UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura

Luciana Coelho

A Construção dos Números Racionais via Relação de Equivalência

São Luís - MA
2022

Luciana Coelho

A Construção dos Números Racionais via Relação de Equivalência

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Luís Fernando Coelho Amaral

São Luís - MA

2022

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

COELHO, LUCIANA.
A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS VIA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA / LUCIANA COELHO. - 2022.
24 f.

Orientador(a): PROF. DR. LUÍS FERNANDO COELHO AMARAL.
Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, SÃO LUÍS, 2022.

1. NÚMEROS INTEIROS. 2. NÚMEROS RACIONAIS. 3. RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA. I. FERNANDO COELHO AMARAL, PROF. DR. LUÍS. II. Título.

Luciana Coelho

A Construção dos Números Racionais via Relação de Equivalência

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 29/07/2022

Prof. Dr. Luís Fernando Coelho Amaral
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof. Me. Artur Silva Santos
DEMAT/UFMA
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Nilton Santos Costa
DEMAT/UFMA
Segundo Examinador

À minha preciosa e querida mãe,
Rose Lucia Coelho,
a pessoa mais importante na minha vida
e sem a qual eu nada seria

Agradecimentos

Meus primeiros agradecimentos vão para Deus, o qual me manteve firme em toda minha trajetória, nas dificuldades tanto durante minha vida acadêmica quanto pessoal.

Segundamente, para minha mãe que incansavelmente lutou para eu não desistir dos meus sonhos, sem sombras de dúvidas, eu não teria terminado esse trabalho sem ela, aliado a mesma tem o meu pai que trabalhou muito para me proporcionar o melhor.

Queria agradecer a minha família, em especial a minha irmã, Luciete Coelho, que mesmo sendo muito diferente a mim, ela foi uma peça fundamental pois sua ajuda financeira e emocional contribuiu muito para minha formação.

Quero agradecer ao meu orientador, Luís Fernando, ele não só me ofereceu um ótimo apoio para finalizar a monografia como também, me inspirou a ser uma professora que procura formas de despertar ao aluno a admiração e interesse pela matemática, o domínio de como ele administrava suas aulas tornando-as mais interessantes e não maçantes me chamou muito atenção e vou levar isso para minha vida profissional.

Não poderia deixar de agradecer meus colegas de classe, em especial a Neemias Oliviera, Miqueias Costa, Matheus Silva e Jackeline Barbosa, foram longos anos de muitas trocas de ideias, de aprendizagens, cumplicidades, risos e choros. Durante esses períodos aprendi com eles a ser mais responsável, mais amiga e consequentemente, mais humana.

Quero agradecer a todas as pessoas que passaram na minha vida, algumas permaneceram, já outras, não, mas que de alguma forma colaboraram para minha formação. Foram mais de cinco anos e diversas pessoas de várias etnias e diversidades cruzaram meu caminho, então, deixo aqui os meus agradecimentos, em especial a Stanley Protazio, Jonatas Garcez, Arlenilson Silva.

Enfim, agradeço a todos que de forma direta ou indireta fizeram-me capaz de concluir este trabalho.

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original."

Albert Einstein (1879 – 1955)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo construir o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ a partir da relação de equivalência dos inteiros $\mathbb{Z}$. Iniciamos o trabalho apresentando os racionais de forma usual, ou seja, como um conjunto unido a duas operações binárias gozando axiomas que fazem dele um corpo, denotamos o conjunto $\mathbb{Q}$ como sendo o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$ e mostramos que a cada elemento desse conjunto se identifica com um elemento $\mathbb{Q}$ além disso, ele foi apresentado como um corpo ordenado. Em seguida, descrevemos o conceito de relação de equivalência assim como exemplos para fixação.

Por fim fizemos a demonstração da estruturação do conjunto dos racionais, bem como foram definidas suas operações e sua relação de ordem.

Palavras-chave: Números Racionais, Números Inteiros, Relação de Equivalência.

Abstract

This work aims to build the set of rational numbers $\mathbb{Q}$ from the equivalence relation of integers $\mathbb{Z}$. We begin the work by presenting the rationals in the usual way, that is, as a set joined to two binary operations enjoying axioms that make it a field, we denote the set $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/ \sim$ as the set $\mathbb{Q}$, since they have the same algebraic structure. This work sketches and proves $\mathbb{Q}$ as a non-complete ordered body. Next, we describe the concept of equivalence relation as examples for fixation.

Finally, we demonstrated the structuring of the set of rationals, as well as their operations were defined.

