soma.

$$\begin{aligned}
&= -xzdx \wedge dy - xydx \wedge dz - ydy \wedge dz + dx \wedge dz \\
&= -xzdx \wedge dy - ydy \wedge dz + dy \wedge dz - xydx \wedge dz \\
&= -xzdx \wedge dy - ydy \wedge dz + (1 - xy)dx \wedge dz.
\end{aligned}$$

Esse é o diferencial exterior. Anteriormente era 1-forma, depois passou a ser 2-forma.

De posse de todos os conteúdos necessários, definiremos Variedades Diferenciáveis de forma a possibilitar uma ideia da demonstração do Teorema de Stokes generalizado, haja visto que, a demonstração formal exige ferramentas que não foram abordadas neste trabalho.

7.4 Variedades Diferenciáveis

Para a generalização do Teorema de Stokes, que vimos no Capítulo 6, precisaremos estender o conceito de superfície para dimensões maiores, que são as chamadas variedades. Intuitivamente, uma variedade é a generalização de curvas e superfícies para dimensões arbitrariamente grandes, e como a maioria dos conceitos matemáticos, sua formalização não foi fruto da pesquisa de apenas um, mas de vários matemáticos durante muitos anos (GALVÃO, 2016).

Alguns matemáticos como Riemann e Gauss figuram entre os principais nomes que contribuíram para a formalização do conceito de variedade. Em especial, o termo *manifold*⁴ é uma tradução direta (para o inglês) da palavra de origem alemã *Mannigfaltigkeit*, utilizada por Riemann em seu trabalho pioneiro *Über die Hypothesen, welcheder Geometrie zu Grunde liegen* (Sobre as Hipóteses Subjacentes aos Fundamentos da Geometria).

Nesse contexto, vamos definir variedade diferenciável e a integral de uma k-forma, considerando um manifold M compacto, isto é, fechado e limitado, bem como mostrar o Teorema de Stokes envolvendo tal conceito.

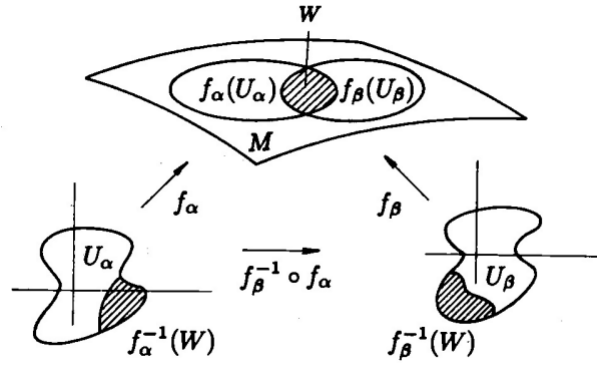
Definição 33. Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ juntamente com uma família de homomorfismos $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, onde U_α é um conjunto aberto, que satisfaz as condições:

- $\cup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M$ (para todo U_α);
- Para cada par α, β , com $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$ e as funções $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ e $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ são também diferenciáveis.

Além disso, cada par (U_α, f_α) chamamos **parametrização** ou **sistema de coordenadas** de M .

⁴ Utilizamos como tradução não literal a palavra variedade, para manifold, como é usualmente feito na literatura nacional.

Figura 36 – Variedades diferenciáveis



Fonte: (CARMO, 1998)

Quanto as outras propriedades das Variedades Diferenciáveis, vide livro *Differential Forms and Applications*⁵ de Manfredo P. Carmo.

Definição 34. Seja M uma variedade diferenciável compacta e f_α uma qualquer parametrização de M . Seja N um subconjunto de M tal que $N = f_\alpha(U_\alpha)$, com $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ e um k -forma ω definida em M . Se $\omega_\alpha = a(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ é a representação de ω em U_α , a integral de ω sobre N é dada por

$$\int_N \omega = \int_{U_\alpha} a(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

onde o termo da direita é calculado como uma integral múltipla em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 7.4.1 (Teorema de Stokes generalizado). Seja M uma k -variedade em $\mathbb{R}^n$ e ω uma $(k-1)$ -forma diferencial de classe C^1 e $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto orientado com bordo ∂M , então

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Isto nos mostra que a integral da forma no bordo é a integral da diferencial exterior em M da forma.

Demonstração: Como a demonstração formal deste teorema exige ferramentas que não foram abordadas neste trabalho, daremos somente uma ideia para a demonstração.

