



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Samuel de Oliveira Goudinho

Aplicações de Probabilidade e Estatística no Jogo de Xadrez

São Luís - MA
2024

Samuel de Oliveira Goudinho 

Aplicações de Probabilidade e Estatística no Jogo de Xadrez

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciado em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Dr. Josenildo de Souza Chaves

São Luís - MA

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Goudinho, Samuel de Oliveira.

Aplicações de probabilidade e estatística no jogo de xadrez / Samuel de Oliveira Goudinho. - 2024.

48 p.

Orientador(a): Josenildo de Souza Chaves.

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática,
Universidade Federal do Maranhão, São Luís Ma, 2024.

1. Introdução À Probabilidade. 2. Variáveis Aleatórias. 3. Estatística Aplicada. 4. . 5. . I. Chaves, Josenildo de Souza. II. Título.

Samuel de Oliveira Goudinho 

Aplicações de Probabilidade e Estatística no Jogo de Xadrez

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 19/09/2024

Prof. Dr. Josenildo de Souza Chaves
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof.^a Dr.^a Kayla Rocha Braga
DEMAT/UFMA
Primeira Examinadora

Prof.^a Dr.^a Valeska Martins de Souza
DEMAT/UFMA
Segunda Examinadora

As conquistas provêm dos que nunca desistem.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pai que nos dá sabedoria, força e humildade.

Ao meu orientador, Josenildo de Souza Chaves que com seu grande conhecimento, capacidade crítica e paciência, orientou-me com maestria.

Aos meus amados pais pela educação que me deram e pelo incentivo dado até hoje, aos meus irmãos e amigos que me deram apoio nessa jornada de tantos obstáculos e conquistas.

“In many cases, mathematics as well as chess, is an escape from reality.”

Stanislaw Ulam

Resumo

Este trabalho é baseado em aplicações da matemática no jogo de xadrez. Especificamente na área de estatística e probabilidade. Apresenta uma introdução ao jogo de xadrez destacando as regras e movimento das peças no tabuleiro. A linguagem R é utilizada nas aplicações.

Palavras-chave: Jogo de Xadrez, Aplicações de Probabilidade, Variáveis Aleatórias.

Abstract

This work is based on applications of mathematics in the game of chess. Specifically in the area of statistics and probability. It presents an introduction to the game of chess highlighting the rules and movement of the pieces on the board. The R language is used in applications.

Keywords: Chess Game, Probability Applications, Random Variables.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Objetivos	11
1.2	Apresentação dos Capítulos	11
2	O JOGO DE XADREZ: UMA BREVE INTRODUÇÃO	12
2.1	Tabuleiro: Peças e Movimentos	12
2.1.1	Torre	12
2.1.2	Bispo	13
2.1.3	Dama	14
2.1.4	Cavalo	14
2.1.5	Rei	15
2.1.6	Peão	15
2.2	Regras: Notações e Lógicas do Jogo	16
2.2.1	Regras do Jogo	16
2.2.2	Notação	17
2.2.3	Lógicas do Jogo	17
2.3	O Xadrez Como Fonte de Estudo	18
3	FUNDAMENTOS DE PROBABILIDADE E VARIÁVEIS ALEATÓRIAS	20
3.1	Probabilidade	20
3.1.1	Definições da Probabilidade	20
3.1.2	Probabilidade Condicional	22
3.1.3	Eventos Dependentes e Independentes	23
3.2	Variáveis Aleatórias	23
3.2.1	V.A.'s Discretas e V.A.'s Contínuas	24
3.2.2	Variância de uma v.a. Discreta	25
4	APLICAÇÕES	29
4.1	Algumas Questões	29
4.1.1	Questões de Combinatória e Probabilidade	29
4.1.2	Questões de Gráficos	35
4.2	Probabilidade de vencer uma partida	38
4.2.1	Quando se Começa uma Partida	38
4.2.2	Quando Existe Algum Fator de Vantagem	40
4.3	n Torres em um Tabuleiro n por n	41
4.3.1	n Torres: Problemas e Soluções	41

4.3.2	O problema da Torre	42
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	47
	REFERÊNCIAS	48

1 Introdução

O xadrez é um jogo com regras básicas e lógicas. Atualmente é colocado entre as ciências lógicas e em meio aos esportes de intelecto. De acordo com (TIRADO; SILVA, 1995) a origem do xadrez se deu entre os séculos V e VI da era cristã, a partir de um jogo ancestral conhecido como chaturanga, jogado por até 4 jogadores que moviam suas peças segundo o resultado de um dado arremessado, cujos movimentos das peças não eram o que temos no xadrez atualmente. A maioria dos autores aponta o surgimento do jogo na Índia, e que só chegou à Europa com os persas e a expansão do islamismo. Da Europa espalhou-se pelo mundo inteiro ao longo dos últimos 6 séculos.

As regras de xadrez, movimentos e lógica foram atualizadas no século XIX. O jogo consiste na disputa entre dois jogadores e cada um com 16 peças iguais (um rei, uma rainha, dois bispos, dois cavalos, duas torres e oito peões, ver Figura 1.1). As peças são movimentadas num tabuleiro 8×8 com objetivo de capturar o rei adversário e antes que seu rei seja capturado, tendo cada peça movimentos distintos de acordo com sua nomenclatura.

Figura 1.1 – Tabuleiro de xadrez com 32 peças.



Fonte: Foto produzida pelo autor no Laboratório de Ensino de Matemática da UFMA.

Este trabalho explora o jogo de xadrez com relação à matemática, mais especificamente na área de probabilidade e estatística. Apresenta-se o jogo, sua relação com os conteúdos e seus tópicos, e aplicações geradas a partir de ambos. Podemos perceber a adequação da ideia de usar o jogo de xadrez nesse projeto, uma vez que jogos têm grande relação com a probabilidade. Em resumo, o trabalho pretende apresentar o necessário para que nossa apresentação tenha uma base do campo de estudo; os conteúdos relacionados à matemática que usamos, e aplicações da probabilidade e estatística, na prática do jogo.

1.1 Objetivos

O objetivo Geral deste trabalho é analisar o jogo de xadrez determinando probabilidades de vitória, resumos estatísticos de dados de resultados de partidas. Especificamente, temos os seguintes objetivos.

Desenvolver aplicações do jogo de xadrez voltadas ao Ensino Básico.

Analisar dados sobre a média de jogadores.

Analisar dados distribuídos em posições do tabuleiro.

Metodologia: foi feita uma pesquisa bibliográfica quali-quantitativa relacionada ao jogo de xadrez, da qual se pretende resumir os principais fundamentos teóricos do jogo e questões da análise exploratória de dados e probabilidade.

Leitura dos textos relativo ao jogo.

Aplicar a metodologia desenvolvida com dados simulados e com dados reais. Aplicações da metodologia serão realizadas com o uso da linguagem R (R Core team 2024).

1.2 Apresentação dos Capítulos

O Capítulo 2 nos permite conhecer o jogo de xadrez, o tabuleiro, peças e como jogar. O Capítulo 3 apresenta definições básicas de probabilidade, operações entre eventos, uma introdução às variáveis aleatórias e intervalos de confiança para média. O Capítulo 4, trabalha com aplicações baseadas nos desenvolvimentos teóricos dos capítulos anteriores. Apresenta-se dados sobre partidas de xadrez e probabilidades relacionadas a movimentos de peças em um tabuleiro $n \times n$. O Capítulo 5 trata das considerações finais.

2 O Jogo de Xadrez: uma breve introdução

Conhecido e jogado no mundo todo, o xadrez é tido como um jogo de estratégia que vários estudiosos afirmam desenvolver bastante o raciocínio lógico e também que pode estimular a competitividade, a concentração e a diversão. Em outras palavras é uma prática saudável para uma mente curiosa e apreensiva, portanto, uma ciência de grande destaque por ser teoricamente desenvolvedor da mente humana tanto em sentido estratégico quanto lógico ou bem-estar pessoal. Nesta seção temos uma apresentação básica do jogo, tudo o que se mostra necessário para desenvolver nossa apresentação.

2.1 Tabuleiro: Peças e Movimentos

O xadrez é um jogo de estratégia jogado por dois jogadores em um tabuleiro quadrado 8×8 e peças a se moverem no tabuleiro à escolha dos praticantes. Cada jogador tem a mesma quantidade de peças: 16, como mencionado anteriormente, sendo um rei, uma rainha, dois bispos, dois cavalos, duas torres e oito peões. Cada peças tem capturas e movimentos distintos dependendo de sua nomenclatura e, às vezes, de onde as peças se encontram no tabuleiro.

Vejamos sobre os elementos que compõem o jogo, a começar pelo tabuleiro. Apresenta-se aqui o tabuleiro de xadrez, a posição inicial do jogo e suas regras. O tabuleiro utilizado para o jogo deve conter casas alternando as cores entre casas claras e casas escuras (ou casas brancas e pretas) de modo a ter-se linhas e colunas com cores alternadas, causando diagonais de casas claras e diagonais de casas escuras, como foi mostrado na Figura 1.1.

Interpretemos o tabuleiro como um plano cartesiano 8×8 , tal que cada quadradinho desse plano cartesiano é nomeado como casa, ou seja, 8 linhas por 8 colunas de quadradinhos, com as linhas representadas por números de 1 a 8 e colunas por letras de *a* a *h*. A junção de uma letra e um número nos leva a uma coordenada do tabuleiro que é uma casa ou um dos 64 quadradinhos.

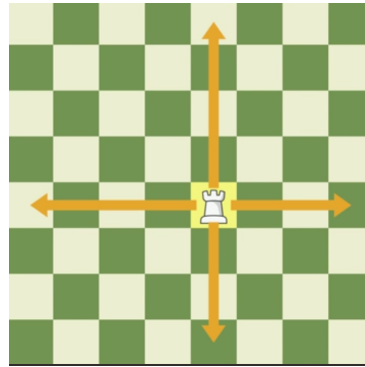
Definimos a seguir cada peça, seus movimentos e capturas.

2.1.1 Torre

As torres são as peças que, inicialmente, localizam-se nas extremidades do tabuleiro; ocupando as casas *a1* e *h1* para as brancas e *a8* e *h8* para as pretas. Movimentam-se apenas na horizontal ou na vertical quantas casas desejar o jogador, desde que não haja outras peças bloqueando o caminho, sejam peças inimigas ou as aliadas, veja a Figura

2.1. A torre não pode saltar sobre outras peças. Se houver uma peça adversária em seu trajeto, a torre pode capturá-la, removendo a peça adversária do tabuleiro e ocupando sua posição. Essa peça pode capturar qualquer peça adversária desde que esteja na mesma linha ou coluna da referida, ou seja, sua captura é como um movimento qualquer da peça.

Figura 2.1 – Movimentos da torre



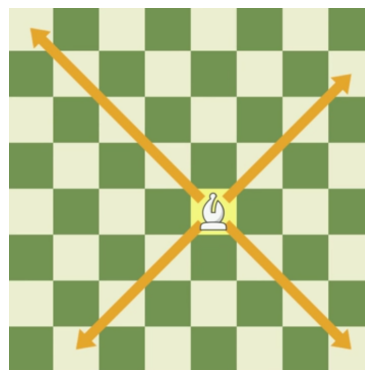
Fonte: Chess.com.