Keywords: rational numbers, numbers, integers, equivalence relation

Sumário

1 Introdução

Fazendo uma investigação sobre a necessidade de contar, veremos que tal necessidade revela-se como inerente ao ser humano, pois desde os primórdios da civilização humana, o homem tinha uma carência de enumerar, tais como, objetos, animais, coisas ou até mesmo pessoas. Como afirma Pitágoras, filósofo e matemático: Todas as coisas são números. O autor atribui tamanha importância aos algarismos de forma a vê-los como os princípios de tudo.

Nesse sentido, a revolução humana aliada as suas necessidades foram os alicerces para o surgimento de novos conjuntos e

> a noção intuitiva de conjunto é tão antiga quanto a noção de número. Mesmo sendo uma noção antiga, foi apenas no século XIX que foi amplamente estudada e usada na formalização de diversos conceitos matemáticos por Cantor, Frege, Russell, etc. (AGUILAR; DIAS, 2015)

Agora, fazendo uma inquirição sobre o primeiro contato do homem com os números, mesmo que seja de forma inconsciente e involuntária, perceberemos que essa participação foi crucial, pois influenciou na numeração que usamos atualmente. Todavia, faz-se necessário formalizar suas definições de tal forma que seja possível produzir quase toda matemática que hoje sabemos.

Primeiro, dando início a essa formulação temos os números naturais, onde toda a teoria ou suas propriedades pode ser deduzidas a partir dos três axiomas de Piano, logo em seguida temos o conjunto dos números inteiros, que são constituídos pelos naturais e mais adiante, temos o conjunto dos números racionais, os quais são obtidos via relação de equivalência dos inteiros e será objeto de estudo nessa unidade, onde iremos conhecer como se deu sua criação, numa linguagem formal, clara e de fácil compreensão e por fim temos os Reais que são elaborados pelos métodos chamados de Cortes de Dedekind e a construção de Cantor.

As construções desses conjuntos numéricos são sempre movida por alguma restrição de conjuntos já existentes, antes da formação dos racionais, por exemplo, existia um conjunto, os inteiros, e por alguma necessidade este não era satisfatório, mas afinal, porque o conjunto dos inteiros não foi suficiente? E qual seria a motivação para a extensão desse conjunto? Para responder a essas perguntas temos que Sempre que a divisão de um número inteiro por outro não era exata, os egípcios antigos, já por volta do ano de 2000 a.C., usavam frações para exprimir o resultado. E usavam também frações para operar com seu sistema de pesos e medidas (DOMINGUES, 1991).

No âmbito escolar, aprendemos que frações e equações do tipo, $\dfrac{5}{7}$ e $2x = 19$, respectivamente, não possuem solução em $\mathbb{Z}$, afinal não existe um número inteiro, tal que seja resultado da divisão de 5 para 7, muito menos um número x que multiplicado por 2 fornece como produto 19, nessa perspectiva, a fim de encontrar um novo conjunto no qual a operação divisão seja fechada, surge como atualmente conhecemos o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, o qual veio a partir da limitação do conjunto $\mathbb{Z}$ com relação à operação de divisão.

Por último, foram utilizadas as referências (AGUILAR; DIAS, 2015) e (LIMA, 2013) para essa pesquisa, as quais foram essenciais para o termino dessa obra. É muito importante salientar que além do nosso objetivo, que é construir o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, pretendemos conhecê-lo, contudo, não temos o intuito de vê-lo como apenas uma ampliação dos inteiros, mas como um conjunto que tem suas peculiaridades o que torna ele único.

2 Números Racionais

O surgimento dos números racionais, não só está associado à necessidade de realizar e expressar medições, como também de demonstrar partes de um inteiro e divisões que alcancem resultados decimais.

Desde o ensino fundamental, os racionais e suas propriedades são mostrados ao aluno e no ensino superior uma das etapas para compreender esse grupo é conhecer a sua construção formal, mas antes dessa fase iremos apresentá-lo de forma usual, ou seja, exporemos um conjunto aliado a duas operações binárias, adição e multiplicação, gozando axiomas, onde esses axiomas apresentam o conjunto $\mathbb{Q}$ como um corpo.