Seja,

$$\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} A^{(j)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_k,$$

então

$$\mu = d\omega = (A_{x_1}^{(1)} + \dots + A_{x_k}^{(k)}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Assim, devemos provar que $\int_M \mu = \int_{\partial M} \omega$.

⁵ (CARMO, 1998)

Para facilitar a demonstração, vamos definir as Formas Diferenciais

$$\omega^{(i)} = A^{(i)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_k \quad e \quad \mu^{(i)} = A_{x_i}^{(i)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

É fácil perceber que

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \omega^{(1)} + \cdots + \int_{\partial M} \omega^{(k)} \quad e \quad \int_M \mu = \int_M \mu^{(1)} + \cdots + \int_M \mu^{(k)}.$$

Logo, basta mostrar que, para cada i , que

$$\int_{\partial M} \omega^{(i)} = \int_M \mu^{(i)}. \quad (7.1)$$

Vamos definir, agora, uma função diferenciável $f : B \rightarrow M$, tal que

1. $f = (f_1, \dots, f_k)$;
2. B é um conjunto do tipo $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$;
3. $f(\partial B) = \partial M$.

Mais uma vez, com o intuito de simplificar a demonstração, será feita a prova para $i = 1$. Contudo, vale ressaltar que, para outros valores de i , a demonstração se torna análoga.

Considerando o segundo termo na Equação (7.1), temos

$$\begin{aligned} \int_M \mu^{(1)} &= \int_M A_{x_1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\ &= \int_B A_{x_1}^{(1)}(f) df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_k}^{b_k} A_{x_1}^{(1)}(f) df_1 \wedge \cdots \wedge df_k. \end{aligned}$$

Como,

$$\int_{a_1}^{b_1} A_{x_1}^{(1)}(f) df_1 = A^{(1)}(f(b_1, x_2, \dots, x_k)) - A^{(1)}(f(a_1, x_2, \dots, x_k))$$

temos

$$\int_M \mu^{(1)} = \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_k}^{b_k} [A^{(1)}(f(b_1, x_2, \dots, x_k)) - A^{(1)}(f(a_1, x_2, \dots, x_k))] dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k. \quad (7.2)$$

Por outro lado, tomando o termo do lado esquerdo da Equação (7.2), temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \omega^{(1)} &= \int_{\partial M} A^{(1)} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k \\ &= \int_{f(\partial B)} A^{(1)} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k \\ &= \int_{\partial B} A^{(1)}(f) df_2 \wedge \cdots \wedge df_k \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_k}^{b_k} A^{(1)}(f) df_2 \wedge \cdots \wedge df_k. \end{aligned}$$

Note que

$$\int_{a_1}^{b_1} A^{(1)}(f) = A^{(1)}(f(b_1, \dots, x_k)) - A^{(1)}(f(a_1, \dots, x_k)),$$

logo, podemos afirmar que

$$\int_{\partial M} \omega^{(1)} = \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_k}^{b_k} [A^{(1)}(f(b_1, \dots, x_k)) - A^{(1)}(f(a_1, \dots, x_k))] df_2 \wedge \dots \wedge df_k. \quad (7.3)$$

Se compararmos as Equações (7.2) e (7.3) fica claro que são equivalentes. Generalizando para todos os valores de i , prova-se o teorema.

Esse teorema generaliza todos os Teoremas Fundamentais do Cálculo Vetorial, desde o inicial, para curvas, até os Teoremas de Green, Gauss, Stokes, ou seja, contempla todos, pois é dimensão qualquer.

Existem alguns casos especiais como para uma região 1 dimensional e uma 0 -*forma* em $\mathbb{R}^3$ teremos o Teorema Fundamental das Integrais de Linha (abordado no Capítulo 3 sobre Campos Conservativos) e se reduzirmos o espaço para uma dimensão temos o Teorema Fundamental do Cálculo. Se tivermos uma região bidimensional e uma 1 -*forma* em $\mathbb{R}^3$ obteremos o Teorema de Stokes e como enfatizamos nesse trabalho, o Teorema de Green é o Teorema de Stokes no plano. Por fim, para região tridimensional e uma 2 -*forma* em $\mathbb{R}^3$ teremos o Teorema de Gauss.

A generalização de todos esses teoremas são extremamente importantes, entretanto, dado o escopo desta monografia e com fins de síntese, optou-se por não mencionar tais processos.

Então, todos os teoremas enunciados anteriormente podem ser interpretados como casos particulares do Teorema de Stokes Generalizado para Formas Diferenciais.

