



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Talyson Ricardo Santos Mendes

Teorema de Existência e Unicidade Para Equações Diferenciais Ordinárias de Ordem n

São Luís - MA
2024

Talyson Ricardo Santos Mendes 

Teorema de Existência e Unicidade Para Equações Diferenciais Ordinárias de Ordem n

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciado em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: prof. Me. Ítalo Augusto Oliveira de Albuquerque

São Luís - MA

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Mendes, Talyson Ricardo Santos.

Teorema de existência e unicidade para equações
diferenciais ordinárias de ordem n / Talyson Ricardo
Santos Mendes. - 2024.

44 p.

Orientador(a): Italo Augusto Oliveira de Albuquerque.
Curso de Matemática, Universidade Federal do Maranhão,
São Luís, 2024.

1. Existência. 2. Unicidade. 3. Equações
Diferenciais Ordinárias. 4. Contração. 5. Ponto Fixo. I.
Albuquerque, Italo Augusto Oliveira de. II. Título.

Talyson Ricardo Santos Mendes 

Teorema de Existência e Unicidade Para Equações Diferenciais Ordinárias de Ordem n

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 20/09/2024

prof. Me. Ítalo Augusto Oliveira de Albuquerque
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof. Me. Cleber Araújo Cavalcanti
COMAT/UFMA
Primeiro Examinador

Prof.^a Dr.^a Valeska Martins de Souza
DEMAT/UFMA
Segunda Examinadora

À minha família que sempre me incentivou nos meus estudos

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

Ao meu orientador prof. Me. Ítalo Augusto Oliveira de Albuquerque por guiar meus passos na realização desse trabalho.

Aos meus colegas que ao longo dessa jornada me deram orientações e auxílio nos estudos.

E aos professores; Vanessa Ribeiro Ramos, Marcos Antônio Ferreira de Araujo, Luís Fernando Coelho Amaral e Cleber Araújo Cavalcanti.

“A Matemática é a rainha das ciências.”

Carl Friedrich Gauss

Resumo

Esse trabalho trata-se de uma discussão sobre os teoremas de existência e unicidade para os problemas de valor inicial de uma Equação Diferencial Ordinária.

Para isso, esse trabalho começa explanando conceitos básicos como Espaços Métricos e Sequências usando esses conceitos para melhor falar sobre dois conceitos extremamente importantes; Teorema do Ponto fixo de Banach e Mapeamento de contrações. E por meio de teoremas é estudado sobre quais condições a solução do problema do valor inicial existe e é única.

Com objetivos específicos em estudar equações diferenciais, que aqui, se resume em quatro teoremas que estabelecem que o problema do valor inicial de uma equação diferencial existe e é único quando tal equação é limitada, continua e lipschitziana. Outro objetivo é o estudo do problema do valor inicial para sistemas de equações diferenciais usando o método das aproximações sucessivas. E como último objetivo o estudo da continuidade dessas soluções.

Como resultado desse estudo, o problema do valor inicial tem solução quando tal equação obedece certas condições.

A pesquisa presente nesse trabalho é de natureza qualitativa, onde foram feitas revisões bibliográficas em alguns livros clássicos de equações diferenciais como ([Lima 2020](#)), ([Kreider Robert G Kuller 1968](#)), ([Coddington 1989](#)) e ([Figueiredo 1996](#)).

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias, Existência, Unicidade, Contração, Teorema do Ponto Fixo

Abstract

This work is a discussion of the existence and uniqueness theorems for initial value problems of an Ordinary Differential Equation.

To achieve this, this work begins by explaining basic concepts such as Metric Spaces and Sequences, using these concepts to better talk about two extremely important concepts; Banach's fixed point theorem and contraction mapping. And through theorems it is studied under what conditions the solution to the initial value problem exists and is unique.

With specific objectives in studying differential equations, which here are summarized in four theorems that establish that the problem of the initial value of a differential equation exists and is unique when such an equation is limited, continuous and Lipschitzian. Another objective is the study of the initial value problem for systems of differential equations using the method of successive approximations. And as a final objective, the study of the continuity of these solutions.

As a result of this study, the initial value problem has a solution when such an equation meets certain conditions.

The research present in this work is qualitative in nature, where bibliographical reviews were made in some classic books on differential equations such as ([Lima 2020](#)), ([Kreider Robert G Kuller 1968](#)), ([Coddington 1989](#)) e ([Figueiredo 1996](#)).

Keywords: ordinary differential equations; existence; uniqueness; contraction; fixed point theorem.

Sumário

	Introdução	9
1	ESPAÇOS MÉTRICOS	10
1.1	Funções definidas em espaços métricos	11
1.2	Sequências	13
1.3	Sequências de Funções	13
1.4	Sequência de Cauchy	14
1.5	Contrações e Ponto Fixo	16
2	EXISTÊNCIA E UNICIDADE PARA O PROBLEMA DE VALOR INICIAL	21
3	SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	25
3.1	Vetores no $\mathbb{R}^n$	26
3.2	Método das Aproximações Sucessivas	29
4	CONTINUIDADE DE SOLUÇÕES	39
	Considerações Finais	43
	Referências	44

Introdução

As equações diferenciais são de grande importância, tanto na física quanto na matemática, pois são utilizadas como modelos de fenômenos físicos tais como na dinâmica de fluidos e mecânica celeste. Logo a teoria das equações diferenciais é um campo presente na matemática pura e na matemática aplicada. Pode-se perceber inúmeras aplicações em medicina, engenharia, química, biologia dentre outras diversas áreas do conhecimento. Algumas dessas aplicações podem ser vistas na projeção de pontes, automóveis, aviões e circuitos elétricos. Do ponto de vista da matemática aplicada, tais equações são utilizadas para descrever situações do mundo real, tendo um papel relevante na ligação e interação da matemática com outras ciências. Na Física temos as forças sofridas por corpos; na Química pode ser utilizada para compreender a velocidade das reações; na Biologia pode-se fazer a modelagem do crescimento de populações; na economia pode-se formular modelos de mercado e muitas outras que podem ser vistas em ([Zill 2000](#)).

Nesse presente trabalho será feito as demonstrações dos teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais com um problema do valor inicial dado. Sob certas condições, a solução para esse tipo de equação existirá e será única, e essa solução irá ser contínua. Inicia-se o trabalho com terminologias e conceitos preliminares como espaços métricos e funções contínuas. Será enunciado o teorema de existência e unicidade e a partir daí serão demonstrados resultados importantes como Teorema do ponto fixo de Banach e o método das aproximações sucessivas. O objetivo geral desse trabalho é demonstrar os teoremas de existência e unicidades de soluções para equações diferenciais de ordem “ n ”, onde a função dada satisfaz a condição de Lipschitz. Provada a existência e unicidade, será demonstrado a continuidade dessa solução, concluindo que essa solução varia continuamente com a função lipschitziana.

1 Espaços Métricos

As definições de espaços métricos e funções contínuas foram baseadas em (Lima 2020) e (Figueiredo 1996).

Definição 1.1. *Seja E um conjunto de aplicações $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. É chamado de distância ou métrica em E .*

Se essa distância em E existe, então E equipado com essa métrica é chamado de Espaço Métrico M .

Um Espaço Métrico M não vazio é um conjunto com a função d que associa um número real a um par de pontos $x, y \in M$.

Para um melhor entendimento dessa definição de espaço métrico, usarei algumas sentenças simples.

- (i) $d(x, y) \geq 0$.
- (ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in M$.

Os postulados (i) e (ii) dizem que $d(x, y) \geq 0$ e que $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. O postulado (iii) afirma que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y . A condição (iv) chama-se *desigualdade triangular*; ela tem origem no fato de que, no plano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois.

Exemplo 1.2. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais com a métrica dada por $d(x, y) = |x - y|$.*

Exemplo 1.3. *O espaço $\mathbb{R}^n$.*

Este exemplo generaliza o exemplo 1.2. Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são as listas $x = (x_1, \dots, x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real. Há três maneiras naturais de se definir a distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$. Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, escrevemos:

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}. \\
 d'(x, y) &= |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|. \\
 d''(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.
 \end{aligned}$$

As funções $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são métricas.

De modo particular, quando $n = 1$ isso se reduz a

$$d(x, y) = |x - y|.$$

1.1 Funções definidas em espaços métricos

Definição 1.4. *Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Em geral, se $f : M \rightarrow N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.*

Se $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando dada qualquer bola $B' = B(f(a); \varepsilon)$ de centro $f(a)$, pode-se encontrar uma bola $B = B(a; \delta)$, de centro a , tal que $f(B) \subset B'$.

No caso particular em que $M \subset \mathbb{R}$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, dizer que f é contínua no ponto $a \in M$ significa afirmar que para todo $\varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0$ tal que $x \in M$ e $a - \delta < x < a + \delta$ implica $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Ou seja, f transforma os pontos de M que estão no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ em pontos do intervalo $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

Exemplo 1.5. *Sejam $f, g \in C[a, b]$ e definindo $d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$. Então d é uma métrica em $C[a, b]$.*

Demonstração: Analisando (i) da Definição 1.1, deve assumir que f e g são contínuas em $[a, b]$ e o valor absoluto da diferença também o é. Sendo assim $|f(x) - g(x)|$ assume um máximo em algum lugar no intervalo fechado.

Por estar em modulo, esse máximo é não-negativo. E usando (ii) da Definição 1.1, $d(x, y) = 0 \iff x = y$, sendo assim, $|f(x) - g(x)| = 0 \iff f(x) = g(x), \forall x \in [a, b]$.