2.1 Os números racionais e sua representação

O conjunto dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de razão $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, e indicamos por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Temos como exemplos

$$\frac{51}{3}, \frac{7}{2}, \frac{0}{1}, \frac{14}{7}.$$

Observação 2.1. *Para representar um número racional, na forma decimal, devemos dividir a por b e o resultado dessa divisão será sempre: um número com representação decimal finita (pode ser ou não inteiro),ou um dizima periódica.*

2.2 $\mathbb{Q}$ é um corpo

Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$, munido de duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação*, que satisfazem a certas condições, chamadas os axiomas de corpo, abaixo especificadas.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{K}$ sua soma $x + y \in \mathbb{K}$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x \cdot y \in \mathbb{K}$.(LIMA, 2016)

Proposição 2.1. *O conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ com as operações de adição e multiplicação usuais é um corpo.*

Isto significa que, em $\mathbb{Q}$ estão definidas duas operações binárias:

i) **Adição**
Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, então a adição, $+$, entre esses elementos é definido como

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \in \mathbb{Q}.$$

ii) **Multiplicação**
A multiplicação, $\cdot$, entre eles é definida como,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}.$$

E ainda,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc.$$

Portanto $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é um corpo, ou seja, isto significa que as duas operações $+$ e $\cdot$ satisfazem as seguintes propriedades:

a) **Associatividade**: $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$, valem

$$(x + y) + z = x + (y + z) \text{ e } (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);$$

b) **Comutatividade**: $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, valem

$$x + y = y + x \text{ e } (x \cdot y) = y \cdot x;$$

c) **Existência de elementos neutros**; existem $0 = \frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$ e $1 = \frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$ tais que

$$x + 0 = x \text{ e } x \cdot 1 = x, \ \forall x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q};$$

d) **Existência dos inversos**: para todo $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, existe $-x = \frac{-a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $x + (-x) = 0$. E, para todo $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \ x \neq 0$, existe

$$x^{-1} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \text{ tal que } x \cdot x^{-1} = 1;$$

e) **Distributividade**: Para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$ tem-se

$$x \cdot (y + z) = z \cdot y + x \cdot z.$$

2.3 $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado

Proposição 2.2. *Um corpo ordenado é um corpo $\mathbb{K}$, no qual se destacou um subconjunto $P \subset \mathbb{K}$, chamado o conjunto dos elementos positivos de $\mathbb{K}$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

P$_1$ *A soma e o produto de elementos positivos são positivos, ou seja,*

$$x, y \in P \longmapsto x + y \in P \text{ e } x \cdot y \in P.$$

P$_2$ *Dado* $x \in \mathbb{K}$, *exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou* $x = 0$, *ou* $x \in P$ *ou* $-x \in P$.

Definimos um conjunto de positivos $P \subset \mathbb{Q}$ *como* $P = \left\{ \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q};\ ab > 0 \right\}$.

Demonstração: Se $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in P$, então $ab > 0$ e $cd > 0$. Logo, a soma e o produto são fechados em P. De fato,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \in P \Longleftrightarrow (ad + bc)bd > 0 \Longrightarrow abd^2 + cdb^2 > 0,$$

e

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in P \Longleftrightarrow acbd > 0.$$

Se $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ então $ab \in \mathbb{Z}$, segue da tricotomia em $\mathbb{Z}$ que

$$\text{ou } ab > 0, \text{ ou } ab = 0, \text{ ou } ab < 0.$$

Sendo assim,

$$\text{ou } \frac{a}{b} \in P, \text{ ou } \frac{a}{b} = 0, \text{ ou } -\frac{a}{b} > 0.$$

Portanto, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado. ■

2.4 $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado não completo

Definição 2.2. *Um corpo ordenado A é dito completo, quando todo subconjunto, não vazio de A limitado superiormente (limitado inferiormente) possui supremo (possui ínfimo) em A.*

Assim, para provarmos que $\mathbb{Q}$ não é completo, devemos mostrar que existe pelo menos um subconjunto, não vazio, limitado superiormente não possui supremo.

Exemplo 2.3. *Tome* $A = \{p \in \mathbb{Q}_+;\ p^2 < 3\} \subset \mathbb{Q}$. *Temos que A é limitado superiormente em* $\mathbb{Q}$. *Vamos mostrar que A não admite supremo em* $\mathbb{Q}$.
Suponhamos, por absurdo, que A tenha supremo em $\mathbb{Q}$. *Logo,* $a \in \mathbb{Q}$ *tal que* $a = \sup A$.
Pela tricotomia devemos ter $a^2 < 3$ *ou* $a^2 > 3$ *ou* $a^2 = 3$.