Considerações finais

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma visão mais ampla do Teorema Fundamental do Cálculo através da generalização do Teorema de Stokes e também o quão importante é o embasamento teórico matemático do conteúdo para prosseguimento do assunto por meio de aplicações, como por exemplo a interpretação de fluxo elétrico utilizando o Teorema de Gauss, ou o Teorema de Stokes aplicado a variedades com singularidade, etc. Entretanto, para fins de síntese e delimitação do tema, este trabalho é restringido com o objetivo de propor uma abordagem sem excesso de formalismos, não obstante, a presença do rigor necessário em algumas demonstrações, buscando assim ser um complemento mais intuitivo das literaturas dedicadas ao assunto.

Nesse sentido, essa monografia abordou a teoria vetorial de forma parcial, iniciando com a definição de Campo Vetorial, culminando nas Integrais de Linha e posteriormente, Integrais de Superfície. Apresentando ainda os operadores vetoriais diferenciais gradiente, divergente, e rotacional, com uma breve introdução dos operadores nabla e laplaciano. Mostrando os teoremas supracitados, base deste trabalho, convergindo na generalização do Teorema de Stokes, após um estudo breve sobre Formas Diferenciais e Variedades.

Por ser uma extensão dos conteúdos vistos nas disciplinas de Cálculo e seu alto nível de interdisciplinaridade – unificamos, por exemplo, Cálculo com Geometria Analítica – além das aplicações à Física, torna-se indispensável seu estudo, especialmente na formação de estudantes dos cursos de exatas, uma vez que, várias teorias se sustentam através da base de Cálculo Vetorial, proporcionada neste trabalho de conclusão de curso.

Referências

- CARMO, M. P. D. *Differential forms and applications*. Springer Science & Business Media, 1998. Citado na página 74.
- COUTINHO, S. C. *Cálculo Vetorial com formas diferenciais*. UFRJ, 2015. Citado na página 68.
- CROWE, M. J. *A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system*. Courier Corporation, 1994. Citado na página 12.
- FARIA, E. P. d. *Um estudo sobre curvas, superfícies e suas parametrizações*. Tese (Doutorado), 2017. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 16.
- GALVÃO, W. F. *Formas diferenciais: aplicações no cálculo e na física*. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 73.
- GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. *Cálculo b*. Pearson Educación, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 22, 29 e 48.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo vol. 2 e 3*. LTC, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 46.
- HEAVISIDE, O. *Eletctromagnetic Theory*. Londres: The Eletrician, v. 1 e 2, 1893. Citado na página 12.
- LIMA, E. L. *Álgebra linear*. n. 512.5 512.5 LIMa7, 2006. Citado na página 69.
- MARTINS, M. H. S.; PEREIRA, R. *Cálculo III e IV*, Elaborado para o curso de licenciatura em física na modalidade à distância da UFSC, 2020. Disponível em: <https://mtmgrad.paginas.ufsc.br/files/2020/08/Livro-Calculo_III_e_IV-MarcosH.S.Martins-RosimaryPereira.pdf>. Citado na página 22.
- MAXWELL, J. C. *A treatise on electricity and magnetism*. Clarendon press, v. 1, 1873. Citado na página 12.
- MOREIRA, L. C. Z. et al. *Cálculo vetorial e eletromagnetismo: as equações de maxwell*. 2020. Citado na página 33.
- PERUCCHI, M. N. *Formas diferenciais*. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2013. Citado na página 68.
- PINTO, D.; MORGADO, M. C. F. *Cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis*. UFRJ, 2009. Citado 15 vezes nas páginas 14, 21, 25, 31, 37, 39, 40, 44, 49, 50, 54, 56, 58, 64 e 66.
- STEWART, J. *Cálculo*, vol. 1, 5ª edição. Editora Thompson, p. 34, 2006. Citado na página 20.
- STEWART, J. *Cálculo*, vol. 2, 7ª edição. Cengage Learning Edições Ltda, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 22, 24, 27, 28 e 34.
- VIEIRA, M. L. *Matemática simplificada. Campos Vetoriais*, jan. 2021. Disponível em: <<https://matematicasimplificada.com/funcoes-vetoriais-campos-vetoriais/>>. Citado na página 23.

WOLFRAM, L. *Garrafa de Klein*, Wikipédia: a enciclopédia livre, jan. 2021. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:KleinBottle-01.png>. Citado na página 51.