O item (iii) da Definição 1.1 é claramente válido.

Falta o item (iv) da Definição 1.1 Sejam f, g, h três funções contidas em $C[a, b]$, então $|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$.

Assim ficando

$$\begin{aligned} \max |f(x) - g(x)| &\leq \max[|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|] \\ &\leq \max |f(x) - h(x)| + \max |h(x) - g(x)| \end{aligned}$$

e

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Sendo assim, $d(f, g) = \max |f(x) - g(x)|$; e $f, g \in C[a, b]$ é uma métrica nesse espaço vetorial. ■

Teorema 1.6. (Teorema do Valor Médio) *Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no aberto (a, b) . Então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração: Ver (Figueiredo 1996). ■

Teorema 1.7. *Dada $f : M \rightarrow N$, suponha que existe uma constante $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ quaisquer que sejam $x, y \in M$. Nesse caso, f é contínua e a aplicação f é chamada de lipschitziana.*

Demonstração: Dado um $\varepsilon > 0$ e tomando $\delta = \varepsilon/c$ então $d(x, y) < \delta \rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a) < c \cdot \delta = \varepsilon$.

Se $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ são lipschitzianas o mesmo acontece com $f + g$ e $k \cdot f$, onde $k \in \mathbb{R}$. Sendo assim, toda combinação linear $k_1 \cdot f_1 + \dots + k_n \cdot f_n$ de funções reais lipschitzianas é lipschitziana.

Então uma função real, a condição Lipschitz $|f(x) - f(y)|/|x - y| \leq c$ e, seja função real $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida no intervalo I , derivável com $|f'(x)| \leq c \quad \forall x \in I$.

Então, pelo Teorema 1.6, dado $x, y \in I$, quaisquer, existe um ponto z entre x e y , tal que $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$ e daí $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$. Assim, toda função com derivada limitada um intervalo é lipschitziana. ■

Definição 1.8. *Se $f : M \rightarrow N$ não é contínua no ponto a , diz-se que f é descontínua nesse ponto.*

Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ com a propriedade: para todo $\delta > 0$, pode-se obter $x_\delta \in M$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$. Ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $n = 1, 2, \dots$ pode-se obter $x_n \in M$ com $d(x_n, a) < 1/n$ e $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$.

Exemplo 1.9. *Seja $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Para todo ponto $a \in \mathbb{R}$, ξ é descontínua. Tomando $\varepsilon = 1/2$. Dado $\delta > 0$ e, tomando x_δ tal que $|x_\delta - a| < \delta$, sendo x_δ racional se a for irracional e vice-versa. Então $|\xi(x_\delta) - \xi(a)| = 1 \geq 1/2$.

Note que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Neste exemplo $\xi|_{\mathbb{Q}}$ é contínua, mas ξ não é contínua em ponto algum de $\mathbb{Q}$.

1.2 Sequências

Definição 1.10. Uma sequência num conjunto $\mathbb{R}$ é uma aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. O valor que $x(n)$ assume $\forall n \in \mathbb{N}$ no conjunto $\mathbb{R}$.

O n -ésimo termo da sequência é representado por x_n . Usarei a notação $\{x_n\}$ para representar uma sequência.

Definição 1.11. Diz-se que a sequência $\{x_n\}$ é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado.

Isto é, quando existem números reais a, b tais que $a \leq x_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ou seja, todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[a, b]$. Quando uma sequência não é limitada, chama-se *ilimitada*.

Definição 1.12. Uma sequência de pontos $\{x_n\}$ no espaço métrico M é dito que converge ao ponto x de M se para cada $\varepsilon > 0$ existe um inteiro N , tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ para todo $n > N$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = x \quad \text{ou} \quad \{x_n\} \rightarrow x.$$

Para isso ser válido, devemos mostrar que o limite de uma sequência convergente é único.

Lema 1.13. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ então $x = y$.

Demonstração: Dado um $\varepsilon > 0$. Então existe um inteiro N tal que

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para qualquer $n > N$, agora, usando a desigualdade triangular

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tomando um ε qualquer, essa desigualdade mostra que $d(x, y) = 0$. Logo $x = y$. ■

1.3 Sequências de Funções

Definição 1.14. Diz-se que a sequência de aplicações $f_n : X \rightarrow M$, definidas num conjunto arbitrário X e tomando valores num espaço métrico M , converge simplesmente em X para a aplicação $f : X \rightarrow M$ quando, para cada $x \in X$, a sequência $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$ tem limite $f(x)$ em M . Ou seja, para cada $x \in X$ $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Dado $x \in X$ e qualquer $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \implies d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Proposição 1.15. *Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X então, para todo n suficientemente grande, f_n está a uma distância finita de f e $\lim f_n = f$ no espaço métrico $B_f(X; M)$. Reciprocamente, se $\lim f_n = f$ em $B_f(X; M)$, então que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X .*

Demonstração: Seja $d(f_n, f) = \sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x))$, tem-se $d(f_n, f) < \varepsilon \implies d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \forall x \in X$.

Por outro lado, $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in X \implies d(f_n, f) \leq \varepsilon$. ■

Proposição 1.16. *Sejam M, N espaços métricos. Se uma sequência de aplicações $f_n : M \rightarrow N$, contínua no ponto $a \in M$, converge uniformemente em M para uma aplicação $f : M \rightarrow N$ então f é contínua no ponto a .*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ e escolhendo um número natural n tal que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$ para todo $x \in X$.

Como f_n é contínua no ponto a , existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em M implica $d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon/3$.

Então, para todo $x \in M$ com $d(x, a) < \delta$, temos

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), f(a)) < \\ &d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$
■

Corolário 1.17. *O limite uniforme de uma sequência de aplicações contínuas $f_n : M \rightarrow N$ é uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$.*

Demonstração: Ver (Lima 2020). ■

1.4 Sequência de Cauchy

Definição 1.18. *Uma sequência $\{x_n\}$ num espaço métrico M chama-se uma Sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Lema 1.19. *Toda sequência convergente no espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: Se $\lim x_n = a$ no espaço métrico M então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies d(x_n, a) < \varepsilon/2$.

Se tomar $m, n > n_0$ e usando a desigualdade triangular.

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Proposição 1.20. *Seja $f : M \rightarrow N$ uniformemente contínua. Se $\{x_n\}$ é de Cauchy em M , então $\{f(x_n)\}$ é de Cauchy em N .*

Demonstração: Sejam $f : M \rightarrow N$ uniformemente contínua e $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy em M . A fim de provar que a sequência $(f(x_n))$ é de Cauchy. Por sua vez, dado $\delta > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ se $d(x_m, x_n) < \delta \implies d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in M, d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. ■

Definição 1.21. *Diz-se que o Espaço Métrico em M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente em M .*

Proposição 1.22. *A reta real é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Pondo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, sendo $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$ os conjuntos X_n são limitados. Então eles admitem *ínfimo e supremo*, seja $a_n = \inf X_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Então, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n = \sup X_n$, como essa sequência é limitada em $\mathbb{R}$ então, converge, logo, existe o número $a = \lim a_n$.

Sendo $a = \lim a_n$, existe $m > n_1$ tal que $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$. Como $a_m = \inf X_m$, existe $n > m$, e portanto $n > m > n_1 \implies n > n_1$, tal que $a_m \leq x_n < a + \varepsilon$, isto é $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

$$\lim a_n = a = \lim x_n.$$

Teorema 1.23. *O espaço $C[a, b]$ com a métrica definida por $d(f, g) = \max |f(x) - g(x)|$ com $x \in [a, b]$ é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Seja $\{f_n(x)\}$ uma sequência de Cauchy em $C[a, b]$. Então $d(f_m - f_n) \rightarrow 0$, assim, para todo $x \in [a, b]$.

$$\max |f_m(x) - f_n(x)| \rightarrow 0.$$

Como $m, n \rightarrow \infty$. Em particular, isso implica que se x_0 é um ponto fixo de $[a, b]$ então $|f_m(x_0) - f_n(x_0)| \rightarrow 0$ como $m, n \rightarrow \infty$. Portanto $\{f_n(x_0)\}$ é uma sequência de Cauchy e tem um limite $f(x_0)$. Como x_0 é arbitrário, então $\{f_n(x)\}$ converge para f .

Para estabelecer o fato que $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente para f .

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$. Como $\{f_n(x)\}$ é uma sequência de Cauchy, então pode-se encontrar um inteiro m tal que $|f_m(x) - f_n(x)| <$

$\varepsilon \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, b]$. Reescrevendo essa desigualdade

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f_m(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $m \rightarrow \infty$

$$f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, b].$$

Provando agora que f é contínua, ou seja, $f \in C[a, b]$.

Dado um $\varepsilon > 0$ e, um $x_0 \in [a, b]$, então existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para qualquer $a \leq x \leq b$ e $|x - x_0| < \delta$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \end{aligned}$$

Encontrando um n inteiro tal que o primeiro e o último termo dessa desigualdade é menor que $\frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in [a, b]$. Como f_n é contínua, encontrasse $\delta > 0$ tal que $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ para qualquer $a \leq x \leq b$ e $|x - x_0| < \delta$.

Assim, tem-se $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. ■

Definição 1.24. *Sejam M_1 e M_2 espaços métricos com funções de distância d_1 e d_2 respectivamente, e seja $F : M_1 \rightarrow M_2$. Então F é dita constante no ponto x_1 em M_1 se dado um $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$d_2(F(x_1), F(x)) < \varepsilon \quad \forall d_1(x_1, x) < \delta.$$

Uma função constante em todos os pontos de M_1 é simplesmente dita constante.