A área destacada em amarela nos mostra o alcance da torre, mas a ela pode parar em qualquer casa destacada, desde que não haja outras peças bloqueando o caminho.

2.1.2 Bispo

Os bispos, na posição inicial, são colocados na primeira fileira de cada lado do tabuleiro: nas casas *c1* e *f1* para as brancas, e *c8* e *f8* para as pretas. Se deslocam apenas em diagonais, podendo avançar quantas casas o jogador desejar, desde que não haja outras peças a bloquear o caminho, pois o bispo não salta sobre as peças. Tal com a torre, a captura ocorre quando bispo se desloca para a casa da peça capturada. A Figura 2.2 ilustra os movimentos de bispo. Quase todas as peças capturam segundo seus movimentos normais, exceto o peão.

Figura 2.2 – Movimentos do bispo



Fonte: Chess.com.

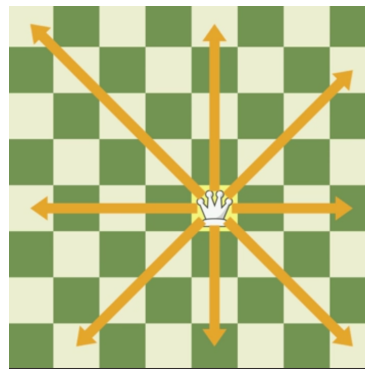
Devido ao movimento diagonal e à posição inicial, cada jogador possui um bispo em casas brancas e um bispo em casas pretas para os dois jogadores e ambos se movimentam apenas nas casas que lhes diz respeito, sem mudar para uma casa de outra cor.

2.1.3 Dama

A dama, ou rainha, é considerada a peça mais valiosa do jogo devido à vasta gama de movimentos que pode realizar.

Inicialmente, se posiciona ao lado do rei, no centro da primeira fileira, ocupando a casa que corresponde à sua cor: *d1* para as brancas e *d8* para as pretas. O seu movimento combina as habilidades da torre e do bispo, permitindo deslocar-se para qualquer casa na horizontal, na vertical ou diagonal desde que não haja outra peça a bloquear o caminho. A dama pode capturar qualquer peça adversária em seu trajeto e não salta outras peças. A Figura 2.3 ilustra seus movimentos.

Figura 2.3 – Movimentos da dama

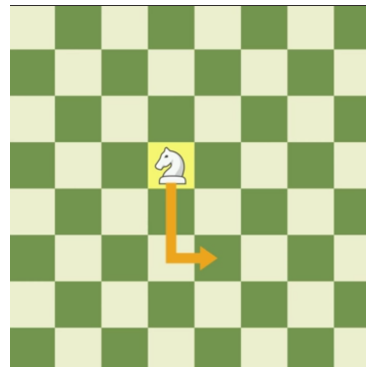


Fonte: Chess.com.

2.1.4 Cavalo

Cada cavalo se posiciona entre uma torre e um bispo, na primeira fileira de cada lado, casas *b1* e *g1* para as brancas, *b8* e *g8* para as pretas e se deslocam duas casas em direção vertical ou horizontal, e em sequência, segundo a direção escolhida andar à direita ou à esquerda mais uma casa, sendo obrigatório um movimento de "L", como mostra a Figura 2.4. O cavalo é a única peça que salta sobre as outras, podendo ir para qualquer casa a seu alcance desde que a casa não esteja ocupada por outra peça aliada. No entanto, se a peça em seu alcance for do adversário, esta pode ser capturada e o cavalo fica em seu lugar.

Figura 2.4 – Movimento L do cavalo



Fonte: Chess.com.

A figura mostra os movimentos de cavalo, que se encontra em $d5$, para $e3$, onde ele fica na casa sob a ponta da seta (e não se move para as outras casas sob a faixa amarela). Todos os movimentos da peça, além de $e3$, são: $f4$, $f6$, $e7$, $c7$, $b6$, $b4$ e $c3$. Note que são casas pretas, e cavalo sai de uma casa branca. Sim, por conveniência de seu movimento, cavalo sai de uma casa branca para uma casa preta ou sai de uma casa preta para uma casa branca.

2.1.5 Rei

O rei é a peça mais importante. Uma vez que capturado na partida, o jogo acaba. Posiciona-se na primeira fileira de um dos lados do tabuleiro, entre a dama e um dos bispos, nas casas $e1$ para brancas e $e8$ para pretas. Seus movimentos são: andar uma casa em qualquer direção, seja na vertical, horizontal ou diagonal, como se fossem os movimentos de dama limitada a uma casa de distância

O rei também captura qualquer peça adversária ao alcance desses movimentos desde que esta não esteja defendida por outra peça, pois é a única peça que não se troca no jogo; há ainda um movimento especial chamado roque usado para defender o rei colocando-o em um dos cantos do tabuleiro, ao mesmo tempo que facilita o desempenho da torre.

2.1.6 Peão

O peão é considerado a peça mais fraca do tabuleiro, mas, em compensação, há oito peões. Inicialmente, posicionam-se na segunda fileira de cada lado do tabuleiro, ou seja, $a2$, $b2$, ... , $h2$ para brancas; $a7$, $b7$, ... , $h7$ para pretas.

Movimentam-se de dois modos diferentes: o movimento principal é andar uma casa à frente, sempre na direção da última casa do lado adversário, porém para o primeiro movimento de cada peão pode ser andadas duas casas a frente; quanto a capturas, o peão captura qualquer peça que esteja em uma casa à diagonal, a frente de si.

Agora, precisamos de algumas regras e conceitos que satisfaçam a coerência do jogo e vemos elas a seguir.

2.2 Regras: Notações e Lógicas do Jogo

Pretende-se definir e pontuar como funciona o jogo: regras e lógicas, que valem de base para nosso capítulo de aplicações, vejamos algumas regras do xadrez.

2.2.1 Regras do Jogo

O jogo é sempre começado por quem estiver com as peças brancas, este faz um lance legal e logo após seu oponente faz seu lance, e assim por diante, ambos prosseguem, passando a vez ao adversário após cada lance legal jogado.

O jogo acaba por vitória de uma das partes ou empate; que podem ser aplicados de variados modos, como veremos mais adiante. Na partida, nenhum dos reis pode ser capturado ou acabaria o jogo com derrota para quem o perdesse, por isso ambos devem a todo custo evitar que o adversário ataque-o ou deixe-o sem movimentos. Quando há um ataque ao rei de algum dos jogadores, chamamos de xeque, logo está ameaçado de ser capturado no próximo lance. Em lógica, já que o rei não pode, por regra, ser capturado pelo adversário, o primeiro jogador é forçado a uma dessas três opções: capturar a peça do adversário que dá xeque, caso seja possível; bloquear o xeque colocando outra peça entre o rei e a peça adversária, caso seja possível; ou mover o rei para uma casa segura. Caso também não exista casa segura para o rei se mover ocorre o xeque mate.

Uma partida é dividida em três partes: abertura, meio-jogo e final. A abertura situa-se desde o primeiro lance até encerrar o desenvolver das peças: quando as peças menores já estiverem fora de sua casa inicial e vários movimentos de peões, feitos; o meio jogo será dado por todos os lances que ocorrer após o desenvolvimento das peças até o momento em que menos de oito ou nove peças restarem para cada jogador no tabuleiro, ou, se as peças pesadas (torres e dama) e mais metade das peças não estiverem mais em jogo; final, a partir do momento em que maioria das peças não estiverem no tabuleiro e/ou as peças pesadas não estiverem mais, chegamos ao final e, daí até o último lance decorre esta parte.

O fim do jogo é dado por vitória de um dos jogadores e derrota do outro, ou por empate de ambos. A vitória pode ser por xeque-mate, quando o jogador está com seu rei em xeque e não consegue capturar a peça que dá xeque, não consegue bloquear o xeque e, também, não pode mover o rei para uma casa segura, forçando a captura do rei no próximo lance; ou por desistência.

O empate ocorre nos seguintes casos: acordo de empate - ocorre quando um dos

jogadores oferece proposta de empate e o adversário aceita; empate por material - ocorre quando não é possível aplicar xeque-mate com o que sobrou das peças no tabuleiro ao fim de uma partida; empate por afogamento - sempre ocorre quando é a vez de um jogador e ele não tem nenhum movimento legal; empate por repetição, ou, empate por xeque - os jogadores repetem lances, obrigatoriamente, ou não, de modo que não há prosseguimento da partida.

2.2.2 Notação

Uma notação para o jogo nos permite entender todos os lances até uma dada posição e, além disso, refazermos a partida caso se queira avaliar.

A notação que usamos aqui é feita pelo seguinte raciocínio: mostra-se a peça que deseja-se mover, em que posição ela está, e em seguida para onde esta se movimenta. Por exemplo, caso temos uma torre na posição inicial $a1$; suponha agora que essa peça se mova para a casa de $a4$. Deveríamos deixar registrado como:

"torre de $a1$ para $a4$ ".

Simples, mas podemos simplificar ainda mais. Represente as peças por sua primeira letra maiúscula, exclua "de" e substitua "para" por -, e agora temos:

$Ta1 - a4$.

Podemos simplificar mais, façamos apenas a peça e a posição para onde ela vai. Isso facilita nossa notação, uma vez que só uma única torre (a que está posicionado em $a1$) consiga ir para a dita casa, e nesta condição podemos usar o simples " $Ta4$ ".

Se, por acaso, existisse outra torre que também possa ir para $a4$, digamos que esta estivesse na casa $h4$, devemos representar a jogada pela peça, mais a coluna de onde saiu, mais a casa para onde se moveu.

" $Ta - a4$ " ou " $Th - a4$ ".

E se as peças estiverem na mesma coluna, colocamos a linha da qual saiu. Considere a torre em $a7$ para isso e verifique as notações das situações acima.

" $Ta1 - a4$ " ou " $Ta7 - a4$ ".

Então, torre é representada por T , bispo por B , cavalo por C , dama por D , rei por R e para peões, geralmente não precisa colocar P , apenas a casa para qual se moveu.

2.2.3 Lógicas do Jogo

Outro conceito interessante é que as peças têm uma comparação de valor, a Tabela 1 mostra o valor aproximado das peças durante uma partida, segundo a avaliação da FIDE, de estudiosos e de profissionais do jogo. Logicamente, isso é apenas uma aproximação

que não é válida sempre, pois uma peça que não pode se mover, mesmo que valorosa, é inútil. Além disso, as peças menores se tornam muito valiosas se bem posicionadas. O jogo depende de estratégia, das posições das peças e exposição do rei.

Tabela 1: Comparação de valor das peças.

Peças	Valor relativo
torre	5
bispo	3
dama	9
cavalo	3
rei	valor incomparável
peão	1

O valor do rei não pode ser comparado, pois é mais importante que todas as peças e não pode ser capturado senão perde-se a partida, no entanto, não é a peça com mais movimentos.

Precisamos agora, antes de prosseguir, de conceitos que usamos para definir algumas palavras para não entrarmos em contradição.