Para $a^2 < 3$, *temos:*

$$a^2 < \frac{a^2}{3} + \frac{3}{3} < \frac{(a^2 + 3)}{3} < 3.$$

Invertendo as desigualdades temos:

$$\frac{3}{(a^2+3)} > \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{9}{a^2+3} > 1.$$

Multiplicado as desigualdades por a teremos: $\dfrac{9a}{a^2+3} > a$. *Agora iremos chamar de*

$$b = \frac{81a^2}{a^4+6a^2+9} = \frac{81a^2}{a^4-6a^2+6a^2+6a^2+9} = \frac{81a^2}{(a^2-3)^2+12a^2} < 3.$$

Ou seja, $a < b$ *e* $b^2 < 3 \Longrightarrow b \in A$*(é um absurdo!).*

Para $a^2 > 3$*, temos:*

$$a^2 > \frac{a^2+3}{3} > 3 \Longrightarrow a > \frac{a^2+3}{3a}.$$

Iremos chamar de $c = \dfrac{a^2+3}{3a} \in \mathbb{Q}$*, então* $0 < c < a$ *e*

$$c^2 = \frac{a^4+6a^2+9}{9a^2} = \frac{a^4+6a^2-6a^2+6a^2+9}{9a^2} = \frac{12a^2+(a^2-3)}{9a^2} > 3.$$

Daí como c é uma cota superior de A, com $a = \sup A$ *e* $c < a$*. (absurdo!)*

Para $a^2 = 3$*, temos:*

$a \in \mathbb{Q}$ *não pode ocorrer, pois* $\sqrt{3}$ *é irracional. Logo concluirmos que A não tem supremo em* $\mathbb{Q}$.

Outra maneira de provarmos que os racionais são não completos, é definir um conjunto que esteja contido em $\mathbb{Q}$. Por simplicidade, podemos adotar M para representá-lo. Nesse sentido, M é completo se toda sequência de elementos de M converge para um elemento em M. Tome a sequência de racionais $(2; 2,7; , 2,71; ...)$ que converge para $e = 2,718281...$ que não é racional. Daí, $\mathbb{Q}$ não é completo.

2.5 $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$

Seja x um elemento qualquer de $\mathbb{Z}$, temos que x pode ser escrito como um racional $\dfrac{x}{1}$.

Assim, pelo algoritmo da divisão temos:

$$x = \frac{x}{1} \longleftrightarrow x = x \cdot 1.$$

Dessa forma, concluimos que os elementos pertencentes ao conjunto $\mathbb{Z}$ fazem parte do conjunto $\mathbb{Q}$.

$$\text{Representação}: \ \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Como o conjunto dos naturais é um subconjunto de $\mathbb{Z}$, então $\mathbb{N}$ também é um subconjunto de $\mathbb{Q} : \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

3 Construção do conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$

Veremos aqui conceitos que serão necessários ao longo da construção que estamos abordando.

3.1 Relação de equivalência

Definição 3.1. *Sejam A um conjunto não vazio e R uma relação binária sobre A. R é dita uma Relação de Equivalência se, somente se, satisfazer as seguintes propriedades:*

1. *R é reflexiva se $\forall a \in A$ temos $(a, a) \in R$;*
2. *R é simétrica se $\forall a, b \in A$ temos $(a, b) \in R \Longrightarrow (b, a) \in R$,*
3. *R é transitiva se $\forall a, b, c \in A$ se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R \Longrightarrow (a, c) \in R$.*

Exemplo 3.2. *A relação $R = \{a, b, c\}$ dada por $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$ é uma relação de equivalência, pois*

i) R é reflexiva, pois $a \equiv a$, $b \equiv b$ e $c \equiv c$;

ii) R também é simétrica, posto que $a \equiv b$ e $b \equiv a$;

iii) R é transitiva, pois,

$$(a, a) \text{ e } (a, b) \Longrightarrow (a, b),$$

$$(b, b) \text{ e } (b, a) \Longrightarrow (b, a).$$

Exemplo 3.3. *Em $\mathbb{Z}$ definimos a seguinte relação: aRb se, e somente se, $a + b$ for par. Então R é uma relação de equivalência. De fato,*

i) R é reflexiva: Particularmente $a + a = 2a$, como $2a$ é par, segue que $a \sim a$;

ii) R é simétrica: Como $a + b = b + a$ e é par, segue que , $b \sim a$;

iii) R é Transitiva: Temos que $a+b$ e $b+c$ são pares, por conseguinte, $a+c = (a+c)-(c+b)$ é par, obtemos que $a \sim c$.

Assim concluirmos que R é uma relação de equivalência.