1.5 Contrações e Ponto Fixo

O teorema do ponto fixo de Banach, também conhecido como teorema da contração uniforme, é um dos resultados fundamentais na teoria dos espaços métricos. A partir desse resultado pode-se provar a existência e unicidade de pontos fixos em alguns tipos de aplicações como pode ser visto em (Coddington 1989). Segue-se alguns dos resultados mais importantes dessa teoria.

Definição 1.25. *Seja M um espaço métrico. Uma função $f : M \rightarrow M$ é chamado de contração se existir um número real α , com $0 \leq \alpha < 1$, tal que:*

$$d[f(x), f(y)] \leq \alpha \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

Usando um exemplo elementar.

Exemplo 1.26. *Seja $y = y(x)$ uma função de valor real de uma variável real, e supondo que para todo x_1 e x_2 no domínio de y*

$$|y(x_2) - y(x_1)| \leq \alpha \cdot |x_2 - x_1|.$$

Com $0 \leq \alpha < 1$, então y é um mapeamento de contração em $\mathbb{R}$.

A inequação do exemplo apresentado é chamado *Condição de Lipschitz*, e a função y com *Condição de Lipschitz* α é chamada *lipschitziana*.

A inclinação de qualquer desenho do gráfico de y é limitado pelo valor absoluto de α . Em particular se y diferenciável com $|y'(x)| \leq \alpha \quad \forall x$, então y satisfaz a *Condição de Lipschitz*. Pelo Teorema do Valor Médio, $\exists \quad x_0; \quad x_1 < x_0 < x_2$ tal que

$$\left| \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = |y'(x_0)| \leq \alpha.$$

Teorema 1.27. *(Teorema do ponto fixo de Banach). Sejam X um espaço métrico completo e $T : X \rightarrow X$ uma contração. Então:*

- i) existe um, e um só, $x \in X$ tal que $Tx = x$;*
- ii) qualquer que seja $x_1 \in X$, a sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde $x_{n+1} = T^n x_1$, converge a x ;*
- iii) para todo n , temos $d(x_n, x) \leq c^{n-1}d(x_1, x_2)/(1 - c)$, onde c é uma constante de contração de T e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência definida em ii).*

Demonstração: *Existência:* mostrando que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Seja $x_1 \in X$ qualquer e $x_{n+1} = Tx_n, n = 1, 2, \dots$

Para $n > 1$,

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq c \cdot d(x_{n-1}, x_n)$$

por indução sobre n

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^{n-1}d(x_1, x_2)$$

para todo inteiro positivo n .

Então, para $1 \leq n < m$,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \leq c^{n-1}d(x_1, x_2) + \dots + c^{m-2}d(x_1, x_2) =$$

$$= c^{n-1}d(x_1, x_2)(1 + c + \cdots + c^{m-n-1}) \leq c^{n-1} \frac{d(x_1, x_2)}{1 - c}$$

e como $|c| < 1$ então $c^n \rightarrow 0$, segue que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy.

X , sendo completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$. Basta provar que $Tx = x$. Para todo inteiro positivo n , tem-se

$$d(Tx, x_{n+1}) = d(Tx, Tx_n) \leq c \cdot d(x, x_n)$$

e, como $d(x, x_n) \rightarrow 0$, segue que $x_n \rightarrow Tx$. Pelo teorema de unicidade do limite, então $Tx = x$.

Unicidade: sejam $x, y \in X, x \neq y$, como $Tx = x, Ty = y$. Então

$$0 < d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq c \cdot d(x, y)$$

e, portanto, $c \geq 1$, o que contradiz a hipótese.

Isso termina a provar de *i*). Quanto a *ii*), da demonstração de existência resulta que toda sequência da forma $T^n x_1, x_1 \in X$, converge a um ponto fixo, logo a x pela unicidade do ponto fixo.

Para provar *iii*) observe que para $1 \leq n \leq m$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x) \leq c^{n-1} \frac{d(x_1, x_2)}{1 - c} + d(x_m, x)$$

e como $d(x_m, x) \rightarrow 0$ segue a afirmação *iii*).

O primeiro resultado referente à contração não passa de uma observação. No entanto, será usado para provar o primeiro teorema sobre ponto fixo. ■

Lema 1.28. *Se f é uma contração no espaço métrico M , então f é contínua em M .*

Demonstração: Seja dado $\varepsilon > 0$ e x_1 qualquer ponto de M . Se $\alpha = 0$ então $d(f(x_1), f(y)) = 0 < \varepsilon$, $\forall y \in M$ e f é contínua em x_1 . Se $\delta = \varepsilon/\alpha$ e x_1 qualquer ponto de M tal que $d(x_1, y) < \delta$, então

$$d(f(x_1), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x_1, y) < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon$$

e f é contínua em x_1 . ■

Esse resultado é usado para provar o próximo teorema.

Teorema 1.29. *Seja F uma aplicação em um espaço métrico completo M . Se F é uma contração, então F tem um único ponto fixo.*

Demonstração: Devo mostrar que existe precisamente um ponto $x_0 \in M$; $f(x_0) = x_0$.

Para isso, seja x_1 qualquer ponto de M e considerando a sequência

$$x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_n = f(x_{n-1})$$

sendo assim

$$d(x_{m+1}, x_m) = d[F(x_m), F(x_{m-1})] \leq \alpha \cdot d(x_m, x_{m-1}) \quad \forall m > 0$$

e daí se segue

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &\leq \alpha \cdot d(x_m, x_{m-1}) \\ &\leq \alpha^2 \cdot d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\leq \dots \\ &\leq \alpha^{m-1} \cdot d[F(x_1), x_1]. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade triangular.

$$\begin{aligned} d(x_{m+p}, x_m) &\leq d(x_{m+p}, x_{m+p-1}) + d(x_{m+p-1}, x_{m+p-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (\alpha^{m+p-2} + \alpha^{m+p-3} + \dots + \alpha^{m-1}) \cdot d(F(x_1), x_1) \\ &\leq \left(\sum_{k=m-1}^{\infty} \alpha^k \right) \cdot d(F(x_1), x_1). \end{aligned}$$

Sendo $0 \leq \alpha < 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$ é uma série geométrica convergente. isso implica que $d(x_{m+p}, x_m)$ converge para zero com m suficientemente grande, isso conclui que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy.

Por ser uma sequência de Cauchy, é certo dizer que $\{x_n\}$ converge para um ponto $x_0 \in M$ e tem $d(x_n, x_0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Isso junto com a continuidade de F , implica que, $d(F(x_n), F(x_0)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Mas $F(x_n) = x_{n+1}$. Então $d(x_{n+1}, F(x_0)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, segue que $\{x_n\}$ também converge para $F(x_0)$.

Finalmente, para mostrar que x_0 é o único ponto fixo de F , supondo que $F(y_0) = y_0$. Então

$$d(x_0, y_0) = d(F(x_0), F(y_0)) \leq \alpha \cdot d(x_0, y_0).$$

Por suposição, $\alpha < 1$. Então, $d(x_0, y_0) = 0 \rightarrow x_0 = y_0$. ■

Teorema 1.30. *Seja F uma contração no espaço métrico completo M e considere x_0 o único ponto fixo de F . Fixa-se x_1 um ponto arbitrário de M . Então a sequência $\{x_n\}, n = 1, 2, \dots$, com $x_2 = F(x_1), x_3 = F(x_2), \dots$, é uma sequência de Cauchy que converge para x_0 .*

Apesar do Teorema 1.29 ser suficiente para encontrar um número que cumpra o teorema de existência e unicidade para equações diferenciais, é exigido uma relosução mais forte envolvendo interações de funções que aplicam um espaço métrico em si mesmo.

Seja F uma função com vários compostos

$$F[F(x)], F\{F[F(x)]\}, \dots,$$

para algum mapeamento M em si mesmo, usando a notação $F^{[2]}, F^{[3]}, \dots$, e chamando $F^{[m]}$ de m -ésima interação de F .

Teorema 1.31. *Se $F : M \longrightarrow M$, onde M é um espaço métrico completo e suponha que $F^{[m]}$ tem um único ponto fixo x_0 para algum $m > 0$. Então x_0 é o único ponto fixo para F .*

Demonstração: Se $m = 1$ não há nada para provar.

Se $F^{[m]}(x_0) = x_0$, e $F[F^{[m]}(x)] = F^{[m]}[F(x)]$ para todo x que pertence a M .

$$F(x_0) = F[F^{[m]}(x_0)] = F^{[m]}[F(x_0)].$$

Então, $F(x_0)$ é ponto fixo de $F^{[m]}$, e $F(x_0) = x_0$. ■

Já que cada ponto fixo de F é também um ponto fixo de $F^{[m]}$, x_0 é o único ponto fixo de F .

Corolário 1.32. *Se $F : M \longrightarrow M$, onde M é um espaço métrico completo, e por hipótese suponha que $F_{[m]}$ é uma contração para algum $m > 0$. Então F tem um único ponto fixo.*

Demonstração: Vide ([Coddington 1989](#)).