Começemos por lance, que no contexto, é cada movimento legal feito com as peças por qualquer jogador. Isso é diferente das rodadas, que definimos por par de lances feito por ambos os jogadores, ou seja, o primeiro lance de cada jogador junto será o primeiro par de lances. Outra definição: cada quadradinho do tabuleiro é chamado de casa como forma de facilitar a redação. Chamamos de borda do tabuleiro, as casas mais exteriores, as mais distantes do centro do tabuleiro. Agora que já definimos isso, vejamos como aplicar o conteúdo de probabilidades no jogo.

2.3 O Xadrez Como Fonte de Estudo

Parece lógico dizer-se que o uso da estatística neste contexto é interessante. Buscar questões envolvendo xadrez com conteúdos básicos parece muito racional, uma vez que, facilitar a matemática por meio de um interessante material influencia o trabalho de muita gente. Porém, ao contrário de vários jogos o xadrez não depende tanto do fator "sorte" para se vencer, calcular as estatísticas do jogo dificilmente pode ser feita desde o começo (meio ou fim) da partida; ou encontrar calculadamente o lance que se aproximará da vitória. É tentador aplicá-las como meio de melhor avaliar o jogo mas precisamos de mais conteúdo do que esperava-se e reduzi-lo de forma a manter o necessário.

Podemos analisar, por exemplo que: cada regra do jogo o torna possivelmente calculável do ponto de vista da combinatória, campeonatos de xadrez, dados de várias

partidas, etc. Alguns temas que tratam deste assunto ganharam mais sentido neste trabalho; como questões básicas das quais pode-se apontar probabilidades e gráficos.

Podemos observar se na falta de uma peça ou por alguma desvantagem se a probabilidade de vencer muda, e avaliar abertura, meio-jogo e final ou se uma estratégia é mais vencedora que outra. Essas ideias são explorada no Capítulo 4.

Ainda no Capítulo 4, questiona-se quantas maneiras podemos colocar n torres em um tabuleiro $n \times n$ de modo que nenhuma torre possa capturar outra torre? No problema seguinte, trata-se da colocação de n torres, aleatoriamente, em um tabuleiro de xadrez $n \times n$, para determinar a probabilidade de que pelo menos uma casa ser segura, o número de casas seguras e a distribuição do número de casas seguras.

3 Fundamentos de Probabilidade e Variáveis Aleatórias

Neste Capítulo apresentamos alguns fundamentos de probabilidade e variáveis aleatórias. Fazer previsões é uma das obsessões humanas mais interessantes que existe, estamos sempre pensando como resolver um problema, qual a forma mais fácil? Quanto tempo leva? Como começa e como termina? A cada momento, escolhas e a cada escolha, possibilidades.

3.1 Probabilidade

Seguindo ([MAGALHÃES; LIMA, 2010](#)), ([MEYER, 1983](#)) e ([MORETTIN; BUSSAB, 2017](#)) apresentamos algumas definições de interesse em probabilidade.

3.1.1 Definições da Probabilidade

Definição 3.1. Denominamos de aleatório o experimento cujos resultados não podem ser previstos com certeza.

Por exemplo, as condições climáticas do próximo domingo não podem ser estabelecidas com total certeza.

Definição 3.2. Um espaço amostral Ω é um conjunto que contém todos os resultados possíveis de um certo experimento aleatório.

Representamos aqui ele pela letra grega Ω (ômega).

Seus subconjuntos são chamados de eventos e são representados por letras maiúsculas latinas A , B , C , etc. Seus elementos, por letras minúsculas latinas, e o conjunto vazio por $\emptyset$ é denominado de evento impossível.

Definição 3.3. Dados, A e B , dois eventos, a união entre ambos, representada por $A \cup B$ ocorre se pelo menos um dos eventos, A ou B ocorrer. A interseção entre A e B , denotada por $A \cap B$ ocorre quando ambos os eventos A e B ocorrem.

Definição 3.4. Definição frequentista. A frequência relativa de um evento A em n repetições de um experimento ϵ é definida por

$$f_A = \frac{n_A}{n}. \quad (3.1)$$

Sendo que n_A representa o número de vezes em que o evento A ocorreu nas n repetições do experimento ϵ .

A frequência relativa f_A possui as seguintes propriedades:

- (i) $0 \leq f_A \leq 1$. Sendo que $f_A = 1$ se, e somente se, A ocorrer em todas as n repetições de ϵ , e $f_A = 0$ se, e somente se, A nunca ocorrer nas n repetições de ϵ .
- (ii) se A e B forem eventos mutuamente excludentes ($A \cup B = \emptyset$), e se $f_{A \cup B}$ for a frequência relativa do evento $A \cup B$, então $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.
- (iii) Quando $n \rightarrow \infty$, f_A converge para $P(A)$, de modo que

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}. \quad (3.2)$$

É importante observar que a definição frequentista de probabilidade para ser aplicada requer que os experimentos aleatórios satisfaçam as seguintes condições:

- (i) O experimento poderá ser repetido indefinidamente sob condições iniciais fixadas.
- (ii) Podemos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento.
- (iii) Após um grande número de repetições independentes do experimento, uma certa regularidade estatística surgirá, a qual, torna possível construir um modelo estatístico para análise do experimento.

Definição 3.5. Definição clássica. Seja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ um espaço amostral finito e equiprovável e seja A um evento qualquer desse espaço amostral. A probabilidade de A , denotada por $P(A)$, é dada por

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \quad (3.3)$$

em que, $\#\Omega$ é o número elementos de Ω e $\#A$ é o número de elementos do evento A ou número de casos favoráveis a ocorrência de A .

De acordo com a Definição 3.5, uma probabilidade $P(\cdot)$ satisfaz os seguintes axiomas:

- (i) $0 \leq P(A) \leq 1$;
- (ii) $P(\Omega) = 1$;
- (iii) Se A e B são eventos mutuamente excludentes ($A \cap B = \emptyset$), então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- (iv) Se $A_1, A_2, \dots, A_k$ forem, dois a dois, eventos mutuamente excludentes, então $P(\bigcup_{i=1}^k A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$.

Definição 3.6. Definição axiomática. Uma função P é chamada de probabilidade se satisfaz os seguintes axiomas:

- (i) $P(\Omega) = 1$;
- (ii) $P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$;
- (iii) Se $A_i \cap A_j = \Phi, \forall i \neq j, P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Agora podemos pensar em probabilidade e espaço amostral baseando-nos em características teóricas da realização de um fenômeno aleatório.

Exemplo 3.7. O lançamento de um dado com seis faces numeradas de um a seis nos dá um espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, seja este um dado honesto com faces totalmente iguais em chances, a possibilidade de qualquer face ficar para cima é exatamente igual para todas as faces, pois não há nada que beneficie mais uma face que outra, ou seja, cada face tem probabilidade de $1/6$ de ficar com a face voltada para cima.

$$P(A) = \sum_j P(\omega_j),$$

Ou simplesmente.

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}. \quad (3.4)$$

3.1.2 Probabilidade Condicional

Definição 3.8. Dados dois eventos A e B , a probabilidade condicional de A dado que B ocorreu, representada por $P(A|B)$ é dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0. \quad (3.5)$$

Caso $P(B) = 0$, $P(A|B)$ pode ser definido arbitrariamente; neste texto usaremos $P(A|B) = P(A)$.

Exemplo 3.9. Uma urna contém 4 bolas brancas (B) e 6 vermelhas (V). Retiram-se ao acaso e sem reposição duas bolas dessa urna. Qual é a probabilidade de que as duas bolas retiradas sejam brancas?

Considere os eventos: $B_i = \{\text{a } i\text{-ésima bola retirada é branca}\}$ e $V_i = \{\text{a } i\text{-ésima bola retirada é vermelha}\}$, $i = 1, 2$. Temos que os eventos B_1 e B_2 . Observe agora que, B_1 tem probabilidade $\frac{4}{10}$, porém, B_2 está condicionado a B_1 ter sido sucesso ou fracasso. Portanto, $P(B_1|B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{4}{10} \times \frac{3}{9}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{9}$

3.1.3 Eventos Dependentes e Independentes

Dois eventos A e B são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (3.6)$$

Exemplo 3.10. Uma urna contém 4 bolas brancas (B) e 6 vermelhas (V). Retiram-se ao acaso e com reposição duas bolas dessa urna. Qual é a probabilidade de que as duas bolas retiradas sejam brancas?

Considere os eventos: $B_i = \{\text{a } i\text{-ésima bola retirada é branca}\}$ e $V_i = \{\text{a } i\text{-ésima bola retirada é vermelha}\}$, $i = 1, 2$. Temos que os eventos B_1 e B_2 são independentes. Portanto,

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2) = \frac{4}{10} \frac{4}{10} = \frac{4}{25} = 0,16.$$

Exemplo 3.11. Uma caixa contém bolas numeradas de 1 a 10. Seja A , a chance de tirar um número ímpar de dentro da caixa sem devolver, e B , a chance de tirar um número par. Note que a chance de B ocorrer é de 5 em 10, pois temos 5 números que são pares entre os 10 na caixa ou uma chance em duas. No entanto, se A ocorre primeiro, então teremos situações diferentes para B , pois uma bola foi tirada da caixa. Se A teve sucesso, então saiu uma bola ímpar da caixa e a chance de B é 5 em 9, pois existem na caixa agora apenas 9 bolas; e de mesmo modo, se A foi fracasso, a bola que saiu era par e temos 4 bolas pares em 9 agora para o evento B .

3.2 Variáveis Aleatórias

Definição 3.12. Seja Ω um espaço amostral associado a um experimento aleatório ε . Uma função X , que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real, $X(\omega)$, é denominada variável aleatória.

Neste trabalho, temos interesse em uma variável aleatória X discreta com função de probabilidade (fp) ou contínua representada por uma função densidade de probabilidade (fdp).

Exemplo 3.13. No lançamento de uma moeda honesta duas vezes, podemos associar o seguinte espaço amostral.

$$\Omega = \{\bar{c}\bar{c}, \bar{c}c, c\bar{c}, cc\},$$

em que, $\bar{c}$ = "coroa" e c = "cara". Suponha que estamos interessados na variável X = número de caras obtidas nos dois lançamentos. Então, a v.a. X assume os valores 0, 1, 2. Isto se verifica ao fazermos corresponder aos eventos $\{\bar{c}\bar{c}\}$, $\{\bar{c}c\}$, $\{c\bar{c}\}$ e $\{cc\}$ os valores 0, 1, 1 e 2, respectivamente.

Notação. Para representar as variáveis aleatórias, usa-se, por exemplo, X , Y , Z e W (letras latinas maiúsculas) e respectivamente x , y , z e w (letras latinas minúsculas) para representar os valores que aquelas variáveis aleatórias assumem.

3.2.1 V.A.'s Discretas e V.A.'s Contínuas

Definição 3.14. Seja X uma variável aleatória. Se o número de valores possíveis de X (isto é, R_x , o contradomínio) for finito ou infinito numerável, denominamos X de variável aleatória discreta.

Isto é, os valores possíveis de X podem ser postos em lista como $x_1, x_2, \dots, x_n$. No caso finito, a lista acaba, e no caso infinito numerável, a lista continua indefinidamente.