Exemplo 3.4. *A relação em* $\mathbb{Z}$ *dada por* $R = \{(a, b);\ a \equiv b\ (mod\ 2)\}$ *é uma relação de equivalência. Com efeito,*

i) Note que R *é reflexiva, pois* $a - a$ *é divisível por 2 , ou seja,* $a \equiv a(mod\ 2)$;

ii) R *também é simétrica, pois se* $(a, b) \in R$*, então* $a \equiv b(mod\ 2)$ *e, portanto,* $a - b$ *é divisível por 2 e* $b - a \equiv -(a - b)$ *que também é, logo* $b \equiv a(mod\ 2)$ *assim temos que* $b \sim a$;

iii) Por fim, temos que R *é transitiva, pois sejam* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *tais que* $a \sim b$ *e* $b \sim c$ *então* $a \equiv b(mod\ 2)$ *e* $b \equiv c(mod2)$*. Isso significa que* $a - b$ *e* $b - c$ *é divisível por 2. Somando temos* $a - b + b - c = a - c$ *é divisível por 2.*

3.2 Construção do conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$

A construção dos números racionais é realizada a partir do domínio de integridade dos inteiros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. O conjunto dos inteiros diferentes de zero, denotamos por $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Proposição 3.1. *A relação* $\sim$ *em* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *definida por*

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

é uma relação de equivalência.

Demonstração: Como, já estudado anteriormente, uma relação é dita de equivalência se forem satisfeitas as seguintes propriedades:

$i)$ Para reflexiva temos:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ (a, b) \sim (a, b) \iff ab = ba.$$

$ii)$ Para simétrica temos: Se $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, então

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc \iff cb = da \iff (c, d) \sim (a, b).$$

$iii)$ Para transitiva, temos: $(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$ e $(c, d) \sim (e, f) \iff cf = de$, então $(a, b) \sim (e, f)$, pois, com algumas manipulações algébricas, teremos, $af = be$.

■

3.3 Operações em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$

3.3.1 Adição em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$

Para definir a soma de números racionais vamos estabelecer a soma das classes de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$

Proposição 3.2. *A operação* $[(a,b)+(c,d)] = [(ad+bc, bd)]$ *é bem definida em* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$

Demonstração: Sejam $[(a,b)] = [(m,n)]$ e $[(c,d)] = [(p,q)]$. Mostraremos que

$$[(a,b) + (c,d)] = [(m,n) + (p,q)].$$

De fato, $(a,b) \sim (m,n)$ e $(c,d) \sim (p,q)$ implicam

$$an = bm \text{ e } cq = dp \tag{3.1}$$

Multiplicando os primeiros termos em (3.1) por dq e bn, respectivamente, teremos:

$$an \cdot dq = bm \cdot dq \text{ e } cq \cdot bn = dp \cdot bn \tag{3.2}$$

Operando (3.2), temos:

$$\begin{aligned} (ad+bc)(nq) &= adnq + bcnq \\ &= (an)(dq) + (cq)(bn). \end{aligned}$$

Como em (3.1) temos $an = bm$ e $cq = dp$ substituindo, temos:

$$\begin{aligned} (ad+bc)(nq) &= (bm)(dq) + (dp)(bn) \\ &= bdmq + bdnp \\ &= (bd)(mq+np) \end{aligned}$$

Como

$$(ad+bc)(nq) = (bd)(mq+np) \Longleftrightarrow (ad+bc, bd) \sim (mq+np, nq),$$

segue que, $[(ad+bc, bd)] = [(mq+np, nq)]$, ou seja,

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(m,n)] + [(p,q)].$$

■

Exemplo 3.5. *Vamos determinar a soma* $[(1,2)] + [(1,3)]$. *Então vamos considerar um elemento de cada classe, digamos* $(-2,-4)$ *e* $(2,6)$, *então* $(-2,-4) + (2,6) = (-20,-24)$. *Se considerarmos outros elementos de cada classe, por exemplo,* $(2,4)$ *e* $(-1,-3)$, *teremos,* $(2,4) + (-1,-3) = (-10,-12)$. *Embora os pares resultantes* $(-20,-24)$ *e* $(-10,-12)$ *sejam distintos, eles estão na mesma classe de equivalência.*

Exemplo 3.6. *Vamos determinar a soma de* $[(-3,-6)]$ *por* $[(3,4)]$. *Para isto, tome um representante de cada um deles, por exemplo,* $(-3,-6)$ *e* $(3,4)$, *então*

$$\begin{aligned} (-3,-6) + (3,4) &= ((-3)4 + (-6)3, (-6)4) \\ &= (-12 - 18, -24) \\ &= (-30, -24). \end{aligned}$$

Segue então que $[(-3,-6)] + [(3,4)] = [(-30. -24)] = [(5,4)]$.