2 Existência e Unicidade para o Problema de Valor Inicial

O objetivo desse capítulo é apresentar as condições de uma função f para que o problema do valor inicial abaixo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

tenha solução, e essa solução seja única. Para se chegar nesse resultado será utilizado o teorema do ponto fixo para a aplicação F , onde:

$$[F(y)](x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Primeiramente assume-se que f é *constante e limitada* na região R do plano xy contendo o ponto (x_0, y_0) com $|f(x, y)| < B$, $\forall (x, y) \in R$. E considerando a existência de uma constante não-negativa β tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \beta \cdot |y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R.$$

Como visto no Teorema 1.7, a função acima é chamada de lipschitziana pois satisfaz a condição de Lipschitz. Se f for lipschitziana, então f é contínua.

Se y for diferenciável com $|y'(x)| \leq \alpha$, $\forall x$, então y satisfaz a *condição de Lipschitz*. Reescrevendo, tem-se $|\partial f / \partial y| \leq \beta$ para toda a parte de R , então f é lipschitziana sobre R com uma constante de Lipschitz β .

Seja y uma função arbitrária, com $F(y)$ definida como

$$|[F(y)](x_1) - [F(y)](x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t, y(t)) dt \right| \leq B \left| \int_{x_1}^{x_2} dt \right| = B |x_2 - x_1|.$$

Na qual $F(y)$ também satisfaz a condição de Lipschitz com a constante de Lipschitz B , portanto é contínua onde estiver definida.

Restringindo o domínio de f para um espaço métrico M onde todas as funções contínuas em que o gráfico está na região R . Onde as linhas L_1 e L_2 têm inclinações B e $-B$ respectivamente, e a e b escolhidos para que F seja um mapeamento de contrações em M dentro de R . Então M é um espaço métrico completo com distância

$$d(y_1, y_2) = \max_{x \in [a, b]} |y_1(x) - y_2(x)|.$$

Uma outra observação é que a inequação acima implica que F mapeia M em si mesmo, ou seja, $F(y) \in M$, $\forall y \in M$.

Mostrando agora que a e b poder ser escolhidos como foi descrito. Sejam y_1 e y_2 funções de M .

$$\begin{aligned} |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| &\leq \beta \cdot |y_1(x) - y_2(x)| \\ &\leq \beta \cdot \max |y_1(x) - y_2(x)| \\ &= \beta \cdot d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} |[F(y_1)](x) - [F(y_2)](x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))] dt \right| \\ &\leq \beta \cdot d(y_1, y_2) \left| \int_{x_0}^x dt \right| \\ &\leq \beta \cdot |x_0 - x| d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Mas, $|x_0 - x|$ não ser maior que $b - x_0$ e $x_0 - a$.

$$|[F(y_1)](x) - [F(y_2)](x)| \leq \beta \cdot \{\max(b - x_0, x_0 - a)\} d(y_1, y_2).$$

Com as escolhas de a e b suficientemente pequenos, podemos garantir

- i) $\beta \cdot \max(b - x_0, x_0 - a) < 1$.
- ii) essa região está inteiramente em R .

Teorema 2.1. *Seja f contínua, limitada e lipschitziana, na região R do plano xy , e seja (x_0, y_0) qualquer ponto de R . Então existe um intervalo $[a, b]$ sobre x_0 em que o problema do valor inicial*

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0.$$

Tem uma única solução. Além disso, se R_1 é uma sub região de R , o gráfico dessa solução está em R .

Demonstração: Vide (Kreider Robert G Kuller 1968). ■

Esse resultado é conhecido como uma existência e unicidade “local” pois a desigualdade $\beta \cdot \max\{b - x_0, x_0 - a\} < 1$ força a e b a estarem muito próximos de x_0 .

Teorema 2.2. *Considere f e R como no teorema anterior, com $|f(x, y)| \leq B$, e sejam a e b dois números quaisquer da região $\mathbb{R}^2$ limitado pelas linhas verticais $x = a$ e $x = b$ e a linha através de (x_0, y_0) com inclinações $\pm B$ dentro de R . Então o problema do valor inicial*

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

tem uma única solução no intervalo $[a, b]$. Além disso o gráfico dessa solução está em $\mathbb{R}^2$.

Demonstração: Demonstração segundo (Kreider Robert G Kuller 1968).

A ideia é mostrar que existe um inteiro positivo m tal que $F^{[m]}$ é m -ésima integração de F é um mapeamento de contração em M , em que M e F .

Sejam $y_1, y_2 \in M$.

$$|[F(y_1)](x) - [F(y_2)](x)| \leq \beta \cdot |x - x_0| \cdot d(y_1, y_2)$$

onde β é a constante de Lipschitz para f . Usando esse resultado junto com a definição $F^{[2]}(y) = F(F(y))$.

$$\begin{aligned} \left| [F^{[2]}(y_1)](x) - [F^{[2]}(y_2)](x) \right| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, [F(y_1)](t) - [F(y_2)](t)) dt \right| \\ &\leq \beta \cdot \left| \int_{x_0}^x |[F(y_1)](t) - [F(y_2)](t)| dt \right| \\ &\leq \beta^2 \cdot \left| \int_{x_0}^x |t - x_0| dt \right| d(y_1, y_2) \\ &\leq \frac{\beta^2 \cdot |x - x_0|^2}{2} d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Dessa maneira, chega-se a fórmula geral.

$$\left| [F^{[m]}(y_1)](x) - [F^{[m]}(y_2)](x) \right| \leq \frac{\beta^m \cdot (b - a)^m}{m!} d(y_1, y_2).$$

Mas $\sum_{m=1}^{\infty} \beta^m (b - a)^m / m!$ é um série convergente. Sendo que $\beta^m (b - a)^m / m! < 1$ para um valor suficientemente grande de m . ■

Até agora só foi considerado a função $y' = f(x, y)$ quando f é limitada e tem, garantida, soluções únicas em intervalos fechados e finitos.

Essas restrições são rigorosas, por isso, agora dois teoremas que diminuem um pouco essa restrição, claro que, na medida onde é possível afirmar soluções únicas para o problema do valor inicial envolvendo a equação $y' = y/x$, $x > 0$, onde o lado direito não é limitado pela região $x > 0$.

Teorema 2.3. *Seja f contínua e lipschitziana na faixa S no plano xy determinado pelo intervalo fechado $[a, b]$, e seja (x_0, y_0) qualquer ponto em S . Então o problema do valor inicial*

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

tem uma única solução em $[a, b]$.

Demonstração: Demonstração segundo (Kreider Robert G Kuller 1968).

Seja M um espaço métrico completo $C[a, b]$ com distância “normal”, e seja f definida

como sempre. Então F mapeia M em si mesmo, e o argumento usado no teorema anterior pode ser aplicado sem mudanças para mostrar que $F^{[m]}$ é um mapeamento de contração de M para algum m .

Este teorema permite afirmar a existência e unicidade da solução em $[a, b]$ para problemas iniciais envolvendo valor *linear* de primeira ordem. $f(x, y) = p(x)y + q(x)$, na qual p e q são funções contínuas em $[a, b]$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = p(x) \cdot |y_1 - y_2| \leq \beta \cdot |y_1 - y_2|$$

em que β é uma cota superior para $|p(x)| \in [a, b]$. Por isso f é lipschitziana em $[a, b]$ e o Teorema 2.2 se aplica. ■

Finalmente, o Teorema 2.2 pode ser estendido para incluir intervalos abertos e semiabertos, finitos e infinitos. Com esse argumento pode ser tratado casos do tipo (a, ∞) .

Teorema 2.4. *Seja f contínua na região S do plano definido por $a < x < \infty$ e supondo que f satisfaz a condição de Lipschitz em toda subfaixa de S da forma $a < x_1 \leq x \leq x_2 < \infty$. Então, se (x_0, y_0) é um ponto de S , o problema do valor inicial*

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

tem uma única solução em (a, ∞) .

A prova consiste na aplicação do Teorema 2.2 em cada S_n definida por $a + \frac{1}{n} \leq x \leq n$, em que n é escolhido suficientemente grande para que x_0 esteja no intervalo $[a + \frac{1}{n}, n]$. Se y_n denota a única solução do problema dado em S_n , então, y_n e y_{n+1} concordam em seu domínio comum (y_{n+1} é uma extensão de y_n).

A função $y = y(x)$ é obtida pelo limite de y_n quando $n \rightarrow \infty$, é a solução desejada.

3 Sistema de Equações Diferenciais

Nesta seção vamos generalizar os teoremas de existência e unicidade obtidos para uma única equação diferencial de primeira ordem para sistemas de equações de primeira ordem sob a suposição de que o número de incógnitas nos sistemas é igual ao número de equações.

Com uma pequena mudança da escrita

$$(1) \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x; y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

Definindo

$$Y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$$

$$f(x, Y) = (f_1(x, Y), \dots, f_n(x, Y)).$$

Como solução, então a diferencial e a integração devem ser realizadas por componente, ou seja,

$$\frac{dY}{dx} = (y'_1(x), \dots, y'_n(x))$$

$$\int_a^b Y(x)dx = \left(\int_a^b y_1(x)dx, \dots, \int_a^b y_n(x)dx \right)$$

(1) pode ser reescrito na forma

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y).$$

As equações Y e Y' são funções definidas em um intervalo da reta real $\mathbb{R}^1$ e tomando valores em $\mathbb{R}^n$, enquanto $f(x, Y)$ é uma função da região $\mathbb{R}^{n+1}$ para $\mathbb{R}^n$.