Definição 3.15. Seja X uma variável aleatória discreta. Portando $R(x)$, o contradomínio de X será formado no máximo por um número infinito numerável de valores $x_1, x_2, \dots$. A cada possível resultado x , associamos um número $p(x_i) = P(X = x_i)$, denominado probabilidade de x_i . Satisfazendo às seguintes condições:

- (a) $P(x_i) \geq 0$ para todo i ,
- (b) $\sum_{i=1} P(x_i) = 1$.

Exemplo 3.16. (a) Se temos uma caixa com dados de cores primárias e secundárias e queremos pegar, ao acaso, um dado de cor amarela, sabendo-se quantos dados existem na caixa e quantos são amarelos.

(b) Se temos um dado honesto e queremos lançá-lo até obtermos a face de valor 4, mesmo que seja lançada infinitas vezes.

(c) Se dentre os dados coloridos na caixa, queremos, ao acaso, sortear um dado amarelo que, ao ser lançado, caia com o valor 4 em no máximo cinco lances.

Definição 3.17. Seja X uma v.a. discreta, assumindo os valores $x_1, \dots, x_n$. Então, o valor esperado de X é dado por

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i). \quad (3.7)$$

Notação. Usamos a notação $E(X) = \mu$ para representar o valor esperado de uma variável aleatória X .

Temos a seguir algumas propriedades do valor esperado de uma v.a. que são muito utilizadas. A prova de cada uma pode ser vista em (MEYER, 1983). Seja X uma v.a e c uma constante, então

- (i) $E(c) = c$,
- (ii) $E(cX) = cE(X)$,
- (iii) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$,
- (iv) $E(X + c) = E(X) + c$.

3.2.2 Variância de uma v.a. Discreta

Definição 3.18. Dada uma v.a. X discreta, que assume os valores $x_1, \dots, x_n$, chamamos de variância de X ao valor

$$Var(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p(x_i), \quad (3.8)$$

em que, $\mu = E(X)$.

Notação. A notação $Var(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2$ é usada para representar a variância de uma variável X .

O desvio padrão de X , σ_X , é definido como a raiz quadrada positiva da variância, $\sigma = \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$. Devemos observar que σ_X é dado na mesma unidade de medida da v.a. X .

Se X for uma v.a. e a uma constante, são válidas as seguintes propriedades.

$$Var(a + X) = Var(X) \quad (3.9)$$

e

$$Var(aX) = a^2 Var(X). \quad (3.10)$$

Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y). \quad (3.11)$$

A equação (3.8) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum (x_i - \mu)^2 p(x_i) = \sum (x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2) p(x_i) \\ &= \sum x_i^2 p(x_i) - \sum 2x_i\mu p(x_i) + \sum \mu^2 p(x_i) \\ &= E(X^2) - 2\mu \sum x_i p(x_i) + \mu^2 \sum p(x_i) \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Exemplo 3.19. Quando queremos analisar vários lançamentos de um dado ou uma moeda, ou qualquer situação na qual cada ocorrência tem o mesmo resultado.

Definição 3.20. A v.a. discreta X , assumindo os valores $x_1, \dots, x_k$, tem distribuição uniforme se, e somente se

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p = \frac{1}{k}$$

para todo $i = 1, 2, \dots, k$; ou seja, todos os valores possíveis tem a mesma probabilidade.

Exemplo 3.21. Seja X uma v.a. para representar o número da face voltada para cima no lançamento de um dado honesto de 6 faces.

Temos,

$$E(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i, \text{ e}$$

$$Var(X) = \frac{1}{k} \left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{k} \right)$$

Logo,

$$\frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5.$$

$$Var(X) = \frac{1}{6} \left[91 - \frac{(21)^2}{6} \right] = \frac{1}{6} \left[91 - \frac{441}{6} \right] = \frac{91 - 73.5}{6} = \frac{17.5}{6} = 2.9111.$$

Definição 3.22. A variável aleatória X , que assume apenas os valores 0 e 1, com função de probabilidade $(x, p(x))$; tal que $P(X = 0) = 1 - p$ e $P(X = 1) = p$, é chamada variável aleatória de Bernoulli.

Usamos a notação $X \sim Ber(p)$ para indicar uma v.a. com distribuição de Bernoulli com parâmetro p . Então, segue-se que, se $X \sim Ber(p)$ de acordo com a definição (3.22)

$$E(X) = p; \tag{3.13}$$

$$Var(X) = p - p^2 = p(1 - p), \tag{3.14}$$

Note que

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1 - p, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Definição 3.23. Chama-se de experimento binomial ao experimento:

- (a) que consiste em n ensaios de Bernoulli;
- (b) cujos ensaios são independentes; e

(c) para o qual a probabilidade de sucesso em cada ensaio é sempre igual a p , $0 < p < 1$.

Definição 3.24. A variável aleatória X , correspondente ao número de sucessos num experimento binomial, tem distribuição binomial $b(n, p)$, com função de probabilidade

$$P(X = k|n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n;.$$

A média e a variância de uma v.a. binomial, com parâmetros n e p são dadas, respectivamente, por

$$E(X) = np, \quad Var(X) = np(1 - p).$$

Quando a v.a. X tiver distribuição binomial com parâmetros n e p , escrevemos $X \sim b(n, p)$.

Definição 3.25. Uma função X , definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é dita uma variável aleatória contínua.

São exemplos da v.a. contínua: o peso e altura de pessoas de uma dada cidade, o tempo de vida de um certo estoque de lâmpada, etc.

Definição 3.26. Dizemos que a v.a. X tem distribuição normal com parâmetros se sua fdp é dada por

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad (3.15)$$

sendo que, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$.

Em geral a notação $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ é utilizada para denotar uma v.a X normal com fdp dada pela expressão (3.15). Podemos mostrar, seguindo (MEYER, 1983) que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então: $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.

Suponha que $(X_1, \dots, X_n)$ seja uma amostra aleatória de uma v.a $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, e sejam, os parâmetros μ e σ^2 desconhecidos. Sejam

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

e

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

em que, $\bar{X}$ a média amostral e S^2 a variância amostral são os estimadores de máxima verossimilhança de μ e σ^2 , respectivamente. Então

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

tem uma distribuição t -Student com $n - 1$ graus de liberdade (MORETTIN; BUSSAB, 2017). Note que a distribuição de T não depende dos parâmetros desconhecidos μ e σ^2 . Suponha que desejamos calcular um intervalo com nível de confiança 95% para μ . Então, denotando $t_{\alpha/2}$ como o percentil 97.5 desta distribuição, temos

$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0.95,$$

que determina um intervalo aleatório para μ com 95% de confiança.

Portanto, após obtermos a amostra observada, calculamos os correspondentes valores $\bar{x}$ para $\bar{X}$ e s para S , para determinar o intervalo com $100(1 - \alpha)\%$ de confiança para μ .

$$\left[\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right], \quad (3.16)$$

em que, $t_{\alpha/2}$ é o percentil $100(1 - \alpha/2)$ de uma distribuição t -Student com $(n - 1)$ graus de liberdade.

Quando o tamanho da amostra n for suficientemente grande para que o Teorema do Limite Central possa ser aplicado, um intervalo com $100(1 - \alpha)\%$ de confiança para μ quando σ^2 for desconhecido é dado por

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right], \quad (3.17)$$

sendo que $z_{\alpha/2}$ é o percentil $100(1 - \alpha/2)$ de uma distribuição normal padronizada.

A Figura 3.1 mostra os gráficos das fdp's das v.a.'s normal padronizada e t -Student com 20 graus de liberdade.

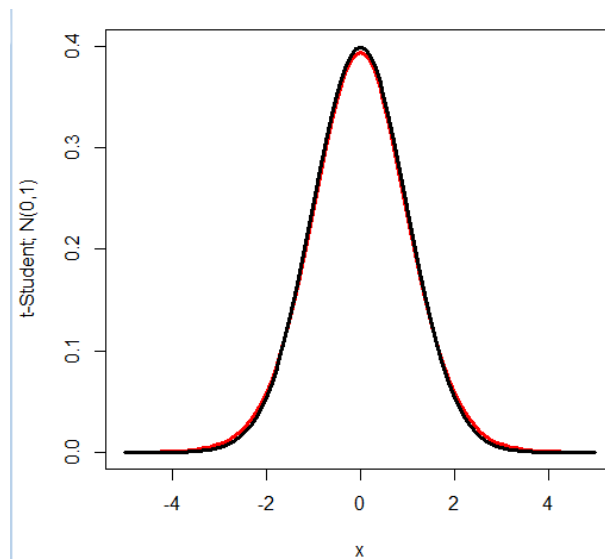


Figura 3.1 – fdp's das distribuições normal padronizada e t -Student com 20 graus de liberdade.

4 Aplicações

Neste capítulo apresenta-se algumas aplicações do jogo de xadrez voltadas para o Ensino Fundamental e Ensino Médio nas Seções 4.1 e 4.2. Além disso, apresentamos outras aplicações relacionadas com estatística e probabilidade exploradas em disciplinas de estatística matemática na Seção 4.3.

A Seção 4.1 apresenta questões relacionadas ao xadrez para resolvermos dando pequenos usos de estatística e probabilidade.

A Seção 4.2 nos dá duas situações que podem ser exploradas no meio de uma partida calculando a probabilidade de se dar bem ou mal. Quanto a Seção 4.3, a partir de uma peça: a torre, e seus movimentos, exploramos o desafio de colocarmos n torres em um tabuleiro $n \times n$ a fim de que nenhuma torre ataque outra.

4.1 Algumas Questões

As questões decorrem sobre os assuntos: combinatória e probabilidade, criação de gráficos, teoria de conjuntos e eventos dependentes ou independentes. Embora houve a pretensão de usar apenas questões de livros, recorremos a questões de concursos públicos e criamos questões. Ampliei algo às questões de livros e apliquei as resoluções, conforme minha própria análise.

4.1.1 Questões de Combinatória e Probabilidade

O primeiro problema nos remete a uma simplíssima questão de probabilidade e lógica. site:

Problema 4.1. ([Originals Teachy 2023] - Questão Média de Matemática] <https://www.teachy.com.br/questoes/ensino-medio/matematica/probabilidade-propriedades/durante-um-torneio-de-xadrez-em-sua-escola-foi-observado-que-a-probabilidade-de-um-jogador-a-vencer>, acesso em 1/6/24.)

Durante um torneio de xadrez em uma escola, foi observado que a probabilidade de um jogador A vencer a partida é de 0.35, a probabilidade de um empate é de 0.15, e a probabilidade do jogador B vencer ainda não foi determinada. Deseja-se determinar, qual é a probabilidade do jogador B vencer a partida?

Solução: Se estamos em uma partida de xadrez entre dois praticantes A e B, as únicas possibilidades são: o jogador A vencer; empate; ou o jogador B vencer.

Obviamente, se queremos $P(B)$, a probabilidade do jogador de B vencer a partida, o resultado é 1 menos a soma das duas outras possibilidades, 0.35 e 0.15. Logo $P(B) = 1 - 0.5 = 0.5$ ■

Problema 4.2. Para jogar xadrez, você precisa de 32 peças e um tabuleiro dividido em 8 linhas e 8 colunas, em geral, espaçados gerando 64 subdivisões, chamadas de casas. (Questão elaborada pelo autor.)