3.3.2 Multiplicação em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$

Proposição 3.3. *A operação* $[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac,bd)]$ *está bem definida em* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$

Demonstração: Se $[(a,b)] = [(m,n)]$ e $[(c,d)] = [(p,q)]$, então

$$(a,b) \sim (m,n) \text{ e } (c,d) \sim (p,q),$$

o que subentende,

$$an = bm \text{ e } cq = dp.$$

Utilizando a equação acima temos, $(an) \cdot (cq) = (bm) \cdot (dq)$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} [(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(m,n)] \cdot [(p,q)] &\iff [(ac,bd)] = [(mp,nq)] \\ &\iff (ac)(nq) = (bd)(mp) \\ &\iff (an)(cq) = (bm)(dp). \end{aligned}$$

Logo, concluirmos que a operação multiplicação é bem definida em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$ e que ela independe dos representantes das classes de equivalência. ■

Exemplo 3.7. *Consideremos os elementos* $[(1,2)]$ *e* $[(1,3)]$*. Se tomarmos, por exemplo, os representantes,* $(-2,-4)$ *e* $(2,6)$ *de cada classe, respectivamente e, multiplicarmos segundo a definição, teremos,*

$$(-2,4) \cdot (2,6) = (-4,-24).$$

E, se, considerarmos, por exemplo, $(2,4)$ *e* $(-1,-3)$*, como outros representantes das classes dadas, respectivamente, teremos*

$$(2,4) \cdot (-1,-3) = (-2,-12).$$

Embora os resultantes $(-4,-24)$ *e* $(-2,-12)$ *sejam aparentemente distintos, eles estão na mesma classe de equivalência.*

Axiomas da adição:

a) **Associatividade**: quaisquer que sejam $m = [(a,b)], n = [(c,d)]$ e $p = [(e,f)]$ tem-se $(m+n)+p = m+(n+p)$, considere

$$m = [(a,b)],\ n = [(c,d)] \text{ e } p = [(e,f)] \in \mathbb{Q},$$

tem-se

$$\begin{aligned}
(m+n)+p &= ([(a,b)] + [(c,d)] + [(e,f)]) \\
&= [(ad+bc, bd)] + [(e,f)] \\
&= [(ad+bc)f + (bf)e, (bf)f] \\
&= [(adf + bcf + bde, bdf)] \\
&= [(a(df) + b(cf+de) + bdf)] \\
&= [(a,b) + [(cf+de, df)] \\
&= [(a,b) + ([(c,d)] + [(e,f)] \\
&= m + (n+p).
\end{aligned}$$

b) **comutatividade**: Quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{Q}$, tem-se $m+n = n+m$. Sejam $m = [(a,b)]$ e $n = [(c,d)]$, tem-se

$$\begin{aligned}
m+n &= [(a,b) + (c,d)] \\
&= [(ad+bc, bd)] \\
&= [(cb+da, db)] \\
&= [(c,d)] + [(a,b)] \\
&= n+m
\end{aligned}$$

c) **elemento neutro**: Existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $m+0 = m$, seja qual for $m \in \mathbb{Q}$ Seja $0 = [(0,c)]$ onde $c \in \mathbb{Z}^*$. Dado $m \in \mathbb{Q}$, seja $m = [(a,b)]$. Assim temos,

$$m + 0 = [(a,b)] + [(0,c)] = [(ac + b0, bc)] = [(ac, bc)] = [(a,b)] = m.$$

d) **simétrico**: Todo elemento $m \in \mathbb{Q}$ possui um simétrico $-m \in \mathbb{Q}$ tal que $m + (-m) = 0$. Dado $m \in \mathbb{Q}$, seja $m = [(a,b)]$, existe $-m = [(-a,b)]$ e vamos conceituar a classe de equivalência $[(0,r)] = 0$, seja qual for $r \in \mathbb{Q}$. Então

$$m + (-m) = [(a,b)] + [(-a,b)] = [ab + b(-a), bb)] = [(0, bb)] = 0.$$

Axiomas da multiplicação

a) **Associatividade**: quaisquer que sejam $m, n, p \in \mathbb{Q}$ tem-se $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$.
Sejam $m = [(a, b)], n = [(c, d)], p = [(e, f)] \in \mathbb{Q}$, tem-se