Os próximos teoremas sobre existência e unicidade provados usando os teoremas de ponto fixo. O espaço métrico relevantes $\mathbb{R}^n$ com distância definida por $d(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$, e um espaço de funções contínuas de $[a, b]$ a $\mathbb{R}^n$ com distância definida por

$$d(Y, Z) = \max [|y_1(x) - z_1(x)| + \dots + |y_n(x) - z_n(x)|]$$

em que

$$Y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x)) \quad e \quad Z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x)).$$

3.1 Vetores no $\mathbb{R}^n$

Introduzindo a notação a notação $\|x\|$ para a norma do vetor $x \in \mathbb{R}^n$, e $\|Y\|$ para a norma do vetor Y no espaço de funções contínuas de $[a, b]$ a $\mathbb{R}^n$. Em que $x = (x_1, \dots, x_n)$ é um ponto em $\mathbb{R}^n$.

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

De maneira similar, $Y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ é uma função contínua de $[a, b]$ a $\mathbb{R}^n$, então

$$\|Y\| = \max_{x \in [a, b]} (|y_1(x)| + \dots + |y_n(x)|).$$

Lema 3.1. Se $Y = Y(x)$ é uma função contínua de $[a, b]$ em $\mathbb{R}^n$. Então

$$\left\| \int_a^b Y(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|Y(x)\| dx$$

Demonstração: Vide (Kreider Robert G Kuller 1968).

Observação: Y é uma função contínua de valor real em $[a, b]$, quando $n = 1$ a desigualdade fica

$$\left| \int_a^b Y(x) dx \right| \leq \int_a^b |Y(x)| dx.$$

Assumindo que $f = f(x, Y)$ é contínua e limitada em uma região $R \subset \mathbb{R}^{n+1}$, e exigindo que f satisfaz a condição de Lipschitz em R , ou seja, existe um número real β não negativo, tal que, sempre que (x, Y_1) e (x, Y_2) são quaisquer dois pontos de R cuja as primeiras coordenadas são as mesmas, então

$$\|f(x, Y_1) - f(x, Y_2)\| \leq \beta \dots \|Y_1 - Y_2\|$$

o que é equivale a dizer

$$d(f(x, Y_1), f(x, Y_2)) \leq \beta \dots d(Y_1, Y_2)$$

onde d é a métrica usual do $\mathbb{R}^{n+1}$.

Logo os requisitos de limitação e continuidade impostos a f são satisfeitos se, e somente se, eles valem para cada uma das coordenadas de f .

Seja

$$f(x, Y) = (f_1(x, Y), \dots, f_n(x, Y))$$

e supondo que cada f_k , $1 \leq k \leq n$, é lipschitziana. Então, existe constante β_k , tal que

$$\|f_k(x, Y_1) - f_k(x, Y_2)\| \leq \beta \dots \|Y_1 - Y_2\|$$

ficando assim

$$\begin{aligned} \|f(x, Y_1) - f(x, Y_2)\| &= |f_1(x, Y_1) - f_1(x, Y_2)| + \dots + |f_n(x, Y_1) - f_n(x, Y_2)| \\ &\leq (\beta_1 + \dots + \beta_n) \cdot \|Y_1 - Y_2\|. \end{aligned}$$

Por isso, f é lipschitziana com constante de Lipschitz $\beta_1 + \dots + \beta_n$. Por outro lado, se

$$\|f(x, Y_1) - f(x, Y_2)\| \leq \beta \cdot \|Y_1 - Y_2\|$$

então

$$\begin{aligned} \|f_k(x, Y_1) - f_k(x, Y_2)\| &\leq \|f_1(x, Y_1) - f_1(x, Y_2)\| + \dots + \|f_n(x, Y_1) - f_n(x, Y_2)\| \\ &= \|f(x, Y_1) - f(x, Y_2)\| \\ &\leq \beta \cdot \|Y_1 - Y_2\|. \end{aligned}$$

Portanto, cada f_k é lipschitziana com constante de Lipschitz β .

Agora, seja (x_0, Y_0) qualquer ponto de $\mathbb{R}$, a região em que f é definida, e considerando o problema do valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= f(x, Y) \\ Y(x_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Vendo que $Y = Y(x)$ será uma solução do problema do valor inicial se, e somente se, Y for um ponto fixo para o mapeamento F , onde

$$[F(Y)](x) = Y_0 + \int_a^b f(t, Y(t))dt.$$

É claro que F não está propriamente definido até que tenhamos descrito seu domínio. Para este propósito, primeiro definimos um subconjunto $\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ da seguinte forma:

$$\mathbb{R}^n = \{(x, Y) : \|Y - Y_0\| \leq B \cdot |x - x_0|, a \leq x \leq b\}$$

em que o intervalo $[a, b]$ contém x_0 pequeno o suficiente para que $\mathbb{R}^n$ seja incluído em $\mathbb{R}$. Então definimos o domínio M de F como o conjunto de todas as funções contínuas $Y(x)$ de $[a, b]$ a $\mathbb{R}^n$ cujo gráfico $\{(x, Y(x)) : a \leq x \leq b\}$ está em $\mathbb{R}^n$. ■

Teorema 3.2. *Suponha que $f = f(x, Y)$ é contínua, limitada, e satisfaz a condição de Lipschitz com a constante de Lipschitz β na região $\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, e seja (x_0, Y_0) seja qualquer ponto de $\mathbb{R}$. Então o problema do valor inicial*

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= f(x, Y) \\ Y(x_0) &= Y_0 \end{aligned}$$

tem uma única solução no intervalo $[a, b]$, e o gráfico dessa solução está em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Demonstração segundo (Kreider Robert G Kuller 1968).

Considere

$$R = \{(x, Y) : \|Y - Y_0\| \leq B \cdot |x - x_0|, a \leq x \leq b\}.$$

Então, pelo lema 3.1.

$$\begin{aligned}\|[F(Y)](x) - Y_0\| &= \left\| \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) dt \right\| \\ \|[F(Y)](x) - Y_0\| &\leq \left| \int_{x_0}^x \|f(y, Y(t))\| dt \right| \\ \|[F(Y)](x) - Y_0\| &\leq B \cdot |x - x_0|.\end{aligned}$$

Supondo que Y e Z são duas funções quaisquer em M . Usando o Lema 3.1 e a condição de Lipschitz em f .

$$\begin{aligned}\|[F(Y)](x) - [F(Z)](x)\| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, Y(t)) - f(t, Z(t))] dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \|f(t, Y(t)) - f(t, Z(t))\| dt \right| \\ &\leq \beta \cdot \left| \int_{x_0}^x \|Y(t) - Z(t)\| dt \right| \\ &\leq \beta \cdot |x - x_0| \cdot \|Y - Z\| \\ &\leq \beta \cdot (b - a) \cdot \|Y - Z\|.\end{aligned}$$

Uma vez que esta desigualdade vale para todo $x \in [a, b]$

$$\|F(Y) - F(Z)\| \leq \beta \cdot (b - a) \cdot \|Y - Z\|.$$

Portanto se $\beta \cdot (b - a) < 1$, F é uma contração. Caso contrário, continuamos da seguinte forma.

$$\begin{aligned}\|F^{[2]}(Y)(x) - F^{[2]}(Z)(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x \{f(t, [F(Y)](t)) - f(t, [F(Z)](t))\} dt \right\| \\ &\leq \beta \cdot \left| \int_{x_0}^x \|[F(Y)](t) - [F(Z)](t)\| dt \right| \\ &\leq \beta^2 \cdot \|Y - Z\| \cdot \left| \int_{x_0}^x |t - x_0| dt \right| \\ &= \frac{\beta^2 \cdot |x - x_0|^2}{2} \cdot \|Y - Z\|.\end{aligned}$$

No geral, tem-se

$$\|F^{[m]}(Y) - F^{[m]}(Z)\| \leq \frac{\beta^m \cdot (b - a)^m}{m!} \|Y - Z\|$$

uma vez que $\beta^m \cdot (b - a)^m / m! < 1$ para um m suficientemente grande, $F^{[m]}$ é eventualmente um mapeamento de contração. Portanto, F tem um único ponto fixo. ■

Teorema 3.3. *Seja $f = f(x, Y)$ contínua na faixa S de $\mathbb{R}^{n+1}$ composto de todos os pontos (x, Y) com x no intervalo I de $\mathbb{R}^n$, e supondo que f é lipschitziana em toda subfaixa S_1 de S determinado por um subintervalo de I . Então, se (x_0, Y_0) é qualquer ponto em S , o problema do valor inicial*

$$Y' = f(x, Y)$$

$$Y(x_0) = Y_0$$

tem uma única solução em I .

Demonstração: Consequência imediata do Teorema 3.2. ■

Uma aplicação importante do Teorema 3.2 para o problema do valor inicial envolve sistema equações lineares de primeira ordem

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{aligned}$$

onde, $a_{11}, \dots, a_{nn}, b_1, \dots, b_n$ são contínuas no intervalo I . Sob essas suposições, cada uma das funções

$$f_k(x, Y) = a_{k1}(x)y_1 + \cdots + a_{kn}(x)y_n + b_k(x), \quad 1 \leq k \leq n$$

é contínua, e assim, podemos supor

$$f(x, Y) = (f_1(x, Y), \dots, f_n(x, Y)).$$

Note que, se $[a, b]$ é um subintervalo fechado qualquer de I e se $\beta \geq 0$ tal que $|a_{kj}(x)| < \beta_k$ para todo x em $[a, b]$ e $1 \leq j \leq n$, então.

$$\begin{aligned} |f_k(x, Y) - f_k(x, Z)| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{kj}(x)(y_j - z_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |a_{kj}(x)| |y_j - z_j| \\ &\leq \beta_k \sum_{j=1}^n |y_j - z_j| \\ &\leq \beta_k \cdot \|Y - Z\|. \end{aligned}$$

Portanto f_k satisfaz as condições do Teorema 3.2 e o sistema admite solução única com uma condição inicial fixada.