(a) Se todas as peças estão nas casas do tabuleiro, qual é a probabilidade de se escolher uma casa vazia?

(b) Qual a probabilidade de escolher-se uma casa vazia que seja preta, supondo que as peças estejam na posição inicial de partida?

Solução: (a) Resultado óbvio, $8 \times 8 = 64$. Ao todo são 64 casas no tabuleiro e 32 delas estão ocupadas, logo, as outras 32 casas estão desocupadas e a probabilidade de se escolher uma casa desocupada é $P(A) = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$.

(b) Se peças estão na posição inicial, então todas as 32 estão no tabuleiro, e ocupam as duas primeiras linhas e as duas últimas, sobrando um espaço 4×8 , logo também temos 16 casas brancas e 16 casas pretas desocupadas. E a probabilidade de escolher-se uma casa desocupada e preta é $P(B) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$. ■

Problema 4.3. Se cada uma de duas urnas contém oito bolas de mesma cor. A primeira, com letras de a a h ; e a segunda, números de 1 a 8, cuja combinação de ambos geram uma casa do tabuleiro. (Questão elaborada pelo autor.)

(a) Qual é a probabilidade de que uma casa gerada aleatoriamente pelas duas urnas contenha um cavalo ou um bispo, supondo que todas as peças estão no tabuleiro?

(b) Qual a probabilidade de a casa escolhida pelas urnas ser preta e não estar à borda do tabuleiro?

Solução: Não importa em que casas elas estejam, a única coisa que importa é que só existe quatro cavalos e quatro bispos no tabuleiro. Logo são oito peças em oito casas diferentes. Então a probabilidade de consegui-la é $P(C) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$.

Quanto à letra b, a casa não pode estar à borda do tabuleiro, então tiramos as casas à borda, que formam o conjunto $D = \{a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8, b1, b8, c1, c8, d1, d8, e1, e8, f1, f8, g1, g8, h1, h2, h3, h4, h5, h6, h7, h8\}$. E o que nos resta é um tabuleiro 6×6 , do qual metade são brancas e metade são pretas. Logo, do que sobrou apenas 18 casas são pretas e a nossa resposta é $\frac{18}{64} = \frac{9}{32}$. ■

O próximo problema emprega a definição clássica de probabilidade usando combinatoria.

Problema 4.4. (<https://www.respondeai.com.br/conteudo/probabilidade-e-estatistica/livro/exercicios/clubes-xadrez-duas-escolas-sao-formados-jogadores-respectivamente-quatro-membros-134390>, acesso em 1/6/24.)

Os clubes de xadrez de duas escolas, A e B são formados por 8 e 9 jogadores, respectivamente. Quatro membros de cada um dos clubes são selecionados aleatoriamente para participar de uma competição entre as duas escolas. Os jogadores escolhidos de um time então formam pares com aqueles do outro time, e cada um dos pares joga uma partida de xadrez entre si. Suponha que Rebeca e sua irmã Elisa pertençam aos clubes de xadrez, mas joguem por escolas diferentes. Elisa na escola A e Rebeca na B . Qual é a probabilidade de que

- (a) Rebeca ou Elisa sejam escolhidas para representar suas escolas?
- (b) Rebeca e Elisa sejam escolhidas para representar as suas escolas, mas não joguem uma contra a outra?

Solução: (a) Para que Rebeca ou Elisa sejam escolhidas para representar suas escolas, pelo menos Rebeca ou Elisa deve ser escolhida.

Sejam S_1 e S_2 eventos tais que,

S_1 = Rebeca está entre os escolhidos.

S_2 = Elisa está entre os escolhidos.

O resultado é a união entre dois eventos, então devemos calcular $P(S_1 \cup S_2)$. Temos pelo princípio aditivo que,

$$\begin{aligned} P(S_1 \cup S_2) &= P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2) \\ &= \frac{\binom{1}{1}\binom{7}{3}}{\binom{8}{4}} + \frac{\binom{1}{1}\binom{8}{3}}{\binom{9}{4}} - P(S_1)(S_2) \\ &= \frac{35}{70} + \frac{56}{126} - \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} \\ &= \frac{9 + 8 - 4}{18} = \frac{13}{18} = 72.22\% \text{ aproximadamente.} \end{aligned}$$

(b) Já temos a probabilidade de elas serem escolhidas como 13/18, para que elas não joguem uma contra a outra, elas deve jogar na mesma dupla, isto é, 1/4 de probabilidade. Provemos isso.

Supondo que na escola A temos Elisa, uma vez que Elisa e Rebeca tenham sido escolhidas, Elisa, obrigatoriamente, terá de formar dupla com uma das quatro escolhidas da escola B e jogar contra as outras duplas. Então, Elisa apenas não jogará contra Rebeca se ambas estiverem na mesma dupla.

Daí, fazendo a substituição temos:

$$\frac{13}{18} \times \frac{1}{4} = \frac{13}{72} = 18.05\% \text{ aproximadamente.}$$

A próxima questão nos remete a uma simplíssima questão de probabilidade e lógica.

Prosseguimos agora com as questões de teorias de conjuntos e trabalhamos aqui soma e subtração de conjuntos, eventos dependentes e independentes.

Problema 4.5. (<https://www.julio battisti.com.br/artigos/matematica/002.asp> Prova resolvida de matematica (66 a 70) do Concurso Assistente Legislativo Camara POA. questão 70, acesso em 1/6/2024.)

Uma escola tem 2.000 alunos, sendo 800 rapazes e 1.200 moças. Sabe-se que:

I – Do total de alunos: 1.300 praticam algum esporte, 860 jogam xadrez e 600 praticam algum esporte e jogam xadrez.

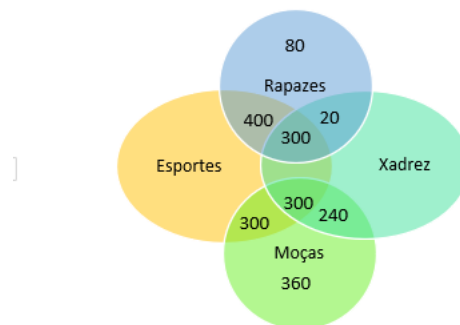
II – Do total de moças: 600 praticam algum esporte, 540 jogam xadrez e 300 praticam algum esporte e jogam xadrez.

Qual é, o número de rapazes que não pratica algum esporte e não joga xadrez?

Obs.: a questão não considera xadrez como esportes.

Solução: Se dos 2000 alunos, 1300 praticam algum esporte; 860 jogam xadrez e 600 praticam ambos, isso significa que 1560 alunos praticam pelo menos um dos exercícios dados, e 440 não os praticam. Se do total de moças 600 praticam algum esporte, 540 jogam xadrez e 300 praticam ambos, então 840 moças praticam os exercícios dados. Logo 360 moças não praticam, e assim, $440 - 360 = 80$ que é o total de rapazes dessa escola que não praticam nenhum destes. Ver Figura 4.1.

Figura 4.1 – Estatística de alunos



Fonte: Produzido pelo autor.

Problema 4.6. Supondo um tabuleiro com peças de xadrez, responda as seguintes questões com o princípio aditivo para quantidade de peça em cada item.(Elaborada pelo autor.)

Seja b = bispo (4 peças); c = cavalo (4 peças); d = dama (2 peças); p = peão (16 peças); r = rei (2 peças); t = torre (4 peças).

- a) Dê a cardinalidade do conjunto das peças que se movem verticalmente.
- b) O conjunto das peças que se movem diagonalmente.
- c) O conjunto das peças que capturam diagonalmente.
- d) O conjunto das peças que não se movem verticalmente.
- e) O conjunto das peças que não se movem verticalmente ou diagonalmente.
- f) O conjunto das peças que se movem verticalmente e diagonalmente.
- g) O conjunto das peças que não se movem mais que três casas de distância.

Solução: (a) As peças que se movem verticalmente são peões, rei, dama, e torres podemos denominar como o conjunto $A = p \cup r \cup d \cup t$ e sua cardinalidade é $16 + 2 + 2 + 4 = 24$ em 32 peças.

(b) Só se movem diagonalmente rei, dama e bispos, esse é o conjunto $B = r \cup d \cup b$ e sua cardinalidade é $2 + 2 + 4 = 8$ das 32 peças.

(c) Além das três mencionadas anteriormente, na questão (b), peões também capturam diagonalmente, ou seja, temos o conjunto $C = B \cup p = 8 + 16 = 24$ em 32.

(d) O conjunto D é complementar ao conjunto A, apenas bispo e cavalo não se movem verticalmente. Então, $D = b \cup c$ e eles são $32 - 24 = 8$ peças em 32.

(e) Único possível: cavalo, o conjunto $E = c$, 4 em 32 peças.

(f) É a interseção de A e B: $A \cap B$, só rei e dama tem as duas como opção de escolha, são apenas $2 + 2 = 4$ em 32.

(g) Rei, cavalo e peão, o conjunto $G = r \cup c \cup p$, são $2 + 4 + 16 = 22$ em 32 peças.



Problema 4.7. Considere um bispo preto que ande em casas pretas e um cavalo branco (pode estar em casas de qualquer cor).

a) De quantas maneiras podemos dispor este bispo e este cavalo no tabuleiro de xadrez de maneira que eles não se ataquem (posiciona bispo primeiro e cavalo após).

Solução: Para começar, será mais fácil apontarmos em quantas combinações as peças se atacam e o complementar com o número total de combinações será a resposta. Pensemos assim, como o bispo obrigatoriamente é de casas pretas, bispo ataca cavalo se este estiver em uma casa preta ao seu alcance de captura (ver movimentos de bispo); e cavalo ataca bispo quando cavalo está numa casa branca e alcança o bispo na casa preta que este está (ver movimentos do cavalo).

Facilite por apontar todas as posições do tabuleiro onde: (A) cavalo se posiciona em uma casa preta e é atacado por um bispo, somada a (B) as posições onde cavalo está nas casas brancas e ataca o bispo. Então, $S(A) \cup S(B)$ são todas as posições onde as peças

se atacam, porém, queremos a contagem das posições onde elas não se atacam, ou seja, $S(\overline{A}) \cup S(\overline{B})$.

Seja $S(A)$ e $S(B)$ eventos cujos queremos descobrir o número de combinações, sendo que:

$S(A)$ = todas as posições nas quais cavalo se posiciona nas casas brancas e ataca bispo.

$S(B)$ = todas as posições do tabuleiro na qual cavalo se posiciona em casas pretas e seja atacado por bispo.

Para entender $S(A)$, verifique o tabuleiro abaixo com números nas casas brancas.

Figura 4.2 – Tabuleiro com números nas casas brancas



Fonte: o autor

O tabuleiro da Figura 4.2 mostra por casas numeradas, a casa que podemos colocar o cavalo e o numero de casas que deve-se estar o bispo para atender $S(A)$. por exemplo: a casa **b1** com número 3 significa que se cavalo) está nesta casa, podemos posicionar o bispo em outras 3 casas que no caso são: *a3*, *c3* ou *d2* e $S(A)$ será atendido. Note que, para esse caso o bispo será posicionado numa casa preta, 32 possibilidades e cavalo numa casa branca, 32 possibilidades; totalizando 1024 posições ao posicionar as duas peças.