$$\begin{aligned}
(m \cdot n) \cdot p &= ([(a, b)] \cdot [(c, d)] \cdot [(e, f)]) \\
&= [ac, bd)] \cdot [(e, f)] \\
&= [(ac)e, (bd)f] \\
&= [(a(ce), b(df))] \\
&= [(a, b)] \cdot [ce, df)] \\
&= [(a, b)] \cdot ([(c, d)] \cdot [(e, f)]) \\
&= m \cdot (n \cdot p).
\end{aligned}$$

b) **comutatividade**: Sejam quais forem $m, n, p \in \mathbb{Q}$, vale $m \cdot n = n \cdot m$.
Considere $m = [(a, b)], n = [(c, d)] \in \mathbb{Q}$, tem-se

$$\begin{aligned}
m \cdot n &= [(a, b)] \cdot [(c, d)] \\
&= [ac, bd)] \\
&= [(ca, db)] \\
&= [(c, d)] \cdot [(a, b)] \\
&= n \cdot m.
\end{aligned}$$

c) **elemento neutro**: Existe $1 \in \mathbb{Q}$ tal que $1 \neq 0$ e $m \cdot 1 = m$, qualquer que seja $m \in \mathbb{Q}$.
De fato, defina $m = [(a, b)] \in \mathbb{Q}$ e $1 = [(1, 1)] \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}
m \cdot 1 &= [(a, b)] \cdot [(1, 1)] \\
&= [(a \cdot 1, b \cdot 1)] \\
&= [(a, b)] \\
&= m.
\end{aligned}$$

d) **inverso multiplicativo**: Todo $m \neq 0 \in \mathbb{Q}$ possui um inverso m^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.
De fato, Considere $m = [(a, b)] \in \mathbb{Q} - \{0\}$ e $m^{-1} = [(b, a)]$ ($m^{-1} \in \mathbb{Q}$, pois $a \neq 0$) temos,

$$\begin{aligned}
m \cdot m^{-1} &= [(a, b)] \cdot [(b, a)] \\
&= [(ab, ba)] \\
&= [(ab, ab)] \\
&= [(1, 1)] = 1
\end{aligned}$$

e) **distributividade**: Dados m, n, p quaisquer em $\mathbb{Q}$ tem-se $m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p)$. Considere $m = [(a,b)], n = [(c,d)], p = [(e,f)] \in \mathbb{Q}$, então

$$\begin{aligned}
m \cdot (n \cdot p) &= [(a,b)] \cdot ([(c,d)] + [(e,f)]) \\
&= [(a,b)] \cdot [(cf + de, df)] \\
&= [(a(cf + de), b(df))] \\
&= [(acf + ade + bdf, bdf)] \\
&= [(acf + ade + bdf, bdf)] \cdot 1 \\
&= [(acf + ade + bdf, bdf)] \cdot [(b,b)] \\
&= [((acf + ade + bdf)b, (bdf)b)] \\
&= [(acfb + adeb + bdfb, bdfb)] \\
&= [((ac)(bf) + (bd)(ae), (bd)(bf)))] \\
&= [(ac, bd] + [(ae, bf)] \\
&= [(a,b)] \cdot [(c,d)] + [(a,b)] \cdot [(e,f)] \\
&= m \cdot n + m \cdot p.
\end{aligned}$$

3.4 Relação de ordem em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$

Dados os elementos $[(a,b)]$ e $[(c,d)]$, dizemos que

$$[(a,b)] \geq [(c,d)],$$

se, e somente se, ao tomarmos representantes (a,b) e (c,d) de $[(a,b)]$ e $[(c,d)]$, respectivamente, com $b > 0$ e $d > 0$, tivermos,

$$ad \geq bc.$$

Esta definição não depende dos representantes das classes, ou seja, se (a',b') e (c',d') forem outros representantes quaiquer de $[(a,b)]$ e $[(c,d)]$, respectivamente, então

$$ad \geq bc \Longleftrightarrow a'd' \geq b'c'.$$

De fato, suponha que $ad \geq bc$. Então multiplicando essa desigualdade por $b'd' > 0$, segue que

$$(ad)(b'd') \geq (bc)(b'd'),$$

que equivale a

$$(b'a)(dd') \geq (bb')(cd').$$

Como $ab' = ba'$ e $cd' = dc'$, pois $(a,b) \sim (a',b')$ e $(c,d) \sim (c',d')$, então a desigualdade acima é equivalente à

$$(ba')(dd') \geq (bb')(dc').$$

Dividindo essa desigualdade acima por $bd > 0$, temos

$$a'd' \geq b'c'.$$

A recíproca é feita inteiramente análoga.