3.2 Método das Aproximações Sucessivas

Nessa seção apresenta-se uma outra técnica para demonstração dos Teoremas de existência e unicidade e faz-se uma comparação entre a prova do (Kreider Robert G Kuller 1968) e das aproximações sucessivas de (Coddington 1989).

Seja f uma função qualquer de valor real definida para x e y em algum retângulo aberto R no plano xy

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}, \quad (a, b > 0).$$

Seja um intervalo I contendo x_0 , existe uma solução ϕ que satisfaz $\phi(x_0) = y_0$. Ou seja, existe uma função diferenciável de valor real ϕ , tal que o ponto $(x, \phi(x))$ está em R para $x \in I$

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)), \quad \forall x \in I.$$

Voltando ao problema do valor inicial; $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, o próximo passo é mostrar que o problema do valor inicial é equivalente a integral

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y) dt \quad \text{em } I.$$

Por uma solução dessas equações em I entende-se uma função contínua de valor real $\phi \in I$, tal que $(x, \phi(x))$ está em R para todo x em I ,

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt, \quad \forall x \in I.$$

Teorema 3.4. *Uma função ϕ é uma solução do problema do valor inicial*

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

no intervalo I se, e somente se, é uma equação integral em I .

Demonstração: Suponha ϕ uma solução para o problema do valor inicial em I , $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ em I . Desde que ϕ seja contínua em I , e f contínua em R , a função F é definida por $F(t) = f(t, \phi(t))$.

Integrando a função ϕ de x a x_0 , tem-se

$$\phi(x) = \phi(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt$$

e sendo $\phi(x_0) = y_0$. Então, ϕ é uma solução do problema do valor inicial.

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \quad \forall x \in I.$$

Como uma primeira aproximação para uma solução, usarei a função ϕ_0 definida por $\phi_0(x) = y_0$. Essa função satisfaz a condição inicial $\phi_0(x_0) = y_0$, mas em geral não satisfaz

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y) dt \quad \text{em } I$$

se calcular

$$\phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi_0(t)) dt = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt.$$

Pode-se esperar que ϕ_1 seja uma aproximação mais próxima de uma solução do que ϕ_0 . De fato, se continuarmos o processo e definirmos sucessivamente $\phi_0(x) = y_0$,

$$\phi_{k+1} = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi_k(t)) dt, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Tomando $k \rightarrow \infty$, obtém-se $\phi_k(x) \rightarrow \phi(x)$. ϕ satisfaz

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt \longrightarrow S(\phi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt.$$

Assim, ϕ seria nossa solução desejada. As funções $\phi_0, \phi_1, \dots$ são chamadas de *aproximações sucessivas* de uma solução da equação integral, ou o problema de valor inicial. ■

Teorema 3.5. *As aproximações sucessivas ϕ_k , existem como funções contínuas em*

$$I : |x - x_0| \leq \alpha = \text{mínimo}\{a, b/M\}$$

e $(x, \phi_k(x))$ está em R para x em I . De fato, o ϕ_k satisfaz

$$|\phi_k(x) - y_0| \leq M|x - x_0|$$

para todo x em I .

Demonstração: Claramente ϕ_0 existe em I como uma função contínua, e satisfaz

$$|\phi_k(x) - y_0| \leq M|x - x_0|, \quad k = 0.$$

Agora

$$\phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt$$

assim segue,

$$|\phi_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \right| \leq M|x - x_0|$$

o que mostra que ϕ_1 satisfaz a desigualdade $|\phi_k(x) - y_0| \leq M|x - x_0|$. Como f é contínua em R , a função F definida por

$$F_0(t) = f(t, y_0)$$

é contínua em I e ϕ_1 é dada por

$$\phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F_0(t) dt$$

é contínua em I . ■

Teorema 3.6. *Suponha que S seja um retângulo*

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b, \quad (a, b > 0),$$

ou uma faixa

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y| < \infty, \quad (a > 0),$$

e que f é uma função de valor real definida em S tal que, $\partial f / \partial y$ existe, é contínua em S , e

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq K, \quad ((x, y) \in S)$$

para algum $K > 0$. Então f satisfaz uma condição de Lipschitz em S com Lipschitz constante K .

Demonstração: Seja f definida por $f(x, y)$. A *Condição de Lipschitz* é definida como, $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$; $K > 0$.

Tendo

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \int_{y_2}^{y_1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt$$

então

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \int_{y_2}^{y_1} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) \right| dt \right| \leq K|y_1 - y_2|.$$

■

Exemplo 3.7. $f(x, y) = xy^2$ em que $R : |x| \leq 1, |y| \leq 1$.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) \right| = |2xy| \leq 2.$$

Teorema 3.8 (Teorema da Existência). *Seja f uma função contínua de valor real no retângulo*

$$R : \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b, \quad (a, b > 0)$$

e seja

$$|f(x, y)| \leq M, \quad \forall (x, y) \in R.$$

Suponha que f satisfaz a condição de Lipschitz com constante K em R . Então, a aproximação sucessiva

$$\phi_0(x) = y_0, \quad \phi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi_k(t)) dt, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

converge no intervalo $I : |x - x_0| \leq \alpha = \min\{a, b/M\}$ para uma solução ϕ do problema de valor inicial

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0.$$

Demonstração: Demonstração segundo (Coddington 1989).

Escrevendo as aproximações sucessivas ϕ_k como $\phi_k = \phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) + (\phi_2 - \phi_1) + \cdots + (\phi_k - \phi_{k-1})$. Então, $\phi_k(x)$ é uma soma parcial da série

$$\phi_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} [\phi_p(x) - \phi_{p-1}(x)].$$

Ou seja, mostrar que a série $\{\phi_k(x)\}$ converge é o mesmo que mostrar que a série acima converge. Para provar que a série acima converge, devemos usar o termo geral $\phi_p(x) - \phi_{p-1}(x)$.

Pelo Teorema 3.4 Todas as funções ϕ_p existem como funções contínuas em I , e $(x, \phi_p(x))$ está em R para x em I , como mostrado no Teorema 3.4.

$$|\phi_1(x) - \phi_0(x)| \leq M|x - x_0| \quad \text{para } x \in I.$$

Escrevendo a relação definido ϕ_2 e ϕ_1 e subtraindo

$$\phi_2(x) - \phi_1(x) = \int_{x_0}^x [f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_0(t))] dt$$

$$|\phi_2(x) - \phi_1(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x [f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_0(t))] dt \right|$$

desde que f satisfaz a condição de Lipschitz.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \longrightarrow |\phi_2(x) - \phi_1(x)| \leq \left| K \int_{x_0}^x |\phi_1(t) - \phi_0(t)| dt \right|$$

assim, obtem-se

$$|\phi_2(x) - \phi_1(x)| \leq K \cdot M \left| \int_{x_0}^x |t - x_0| dt \right|.$$

Se $x \geq x_0$

$$|\phi_2(x) - \phi_1(x)| \leq K \cdot M \int_{x_0}^x (t - x_0) dt = K \cdot M \frac{(x - x_0)^2}{2}.$$

Agora, usando indução para provar

$$|\phi_p(x) - \phi_{p-1}(x)| \leq \frac{M \cdot K^{p-1} |x - x_0|^p}{p!} \quad x \in I.$$

É válido para $p = 1, p = 2$. Assumindo $x \geq x_0$, a prova é similar para $x \leq x_0$.

Assumindo $p = m$. Usando a definição ϕ_{m+1}, ϕ_m

$$\phi_{m+1}(x) - \phi_m(x) = \int_{x_0}^x [f(t, \phi_m(t)) - f(t, \phi_{m-1}(t))] dt$$

$$|\phi_{m+1}(x) - \phi_m(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, \phi_m(t)) - f(t, \phi_{m-1}(t))| dt$$

usando a condição de Lipschitz

$$|\phi_{m+1}(x) - \phi_m(x)| \leq K \cdot \int_{x_0}^x |\phi_m(t) - \phi_{m-1}(t)| dt$$

como assumido, $p = m$

$$|\phi_{m+1}(x) - \phi_m(x)| \leq \frac{K \cdot K^m}{m!} \int_{x_0}^x |t - x_0|^m dt = \frac{M \cdot K^m |x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Isso é apenas para $p = m + 1$ e, portanto, é válido para todo $p = 1, 2, \dots$, por indução. Assim, segue-se que a série infinita

$$\phi_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} [\phi_p(x) - \phi_{p-1}(x)]$$

é absolutamente convergente em I , ou seja,

$$|\phi_0(x)| + \sum_{p=1}^{\infty} |\phi_p(x) - \phi_{p-1}(x)|$$

é convergente em I . De fato, encontra-se

$$|\phi_p(x) - \phi_{p-1}(x)| \leq \frac{M}{K} \frac{K^p |x - x_0|^p}{p!} \quad x \in I.$$

O que mostra que o “p-ésimo” termo da série em módulo é menor ou igual a M/K vezes o p-ésimo termo da série de potências $e^{K|x-x_0|}$. Uma vez que a série de potências $e^{K|x-x_0|}$ é convergente, a série em módulo é convergente para $x \in I$. Isso implica que a série infinita é convergente em I . Portanto, a “k-ésima” soma parcial da série infinita que é apenas $\phi_k(x)$, tende a um limite $\phi(x)$ como $k \rightarrow \infty$, para cada $x \in I$.