Temos na representação acima, 8 casas com número 8; 8 casas com 6; 10 casas com 4; 4 com 3 e 2 com 2, ou seja

$$8 \times 8 + 8 \times 6 + 10 \times 4 + 4 \times 3 + 2 \times 2 =$$

$$64 + 48 + 40 + 12 + 4 = 168 \text{ que subtraímos de } 1024 \text{ e sobra } 856.$$

Agora, apontamos na figura 4.3 o tabuleiro de $S(B)$. As casas numeradas são as que podemos posicionar o bispo e os números são a quantidade de modos para que cavalo seja atacado para atender $S(B)$.

Figura 4.3 – Números nas casas pretas



Fonte: o autor.

Temos 14 casas com número 7; 10 com número 9; 6 com 11 e 2 com 13, logo.

$$14 \times 7 + 10 \times 9 + 6 \times 11 + 2 \times 13$$

$$= 98 + 90 + 66 + 26 = 280$$

Que subtraímos de $32 \times 31 = 992$, o total de posições possíveis para as peças. E nos sobra 712 posições para o complementar de S(B).

Somamos agora os complementares cujos são conjuntos disjuntos, logo a resposta é $712 + 856 = 1568$ possíveis formas de organizar-se as peças sem se atacarem. ■

(b) Qual a probabilidade de posicionar aleatoriamente um cavalo branco e um bispo preto que ande em casas pretas no tabuleiro sem se atacar?

Solução: Para começar, posicionamos primeiro o cavalo e surge a seguinte distinção: se cavalo for colocado em uma casa branca ainda existe 32 possibilidades para se posicionar o bispo, mas se cavalo for colocado em uma casa preta sobram 31 para o bispo.

Aqui temos o caso de um evento dependente, com os eventos (C), cavalo posicionado numa casa branca; e (D), cavalo numa casa preta. Tem-se 64 posições para o cavalo, porém, Se C ocorre, o bispo tem 32 posições e caso D ocorra, são 31 posições. Então C tem $64 \times 32 = 2048$ e D tem $64 \times 31 = 1984$.

Porém, não há diferença quanto ao número de combinações que ainda é 1568.

E assim, temos dois resultados de probabilidades: P(1) e P(2)

$$P(1) = \frac{1568}{2048} \approx 76.56\% \quad P(2) = \frac{1568}{1984} \approx 79.03\%. \quad \blacksquare$$

4.1.2 Questões de Gráficos

Essas são as questões nas quais, a construção de um gráfico facilita a resolução.

Problema 4.8. Em uma plataforma de xadrez on-line, as estatísticas de um certo jogador são dadas na tabela deste problema 4.8, em que se mostra a porcentagem de vitórias,

empates e derrotas quando ele joga de peças brancas e quando ele joga de pretas.

Estatísticas de um jogador.

<i>peças</i>	<i>vitória</i>	<i>empate</i>	<i>derrota</i>
<i>pretas</i>	50%	10%	40%
<i>brancas</i>	60%	5%	35%

Fonte: <https://questoes.grancursosonline.com.br/questoes-de-concursos/matematica/2823352>.

Acesso em 1/6/24.

Sabe-se, também, que o número de vezes em que esse jogador jogou de brancas foi duas vezes o número de vezes em que jogou de pretas.

(a) Qual a razão entre o número de vitórias de pretas e o número total de vitórias?

Para melhor enfatizar a questão podemos pedir sua representação gráfica:

(b) Estabeleça em gráfico a divisão de porcentagem de brancas e pretas, de acordo a questão.

Solução: (a) Suponha um total de n partidas

Seja k o total de partidas com as peças brancas (B). Então,

$n - k$ = "total de partidas com as peças pretas (P)".

Obs: $k = 2(n - k) \Rightarrow 2n = 3k \Rightarrow k = \frac{2}{3}n$.

$$VP = \frac{1}{2n} \times (n - k) = \frac{1}{2n} \times \left(n - \frac{2}{3}n\right) = \frac{1}{2n} \times \frac{1}{3}n = \frac{1}{6}$$

$$VB = \frac{\frac{6}{10}k}{n} = \frac{\left(\frac{6}{10}\right)^2 \frac{2}{3}n}{n} = \frac{2}{5} = 0.4$$

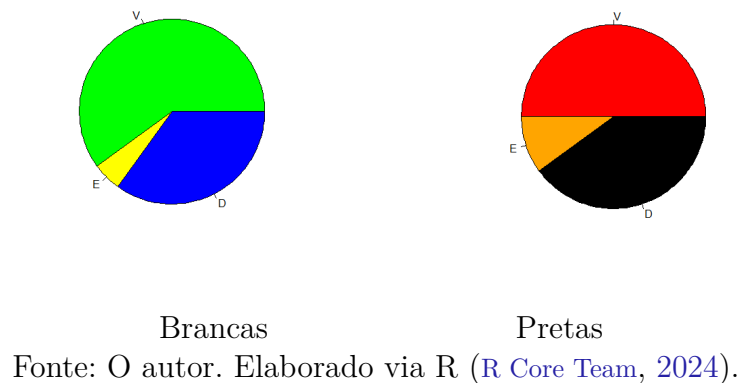
$$EB = 0.05 \times \frac{2}{3} = 0.03$$

$$DB = 0.35 \times \frac{2}{3} = 0.23$$

Obs: $VB + EB + DB = 0.4 + 0.03 + 0.23 \cong 0.66$ $VP + EP + DP = 1 - 0.66 \cong 0.34$

Ver Figura 4.4

Figura 4.4 – proporção de B e proporção de P.



E concluída essa questão passemos à próxima, que também não pedia que tivesse um gráfico, no entanto, devido ser uma questão de probabilidades somadas, facilitaria termos seu gráfico com esse objetivo.

Problema 4.9. (<https://gabariteconcurso.com.br/questoes/56519-questao>, acesso em 1/6/24.)

Um tabuleiro quadrado e quadriculado, semelhante a um tabuleiro de xadrez, com 12 linhas e 12 colunas, e, portanto, com $12 \times 12 = 144$ quadradinhos pintados: 54, na cor azul; 30, na cor marrom; 40, na cor amarela; e 20, na cor verde. A cada quadradinho é associado um cartão com dois números, que indicam a posição do quadradinho no tabuleiro; o primeiro número corresponde ao número da linha, e o segundo corresponde ao número da coluna. Por exemplo, o cartão com os números 5, 10 corresponde ao quadradinho posicionado na linha 5 e na coluna 10. Suponha que esses cartões estejam em uma urna, da qual retira-se aleatoriamente um cartão.

- (a) Qual é a probabilidade de sair um cartão correspondente a um quadrado que não tenha sido pintado na cor marrom?
- (b) Fazer um gráfico que nos represente a probabilidade de cada cartão.

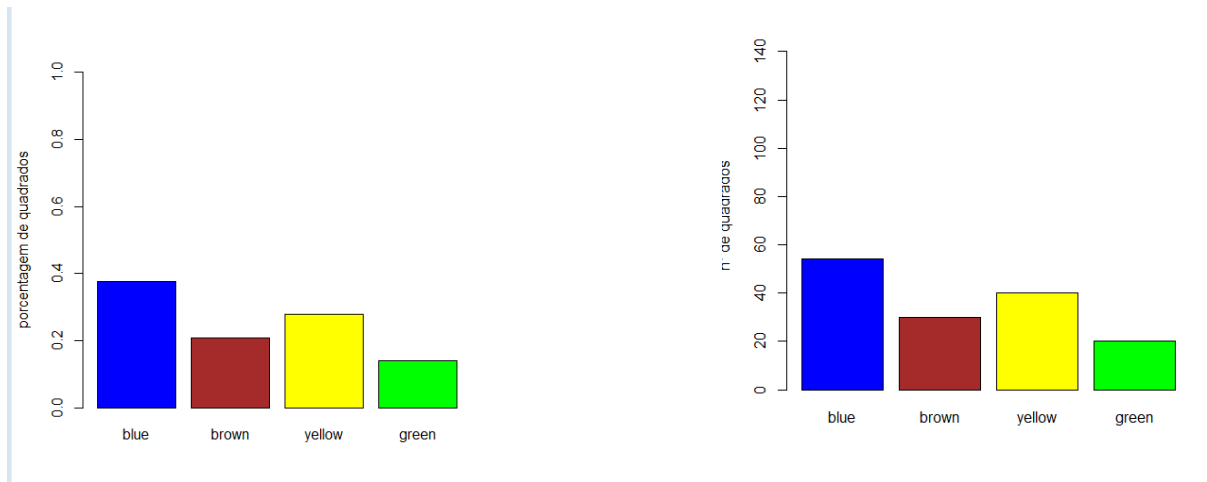
Solução: (a) A resposta é óbvia. Se temos 30 quadradinhos marrons em meio a 144 quadradinhos. Temos pela definição clássica de probabilidade:

$$\frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{30}{144} \approx 20.83\%,$$

Como a questão pede a probabilidade de não ser marrom a resposta é 79.17%

(b) A representação gráfica é dada pela Figura 4.5

Figura 4.5 – Probabilidades dos cartões do problema 4.6



Fonte: autor. Elaborado via R ([R Core Team, 2024](#)).

■

4.2 Probabilidade de vencer uma partida

Para esta seção, é necessário estar ciente de que seria praticamente impossível termos a probabilidade exata de se vencer uma partida, no entanto, podemos simplesmente avaliar situações particulares apenas, sem correlacionar ao outro.

Nesta seção analisamos duas situações para verificar se existe vantagem com a escolha do primeiro lance da partida. E além disso, a probabilidade de vencer uma partida após a perda da dama antes que o adversário, a partir do trabalho de ([WHITE, 2018](#)).

4.2.1 Quando se Começa uma Partida

Problema 4.10. A questão aqui é: quantas posições são possíveis para um primeiro lance de cada jogador e podemos provar, probabilisticamente, que um lance inicial tem mais chance de vitória que outro?

Solução: Ao começar uma partida, as regras exigem que brancas façam o primeiro movimento. Sabendo que no tabuleiro só podemos começar com peões ou cavalos, já que as outras peças não podem pular as que estão na frente. Para um primeiro lance temos dois possíveis movimentos para todos os oito peões e também para cada cavalo, isso nos dá 20 movimentos para o primeiro lance. O jogador de pretas também tem os mesmos 20 movimentos para o primeiro lance sendo assim a primeira rodada resulta em 400 possíveis combinações diferentes.

O método aqui usado para pontuar como melhor lance entre os 20 é, aquele que nos der maior número de combinações para o segundo lance, supomos que mais lances

melhor permite atacar e defender.

Se definimos cada um dos movimentos do segundo lance do jogador de peças brancas como iguais já que desenvolve peças, a moda para o primeiro lance é dado pelo movimento que possibilita maior quantidade de movimentos para o segundo lance, isto é, a quantidade de possibilidades para o segundo lance comprova quão bons são cada uma das 20 possibilidades. Exemplo: o movimento *e4* é feito pelas brancas, agora independente do que pretas jogarem, quantos movimentos de brancas podem ser feitas no segundo lance?