Exemplo 3.8. *Vamos aqui mostrar que* $[(-4,-8)] \geq [(2,6)]$.
Veja que $(4,8)$ *e* $(2,6)$ *são representantes de* $[(-4,-8)]$ *e* $[(2,6)]$, *respectivamente. Além disso,* $4 \cdot 6 \geq 8 \cdot 2$. *Daí,*

$$[(-4,-8)] \geq [(2,6)].$$

Proposição 3.4. *Sejam* $[(a,b)], [(c,d)], [(e,f)] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$. *A relação* $<$ *tem as seguintes propriedades:*

a) Transitiva: $[(a,b)] < [(c,d)]$ *e* $[(c,d)] < [(e,f)] \Longrightarrow [(a,b)] < [(e,f)]$

b) Tricotomia: Dados $[(a,b)], [(c,d)] \in \mathbb{Q}$, *apenas uma e somente das alternativas abaixo é apropriado: ou* $[(a,b)] > [(c,d)]$ *ou* $[(a,b)] = [(c,d)]$ *ou* $[(a,b)] < [(c,d)]$.

c) Monotonicidade da adição:

$$[(a,b)] < [(c,d)] \Longrightarrow [(a,b)] + [(e,f)] < [(c,d)] + [(e,f)] \, \forall p \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim .$$

d) Monotonicidade da multiplicação:

- $$[(a,b)] < [(c,d)] \text{ e } [(e,f)] > 0 \Longrightarrow [(a,b)] \cdot [(e,f)] < [(c,d)] \cdot [(e,f)].$$

  Em particular:
  $$\frac{2}{5} < \frac{3}{5} \text{ e } \frac{1}{5} > 0 \Longrightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} < \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5}.$$

- $$[(a,b)] < [(c,d)] \text{ e } [(e,f)] < 0 \Longrightarrow [(a,b)] \cdot [(e,f)] > [(c,d)] \cdot [(e,f)].$$

  Em particular:

  $$\frac{5}{8} < \frac{6}{7} \text{ e } -\frac{1}{2} < 0 \Longrightarrow \frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) > \frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right).$$

Uma vez que, num corpo ordenado já são estabelecidas as relações de menor que e também já definimos o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$ como corpo ordenado, de forma imediata são válidas todas essas propriedades

Conclusão

Tudo o que fizemos até aqui foi construir, a grosso modo, o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$, onde cada elemento desse conjunto se identifica com um elemento de $\mathbb{Q}$ (conjunto dos números racionais).

No Ensino Fundamental, aprendemos que as frações $2/3, 8/12, -4/-6$ são todas iguais. Olhando para os pares ordenados nos quais as abscissas e as ordenadas são o numeradores e os denominadores da fracões correspondentes, ou seja, $(2,3), (8,12), (-4,-6)$, então para quaisquer dois destes pares, o produto da abscissa do primeiro par com a ordenada do segundo par é igual ao produto da ordenada do primeiro par ordenado com a abscissa do segundo par ordenado. Ou seja, as frações a/b e c/d são iguais se, e somente se, os pares ordenados (a,b) e (c,d) satisfizerem $ad = bc$.

Então, dados $m, a \in \mathbb{Z}$ e $n, b \in \mathbb{Z}^*$ e seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais como já foi definido antes. Como $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, então $m, n, a, b \in \mathbb{Q}$. Sejam $[(m,n)], [(a,b)] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$ tal que $[(m,n)] = [(a,b)]$. Considerando $m, n, a, b \in \mathbb{Q}$, então

$$[(m,n)] = [(a,b)] \Longleftrightarrow mb = na \Longleftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{a}{b}.$$

Assim as classes de equivalência $[(m,n)]$ são retas de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Cada classe $[(m,n)]$ representa o racional $\frac{m}{n}$. Daí, identificamos o conjunto dos números racionais como sendo o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$.

O interesse de estudar o conjunto dos números racionais de uma "outra forma", ou seja, através da identificação do conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$, é para ampliar os conhecimentos em Análise e dar continuidade nos estudos em uma pós-graduação.

Referências

AGUILAR, I.; DIAS, M. S. A construção dos números reais e suas extensões. In: *4º Colóquio da região centro-oeste*. [S.l.]: Universidade Federal Fluminense, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.

DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de Aritmética*. São Paulo: Atual editora, 1991. Citado na página 9.

LIMA, E. L. *Curso de Análise I*. Rio de Janeiro: Imos gráfica e editora, 2016. Citado na página 11.

LIMA, P. C. *Fundamentos de Análise I*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Citado na página 10.