O limite da sequência ϕ_k é uma solução para nosso problema em I . Primeiro, vamos mostrar que ϕ é contínua em I . Isso pode ser visto da seguinte maneira. Se $x_1, x_2 \in I$.

$$|\phi_{k+1}(x_1) - \phi_{k+1}(x_2)| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(t, \phi_k(t)) dt \right| \leq M \cdot |x_1 - x_2|$$

ao deixar $k \rightarrow \infty$, implica que

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq M \cdot |x_1 - x_2|.$$

Isso mostra que, como $x_2 \rightarrow x_1, \phi(x_2) \rightarrow \phi(x_1)$, ou seja ϕ é contínua em I . Sejam $x_1 = x, x_2 = x_0$, obtém-se

$$|\phi(x) - y_0| \leq M \cdot |x - x_0|, \quad (x \in I)$$

o que implica que os pontos $(x, \phi(x))$ estão em $R, \forall x \in I$.

Como:

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} [\phi_p(x) - \phi_{p-1}(x)],$$

e

$$\phi_k(x) = \phi_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} [\phi_p(x) - \phi_{p-1}(x)].$$

Fazendo uma estimativa para $|\phi(x) - \phi_k(x)|$

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi_k(x)| &= \left| \sum_{p=k+1}^{\infty} [\phi_p(x) - \phi_{p-1}(x)] \right| \\ &\leq \sum_{p=k+1}^{\infty} |\phi_p(x) - \phi_{p-1}(x)| \\ &\leq \frac{M}{K} \sum_{p=k+1}^{\infty} \frac{(K\alpha)^p}{p!} \\ &\leq \frac{M}{K} \frac{(K\alpha)^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(K\alpha)^p}{p!} \\ &= \frac{M}{K} \frac{(K\alpha)^{k+1}}{(k+1)!} e^{K\alpha}. \end{aligned}$$

Sendo $\varepsilon_k = (K\alpha)^{k+1}/(k+1)!$ o termo geral de uma série absolutamente convergente, segue que $\varepsilon_k \rightarrow 0$ com $k \rightarrow \infty$. O termo $|\phi(x) - \phi_k(x)|$ pode ser estimado como

$$|\phi(x) - \phi_k(x)| \leq \frac{M}{K} e^{K\alpha} \varepsilon_k, \quad (\varepsilon_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty).$$

Para completar a prova e mostrar que limite de ϕ é uma solução, basta mostrar que

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt$$

para todo $x \in I$. O lado direito faz sentido para ϕ contínuo em I , f contínua em R , e a função F ; $F(t) = f(t, \phi(t))$ contínua em I .

Agora,

$$\phi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi_k(t)) dt$$

e $\phi_{k+1}(x) \rightarrow \phi(x)$, $k \rightarrow \infty$. Assim, para cada $x \in I$ tem-se:

$$\int_{x_0}^x f(t, \phi_k(t)) dt \rightarrow \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt, \quad (k \rightarrow \infty).$$

Desse modo

$$\left| \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, \phi_k(t)) dt \right| \leq K \left| \int_{x_0}^x |\phi(t) - \phi_k(t)| dt \right|.$$

Usando o fato que f satisfaz a condição de Lipschitz

$$\left| \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, \phi_k(t)) dt \right| \leq M e^{K\alpha} \varepsilon_k |x - x_0|.$$

Tendendo a zero, como $k \rightarrow \infty$, para cada $x \in I$. Isso prova e, portanto, que ϕ satisfaz assim nossa prova do Teorema 3.8 está completa. ■

Suponha dois problemas de valor inicial.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_1$$

$$y' = g(x, y), \quad y(x_0) = y_2$$

onde f, g são funções contínuas com valores reais em R

$$R : \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b, \quad (a, b > 0)$$

e $(x_0, y_1), (x_0, y_2)$ são pontos de R , se g está próximo de f , e y_2 próximo de y_1 , então qualquer solução do problema do valor inicial no intervalo I contendo x_0 está próxima de uma solução ψ em I . Suponha que exista uma constante não negativa ε, δ tal que

$$|f(x, y) - g(x, y)| \leq \varepsilon \text{ e } |y_1 - y_2| \leq \delta \quad ((x, y) \in R).$$

Teorema 3.9. *Sejam f, g contínuas em R , e supondo que f satisfaz uma condição de Lipschitz com uma constante de Lipschitz K . Sejam ϕ, ψ soluções de $|f(x, y) - g(x, y)| \leq \varepsilon$, e $|y_1 - y_2| \leq \delta$ respectivamente no intervalo I contendo x_0 , com o gráfico contido em R . Se as inequações $|f(x, y) - g(x, y)| \leq \varepsilon$, e $|y_1 - y_2| \leq \delta$ são válidas, então*

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \delta e^{K|x-x_0|} + \frac{\varepsilon}{K}(e^{K|x-x_0|} - 1) \quad \forall x \in I.$$

Demonstração: Demonstração segundo (Coddington 1989).

Usando $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_1, \quad y' = g(x, y), \quad y(x_0) = y_2$, obtem-se

$$\phi(x) = y_1 + \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt,$$

$$\psi(x) = y_2 + \int_{x_0}^x g(t, \psi(t)) dt,$$

então

$$\begin{aligned} \phi(x) - \psi(x) &= y_1 - y_2 + \int_{x_0}^x [f(t, \phi(t)) - g(t, \psi(t))] dt \\ &= y_1 - y_2 + \int_{x_0}^x [f(t, \phi(t)) - f(t, \psi(t))] dt + \int_{x_0}^x [f(t, \psi(t)) - g(t, \psi(t))] dt. \end{aligned}$$

Usando $|f(x, y) - g(x, y)| \leq \varepsilon$, e $|y_1 - y_2| \leq \delta \quad ((x, y) \in R)$, e o fato de f satisfazer a condição de Lipschitz com constante K . Para $x \geq x_0$, obtem-se

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \delta + K \int_{x_0}^x |\phi(t) - \psi(t)| dt + \varepsilon(x - x_0).$$

Se

$$E(x) = \int_{x_0}^x |\phi(t) - \psi(t)| dt.$$

Tudo isso pode ser reescrito na forma.

$$E'(x) + K \cdot E(x) \leq \delta + \varepsilon(x - x_0).$$

Esta é uma desigualdade diferencial de primeira ordem que podemos “resolver” da mesma forma que resolvemos equações diferenciais lineares de primeira ordem. Multiplicando por $e^{-K(x-x_0)}$, depois mudando x para t .

$$[e^{-K(t-x_0)} E'](t) \leq \delta e^{-K(t-x_0)} + \varepsilon(t-x_0)e^{-K(t-x_0)}.$$

Uma integração de x_0 a x produz

$$e^{-K(x-x_0)} E(x) \leq \frac{\delta}{K} [1 - e^{-K(x-x_0)}] + \frac{\varepsilon}{K^2} [-K(x-x_0) - 1] e^{-K(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{K^2}.$$

Multiplicando ambos os lados desta desigualdade por $e^{K(x-x_0)}$ encontramos

$$E(x) \leq \frac{\delta}{K} [e^{K(x-x_0)} - 1] - \frac{\varepsilon}{K^2} [K(x-x_0) + 1] + \frac{\varepsilon}{K^2} e^{K(x-x_0)}$$

e usando isso é $|\phi(x) - \psi(x)|$, obtem-se finalmente

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq \delta e^{K(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{K} [e^{K(x-x_0)} - 1].$$

■

Isso é válido para o Teorema 3.8 quando $x \geq x_0$. Uma prova semelhante vale no caso $x \leq x_0$

Corolário 3.10 (Teorema da Unicidade). *Seja f contínua e satisfaz uma condição de Lipschitz em R . Se ϕ e ψ são soluções de $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ no intervalo I contendo x_0 , então $\phi(x) = \psi(x)$, $\forall x \in I$.*

Intuitivamente, se há uma função sequência de funções $g_k \rightarrow f$ em R , e uma sequência $y_k \rightarrow y_0$, espera-se que as soluções ψ de

$$y' = g_k(x, y), \quad y(x_0) = y_k$$

tende para a soluções ϕ de

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Isso é consequência direta do Teorema 3.8. Supondo que g_k são contínuas em R e existem constantes ε_k tal que

$$|f(x, y) - g_k(x, y)| \leq \varepsilon_k \quad (\forall (x, y) \in R)$$

e constantes δ_k tal que

$$|y_k - y_0| \leq \delta_k$$

onde ε_k e δ_k tendem a 0 quando $k \rightarrow \infty$.

Corolário 3.11. *Considere f contínua satisfazendo uma condição de Lipschitz sobre R . Considere a sequência $\{g_k\}_{k=1,2,\dots}$ de funções contínuas sobre R que satisfazem a desigualdade $|f(x, y) - g_k(x, y)| \leq \varepsilon_k$ para*

$$\varepsilon_k \rightarrow 0, \quad y_k \rightarrow y_0, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Se ψ_k for uma solução de $y' = g_k(x, y)$, $y(x_0) = y_k$ no intervalo I contendo x_0 é a solução de $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ em I , então $\psi_k(x) \rightarrow \phi(x)$ em I .

Demonstração: Consequência imediata do Teorema 3.9. ■

4 Continuidade de Soluções

Esse capítulo foi baseado no trabalho de (Kreider Robert G Kuller 1968).