E como resposta, temos 19 dos 20 movimentos para o segundo lance, mais outros 11 novos movimentos que antes estava bloqueados, que dá 30 possibilidade para o segundo lance de brancas: além de poder ainda mover qualquer um dos outros peões e cavalos nas casas iniciais também permite a liberação da dama que no segundo lance pode ocupar 4 casas a mais; de um bispo que pode ocupar 5 casas a mais; cavalo ganha mais um movimento possível e espaço para o rei mover para uma casa, além disso, o peão perde o passo duplo.

Veja a Tabela 4.10, ela nos dá o primeiro movimento feito e quantos movimentos são possíveis para o segundo lance. Observe que **a3** significa: no primeiro lance, jogar peão da coluna *a* em *a3*, assim como, **Ca3** significa que no primeiro lance joga-se cavalo da coluna *b* em *a3*.

Tabela 4.10 - lances e resultados.

<i>lance</i>	<i>quant. de possibilidades</i>	<i>lance</i>	<i>quant. de possibilidades</i>
a3	19	a4	21
b3	21	b4	21
c3	21	c4	22
d3	27	d4	28
e3	30	e4	30
f3	19	f4	20
g3	21	g4	21
h3	19	h4	21
C a3	20	C c3	22
C f3	22	C h3	20

Fonte: produzida pelo autor.

Seja *Q* o conjunto de movimentos do segundo lance feito após o primeiro, temos que os lances mais frequentes são *e3* e *e4* com 30 movimentos cada para o lance seguinte.

Lembrando a Tabela 2.1 da seção 2.2.3, podemos reforçar esses dois movimentos como melhores, uma vez que permite posicionar mais peças pesadas no segundo lance, dama = 9 e bispo = 3. Porém, *e3* é menos ofensivo que *e4* (ver lances de peão), pois foge

da ideia de controlar o centro, no entanto estes têm provavelmente, maiores probabilidade de vitória. ■

4.2.2 Quando Existe Algum Fator de Vantagem

Lembrando que o jogador de brancas inicia a partida, uma hipótese das principais ideias é vista em (WHITE, 2018). Ele e seu professor tinham uma hipótese: era a suposta citação de que, ao perder a dama primeiro que o adversário, este teria maior probabilidade de vencer a partida quando ambos prosseguem com lances lógicos. E, a partir deste a testaram com a situação a seguir:

Problema 4.11. Determinando quem perdeu primeiro a dama e quem venceu a partida. calcular a probabilidade estimada de vencer. Essas são as quatro possibilidades:

- Dama branca foi capturada primeiro e brancas vencem ($B_brancas$).
- Dama branca foi capturada primeiro e preta vencem (B_pretas).
- Dama preta foi capturada primeiro e brancas vencem ($P_brancas$).
- Dama preta foi capturada primeiro e preta vencem (P_pretas).

Solução: (WHITE, 2018) resolveu, por meio de um programa de computador, após a avaliação dos dados simulados de 11200 partidas tinha-se os seguintes resultados:

$B_brancas: 1926$

$B_pretas: 3535$

$P_brancas: 3822$

$P_pretas: 1917$

Analisando, inicialmente, se brancas tem maior vantagem ao jogar, observa-se que brancas venceram 5748 vezes, uma probabilidade de $5748/11200$, aproximadamente 51.32% das partidas vencidas por brancas.

Podemos deduzir que o jogador de brancas tem uma leve vantagem em começar o jogo, embora seja uma minúscula diferença. Mas o mais importante era dizer se a perda da dama leva à derrota, daí temos da união de $b_brancas$ e b_pretas todas as partidas em que a dama branca foi capturada primeiro. O total é 5461 partidas e brancas só venceram 1926. Note que isso nos dá uma probabilidade $P(v) = 1926/5461$, aproximadamente 35.27% de chance. Em outras palavras, a chance de vitórias das brancas cai de 51.32% para 35.27%, aproximadamente, uma vez que a dama branca é capturada primeiro que a dama preta.

Da mesma forma, somadas $n_brancas$ e n_pretas quando a dama negra é capturada primeiro temos 5739 e o jogador de preta vence 1917 vezes, sua probabilidade de vitória é $1917/5739$, 33.40% aproximadamente. Note que a chance de vitórias das pretas cai de 48.68% para 33.40% uma vez que perdem a dama primeiro.

Temos que para ambos os jogadores a chance de vencer após perder a dama está acima de 33.33% ou $1/3$, então podemos concluir que a cada três partidas que brancas perdem a dama primeiro é esperado que em uma delas as brancas consigam vencer e o mesmo vale para as pretas. ■

4.3 n Torres em um Tabuleiro n por n

Nesta seção seguimos o trabalho de (MILLER; SHENG; TUREK, 2021) que explora aplicações de contagem, algoritmos, probabilidade e estatística no jogo de xadrez. Trata-se do problema das n torres, que consiste em colocar n torres em um tabuleiro de xadrez $n \times n$ de forma que elas não se ataquem. Esta é uma das variações do conhecido problema das 8 rainhas explorado em salas de aula. O problema pode ser formulado na forma seguinte: Se n torres são colocadas aleatoriamente em um tabuleiro de xadrez $n \times n$, qual é a probabilidade de que pelo menos uma casa seja segura, qual é o número de casas seguras, qual é a distribuição do número de casas seguras e o valor esperado do número de casas seguras?

4.3.1 n Torres: Problemas e Soluções

Problema 4.12. De quantas maneiras podemos colocar n torres em um tabuleiro $n \times n$ de modo que nenhuma torre possa capturar outra torre e qual é a probabilidade de ocorrência desse evento?

Solução: Supondo um tabuleiro $n \times n$ no qual colocamos n torres, para posicionar uma primeira torre temos n^2 formas de escolher uma casa. Para a segunda torre não podemos posicionar nem na mesma linha nem na mesma coluna que a anterior e o que resta são $(n - 1)^2$; para a terceira há $(n - 2)^2$, e assim por diante até a n -ésima torre que para ela só sobra 1 casa com exatidão de não estar na mesma linha ou coluna das anteriores, e a resposta é

$n^2 \times (n - 1)^2 \times \dots \times 9 \times 4 \times 1$ o mesmo que

$$\prod_{i=1}^n i^2 \quad (4.1)$$

Vejamos o exemplo do tabuleiro padrão. É um tabuleiro 8×8 , logo todas as possibilidades são $64 \times 49 \times 36 \times 25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1$.

No entanto, enquanto colocamos as n torres no tabuleiro, foi feita uma diferença em cada torre, uma vez que, as chamamos primeira torre, segunda, etc. Mas, como todas as torres são iguais, então, do resultado anterior, temos que dividir pelo número de combinações iguais de uma mesma posição.

$$= \prod_{i=1}^n i^2 / i = \prod_{i=1}^n i = n!. \quad (4.2)$$

ou seja, $8! = 40320$ posições diferentes.

Para a segunda parte da questão, já sabemos quantos resultados diferentes há para um tabuleiro qualquer, agora tomamos todas as possibilidades do tabuleiro, isto é, posicionar n torres em qualquer casa do tabuleiro $n \times n$. Daí para a primeira torre temos $n^2 \times (n^2 - 1) \times \dots \times (n^2 - n)$, uma vez que só usamos os n primeiros termos, se notarmos a questão das n torres como iguais ainda dividimos o resultado por $n!$, como feito anteriormente. Logo o número de todas as combinações possíveis são dada pela fórmula.

$$C_{n^2,n} = \binom{n^2}{n} = \frac{(n^2)!}{n!(n^2 - n)!}. \quad (4.3)$$

Seja $n = 8$, (um tabuleiro padrão) o número de possibilidades é

$$C_{64,8} = \frac{64!}{8! \times 56!} = \frac{64 \times 63 \times \dots \times 57}{8!} = 4426165368.$$

Enfim, temos a probabilidade de ocorrer aleatoriamente uma representação do desafio em todas as possíveis formas de posicionar n damas num tabuleiro $n \times n$. O resultado é

$$\frac{n!}{C_{n^2,n}}. \text{ Ou para um tabuleiro padrão}$$

$$\frac{8!}{4426165368}$$

aproximadamente 91×10^{-6} . ■

4.3.2 O problema da Torre

Problema 4.13. "Problema da Torre: Se n torres são colocadas aleatória e uniformemente em um tabuleiro de xadrez $n \times n$, qual é a probabilidade de que pelo menos uma casa seja segura, qual é o número de casas seguras" ([MILLER; SHENG; TUREK, 2021](#)).

Solução: Lembremos que torre é a peça que se movem verticalmente ou horizontalmente, e podemos resolver isso, primeiro, fazendo $n = 1$, $n = 2$, (...) da qual podemos notar facilmente que só a partir de $n = 3$ existirá uma casa segura contanto que não seja colocadas as três em linhas ou colunas diferentes. A resposta dos autores para isso foi a seguinte.

"Para que não haja quadrados seguros, deve ser que cada linha tenha uma torre ou cada coluna tenha uma torre. Supondo que cada torre está em uma coluna diferente a probabilidade é $\frac{n^n}{n! \binom{n^2}{n}}$ ".

Para obter n^n , basta pensar que cada torre está em cada linha ou coluna, supondo que seja colunas, a torre 1 está na primeira coluna, a dois na segunda e assim sucessivamente até n , como a coluna 1 tem n quadrados possíveis de escolha; a 2, n também; e assim até a

coluna n resulta em uma multiplicação de $n \times n \times n \times \dots \times n = n, n^n$ pois temos n produtos. Não precisa de muito para encontrar a parte combinatória da questão, ela é apenas um arranjo do número de escolhas possível de $n^2 - n$ casas vazias em n^2 que é A_{n^2, n^2-n} . Com isso, se um tabuleiro fosse 3×3 haverá $\frac{3^3}{3! \binom{3^2}{3}}$. Calculando isso temos $\frac{27}{6 \binom{9}{3}} = \frac{3}{56}$ que é a probabilidade de não haver um quadrado seguro no tabuleiro. Quanto maior n mais diminui o número de casas não seguras até se tornar tão próximo a 0 quanto quisermos. Logo, quando $n \rightarrow \infty$ a probabilidade de casas seguras é igual a 1. ■

Continuamos agora com a segunda questão do resultado do trabalho de (MILLER; SHENG; TUREK, 2021).

Problema 4.14. Para a questão anterior, "qual é a distribuição do número de casas seguras?"

Solução: (MILLER; SHENG; TUREK, 2021) dizem, "Como n tende ao infinito, o número esperado de quadrados seguros no Problema da Torre converge para n^2/e^2 , então a porcentagem de quadrados seguros converge para aproximadamente 13,53%". Para provar isso seguiremos a seguinte ideia: "Seja β uma configuração do tabuleiro (n torres localizadas em casas de um tabuleiro $n \times n$), e considere o indicador binário $X_{ij}(\beta) = 1$ se o quadrado (i,j) for seguro sob β e 0 caso contrário". Temos que cada uma das configuração β ocorre com probabilidade $\frac{1}{\binom{n^2}{n}}$, uma vez que temos n torres.

$$\mu_n = \sum_{i,j=1}^n E[X_{ij}(\beta)]$$

$$e \sigma_n^2 = \sum_{i,j=1}^n E[(X_{ij}(\beta)\mu_n)^2] ;$$

Antes de prosseguirmos, a ideia dos autores é usar "a desigualdade de Chebyshev para mostrar que o número de quadrados seguros para um β aleatório está concentrado próximo da média". Usa-se a fração média de quadrados seguros dado por $\frac{\mu_n}{n^2}$ e covariâncias, porém não entramos nesses conteúdos pois devido à complexidade do assunto, este deixa de ser nossa prioridade.