As soluções do problema do valor inicial para sistemas de primeira ordem $Y' = f(x, Y)$ variam com as mudanças de f e dados iniciais. Especialmente se f é contínua, limitada e lipschitziana em uma região $R \subset \mathbb{R}^{n+1}$, a única solução de

$$Y' = f(x, Y)Y(x_0) = Y_0 \quad (4.1)$$

depende continuamente de f, x_0 e Y_0 .

Assumindo que f é contínua na região R de $\mathbb{R}^{n+1}$, e existe uma constante B e β tal que

$$\|f(x, Y)\| \leq B$$

$$\|f(x, Y_1) - f(x, Y_2)\| \leq \beta|Y_1 - Y_2|$$

sendo $(x, Y), (x, Y_1), (x, Y_2) \in R$. Essas condições são suficientes pra ter uma única solução $Z = Z(x)$ que pertence ao espaço métrico completo M .

Seja $\varepsilon > 0$ e supondo que $g(x, Y)$ é contínua e limitada em R com $\|g(x, Y)\| \leq \varepsilon$. Então, é sabido que o problema do valor inicial

$$Y' = f(x, Y) + g(x, Y)$$

$$Y(x_0) = Y_0$$

tem uma solução $X_0 = X_0(x)$ num intervalo contendo x_0 , embora sob a suposição dada esta solução pode não ser única. Além disso, pode-se supor, sem perda de generalidade, que X_0 e Z são definidos em um intervalo $[a, b]$ sobre x_0 , e que x_0 pertence a M .

Para obter uma estimativa para $\|Z(x) - X_0(x)\|$ usa-se as equações integrais

$$Z(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x f(t, Z(t))dt$$

$$X_0(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x [f(t, X_0(t)) - g(t, X_0(t))] dt.$$

Seja $\{X_n\}$ um sequência em M definida por

$$X_1 = F(X_0), X_2 = F(X_1), \dots, X_n = F(X_{n-1}), \dots$$

F é um operador definida por

$$[F(Y)](x) = Y_0 + \int_{x_0}^x f(t, Y(t))dt.$$

Para $Y \in M$. Então, F é uma interação do mapeamento de contrações em M , e $\{X_n\}$ é uma sequência de Cauchy que converge para um (único) ponto fixo em Z .

Além do mais,

$$\begin{aligned}\|X_1(x) - X_0(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x g(t, X_0(t)) dt \right\| \\ \|X_1 - X_0(x)\| &\leq \varepsilon |x - x_0|.\end{aligned}$$

Agora, analisando X_2 .

$$\begin{aligned}\|X_2(x) - X_0(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x [f(t, X_1(t)) - f(t, X_0(t)) - g(t, X_0(t))] dt \right\| \\ \|X_2(x) - X_0(x)\| &\leq \left\| \int_{x_0}^x [f(t, X_1(t)) - f(t, X_0(t))] dt \right\| + \left\| \int_{x_0}^x g(t, X_0(t)) dt \right\| \\ \|X_2(x) - X_0(x)\| &\leq \varepsilon |x - x_0| + \beta \left| \int_{x_0}^x \|X_1(t) - X_0(t)\| dt \right| \\ \|X_2(x) - X_0(x)\| &\leq \varepsilon |x - x_0| + \beta \varepsilon \frac{|x - x_0|^2}{2} \\ \|X_2(x) - X_0(x)\| &= \frac{\varepsilon}{\beta} \left(\beta |x - x_0| + \frac{\beta^2 |x - x_0|^2}{2} \right).\end{aligned}$$

Continuando, encontra-se

$$\|X_n(x) - X_0(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{\beta} \sum_{k=1}^n \frac{\beta^k |x - x_0|^k}{k!} + \dots$$

Desde que

$$e^{\beta|x-x_0|} = 1 + \beta|x-x_0| + \dots + \frac{\beta^k |x - x_0|^k}{k!} + \dots$$

segue que

$$\|X_n(x) - X_0(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{\beta} (e^{\beta|x-x_0|} - 1)$$

para todo n , e todo $x \in [a, b]$. Então, $\{X_n\} \rightarrow Z$, ficando assim

$$\|Z(x) - X_0(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{\beta} (e^{\beta(b-a)} - 1) \quad \forall x \in [a, b].$$

Tal como está, esta desigualdade implica que a solução $Z(x)$ de 4.1, varia continuamente com f no sentido de que a quantidade $\|Z(x) - X_0(x)\|$ é pequeno para todo $x \in [a, b]$ quando ε é pequeno.

Além do mais, $\|Z(x) - X_0(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{\beta} (e^{\beta(b-a)} - 1)$ pode ser usado para mostrar que pequenas mudanças no problema do valor inicial produz pequenas mudanças na solução do problema.

Seja $Z^1(x)$ solução de

$$Y' = f(x, Y)$$

$$Y(x_0) = Y_0 + E_0$$

onde o ponto $(x_0, Y_0 + E_0)$ pertencendo a R . Então,

$$Z^1(x) = Y_0 + E_0 + \int_{x_0}^x f(t, Z^1(t))dt$$

o que é equivalentemente a

$$Z^1(x) - E = Y_0 + \int_{x_0}^x \{f(t, Z^1(t) - E_0) + [f(t, Z^1(t)) - f(t, Z^1(t) - E_0)]\},$$

mas

$$\|f(x, Y) - f(x, Y - E_0)\| \leq \beta \cdot \|E_0\|$$

para qualquer $(x, Y), (x, Y - E_0) \in R$. Ficando assim

$$g(x, Y) = f(x, Y - E_0)$$

e sumindo que $\|E_0\| \leq \varepsilon/\beta$, então, implica que $Z^1(x) - E_0$ é solução para o problema do valor inicial

$$Y' = f(x, Y) + g(x, Y)$$

$$Y(x_0) = Y_0,$$

e segue que

$$\|Z(x) - [Z^1(x) - E_0]\| \leq \frac{\varepsilon}{\beta} [e^{\beta(b-a)} - 1].$$

Então

$$\begin{aligned} \|Z(x) - Z^1(x)\| &= \|Z(x) - Z^1(x) + E_0 - E_0\| \\ &\leq \|Z(x) - [Z^1(x) - E_0]\| + \|E_0\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\beta} [e^{\beta(b-a)} - 1] + \frac{\varepsilon}{\beta} \\ &= \frac{\varepsilon}{\beta} e^{\beta(b-a)} \end{aligned}$$

se Z e Z^1 são, respectivamente, as soluções em $[a, b]$ de

$$Z(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x f(t, Z(t))dt$$

$$Z^1(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x f(t, Z^1(t))dt$$

em que $\|Y_0 - Y_0^1\| \leq \frac{\varepsilon}{\beta}$, então

$$\|Z(x) - Z^1(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{\beta} e^{\beta(b-a)}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Como antes, esta desigualdade pode ser lida como afirmando que $Z(x)$ depende continuamente de Y_0 .

Finalmente, supondo que x_0 é alterado para $x_0 + \delta$, e seja $Z(x)$ a (única) solução de

$$Z^1(x) = Y_0 + \int_{x_0+\delta}^x f(t, Z^1(t))dt$$

então

$$Z^1(x) = \left(Y_0 - \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(t, Z^1(t))dt \right) + \int_{x_0}^x f(t, Z^1(t))dt$$

sabendo que

$$E_0 = \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(t, Z^1(t))dt$$

como $\|E_0\| \leq |\delta|$, e os resultados obtidos se aplicam. Em particular, se δ é escolhido de modo que $(x_0 + \delta) \in [a, b]$ e $|\delta| < \varepsilon/(B\beta)$ implica que

$$\|Z(x) - Z^1(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{\beta} e^{\beta(b-a)} \quad \forall x \in [a, b].$$

Em outras palavras, $Z(x)$ também depende continuamente de x_0 , e isso prova o teorema: ■

Teorema 4.1. *A (única) solução de qualquer problema de valor inicial*

$$Y' = f(x, Y),$$

$$Y(x_0) = Y_0$$

em que f é contínua, limitada e lipschitziana varia continuamente com f e com (x_0, Y_0) .

Considerações Finais

Como proposto no início desse trabalho, foram demonstrados os teoremas de existência e unicidade de equações com problema de valor inicial e com algumas condições sobre a função f . Na seção Contração e Ponto Fixo foi apresentada a demonstração através do Teorema do ponto fixo de Banach, utilizando contrações. No capítulo Existência e Unicidade para o Problema de Valor Inicial o teorema foi generalizado para funções no $\mathbb{R}^n$, onde aplicamos novamente do Teorema do ponto fixo. A partir do capítulo Sistemas de Equações Diferenciais apresentou-se outra demonstração, através de sequências de funções, também conhecida como o método das aproximações sucessivas. E por fim a continuidade dessa solução foi demonstrada, alcançando assim todos os objetivos propostos para esse trabalho.

Referências

CODDINGTON, E. A. **An Introduction to Ordinary Differential Equations**. [S.l.]: Dover Publications, 1989. Citado 7 vezes nas páginas 6, 7, 16, 20, 29, 33 e 36.

FIGUEIREDO, D. G. de. **Análise I**. 2^a. ed. [S.l.]: LTC, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 6, 7, 10 e 12.

KREIDER ROBERT G KULLER, D. R. O. D. L. **Elementary Differenrtial Equations**. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1968. Citado 8 vezes nas páginas 6, 7, 22, 23, 26, 27, 29 e 39.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 6^a ed.. ed. [S.l.]: IMPA, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 6, 7, 10 e 14.

ZILL, M. R. C. D. G. **Equações Diferenciais: Volumes 1,2**. 3^a. ed. [S.l.: s.n.], 2000. Citado na página 9.