O objetivo agora é mostrar que o resultado 2 converge, de fato, para n^2/e^2 , quando $n \rightarrow \infty$ do seguinte modo. n^2 é o numero de casas avaliadas inicialmente para as torres e ao atravessarmos todos os casos, sempre haverá inteiros a e b tal que o número de casas que perdemos é um inteiro, e tal inteiro daremos como $n \times a + b$, o número de casas não seguras e sendo assim, teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n^2 - an - b}{n}}{\binom{n^2}{n}} = \frac{1}{e^a}. \quad (4.4)$$

,uma vez que

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n^2-an-b}{n}}{\binom{n^2}{n}} &= \frac{(n^2-an-b)!}{n! \times (n^2-(a+1)n-b)!} \times \frac{n!(n^2-n)!}{(n^2)!} \\
&= \frac{(n^2-an-b)!}{(n^2-(a+1)n-b)!} \times \frac{(n^2-n)!}{(n^2)!} = \frac{(n^2-an-b)!}{(n^2)!} \times \frac{(n^2-n)!}{((n^2-(a+1)n-b)!)} \\
&\quad \frac{(n^2-n)(n^2-n-1)\dots(n^2-(a+1)n-(b-1))}{n^2(n^2-1)\dots(n^2-an-(b-1))} \\
\prod_{k=0}^{an+b-1} \frac{n^2-n-k}{n^2-k} &= \prod_{k=0}^{an+b-1} 1 - \frac{n}{n^2-k}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

O que está sendo feito aqui é a probabilidade do número de casas seguras sob o número de resultados totais. O resultado que se segue faz todo o sentido. Agora, manipulando o produto a gente consegue o seguinte.

$$\frac{n}{n^2-k} = \frac{1}{n} + \frac{k}{n^3-nk}$$

Notando que k está entre 0 e $an+b-1$, podemos prosseguir assim.

$$\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{an+b-1}{n^3-an^2-(b-1)n}\right)^{an+b} \leq \prod_{k=0}^{an+b-1} \left(1 - \frac{n}{n^2-k}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an+b} \tag{4.6}$$

E quando n tende ao infinito,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an+b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^a \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^b = e^{-a}$$

E enfim, chegamos ao que esperava-se, mas queremos agora encontrar o limite à extrema esquerda, isto é, uma aproximação por baixo do resultado. Bom, ao fazermos isso encontraremos o mesmo resultado de antes " $\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an+b}$ ". Resolveremos isto provando

que o fator restante está extremamente próximo de 1, os limites superior e inferior do nosso produto serão próximos e poderemos então considerar os limites como $n \rightarrow \infty$. Segundo (MILLER; SHENG; TUREK, 2021).

Desde que podemos mais uma vez manipular a equação 4.5. De seguinte modo é feito.

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{an+b-1}{n^3-an^2-(b-1)n}\right)^{an+b} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an+b} \times \left(1 - \frac{an+b-1}{n^3-an^2-(b-1)n} \times \frac{n}{n-1}\right)^{an+b} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an+b} \times \left(1 - \frac{an+b-1}{n^3-an^2-(b-1)} \times \frac{1}{n-1}\right)^{an+b} \\
&\text{,e como sabemos, } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an+b} = e^{-a}
\end{aligned}$$

, queremos provar que $\left(1 - \frac{an+b-1}{n^3-an^2-(b-1)} \times \frac{1}{n-1}\right)^{an+b}$ resulta em 1 quando $n \Rightarrow \infty$.

Note que essa mesma equação acima, se elevada apenas a "b" resulta em 1, pois $n \Rightarrow \infty$. Logo resulta apenas

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{an + b - 1}{n^3 - an^2 - (b - 1)} \times \frac{1}{n - 1}\right)^{an+b} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{an + b - 1}{n^3 - an^2 - (b - 1)} \times \frac{1}{n - 1}\right)^{an}. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{an + b - 1}{n^3 - an^2 - (b - 1)} \times \frac{1}{n - 1}\right)^{an} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{an} = 1. \end{aligned}$$

Já que n tende a infinito, o fator essencial é $1 - a/n^2$ e, portanto, quando elevamos isso à enésima potência, ele deve tender a 1. Como a é um número inteiro positivo, e n tende ao infinito, temos $(an + b - 1)/(n^2 - an - (b - 1))$ maior ou igual a c/n , tal que $c > 0$. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{an + b - 1}{n^2 - an - (b - 1)} \times \frac{1}{n - 1}\right)^{an} > \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{an} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{c}{n}\right)^n\right)^a = e^{-ca}.$$

Tomando o menor c possível, $c \rightarrow 0$ temos $e^0 = 1$, então o resultado nos diz que

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an+b} \times \left(1 - \frac{an + b - 1}{n^3 - an^2 - (b - 1)} \times \frac{1}{n - 1}\right)^{an+b} = e^{-a} \times 1 \times 1 = e^{-a}.$$

Pelo teorema do confronto, o resultado é provado. E

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n^2 - an - b}{n}}{\binom{n^2}{n}} = \prod_{k=0}^{an+b-1} \left(1 - \frac{n}{n^2 - k}\right) = \frac{1}{e^a}. \quad (4.7)$$

Agora damos continuidade com o que foi chamado pelos autores de prova de porcentagem limitante.

"Seja $S_n(\beta)$ o número de espaços seguros em um tabuleiro $n \times n$ quando as n torres estão na configuração B e, portanto, $S_n(\beta)/n^2$ é a fração de quadrados que são seguros, portanto"

$$S_n(\beta) = \sum_{i,j=1}^n X_{i,j}(\beta).$$

Lembremos que para cada casa (ou quadrados) definiu-se valor 1 caso fosse segura e 0 caso contrário. Isso nos leva a uma variável aleatória de Bernoulli. Temos também que uma casa (i,j) é segura se não há torre na linha i , nem na coluna j ; se colocada uma torre numa casa qualquer do tabuleiro para esta primeira torre é tomada toda a linha e coluna na qual se encontra restando seguras apenas $(n - 1)^2$ casas. podemos começar por deduzir que a probabilidade de casas seguras pode ser dado por

$$\binom{(n-1)^2}{n} / \binom{n^2}{n}$$

, e daí

$$E[X_{i,j}] = 1 \times Prob(X_{i,j} = 1) + 0 \times Prob(X_{i,j} = 0) = \frac{\binom{(n-1)^2}{n}}{\binom{n^2}{n}} = \mu_n. \quad (4.8)$$

estabelecendo a média de S_n

$$E[S_n] = \sum_{i,j=1}^n E[X_{i,j}] = n^2 E[X_{i,j}] = n^2 \frac{\binom{(n-1)^2}{n}}{\binom{n^2}{n}} \Rightarrow E[S_n/n^2] = \mu$$

E aplicando isso à equação (4.1), na qual existe a e b, vemos $a = 2$ e $b = -1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E[S_n/n^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{(n-1)^2}{n}}{\binom{n^2}{n}} = \frac{1}{e^2} = 13.53\%.$$

Estudos de simulação sugerem que a distribuição de casas seguras é assintoticamente normal. Ver Figura 4.6.

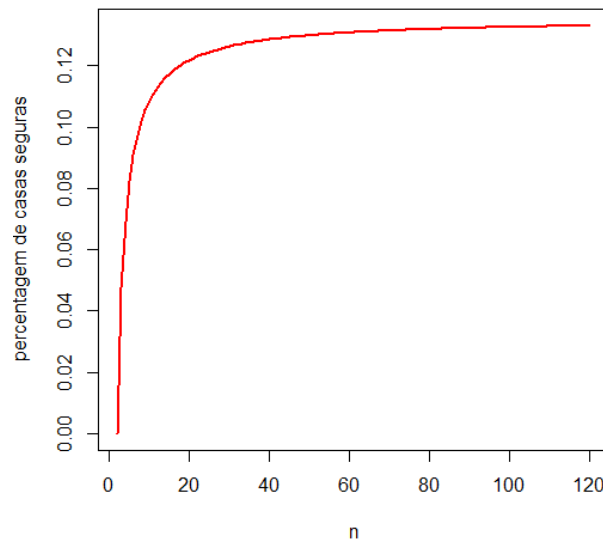


Figura 4.6 – n torres



5 Considerações Finais

A fundamentação teórica apresentada nas seções 2 e 3 permitiu que as aplicações de estatística e probabilidade fossem construídas com mais facilidade. Dessa forma, ficou mais simples encontrar um modo de explorar o tema. Podemos perceber que existe muito do que se trabalhar em probabilidade e estatística no assunto. Em relação as aplicações do Capítulo 4, a ideia inicial era o enfoque no ensino médio. Apesar disso, tópicos que podem ser estudados em disciplinas do ensino superior foram apresentados para podermos iniciar com a ampla variedade de aplicações que podem surgir a partir de um tabuleiro de xadrez com $n \times n$ casas e um certo número de peças, tais como torres e rainhas. Entretanto, a experimentação com rainhas no lugar das torres tem grande complexidade, pois as rainhas atacam vastamente o tabuleiro.

Como proposta futura, podemos observar que o estudo pode ser ampliado para analisar $n \geq 8$ bispos em um tabuleiro $n \times n$. Neste caso, se colocarmos oito bispos num tabuleiro de xadrez 8×8 , organizá-los de modo que nenhum possa capturar outro se mostra mais complexo do que o problema equivalente ao das 8 torres. De acordo com a Seção 4.3, este problema ampliado para n bispos em um tabuleiro $n \times n$ se torna ainda mais desafiador ao se tentar determinar a média, a variância e a distribuição de probabilidade do número de casas seguras. Uma abordagem computacional por meio de simulação do tabuleiro de xadrez poderá trazer respostas iniciais a estas questões. Especificamente, estudos de simulação indicam que a distribuição do número de casas seguras é assintoticamente normal para o problema das n torres.

Referências

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. Noções de probabilidade e estatística. 6ª edição revista. **São Paulo, EDUSP**, 2010. Citado na página 20.

MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos Rio de Janeiro, 1983. Citado 3 vezes nas páginas 20, 24 e 27.

MILLER, S. J.; SHENG, H.; TUREK, D. When rooks miss: Probability through chess. **The College Mathematics Journal**, Taylor & Francis, v. 52, n. 2, p. 82–93, 2021. Citado 4 vezes nas páginas 41, 42, 43 e 44.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística básica**. [S.l.]: Saraiva Educação SA, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 28.

R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2024. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.

TIRADO, A.; SILVA, W. d. Meu primeiro livro de xadrez: curso para escolares. **Curitiba: Expoente**, 1995. Citado na página 10.

WHITE, J. C. A mathematical analysis of the game of chess. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 40.